



INSTITUT DE FRANCE
Académie des sciences

Comptes Rendus

Mathématique

Jean-Paul Brasselet

Marie-Hélène Schwartz et les champs radiaux, un parcours mathématique

Volume 359, issue 3 (2021), p. 329-354

Published online: 20 April 2021

<https://doi.org/10.5802/crmath.180>



This article is licensed under the
CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION 4.0 INTERNATIONAL LICENSE.
<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Les Comptes Rendus. Mathématique sont membres du
Centre Mersenne pour l'édition scientifique ouverte
www.centre-mersenne.org
e-ISSN : 1778-3569



Géométrie et Topologie / *Geometry and Topology*

Marie-Hélène Schwartz et les champs radiaux, un parcours mathématique

*Marie-Hélène Schwartz and radial vector fields,
a mathematical course*

Jean-Paul Brasselet^a

^a I2M, CNRS et Université d'Aix-Marseille, France

Courriel: jean-paul.brasselet@univ-amu.fr

Résumé. Le présent article a pour but de présenter un historique des travaux mathématiques de Marie-Hélène Schwartz. De l'étude des fonctions d'une variable complexe aux classes caractéristiques des variétés singulières, en passant par la théorie d'Ahlfors et la classe d'Euler, les champs radiaux et le théorème de Poincaré-Hopf pour les variétés singulières, le parcours mathématique de Marie-Hélène Schwartz a suivi une ligne directrice bien déterminée, bravant toutes les difficultés rencontrées en chemin. Ses travaux ont été bien souvent en avance sur son temps.

Abstract. The purpose of this article is to present a history of the mathematical work of Marie-Hélène Schwartz. From the study of the functions of a complex variable to the characteristic classes of singular varieties, through the theory of Ahlfors and the Euler class, radial fields and the Poincaré-Hopf theorem for singular manifolds, the mathematical course of Marie-Hélène Schwartz followed a well-defined guideline, braving all the difficulties encountered along the way. Her works were very often ahead of her time.

Manuscrit reçu le 29 juillet 2020, révisé le 17 janvier 2021, accepté le 18 janvier 2021.



En hommage à Marie-Hélène Schwartz

Abridged version

From the study of the functions of a complex variable to the characteristic classes of singular varieties, Marie-Hélène Schwartz's mathematical career followed a well-established guideline, braving all the difficulties encountered along the way. This article is, of course, not intended to provide insights of all her work, but intended to show how her results follow a guideline. We can in fact distinguish, in her mathematical journey, four periods whose themes successively cover the functions of a complex variable, the theory of Ahlfors and the Euler class, the radial vector fields and the Poincaré–Hopf theory for singular varieties, and finally the characteristic classes of singular varieties. One thing in common to all this work is that it is either topical for the time, or, as we will see, well ahead of her time.

This article is an extended version of two articles published in 2001 in the journal *Femmes et Mathématiques* (special issue) and in October 2013 in the journal *La Gazette des mathématiciens*, n°138. Marie-Hélène Schwartz helped me a lot in preparing the first article. With pleasure I refer to the book by Laurent Schwartz [33], published in 1997, which naturally complements my remarks on several points. The two articles [17] and [18] written jointly with Thủy Nguyễn Thị Bích allowed me to specify, in an elementary way, the concepts introduced and also to include the corresponding figures. It is my pleasure to thank her here. I would also like to thank the referees for the judicious comments and the very useful reports.

Introduction

Le présent article a pour but de présenter un historique des travaux mathématiques de Marie-Hélène Schwartz. Née le 27 Octobre 1913, elle est la fille du mathématicien Paul Lévy. Marie-Hélène Schwartz est décédée le 5 Janvier 2013 dans sa centième année.

De l'étude des fonctions d'une variable complexe aux classes caractéristiques des variétés singulières, le parcours mathématique de Marie-Hélène Schwartz a suivi une ligne directrice bien déterminée, bravant toutes les difficultés rencontrées en chemin. Cet exposé n'a pas pour but de décrire l'ensemble des travaux et des résultats variés de Marie-Hélène Schwartz mais de montrer comment ses résultats suivent cette ligne directrice. On peut en fait distinguer dans son parcours mathématique quatre périodes dont les thèmes couvrent successivement les fonctions d'une variable complexe, la théorie d'Ahlfors et la classe d'Euler, les champs radiaux et le théorème de Poincaré–Hopf pour les variétés singulières, enfin les classes caractéristiques des variétés singulières. Un point commun à ces travaux est qu'ils ont été ou bien d'actualité pour l'époque, ou bien, comme on le verra, bien en avance sur son temps.

