

Journées

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

Évian-les-Bains, 5 juin–9 juin 2006

Romain Joly

Perturbation de la dynamique des équations des ondes amorties

J. É. D. P. (2006), Exposé n° VI, 16 p.

<http://jedp.cedram.org/item?id=JEDP_2006____A6_0>

cedram

*Article mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
<http://www.cedram.org/>*

Perturbation de la dynamique des équations des ondes amorties

Romain Joly

1. Introduction

1.1. Présentation générale du problème

On considère une suite d'équations d'évolution $(\mathcal{P}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ engendrant des systèmes dynamiques $S_n(t)$ sur un espace de Banach X . On suppose que les systèmes $S_n(t)$ convergent dans un sens au moins formel vers un système limite $S_\infty(t)$ associé à un problème (\mathcal{P}_∞) . Notre but est de comparer la dynamique qualitative de $S_n(t)$ à celle de $S_\infty(t)$. Un exemple typique est celui de la perturbation provenant d'une simulation numérique où (\mathcal{P}_n) est la discrétisation en temps ou en espace du problème (\mathcal{P}_∞) . Dans ce cas, on souhaite évidemment savoir si les phénomènes observés sur la simulation correspondent à ceux du problème réel.

La première étape est la comparaison des trajectoires des différents systèmes sur un intervalle de temps fini. Pour certaines applications, comme la simulation de la météo sur une semaine, cela suffit. Pour d'autres applications, il nous faut aller plus loin : si on observe sur des simulations de la dynamique d'une population biologique que l'espèce finit toujours par s'éteindre, la convergence en temps fini des trajectoires ne permet pas de conclure que c'est le cas dans le modèle initial. Il faut donc chercher à comparer les dynamiques qualitatives globales des différents systèmes. On peut alors s'intéresser soit à des aspects locaux (dynamique autour de points d'équilibre, de trajectoires périodiques...), soit à des aspects globaux. Dans le problème qui nous intéressera ici, chaque système dynamique admet un attracteur global compact, c'est-à-dire un compact invariant qui attire les bornés. Pour comparer la dynamique qualitative globale de tels systèmes, on compare les attracteurs en tant qu'ensembles, au sens de la distance de Hausdorff, puis, ce qui est bien plus difficile, on cherche à comparer les dynamiques restreintes à ces attracteurs.

1.2. Quelques exemples de perturbations

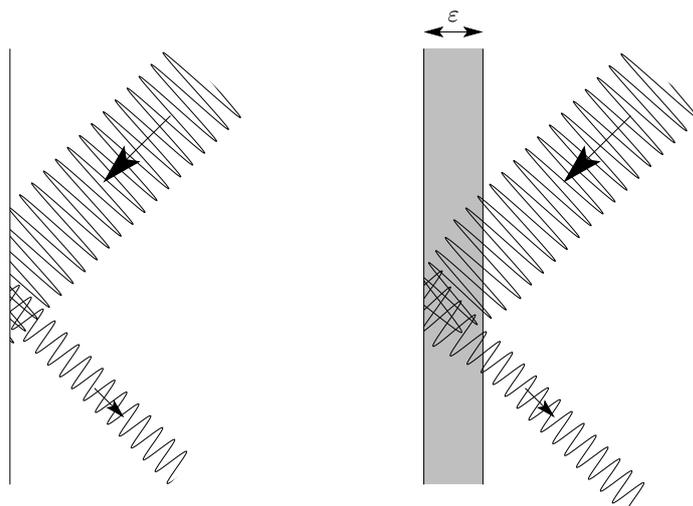
Comme nous l'avons déjà mentionné, un exemple typique de perturbations consiste en la discrétisation en temps ou en espace d'une équation aux dérivées partielles en vue d'un calcul numérique. Une revue des résultats connus se trouve dans [17] (voir

aussi [13], [44] et [45]).

Un autre exemple est celui des domaines minces. Habituellement, on modélise un phénomène supporté par un fil par une équation en dimension un d'espace. Pourtant, le fil est un objet tridimensionnel, même si deux de ses dimensions semblent négligeables. Pour justifier cette simplification, il faut étudier la convergence de la dynamique de l'équation (\mathcal{P}_n) posée sur un domaine d'épaisseur $1/n$ vers celle de l'équation unidimensionnelle, voir par exemple [22] (et aussi [42]). On peut aussi étudier le cas où le domaine mince est raccordé à un autre domaine (mince ou pas) : on obtient alors un système d'équations couplées. On peut citer [3] pour le raccord d'un domaine mince à un domaine fixe, [23] pour un domaine mince en forme de L, [12] pour des domaines minces d'épaisseurs différentes, [48] pour des domaines minces tubulaires et [38] pour la compression dans une direction de domaines généraux. On trouvera dans [28] un chapitre plus détaillé sur les problèmes de stabilités et perturbations de la dynamique pour les équations aux dérivées partielles.

1.3. Justification du modèle de l'amortissement des ondes sur le bord

L'exemple qui nous servira ici de fil conducteur est celui étudié dans [30]. Le but est de justifier l'équation des ondes amorties sur le bord. Celle-ci est un modèle pour un phénomène où les ondes se propagent librement à l'intérieur d'un domaine, mais sont amorties à chaque fois qu'elles rebondissent sur le bord (c'est typiquement un modèle pour la propagation d'ondes sonores dans une pièce). Le modèle mathématique consiste à mettre une distribution de Dirac comme dissipation sur le bord, c'est-à-dire une dissipation "infinie" sur une épaisseur nulle. Bien entendu, dans la réalité, la dissipation n'est pas une fonction de Dirac, mais est très forte sur un voisinage mince du bord (l'onde pénètre dans une fine couche externe du mur avant d'être réfléchi).



modèle : amortissement sur le bord réalité : amortissement sur un voisinage du bord

Afin de justifier le fait que l'équation des ondes amorties sur le bord est un bon modèle, il convient d'étudier la perturbation correspondante. Soient $d = 1, 2$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$

un domaine borné régulier et $X = \mathbb{H}^1(\Omega) \times \mathbb{L}^2(\Omega)$. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega} \times \mathbb{R})$ et soit $\gamma \in \mathbb{L}^\infty(\partial\Omega)$ une fonction positive non identiquement nulle. On pose $\gamma_\infty = \gamma \otimes \delta_{x \in \partial\Omega}$ où $\delta_{x \in \partial\Omega}$ est la fonction de Dirac à support dans le bord de Ω . Soit $(\gamma_n(x))_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{L}^\infty(\Omega)$ une suite de fonctions positives ou nulles qui convergent vers γ_∞ au sens des distributions.