Cet article est une version étendue des articles parus dans la revue *Femmes et Mathématiques* (Numéro spécial, 2001) et dans le numéro 138 de *La Gazette des mathématiciens* (octobre 2013). Marie-Hélène Schwartz m'avait beaucoup aidé à préparer le premier article. Je renvoie volontiers au livre de Laurent Schwartz [33], paru en 1997, lequel complète naturellement mon propos sur plusieurs points. Les deux articles [17] et [18] écrits en commun avec Thủy Nguyễn Thị Bích m'ont permis de préciser de façon élémentaire les notions introduites et aussi d'inclure les figures correspondantes. Qu'elle en soit ici remerciée. Je voudrais remercier les rapporteurs pour leurs commentaires précis et judicieux, ce qui m'a permis d'améliorer la première version.

1. 1939-1944

1.1. *Sur les fonctions d'une variable complexe*

Entrée à l'Ecole Normale Supérieure en 1934, Marie-Hélène Schwartz a dû affronter la maladie au début de sa carrière, atteinte d'une tuberculose pulmonaire qui a impliqué plusieurs séjours en sanatorium [33, p. 87–91].

Après avoir repris un bon contact avec les mathématiques, Marie-Hélène Schwartz s'est intéressée aux fonctions holomorphes et méromorphes.

L'étude de la distribution des valeurs prises par une fonction méromorphe a été initiée par les travaux entre autres de Weierstrass, Hadamard, Poincaré... En 1879, le théorème de Picard [30] a donné un nouvel essor à la théorie montrant qu'une fonction méromorphe ne se réduisant pas à une constante prend à distance finie toute valeur donnée, finie ou infinie, sauf deux valeurs au plus. Ces valeurs sont appelées exceptionnelles, lacunaires ou déficientes suivant les situations et suivant les auteurs. Suite à l'extension qu'en a donnée Borel, le théorème est connu comme théorème de Picard-Borel [27, Chap. IV, §II]. Un nouveau progrès a été fourni en 1929 par les travaux de Nevanlinna [27, 28]. Un historique du développement de la théorie peut être vu, par exemple, dans les sections 1 à 3 de l'article de A. Papadopoulos [29].

À cette époque, les mathématiciens se préoccupent donc beaucoup de fonctions d'une variable complexe. L'une des questions du jour était la suivante : est-ce que toute valeur déficiente est asymptotique? Une valeur finie ζ d'une fonction $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est dite asymptotique si on peut lui associer une suite de points $\{z_n\}$ tendant vers l'infini pour la quelle la suite $\{f(z_n)\}$ tend vers ζ . Par exemple, pour la fonction $f(z) = e^z$, la valeur 0 est à la fois déficiente et asymptotique.

En 1939, Laurent Schwartz est nommé officier instructeur à Biscarosse, Marie-Hélène Schwartz y écrit deux Notes aux Comptes Rendus de l'Académie des sciences. La seconde, publiée le 10 Mars 1941 a pour titre : « Exemple d'une fonction méromorphe ayant des valeurs déficientes non asymptotiques » [2]. Il s'agit de la fonction

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 + \frac{z}{4^n}}{1 - \frac{z}{4^n}} \right)^{(-2)^n},$$

laquelle admet 0 et ∞ comme valeurs déficientes et non asymptotiques.¹

Les Schwartz viennent à Toulouse où se trouvaient les parents de Laurent. Marie-Hélène en profite pour rencontrer Henri Cartan et lui demander conseils sur ses travaux. Cartan était venu faire passer les examens oraux d'entrée à l'ENS. En plus de conseiller Marie-Hélène Schwartz, il recommande au couple de s'installer plutôt à Clermont-Ferrand où la faculté de Strasbourg s'était alors repliée, avec entre autres Henri Cartan, Jean Dieudonné, Charles Ehresmann...

La note de Marie-Hélène Schwartz a été très appréciée à Clermont-Ferrand, en particulier par Dieudonné [33, p. 147]. En fait, après la guerre, on a su que Teichmüller, tué en combattant dans les rangs de la Wehrmacht, en avait trouvé un autre exemple en attribuant sa découverte au national-socialisme. Laurent Schwartz écrit que, « beaucoup plus tard, un mathématicien chinois retrouva le même contre-exemple et attribua sa découverte à la pensée de Mao Zedong ».

Marie-Hélène Schwartz fait aussi un travail remarquable sur le pavage du plan complexe en domaines fondamentaux pour une fonction méromorphe. Malheureusement, cela avait déjà été fait par un mathématicien japonais, Tatsujirô Simizu. Elle n'a donc pas publié ce travail, bien qu'il soit un prémisses à l'usage des triangulations dans ses travaux ultérieurs.

C'est dans cette période difficile de la guerre, et dans la clandestinité, que Marie-Hélène Schwartz montre ses talents d'ingéniosité, de travail fin et d'imagination dans un domaine tout autre que les mathématiques. On la voit ainsi fabriquer de fausses cartes d'identité destinées à sa famille, en transformant habilement le nom de « Schwartz » en « Sélimartin » ([33, p. 200] et carte ci-après).

¹Qu'il me soit permis de raconter ici une petite anecdote : Le 1er Février 1997 et à l'occasion de son 10ème anniversaire, l'Association *Femmes et Mathématiques* avait organisé une journée pour exposer les travaux de mathématiciennes dont Marie-Hélène Schwartz. J'ai eu l'honneur de présenter ses travaux. Lorsque j'ai écrit au tableau la fonction $f(z)$ ci-dessus, j'ai eu la surprise de voir Laurent Schwartz, assis au premier rang à côté de Marie-Hélène, prendre scrupuleusement note de cette fonction.



1.2. *Caractéristique d'Euler et théorie de Ahlfors*

Pour comprendre la suite des travaux de Marie-Hélène Schwartz, il faut se rappeler la célèbre formule d'Euler :

$$n_0 - n_1 + n_2 = 2$$

où, étant donnée une triangulation quelconque de la spère S^2 , n_0 est le nombre de sommets, n_1 le nombre de segments et n_2 le nombre de triangles. La somme alternée est la caractéristique d'Euler-Poincaré de la sphère, notée $\chi(S^2)$ (figure 1).

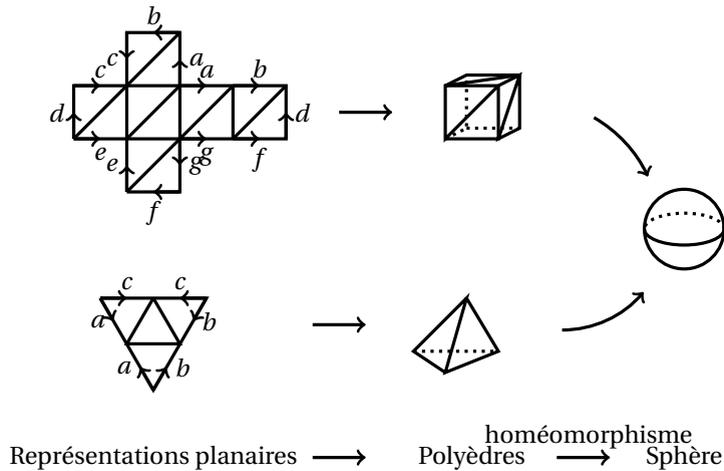


FIGURE 1. Triangulations de la sphère. Dans les représentations planaires, les segments de même nom sont identifiés avec respect des orientations.

A l'instar du théorème de Poincaré-Hopf (voir section 2.2), il était d'actualité de chercher diverses manifestations de la caractéristique d'Euler-Poincaré. En particulier, la théorie de Lars Ahlfors [12], déduite de celle de son maître Rolf Nevanlinna [28], permet de montrer que, pour une application f de \mathbb{R}^2 dans la sphère S^2 , la caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi(S^2) = 2$ est égale à la somme du « défaut transcendant » (déterminé par les valeurs déficientes de f) et du « défaut algébrique » (attaché aux valeurs critiques de f , c'est-à-dire aux points de S^2 , images des points de \mathbb{R}^2 en lesquels l'application linéaire tangente de f est de rang inférieur à 2).