On veut étudier la convergence quand n tend vers $+\infty$ de la suite des dynamiques des équations des ondes avec amortissement interne

$$(S_n(t)) \begin{cases} u_{tt}(x, t) + \gamma_n(x)u_t(x, t) = (\Delta - Id)u(x, t) + f(x, u(x, t)), & (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(x, t) = 0, & (x, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}_+, \\ (u(x, 0), u_t(x, 0)) = (u_0, u_1)(x) \in X. \end{cases}$$

vers la dynamique de l'équation des ondes amorties sur le bord

$$(S_\infty(t)) \begin{cases} u_{tt}(x, t) = (\Delta - Id)u(x, t) + f(x, u(x, t)), & (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(x, t) + \gamma u_t(x, t) = 0, & (x, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}_+, \\ (u(x, 0), u_t(x, 0)) = (u_0(x), u_1(x)) \in X. \end{cases}$$

Remarque 1.1. *On peut aussi choisir de mettre une condition de type Dirichlet sur une partie du bord, voir [30].*

2. Comparaison des orbites en temps fini

2.1. Formalisme

Afin de pouvoir comparer les systèmes $S_n(t)$ à $S_\infty(t)$, nous les réunissons sous un même formalisme. Posons $B = Id - \Delta_N$ où Δ_N est le Laplacien avec conditions au bord de Neumann homogènes, et, pour tout $U = (u, v) \in X = \mathbb{H}^1(\Omega) \times \mathbb{L}^2(\Omega)$, $F(U) = (0, f(x, u(x)))$. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $u \in \mathbb{H}^1(\Omega)$, on pose $\Gamma_n u = B^{-1}(\gamma_n u)$ et

$$\Gamma_\infty u \text{ est la solution de } \begin{cases} (\Delta - Id)\Gamma_\infty u = 0 & \text{sur } \Omega, \\ \frac{\partial}{\partial \nu}\Gamma_\infty u = \gamma(x)u & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.1)$$

Pour tout $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, soit A_n l'opérateur défini par

$$\forall \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in X, A_n \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ -B(u + \Gamma_n v) \end{pmatrix},$$

$$D(A_n) = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in X \middle/ v \in D(B^{1/2}) \text{ et } u + \Gamma_n v \in D(B) \right\}.$$

En utilisant le théorème de Hille-Yosida, on montre que A_n engendre un semi-groupe linéaire de contractions $e^{A_n t}$. En particulier, on note que, pour tout $U = (u, v) \in D(A_n)$, $\langle A_n U | U \rangle_X = - \langle \Gamma_n v | v \rangle_{\mathbb{H}^1} = - \int \gamma_n(x) |v(x)|^2 dx$. On suppose que $f \in \mathcal{C}^2(\Omega \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ et que si la dimension vaut $d = 2$, alors il existe $C > 0$ et $\alpha \geq 0$ tels que

$$|f''_{uu}(x, u)| + |f''_{ux}(x, u)| \leq C(1 + |u|^\alpha).$$

Sous ces hypothèses, la démonstration de l'existence locale de solutions pour l'équation

$$\begin{cases} U_t = A_n U + F(U), \\ U|_{t=0} = U_0 \in X. \end{cases} \quad (2.2)$$

est classique. Pour chaque $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, (2.2) engendre donc un système dynamique local $S_n(t)$. Afin d'avoir des systèmes dynamiques globaux, c'est-à-dire des

solutions définies pour tout temps $t \geq 0$, on supposera aussi que f est dissipative dans le sens où

$$\sup_{x \in \Omega} \limsup_{|u| \rightarrow +\infty} \frac{f(x, u)}{u} < 0 . \quad (2.3)$$

2.2. Convergence des trajectoires en temps fini

La première étape pour comparer les trajectoires de $S_n(t)$ et $S_\infty(t)$ consiste à étudier la convergence de A_n^{-1} vers A_∞^{-1} dans $\mathcal{L}(X)$. Comme $A_n^{-1} = \begin{pmatrix} -\Gamma_n & -B^{-1} \\ Id & 0 \end{pmatrix}$, cela revient à étudier la convergence de Γ_n dans $\mathbb{H}^1(\Omega)$, c'est-à-dire celle de la forme bilinéaire symétrique positive

$$(u, \varphi) \in (\mathbb{H}^1(\Omega))^2 \longmapsto \langle \Gamma_n u | \varphi \rangle = \int \gamma_n(x) u \bar{\varphi} .$$

Pour que A_n^{-1} tende vers A_∞^{-1} dans $\mathcal{L}(X)$, il faut rajouter une hypothèse sur la suite $\gamma_n(x)$, voir [30]. Un exemple naturel pour lequel cette hypothèse est vérifiée est $\gamma(x) = \alpha > 0$ sur tout $\partial\Omega$ et

$$\gamma_n(x) = \begin{cases} \alpha n & \text{si } \text{dist}(x, \partial\Omega) < \frac{1}{n}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.4)$$

Dans toute la suite, on supposera que

$$\varepsilon_n = \|A_n^{-1} - A_\infty^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 .$$

Une fois obtenue la convergence des inverses, des théorèmes abstraits de convergence des semi-groupes linéaires et des techniques d'interpolation donnent le résultat suivant (voir [30] et [28]).

Pour tout $s \in \mathbb{R}$, on pose $X^s = \mathbb{H}^{1+s}(\Omega) \times \mathbb{H}^s(\Omega)$.

Théorème 2.1. *Soient \mathcal{B} un borné de X et $s \in [0, 1]$, il existe une constante positive C telle que*

$$\forall U \in \mathcal{B}, \forall t \geq 0, \|S_\infty(t)U - S_n(t)U\|_{X^{-s}} \leq C e^{Ct} \varepsilon_n^{s/8} . \quad (2.5)$$

Si \mathcal{B}^s est un borné de X^s ($s \in]0, 1/2[$), alors il existe une constante C positive telle que

$$\forall U \in \mathcal{B}^s, \forall t \geq 0, \|S_\infty(t)U - S_n(t)U\|_X \leq C e^{Ct} \varepsilon_n^{s^2/2} . \quad (2.6)$$

On constate que l'on ne peut comparer des trajectoires que si elles sont bornées dans un espace plus régulier que l'espace X (ou alors il faut les comparer dans une norme plus faible). Cela est dû à la singularité de la perturbation étudiée.