Suite à son travail sur les valeurs déficientes, et déjà intéressée par les triangulations de variétés de dimension n (voir sa thèse en section 2.2), l'idée de Marie-Hélène Schwartz est alors de

généraliser les travaux d’Ahlfors, aux variétés analytiques complexes de dimensions supérieures, dans le cadre des applications triangulables.

2. 1945-1953

2.1. Formules de Chern

Quand les Schwartz viennent à Paris, Marie-Hélène montre son travail sur une généralisation d’une formule d’Ahlfors. Celui-ci fut trouvé original, mais « trop plein de triangulations et de décompositions de simplexes ». C’est André Weil qui lui parle de la méthode de Shiing-Shen-Chern, alors professeur à Chicago. Le travail de Chern ([19, 20], paru en 1944-1945) va lui apporter les ingrédients utiles pour simplifier la généralisation obtenue, exerçant une influence primordiale dans la seconde partie de son parcours. Il en est ainsi, entre autres, des formes différentielles sur les fibrés.

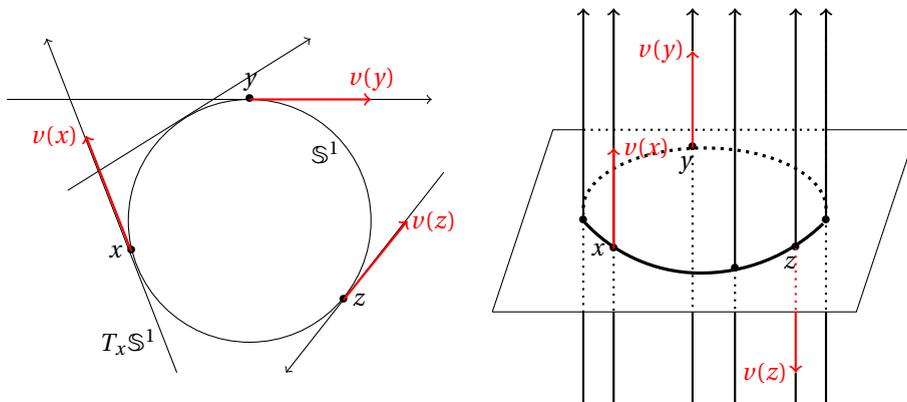


FIGURE 2. Fibré tangent au cercle S^1 (représentation planaire et représentation cylindrique).

On considère une variété différentiable, compacte et orientée M . Le fibré tangent TM à une variété différentiable M est la somme directe des espaces tangents en tous les points de M . La projection canonique de TM sur M est notée $\pi : TM \rightarrow M$. Si M est de dimension $n + 1$, les fibres $T_x M$ sont homéomorphes à \mathbb{R}^{n+1} . On note $T^* M$ le fibré TM moins la section nulle, c’est-à-dire la réunion des fibres « époutées » $T_x M \setminus \{0\}$.

Dans ses deux articles [19, 20], Chern obtient la formule de Gauss–Bonnet (1) en construisant explicitement, à l’aide des coordonnées locales, des formes différentielles de courbure Ω (de degré $n + 1$) sur M et de transgression Π (de degré n) sur le fibré tangent TM , satisfaisant :

$$\chi(M) = \int_M \Omega, \tag{1}$$

où la caractéristique d’Euler–Poincaré est la somme alternée $\sum_i (-1)^i n_i$ des nombres n_i de simplexes de dimension i pour une triangulation de M , et telles que si S_x^n désigne la sphère unité orientée dans une fibre $T_x M \cong \mathbb{R}^{n+1}$, alors

$$d\Pi = -\pi^* \Omega \quad \text{et} \quad \int_{S_x^n} \Pi = 1.$$

Ainsi, si γ est un n -cycle d'une fibre $T_x M \setminus \{0\}$, d'indice $I(\gamma)$, il vient $\int_\gamma \Pi = I(\gamma)$.²

Illustrons ce fait par l'exemple de la dimension $n = 1$.