3. Convergence des attracteurs

Après avoir étudié la convergence des trajectoires, nous allons nous intéresser à la convergence de la dynamique qualitative globale des équations.

3.1. Dynamique qualitative des équations des ondes amorties

Soit Φ la fonctionnelle

$$\Phi : \begin{pmatrix} X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u, v) & \longmapsto & \frac{1}{2}(\|u\|_{\mathbb{H}^1}^2 + \|v\|_{\mathbb{L}^2}^2) - \int_{\Omega} \int_0^{u(x)} f(x, \xi) d\xi dx \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

On remarque que Φ décroît le long des trajectoires des systèmes dynamiques $S_n(t)$ pour tout $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ puisque si $U(t) = (u, u_t) = S_n(t)U_0$,

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi(U(t)) = - \int_{\Omega} \gamma_n(x) |u_t|^2(x, t) dx dt \leq 0. \quad (3.2)$$

On rappelle que Φ est appelée fonction de Lyapounov stricte si, Φ décroît le long des trajectoires de $S_n(t)$ et si le fait que $\Phi(U(t)) = \Phi(U_0)$ pour tout $t \geq 0$ implique que U_0 est point d'équilibre. Les systèmes qui admettent une fonctionnelle de Lyapounov stricte sont dit gradients. Leur dynamique est alors très particulière. Par exemple, il ne peut exister d'orbites périodiques ou homoclines pour ces systèmes.

La propriété " $\Phi(U(t)) = \Phi(U_0)$ pour tout $t \geq 0$ implique que U_0 est point d'équilibre" est liée à des théorèmes de prolongement unique. En dimension $d = 1$, elle est vérifiée dès que les amortissements γ_n sont tous non identiquement nuls. En dimension supérieure, elle est par exemple vérifiée si on suppose que $\gamma(x)$ est strictement positive sur $\partial\Omega$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le support de γ_n contient un voisinage du bord (voir [43]). On supposera par la suite que cette dernière propriété est toujours vraie. Pour trouver des hypothèses moins fortes impliquant la structure gradient, on pourra consulter [34] ou, dans le cas de conditions au bord de type Dirichlet, [31]. Il est bien connu que l'hypothèse sur le support de $\gamma_n(x)$ implique en outre qu'il existe des constantes strictement positives M_n et λ_n telles que

$$\forall n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}, \forall t \geq 0, \|e^{A_n t}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M_n e^{-\lambda_n t}, \quad (3.3)$$

voir [24], [7], [40] et [49] pour l'amortissement interne ($n \in \mathbb{N}$), et [11], [32], [33], [46] et [50] pour l'amortissement sur le bord ($n = +\infty$). En utilisant ces propriétés ainsi que les hypothèses sur la non-linéarité $f(x, u)$, on montre le résultat suivant (voir par exemple [16] ou [21]).

Théorème 3.1. *Pour tout $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, le système dynamique $S_n(t)$ admet un attracteur global compact \mathcal{A}_n , c'est-à-dire un compact invariant par le flot qui attire les bornés de X au sens suivant. Pour tout borné \mathcal{B} et tout $\varepsilon > 0$, il existe un temps $T_n = T_n(\varepsilon, \mathcal{B})$ tel que pour tout $t \geq T_n$, $S_n(t)\mathcal{B}$ est dans un ε -voisinage de \mathcal{A}_n , c'est-à-dire que tous les points de $S_n(t)\mathcal{B}$ sont à une distance au plus ε de \mathcal{A}_n .*

3.2. Semi-continuité supérieure des attracteurs

Nous allons maintenant étudier la convergence des attracteurs en tant qu'ensembles, au sens de la distance de Hausdorff. La question est de savoir comment ces attracteurs, qui sont des ensembles très caractéristiques de la dynamique globale de l'équation, évoluent avec le paramètre de perturbation.

La première propriété à noter est la suivante.

Proposition 3.2. *L'ensemble $(\cup_n \mathcal{A}_n)$ est borné dans X .*

Démonstration : Par le principe de LaSalle, la structure gradient de $S_n(t)$ implique que chaque trajectoire $U(t)$ sur l'attracteur \mathcal{A}_n a un ensemble α -limite non

vide ne contenant que des points d'équilibre. En particulier, il existe une suite de temps t_k convergeant vers $-\infty$ et un point d'équilibre E tels que $U(t_k)$ tend vers E dans X . Or, l'hypothèse de dissipation (2.3) impose une borne uniforme sur les points d'équilibre. La décroissance de la fonctionnelle de Lyapounov Φ le long de $U(t)$ implique alors une borne uniforme sur $U(t)$. \square

La semi-continuité supérieure dans X^{-s} des attracteurs s'obtient alors immédiatement.

Théorème 3.3. *Pour tout $s \in]0, 1/2[$, les attracteurs sont semi-continus supérieurement dans $X^{-s} = \mathbb{H}^{1-s}(\Omega) \times \mathbb{H}^{-s}(\Omega)$, c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, l'attracteur \mathcal{A}_n est dans un ε -voisinage de \mathcal{A}_∞ pour la norme X^{-s} .*

Démonstration : On utilise les arguments de [18] (voir aussi [41] ou [4]). Soit $\varepsilon > 0$, comme \mathcal{A}_∞ est un attracteur pour $S_\infty(t)$ et comme l'union $\cup_n \mathcal{A}_n$ est bornée dans X , il existe un temps $T > 0$ tel que $S_\infty(T)(\cup_n \mathcal{A}_n)$ soit dans un ε -voisinage de \mathcal{A}_∞ dans X . En utilisant le résultat de convergence des trajectoires (2.5), on obtient que, pour n assez grand, $S_n(T)\mathcal{A}_n$ est dans un 2ε -voisinage de \mathcal{A}_∞ dans X^{-s} . Par la propriété d'invariance de l'attracteur, $S_n(T)\mathcal{A}_n = \mathcal{A}_n$ et le théorème est démontré. \square

Il est clair que si on obtient une borne uniforme pour les attracteurs dans X^s avec $s > 0$, alors on pourra utiliser (2.6) dans la preuve précédente et obtenir une semi-continuité supérieure des attracteurs dans X . La proposition suivante montre que cette borne uniforme est liée à un problème de stabilisation uniforme des semi-groupes linéaires.