Dans le cas $n = 1$, un cycle est une courbe fermée orientée dans \mathbb{R}^2 . Son indice peut être décrit de façon explicite : étant donné un choix d'origine $\{0\}$ et d'une orientation dans \mathbb{R}^2 , l'indice $I(\gamma)$ d'une courbe fermée orientée de \mathbb{R}^2 est le nombre de tours que fait la courbe autour de $\{0\}$ dans le sens positif moins le nombre de tours dans le sens négatif.

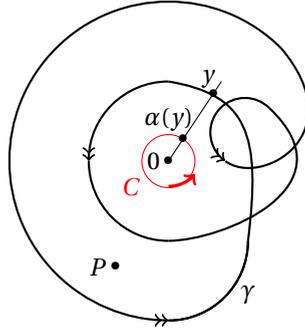


FIGURE 3. $I(\gamma) = +2$. Si l'origine est en P , alors $I(\gamma) = +1$

Plus précisément considérons un petit cercle C centré à l'origine de \mathbb{R}^2 et ne rencontrant pas la courbe γ , *i.e.* tel que $\gamma \cap C = \emptyset$, orienté par l'orientation induite de \mathbb{R}^2 . Si y est un point de γ , on note $\alpha(y)$ le point intersection $\alpha(y) = [0, y] \cap C$ (voir la figure 3). Quand y décrit une fois la courbe γ dans le sens de l'orientation de la courbe, le point $\alpha(y)$ fait p fois le tour de C dans le sens positif et q fois dans le sens négatif. L'indice $I(\gamma)$ est défini comme $I(\gamma) = p - q$.

Dans le cas général, un n -cycle orienté (simplicial ou singulier) γ situé dans une fibre $T_x M \cong \mathbb{R}^{n+1}$, et ne contenant pas l'origine, définit une classe d'homologie dans $H_n(T_x M \setminus \{0\}; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$. L'indice $I(\gamma)$ est ainsi bien défini et sa définition correspond à celle décrite dans le cas $n = 1$.

2.2. Poincaré–Hopf

De façon naturelle, Marie-Hélène Schwartz va s'intéresser au théorème de Poincaré–Hopf : Sur une variété différentiable lisse compacte et sans bord, si ν désigne un champ de vecteurs différentiable à singularités isolées a_i , d'indices $I(\nu, a_i)$ alors la caractéristique d'Euler–Poincaré de M est égale à la somme (finie) des indices

$$\chi(M) = \sum I(\nu, a_i).$$

Pour comprendre la suite des travaux de Marie-Hélène Schwartz, il faut donc se rappeler la définition de l'indice d'un champ de vecteurs tangent à une variété (lisse) M en un point singulier isolé : tout champ de vecteurs tangent est une section continue

$$\begin{aligned} \nu : M &\longrightarrow TM, \\ x &\longmapsto \nu(x) \in T_x M \cong \mathbb{R}^{n+1} \end{aligned} \tag{2}$$

du fibré tangent. Localement, la variété M s'identifie à un ouvert U de \mathbb{R}^{n+1} et le fibré tangent $TM|_U$ au produit $U \times \mathbb{R}^{n+1}$. On dit que le fibré est localement trivial.

²On notera la différence de signe dans l'expression $d\Pi = -\pi^* \Omega$ entre les deux articles de Chern, la convention de [20, note de bas de page 676], étant celle admise aujourd'hui.

Classiquement, dire que le champ de vecteurs v admet une singularité isolée au point $a \in U$ signifie que $v(a) = 0$ et que dans une (petite) boule $B_a \subset U$ centrée en a , le champ v n'a pas d'autre point d'annulation que a . On note S_a^n la sphère, bord de B_a . L'application v est une application

$$v : S_a^n \longrightarrow T^\times M|_U \cong U \times \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$$

$$v : x \longmapsto (x, v(x))$$

qui, composée avec la deuxième projection pr_2 fournit une application $\tilde{v} : S_a^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Son image est un n -cycle γ de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Par définition, l'indice $I(v, a)$ du champ de vecteurs au point a est l'indice du cycle γ dans $H_n(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$.