Proposition 3.4. *Supposons qu'il existe des constantes strictement positives M et λ , telles que*

$$\forall n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}, \forall t \geq 0, \|e^{A_n t}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M e^{-\lambda t}. \quad (3.4)$$

Alors, il existe une constante K telle que les attracteurs \mathcal{A}_n satisfont

$$\sup_{n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}} \sup_{U_n \in \mathcal{A}_n} \|U_n\|_{D(A_n)} \leq K. \quad (3.5)$$

En particulier, l'union $\cup_n \mathcal{A}_n$ est bornée dans X^s ($s \in]0, 1/2[$) et les attracteurs sont semi-continus supérieurement dans X .

Démonstration : Nous allons montrer que (3.4) implique (3.5) en suivant la méthode présentée dans [10]. On sait déjà que les attracteurs \mathcal{A}_n sont bornés uniformément dans X . D'autre part, puisque \mathcal{A}_n est invariant, \mathcal{A}_n est une réunion de trajectoires complètes $U(t) = (u, u_t)$ ($t \in \mathbb{R}$). En écrivant la formule de Duhamel

$$U(t) = e^{A_n(t-t_0)}U(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A_n(t-s)}F(U(s))ds,$$

et en faisant tendre t_0 vers $-\infty$, on trouve que

$$U(t) = \int_{-\infty}^t e^{A_n(t-s)}F(U(s))ds.$$

Soit $\delta > 0$, on écrit

$$U(t + \delta) - U(t) = \int_{-\infty}^t e^{A_n(t-s)} (F(U(s + \delta)) - F(U(s))) ds ,$$

et en utilisant (3.4) on obtient

$$\|U(t + \delta) - U(t)\|_X \leq M \int_{-\infty}^t e^{-\lambda(t-s)} \|f(x, u(s + \delta)) - f(x, u(s))\|_{\mathbb{L}^2} ds . \quad (3.6)$$

En utilisant les hypothèses sur la non-linéarité f , on trouve qu'il existe $\sigma \in]0, 1[$ tel que

$$\begin{aligned} \|f(x, u(s + \delta)) - f(x, u(s))\|_{\mathbb{L}^2} &\leq C \|u(s + \delta) - u(s)\|_{\mathbb{H}^\sigma} \\ &\leq C \|u(s + \delta) - u(s)\|_{\mathbb{H}^1}^\sigma \|u(s + \delta) - u(s)\|_{\mathbb{L}^2}^{1-\sigma} \\ &\leq \varepsilon \|u(s + \delta) - u(s)\|_{\mathbb{H}^1} + C_\varepsilon \|u(s + \delta) - u(s)\|_{\mathbb{L}^2} \end{aligned}$$

pour tout $\varepsilon > 0$. Comme $\|u_t\|_{\mathbb{L}^2}$ est borné uniformément, $\|\delta^{-1}(u(s + \delta) - u(s))\|_{\mathbb{L}^2}$ l'est aussi. En revenant à (3.6), on obtient que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\|\delta^{-1}(U(t + \delta) - U(t))\|_X \leq \varepsilon \frac{M}{\lambda} \sup_{s \in \mathbb{R}} \|\delta^{-1}(U(s + \delta) - U(s))\|_X + \frac{M}{\lambda} C_\varepsilon K .$$

En faisant tendre δ vers 0 et en prenant ε assez petit, on trouve que $\sup_{s \in \mathbb{R}} \|U_t(s)\|_X \leq C$. On conclut en écrivant $A_n U = U_t - F(U)$. \square

3.3. Un problème de stabilisation uniforme

Le travail présenté dans cet article peut être facilement adapté à d'autres perturbations irrégulières de l'équation des ondes amorties, comme les perturbations type simulation numérique ou type domaines minces. Comme l'illustre le paragraphe précédent, le problème de stabilisation uniforme (3.4) joue un rôle central dans l'étude de la convergence de la dynamique pour une telle perturbation. Il est remarquable de constater que la stabilisation uniforme intervient aussi dans le domaine du contrôle numérique : elle implique la convergence du contrôle numérique vers le contrôle exact de l'équation. La stabilisation uniforme pour une famille de discrétisations de l'équation des ondes amorties a donc été largement étudiée, voir [6], [15], [27], [39], [47], [51]... La stabilisation uniforme (3.4) est donc un problème qui intervient dès que l'on souhaite montrer une convergence de propriétés dynamiques plus fortes que la simple convergence des trajectoires en temps finis.

Dans notre cas, en utilisant une méthode de multiplicateurs inspirée de [14] et [24], ou en appliquant un théorème abstrait de [2], on prouve le résultat suivant en dimension $d = 1$.

Proposition 3.5. *On pose $\Omega =]0, 1[$. Soit (a_n) une suite de points de $]0, 1[$ qui converge vers 0 et soit*

$$\gamma_n(x) = \begin{cases} n & \text{si } x \in]a_n, a_n + 1/n[, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La stabilisation uniforme (3.4) est satisfaite si et seulement si $\sup_n n a_n < +\infty$.

On constate tout d'abord que dans le cas naturel (2.4) et en dimension $d = 1$, la stabilisation uniforme est vérifiée. Ce résultat souligne aussi que la stabilisation uniforme est un problème plus complexe que la convergence des trajectoires des semi-groupes puisqu'elle n'est pas forcément vérifiée même dans des cas assez simples. En dimension $d \geq 2$, ce problème est principalement ouvert (sauf dans le cas où il existe une constante uniforme $\alpha > 0$ telle que $\gamma_n(x) \geq \alpha$, voir [30]).

3.4. Semi-continuité inférieure des attracteurs

Le résultat de semi-continuité inférieure obtenu dans [30] est le suivant.

Théorème 3.6. *Si tous les points d'équilibre de $S_\infty(t)$ sont hyperboliques alors les attracteurs \mathcal{A}_n sont semi-continus inférieurement dans $X = \mathbb{H}^1(\Omega) \times \mathbb{L}^2(\Omega)$: pour tout $\varepsilon > 0$, l'attracteur \mathcal{A}_∞ est dans un ε -voisinage de \mathcal{A}_n dans X , pour n assez grand.*

Il faut souligner que l'hypothèse d'hyperbolicité des points d'équilibre est générique par rapport à la non-linéarité $f(x, u)$. On notera aussi qu'on obtient une semi-continuité inférieure dans X sans hypothèse de décroissance exponentielle uniforme. En effet, la régularité nécessaire ici est celle de \mathcal{A}_∞ et non celle de $\bigcup_n \mathcal{A}_n$. La méthode de démonstration de ce théorème est classique (voir [41], [5] ou [20]). Elle s'appuie sur la structure de l'attracteur global d'un système de type gradient : si les points d'équilibre sont hyperboliques, l'attracteur \mathcal{A}_∞ n'est que l'union des variétés instables des points d'équilibre. Il suffit alors d'obtenir la convergence de ces variétés instables. Cela nous amène au problème de la stabilité locale de la dynamique.

4. Stabilité locale de la dynamique

4.1. Dynamique autour d'un point d'équilibre hyperbolique

Dans ce paragraphe, nous considérons un seul système dynamique $S_n(t)$, avec n fixé. Soit $E = (e, 0)$ un point d'équilibre des systèmes dynamiques $S_n(t)$. On note

$$\tilde{A}_n = A_n + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ f'_u(x, e(x)) & 0 \end{pmatrix}$$

l'opérateur linéaire associé à la linéarisation du système $S_n(t)$ au point E .

On montre que le spectre de cet opérateur ressemble au dessin de la Figure 1 : l'opérateur \tilde{A}_n n'a qu'un nombre fini de valeurs propres de partie réelle positive et celles-ci sont toutes réelles. Soit P_n^u la projection spectrale sur l'espace des vecteurs propres correspondant. Les valeurs propres de partie réelle strictement négative sont dans une bande verticale $\{z \in \mathbb{C} / \alpha \leq z \leq \beta < 0\}$. Soit $P_n^s = Id - P_n^u$ la projection spectrale associée.

Définition 4.1. *On dit que E est un point d'équilibre **hyperbolique** pour le système $S_n(t)$ s'il existe des constantes strictement positives M_n^u , M_n^s , λ_n^u et λ_n^s telles que*

$$\forall t \geq 0, \|e^{\tilde{A}_n t} P_n^s\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M_n^s e^{-\lambda_n^s t} \quad \text{et} \quad \forall t \leq 0, \|e^{\tilde{A}_n t} P_n^u\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M_n^u e^{\lambda_n^u t}. \quad (4.1)$$

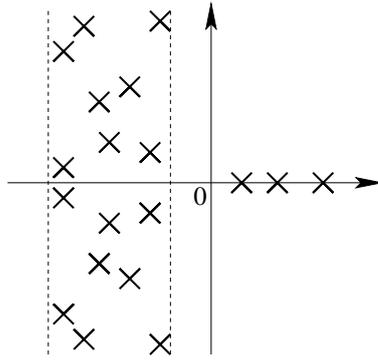


Figure 1

Dans notre cas, les propriétés spectrales particulière de \tilde{A}_n impliquent que l'hyperbolicité de E est équivalente au fait que 0 n'est pas valeur propre de \tilde{A}_n . Pour $r > 0$, on note $B(E, r)$ la boule de centre E et de rayon r . On appelle ensemble local stable de E (resp. ensemble local instable) l'ensemble des points U de $B(E, r)$ tels que leur trajectoire positive $\cup_{t \geq 0} S_n(t)U$ soit contenue dans $B(E, r)$ (resp. tels qu'il existe une trajectoire négative $(U_n(t))_{t \leq 0}$ pour $S_n(t)$ telle que $U_n(0) = U$ et $\cup_{t \leq 0} U_n(t) \subset B(E, r)$). Si E est hyperbolique pour le système $S_n(t)$, alors il existe $r_n > 0$ assez petit tel que ces ensembles stables et instables locaux forment deux variétés notées respectivement $W_n^s(E, r_n)$ et $W_n^u(E, r_n)$ et appelées **variétés stable et instable locales** de E . Pour plus de précisions sur cette notion, voir par exemple [16] ou [25]. La dynamique autour d'un point d'équilibre hyperbolique ressemble donc à la Figure 2.

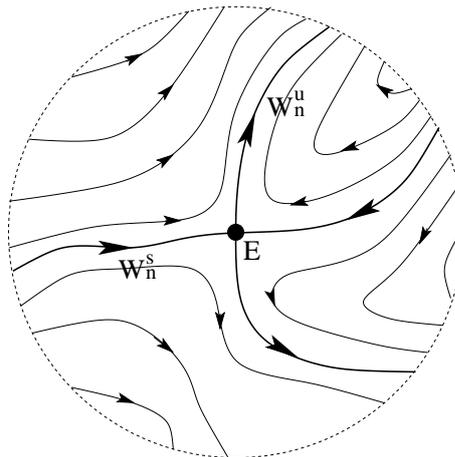


Figure 2

4.2. Stabilité locale de la dynamique

La question est de savoir si la dynamique de $S_n(t)$ autour d'un point d'équilibre hyperbolique de $S_n(t)$ converge vers celle de $S_\infty(t)$. Tout d'abord, on note que si E est un équilibre de $S_\infty(t)$ alors il est aussi un équilibre de $S_n(t)$. De plus, comme A_n^{-1} tend vers A_∞^{-1} , on peut montrer que le spectre de \tilde{A}_n converge vers celui de \tilde{A}_∞ uniformément sur les compacts de \mathbb{C} . En particulier si E est un point d'équilibre hyperbolique pour $S_\infty(t)$, il est aussi hyperbolique pour $S_n(t)$, pour n assez grand. Dans un cadre plus général, on montre qu'un point d'équilibre hyperbolique est stable sous l'effet d'une perturbation.

Il convient ensuite de comparer les variétés stables et instables locales. Pour cela, il faut d'abord les construire dans un voisinage qui est uniforme par rapport à n . La construction de ces variétés locales peut se faire par une méthode de point fixe (méthode de Lyapounov-Perron, voir [16]). Pour que le rayon r_n puisse être choisi uniforme en n , il faut obtenir des estimations du type (4.1) uniformes en n . Pour la construction de la variété locale instable, il faut trouver $M^u > 0$, $M^s > 0$, $\lambda^u > 0$ et $\lambda^s > -\lambda^u$ uniformes en n tels que, pour n assez grand,

$$\forall t \geq 0, \|e^{\tilde{A}_n t} P_n^s\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M^s e^{-\lambda^s t} \quad \text{et} \quad \forall t \leq 0, \|e^{\tilde{A}_n t} P_n^u\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M^u e^{\lambda^u t}. \quad (4.2)$$

La deuxième estimation se démontre facilement car P_n^u est une projection sur un nombre fini de vecteurs propres. Pour la première estimation, on utilise le fait que \tilde{A}_n est une perturbation compacte de A_n , que $\|e^{A_n t}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1$ pour tout $t \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}$ et on applique la version suivante d'un résultat de [35] avec $\mu = -\lambda^u$.