Cet indice peut aussi être défini de la façon suivante. Pour un espace topologique A , toute application $h : S^n \rightarrow A$ détermine un élément $[h]$ du groupe d'homotopie $\pi_n(A)$. Pour $A = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, on a $\pi_n(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) = \mathbb{Z}$ et donc l'application \tilde{v} fournit un élément

$$[\tilde{v}] \in \pi_n(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) = \mathbb{Z} \tag{3}$$

qui n'est autre que $I(v, a)$.

Remarquons que nombre d'auteurs considèrent non pas l'application v ci-dessus mais $v(x)/\|v(x)\|$. L'application composée par pr_2 est alors une application (dite de Gauss) $w : S_a^n \rightarrow S^n$. Celle-ci induit une application en homologie entière

$$H_n(S_a^n) \cong \mathbb{Z} \rightarrow H_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$$

laquelle est multiplication par un entier, appelé degré de w et qui n'est autre que $I(v, a)$.

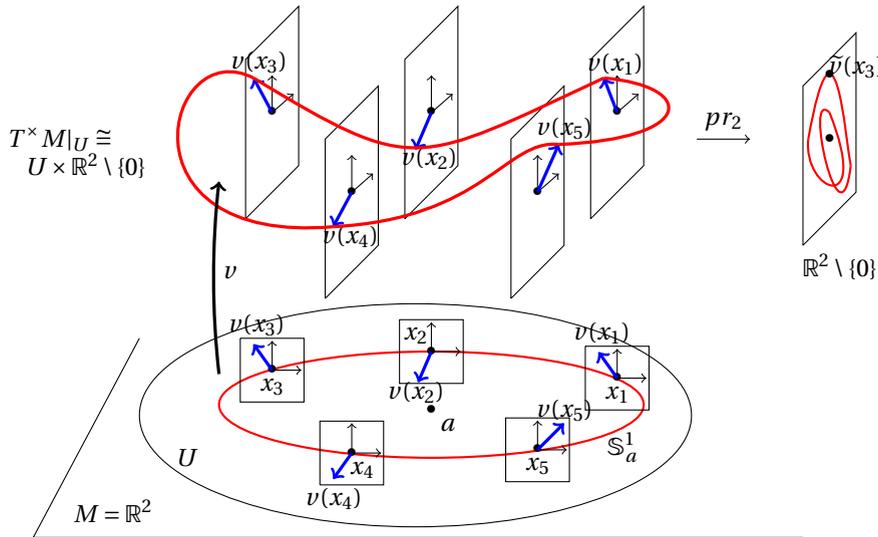


FIGURE 4. L'application $\tilde{v} = pr_2 \circ v : S_a^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

La figure 4 illustre le cas $n = 1$. Les plans tangents sont dessinés « horizontalement » comme plans tangents à $U \subset M$ et aussi « verticalement » dans TM . L'image du cercle S_a^1 (en rouge dans U) par v est un cycle (en rouge) dans $T^\times M|_U \cong U \times \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ et son image par pr_2 est le cycle $\gamma = \tilde{v}(S_a^1)$ d'indice $I(v, a)$ dans $H_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$.

Marie-Hélène Schwartz appelle singularité du premier type une telle singularité, *i.e.* un point a en lequel le champ de vecteurs s'annule. On peut voir le champ de vecteurs v comme tendant vers 0 le long de chaque rayon $[a, x]$ de B_a , pour $x \in S_a^n$.

Marie-Hélène Schwartz considère également des singularités de champs de vecteurs qu'elle appelle de deuxième type, pour lesquelles le champ de vecteurs n'est pas défini au point singulier. Les singularités du deuxième type sont construites comme suit : étant donné le champ de vecteurs v défini le long du bord \mathbb{S}_a^n de la boule $B_a \subset U$, en tout point y d'un rayon $[a, x]$ de B_a , on considère le vecteur $v_x(y)$ équipollent à $v(x)$, i.e. le vecteur parallèle à $v(x)$ et de même longueur et direction (nous sommes dans $TM|_{U_a} \cong U_a \times \mathbb{R}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}$). Au point a on obtient ainsi, pour chaque rayon $[a, x]$, un vecteur $v_x(a)$ dans l'espace tangent $T_a(M)$. L'ensemble des extrémités des vecteurs obtenus forme un cycle $\gamma_a = \{v_x(a) : x \in \mathbb{S}_a^n\}$ dans la fibre $T_a(M)$ (voir la figure 5 dans le cas $n = 1$). L'indice du cycle γ_a dans $H_n(T_aM \setminus \{0\}; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ coïncide avec l'indice $I(v, a)$ défini ci-dessus.