Théorème 4.2. *Soit H_n une suite d'espaces de Hilbert et soit $\mu \in \mathbb{R}$. Soit D_n le générateur d'un semi-groupe \mathcal{C}^0 de contractions $e^{D_n t}$ sur H_n . Il existe deux constantes $\lambda > \mu$ et $C > 0$ telles que*

$$\forall t \geq 0, \|e^{D_n t}\|_{\mathcal{L}(H_n)} \leq C e^{-\lambda t} \quad (4.3)$$

si et seulement s'il existe $\lambda' > \mu$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le spectre de D_n vérifie $\sigma(D_n) \subset \{z \in \mathbb{C} / \operatorname{Re}(z) < -\lambda'\}$ et tel que

$$\exists M > 0 \text{ tel que } \sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{\nu \in \mathbb{R}} \|(D_n - (-\mu + i\nu)Id)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H_n)} \leq M. \quad (4.4)$$

Pour la construction de la variété locale stable, il faut de plus pouvoir choisir λ^s strictement positif dans (4.2). On doit alors supposer que la décroissance exponentielle uniforme (3.4) est vérifiée.

Une fois les variétés stables et instables locales construites dans un voisinage uniforme de E , il faut les comparer en utilisant des théorèmes de point fixe à paramètre. Notons que pour pouvoir les comparer dans X , il faut que ces variétés soient bornées dans un espace X^s ($s > 0$). Cela est vrai pour la variété instable locale (P_n^u étant une projection sur un nombre fini de vecteurs propres appartenant à $D(A_n)$). Par contre, cela n'est pas vrai pour la variété stable locale, et on doit se restreindre à une partie de celle-ci bornée dans un espace plus régulier. On obtient le résultat suivant.

On note d_X la distance de Hausdorff entre deux ensembles de X .

Théorème 4.3. *Soit E un point d'équilibre hyperbolique de $S_\infty(t)$, alors E est aussi un point d'équilibre hyperbolique de $S_n(t)$ pour n assez grand. De plus, il existe $r > 0$*

indépendant de n telle que $W_n^u(E, r)$ soit bien définie. Ces variétés instables locales convergent dans le sens où il existe des constantes positives C et β telles que

$$d_X(W_n^u(E, r); W_\infty^u(E, r)) \leq C\varepsilon_n^\beta.$$

Si on suppose en outre que la propriété de décroissance exponentielle uniforme (3.4) est satisfaite alors il existe $r > 0$ indépendant de n telle que $W_n^s(E, r)$ soit bien définie. La restriction à l'attracteur de ces variétés stables locales converge dans le sens où il existe des constantes positives C et β telles que

$$d_X(W_n^s(E, r) \cap \mathcal{A}_n; W_\infty^s(E, r) \cap \mathcal{A}_\infty) \leq C\varepsilon_n^\beta.$$

5. Stabilité globale et propriété de Morse-Smale

Nous avons étudié la convergence des attracteurs en tant qu'ensemble ainsi que la convergence de la dynamique locale près de points d'équilibre. Il reste à savoir si on peut comparer les dynamiques globales sur ces attracteurs. Comme les systèmes étudiés ici ont la structure gradient, cela revient à étudier la stabilité des connexions hétéroclines c'est-à-dire des trajectoires reliant deux points d'équilibre : si, pour deux points d'équilibre E_- et E_+ , il existe une trajectoire $U(t)$ pour le système $S_\infty(t)$ telle que $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} U(t) = E_\pm$, existe-t-il une telle trajectoire pour $S_n(t)$?

Pour étudier ce problème, nous devons étendre la notion de variétés stables et instables locales. Pour cela, on doit supposer que, outre la structure gradient, le système dynamique vérifie aussi la propriété d'**unicité rétrograde** c'est-à-dire que pour tout $t \geq 0$, et pour tous U et U' dans X , l'égalité $S_n(t)U = S_n(t)U'$ implique que $U = U'$. Dans notre cas, $S_n(t)$ vérifie cette propriété d'unicité rétrograde pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $S_\infty(t)$ la vérifie si $\Omega =]0, 1[$, $\gamma(0) \neq 1$ et $\gamma(1) \neq 1$. On peut alors montrer que l'ensemble des trajectoires de $S_n(t)$ convergeant en $+\infty$ (resp. $-\infty$) vers un point d'équilibre hyperbolique E forment une variété notée $W_n^s(E)$ (resp. $W_n^u(E)$) et appelée variété stable (resp. instable) de E .

Le fait qu'il existe une orbite hétérocline $U(t)$ entre E_- et E_+ pour $S_n(t)$ est équivalent au fait que $W_n^u(E_-) \cap W_n^s(E_+)$ est non vide. Pour être sûr qu'une connexion hétérocline pour $S_\infty(t)$ existe encore pour $S_n(t)$ après perturbation, il est alors naturel de supposer que l'intersection $W_\infty^u(E_-) \cap W_\infty^s(E_+)$ est **transverse** c'est-à-dire que, en chaque point d'intersection, l'espace tangent à $W_\infty^s(E_+)$ a un supplémentaire fermé de dimension finie et que la somme des espaces tangents de chaque variété est égale à l'espace X tout entier (NB : si $W_\infty^u(E_-) \cap W_\infty^s(E_+) = \emptyset$, alors l'intersection est transverse par convention). Pour obtenir la stabilité globale de la dynamique sur l'attracteur, on introduit la propriété de Morse-Smale.

Définition 5.1. *On dit qu'un système dynamique gradient vérifie la propriété de Morse-Smale s'il n'a qu'un nombre fini de points d'équilibre, si tous ses équilibres sont hyperboliques et si les variétés stables et instables de deux points d'équilibre se coupent transversalement.*

Depuis [36] et [37], il est connu que la propriété de Morse-Smale implique la stabilité de la dynamique pour des perturbations de champs de vecteurs sur des variétés compactes de dimension finie. La généralisation à des perturbations régulières d'EDP se trouve dans [19]. Pour la perturbation singulière étudiée ici, nous aussi obtenons le résultat de stabilité suivant.

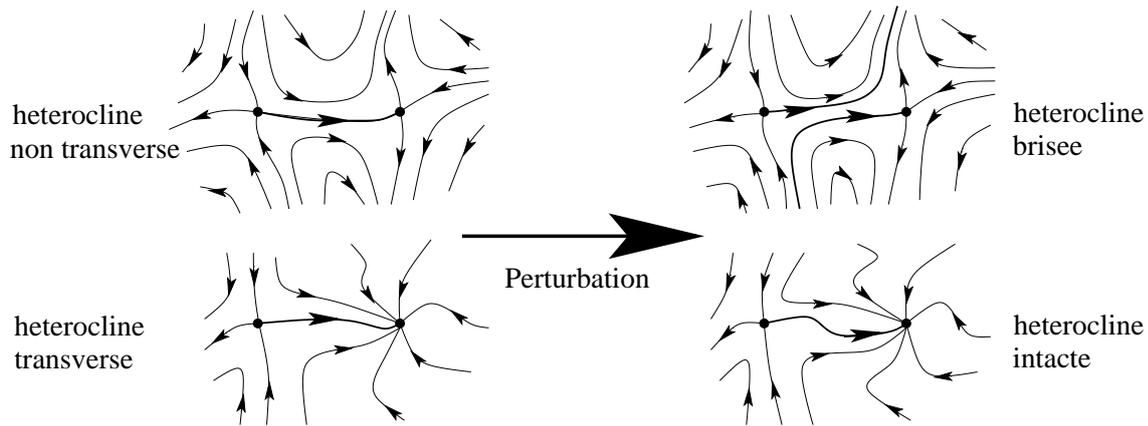


Figure 3

Théorème 5.2. *On suppose que $\Omega =]0, 1[$, $\gamma(0) \neq 1$ et $\gamma(1) \neq 1$ de telle sorte que l'unicité rétrograde soit vérifiée pour tous les systèmes $S_n(t)$, $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. On suppose que la décroissance exponentielle uniforme (3.4) est satisfaite. Alors, si le système limite $S_\infty(t)$ vérifie la propriété de Morse-Smale, la dynamique qualitative globale est stable dans le sens où, pour n assez grand, $S_n(t)$ vérifie aussi la propriété de Morse-Smale et il existe un homéomorphisme $h_n : \mathcal{A}_n \rightarrow \mathcal{A}_\infty$ qui envoie les trajectoires du système restreint $S_n(t)|_{\mathcal{A}_n}$ sur celles de $S_\infty(t)|_{\mathcal{A}_\infty}$ en préservant le sens du temps.*

Bien entendu, il se pose maintenant la question de savoir quand cette propriété de Morse-Smale est vérifiée pour $S_\infty(t)$. Dans notre cas, on applique le résultat de [29] : sous les hypothèses $\Omega =]0, 1[$, $\gamma(0) \neq 1$ et $\gamma(1) \neq 1$, le système dynamique $S_\infty(t)$, engendré par l'équation des ondes amorties sur le bord, vérifie la propriété de Morse-Smale génériquement par rapport à la non-linéarité $f(x, u)$. Les autres théorèmes de généricité de la propriété de Morse-Smale se trouvent dans [26], [1], [8] et [9] (voir aussi [28] pour une revue de ces résultats).

Au final, on peut dire que l'on a obtenu en dimension $d = 1$ les meilleurs résultats de convergence que l'on puisse espérer et que le modèle de l'amortissement sur le bord est donc complètement justifié. En dimension supérieure, il reste plusieurs difficultés, principalement au niveau de la décroissance exponentielle uniforme (3.4) et au niveau de la propriété d'unicité rétrograde.

Références

- [1] S.B. Angenent, *The Morse-Smale property for a semilinear parabolic equation*, Journal of Differential Equations n° 62 (1986), pp 427-442.
- [2] K. Ammari et M. Tucsnak, *Stabilization of second order evolution equations by a class of unbounded feedbacks*, ESAIM Control, Optimisation and Calculus of Variations n° 6 (2001), pp 361-386.

- [3] J.M. Arrieta, J.K. Hale et Q. Han, *Eigenvalue problems for nonsmoothly perturbed domains*, Journal of Differential Equations n° 91 (1991), pp. 24-52.
- [4] A.V. Babin et M.I. Vishik, *Uniform asymptotic solutions of a singularly perturbed evolutionary equation*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées n° 68 (1989), pp 399-455.
- [5] A.V. Babin et M.I. Vishik, *Attractors of evolution equations*, Studies in Mathematics and its Applications n° 25 (1992), North-Holland.
- [6] H.T. Banks, K. Ito et C. Wang, *Exponential stable approximations of weakly damped wave equations*, Estimation and control of distributed parameter systems (Vorau 1990), vol. 100 of Internat. Ser. Numer. Math. (1991), pp. 1-33, Birkäuser, Basel.
- [7] C. Bardos, G. Lebeau et J. Rauch, *Sharp sufficient conditions for the observation, control, and stabilization of waves from the boundary*, SIAM Journal on Control and Optimization n° 30 (1992), pp. 1024-1065.
- [8] P. Brunovský et P. Poláčik, *The Morse-Smale structure of a generic reaction-diffusion equation in higher space dimension*, Journal of Differential Equations n° 135 (1997), pp. 129-181.
- [9] P. Brunovský et G. Raugel, *Genericity of the Morse-Smale property for damped wave equations*, Journal of Dynamics and Differential Equations n° 15 (2003), pp. 571-658.
- [10] I. Chueshov, M. Eller et I. Lasiecka, *On the attractor for a semilinear wave equation with critical exponent and nonlinear boundary dissipation*, Communications in Partial Differential Equations n° 27 (2002), pp 1901-1951.
- [11] S. Cox et E. Zuazua, *The rate at which energy decays in a string damped at one end*, Indiana University Mathematics Journal n° 44 (1995), pp. 545-573.
- [12] I.S. Ciuperca, *Spectral properties of Schrödinger operators on domains with varying order of thinness*, Journal of Dynamics and Differential Equations n° 10 (1998), pp. 73-108.
- [13] C.M. Elliot et A.M. Stuart, *The global dynamics of discrete semilinear parabolic equations*, SIAM Journal of Numerical Analysis n° 30 (1993), pp. 1622-1663.
- [14] C. Fabre et J.P. Puel, *Pointwise controllability as limit of internal controllability for the wave equation in one space dimension*, Portugaliae Mathematica n° 51 (1994), pp 335-350.
- [15] R. Glowinski, C.H. Li et J-L. Lions, *A numerical approach to the exact boundary controllability of the wave equation*, Japan Journal of Applied Mathematics n° 7 (1990), pp. 1-76.
- [16] J.K. Hale, *Asymptotic behavior of dissipative systems*, Mathematical Survey n° 25 (1988), American Mathematical Society.
- [17] J.K. Hale, *Numerical dynamics*, chaotic numerics (Geelong, 1993), Contemporary Mathematics n° 172, American Mathematical Society (1994).