Remarquons que, étant donnée une singularité isolée a du champ v , celui-ci étant défini et sans zéro dans $\mathbb{S}_a^n = \partial B_a$, alors l'indice $I(v, a)$ ne dépend pas du prolongement de v , à l'intérieur de B_a que ce prolongement soit du premier ou du deuxième type.

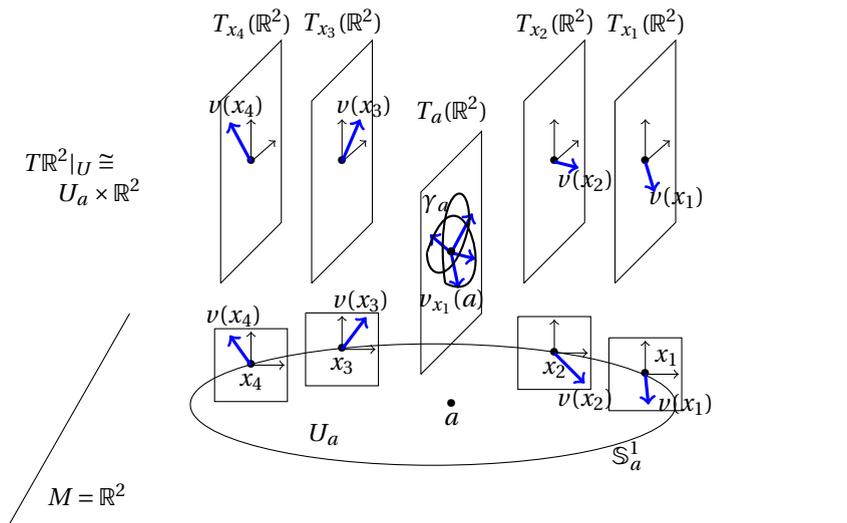


FIGURE 5. Singularité du deuxième type. L'application $v : \mathbb{S}_a^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 \cong T_a(\mathbb{R}^2)$ et le cycle γ_a dans $T_a(\mathbb{R}^2)$.

Considérons maintenant une variété différentiable orientée M à bord ∂M et, sur M , un champ de vecteurs différentiable v , sortant de M le long de son bord ∂M et admettant des points singuliers isolés en nombre fini $(a_i)_{i \in I}$. On peut supposer les singularités comme étant du deuxième type, l'image de M par v dans TM (voir (2)) est alors une variété orientée à bord $\partial(v(M)) = v(\partial M) \cup \cup_i (-\gamma_i)$ où γ_i est un n -cycle de la fibre $T_{a_i}M$, son indice est l'indice du champ de vecteurs v au point a_i :

$$I(v, a_i) = \int_{\gamma_i} \Pi.$$

Chern et Marie-Hélène Schwartz appliquent la formule de Stokes à la sous-variété à bord de TM définie par le champ de vecteurs v et aux formes différentielles Ω et Π :

$$\chi(M) = \int_M \Omega = \int_{\pi(v(M))} \Omega = \int_{v(M)} \pi^* \Omega = \int_{v(M)} -d\Pi = \int_{\partial(v(M))} -\Pi = \int_{v(\partial M)} -\Pi + \sum_{i \in I} I(v, a_i).$$

Sur une variété différentiable lisse compacte et sans bord, si v désigne un champ de vecteurs différentiable à singularités isolées a_i , la méthode de Chern permet donc de donner une preuve alternative à la formule de Poincaré–Hopf :

$$\chi(M) = \sum I(v, a_i),$$

où la somme porte sur l'ensemble des points singuliers a_i de v dans M .