- [18] J.K. Hale, X.B. Lin et G. Raugel, *Upper semicontinuity of attractors for approximations of semigroups and partial differential equations*, Mathematics of Computation n° 50 (1988), pp 89-123.
- [19] J.K. Hale, L. Magalhães et W. Oliva, *An introduction to infinite dimensional dynamical systems*, Applied Mathematical Sciences n° 47 (1984), Springer-Verlag. Seconde édition (2002), *Dynamics in infinite dimensions*.
- [20] J.K. Hale et G. Raugel, *Lower semicontinuity of attractors of gradient systems and applications*, Annali di Matematica Pura ed Applicata (IV) n° CLIV (1989), pp 281-326.
- [21] J.K. Hale et G. Raugel, *Attractors for dissipative evolutionary equations*, International Conference on Differential Equations vol 1, 2 (1991) World Sci. Publishing, pp. 3-22.
- [22] J.K. Hale et G. Raugel, *Reaction-diffusion equations on thin domains*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées n° 71 (1992), pp. 33-95.
- [23] J.K. Hale et G. Raugel, *A reaction-diffusion equation on a thin L-shaped domain*, Proceedings of the Royal Society of Edimburgh n° 125A (1995), pp. 283-327.
- [24] A. Haraux, *Une remarque sur la stabilisation de certains systèmes du deuxième ordre en temps*, Portugaliae Mathematica n° 46 (1989), pp 246-257.
- [25] D. Henry, *Geometric theory of semilinear parabolic equations*, Lecture Notes in Mathematics n° 840 (1981), Springer-Verlag.
- [26] D. Henry, *Some infinite-dimensional Morse-Smale systems defined by parabolic partial differential equations*, Journal of Differential Equations n° 59 (1985), pp. 165-205.
- [27] J.A. Infante et E. Zuazua, *Boundary observability for the space semi-discretizations of the 1-D wave equation*, M2AN Mathematical Modelling and Numerical Analysis n° 33 (1999), pp. 407-438.
- [28] R. Joly, *Dynamique des équations des ondes avec amortissement variable*, thèse (Orsay, 2005).
- [29] R. Joly, *Generic transversality property for a class of wave equations with variable damping*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées n° 84 (2005), pp. 1015-1066.
- [30] R. Joly, *Convergence of the wave equation damped on the interior to the one damped on the boundary*, à paraître dans le Journal of Differential Equations.
- [31] M. Kazeni et M.V. Klibanov, *Stability estimates for ill-posed Cauchy problems involving hyperbolic equations and inequalities*, Applicable Analysis n° 50 (1993), pp. 93-102.
- [32] V. Komornik et E. Zuazua, *A direct method for the boundary stabilization of the wave equation*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées n° 69 (1990), pp 33-55.

- [33] I. Lasiecka et D. Tataru, *Uniform boundary stabilization of semilinear wave equations with nonlinear boundary damping*, Differential and Integral Equations vol 6 (1993), pp 507-533.
- [34] I. Lasiecka, R. Triggiani et X. Zhang, *Nonconservative wave equations with unobserved Neumann B.C. : global uniqueness and observability in one shot*, Contemporary Mathematics n° 268 (2000), pp. 227-325.
- [35] Z. Liu et S. Zheng, *Semigroups associated with dissipative systems*, Chapman and Hall/CRC Research Notes in Mathematics n° 398 (1999).
- [36] J. Palis, *On Morse-Smale dynamical systems*, Topology n° 8 (1968), pp. 385-404.
- [37] J. Palis et S. Smale, *Structural stability theorems*, Global Analysis (Berkeley, 1968), pp. 223-231, Proc. Sympos. Pure Math. n° 14, American Mathematical Society (1970).
- [38] M. Prizzi et K.P. Rybakowski, *Inertial manifolds on squeezed domains*, Journal of Dynamics and Differential Equations n° 15 (2003), pp. 1-48.
- [39] K. Ramdani, T. Takahashi et M. Tucsnak, *Uniformly exponentially stable approximations for a class of second order evolution equations*, prépublication.
- [40] J. Rauch, *Qualitative behavior of dissipative wave equations on bounded domains*, Archive for Rational Mechanics and Analysis vol 62 (1976), pp. 77-85.
- [41] G. Raugel, chapitre 17 de *Handbook of dynamical systems* vol.2 (2002), édité par B. Fiedler, Elsevier Science.
- [42] G. Raugel, *Dynamics of Partial Differential Equations on Thin Domains, CIME Course, Montecatini Terme*, Lecture Notes in Mathematics n° 1609 (1995), pp. 208-315, Springer Verlag.
- [43] A. Ruiz, *Unique continuation for weak solutions of the wave equation plus a potential*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées n° 71 (1992), pp 455-467.
- [44] A.M. Stuart, *Convergence and stability in the numerical approximation of dynamical systems*, The state of the art in numerical analysis (York, 1996), Inst. Math. Appl. Conf. Ser. New Ser. n° 63, pp. 145-169, Oxford Univ. Press, New York, 1997.
- [45] A.M. Stuart et A.R. Humphries, *Dynamical systems and numerical analysis*, Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics n° 2 (1996), Cambridge University Press, Cambridge.
- [46] D. Tataru, *Uniform decay rates and attractors for evolution PDE's with boundary dissipation*, Journal of Differential Equations n° 121 (1995), pp. 1-27.
- [47] L. Tcheougoué Tebou et E. Zuazua, *Uniform exponential long time decay for the space semi-discretization of a locally damped wave equation via an artificial numerical viscosity*, Numerische Mathematik n° 95(2003), pp. 563-598.

- [48] E. Yanagida, *Existence of stable stationary solutions of scalar reaction-diffusion equations in thin tubular domains*, *Applicable Analysis* n° 36 (1990), pp. 171-188.
- [49] E. Zuazua, *Exponential decay for the semilinear wave equation with locally distributed damping* *Communications in Partial Differential Equations* n° 15 (1990), pp. 205-235.
- [50] E. Zuazua, *Uniform stabilization of the wave equation by nonlinear boundary feedback*, *SIAM Journal on Control and Optimization* n° 28 (1990), pp. 466-477.
- [51] E. Zuazua, *Boundary observability for the finite-difference space semi-discretizations of the 2-D wave equation in the square*, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* n° 78 (1999), pp. 523-563.

UNIVERSITÉ PARIS SUD, ANALYSE NUMÉRIQUE ET EDP, UMR CNRS 8628,
BÂTIMENT 425, F-91405 ORSAY CEDEX, FRANCE
Romain.Joly@normalesup.org