Ainsi, (figure 6), pour le tore T de dimension 2, on a $\chi(T) = 0$ et on sait construire un champ de vecteurs sans singularité, tangent aux « parallèles ». De même, pour la sphère S^2 , on a $\chi(S^2) = +2$ et on sait construire un champ ayant deux points singuliers aux pôles, chacun d'indice $+1$.

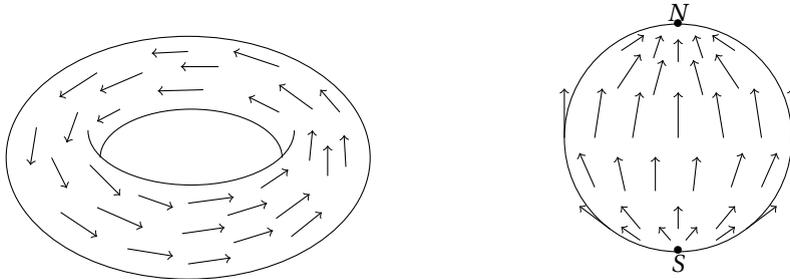


FIGURE 6. Champs de vecteurs tangents au tore et à la sphère.

C'est en utilisant les techniques de Chern que Marie-Hélène Schwartz généralise alors la formule de Nevanlinna–Ahlfors aux applications entre variétés de (même) dimension supérieure à 2. Elle considère des applications « régulières » $f : V \rightarrow W$ entre variétés de dimension n , ceci signifiant, entre autres qu'il existe une triangulation de V telle que la restriction de f à tout simplexe ouvert σ soit un homéomorphisme différentiable sur une sous-variété différentiable de W . Elle peut alors considérer le degré topologique local en tout point x de V , défini comme suit. Etant donnée une boule ouverte b contenant x suffisamment petite pour que l'on ait $b \cap f^{-1}(f(x)) = \{x\}$, et pour que son image $f(b)$ soit contenue dans une boule β domaine de définition d'une carte de W , le degré topologique de f en x est défini comme l'indice du cycle $f(c)$ dans $H_{n-1}(\beta \setminus \{f(x)\})$ pour un cycle c d'indice $+1$ dans $H_{n-1}(b \setminus \{x\})$. Le degré topologique local est constant le long de chaque simplexe ouvert σ , on le note $m(\sigma)$. Marie-Hélène Schwartz définit la caractéristique d'Euler « modifiée » comme

$$\chi_f(V) = \sum_{\sigma} (-1)^{\dim \sigma} m(\sigma).$$

Dans la première partie de sa thèse [4] (il s'agit, à l'époque de la thèse d'état, équivalente à l'habilitation actuelle), Marie-Hélène Schwartz généralise la formule classique de Gauss–Bonnet en montrant que $\chi_f(V)$ est somme de deux intégrales,

$$\chi_f(V) = \int_A f^* \Omega_W + \int_B \tilde{f}^* \Pi_W \tag{4}$$

en intégrant sur des domaines déterminés A et B les formes obtenues l'une par l'application transposée f^* de la forme Ω_W définie sur W et l'autre par l'application transposée au niveau des fibrés \tilde{f}^* de la forme Π_W définie sur TW .

Il est à remarquer que dans cette thèse apparaissent les champs de vecteurs barycentriques, prémisses des champs transversaux que l'on verra plus tard, ainsi que les formes différentielles Ω_r et Π_r introduites par Chern dans les fibrés de r -repères associés aux fibrés tangents.

La méthode de démonstration et les ingrédients introduits par Chern jouent un rôle important dans la suite de travaux de Marie-Hélène Schwartz et lui permettent de définir ses propres outils

et méthodes. Ainsi, la notion d'application régulière utilise en fait pour la première fois la notion de stratification.

Une stratification d'une variété lisse ou singulière X est la donnée d'une filtration de X

$$X_{-1} = \emptyset \subset X_0 \subset \dots \subset X_{k-1} \subset X_k \subset \dots \subset X_{n-1} \subset X = X_n$$

telle que chaque différence $V_k = X_k - X_{k-1}$ est ou vide ou une variété lisse de dimension k . Les composantes connexes des V_k sont appelées les *strates*.

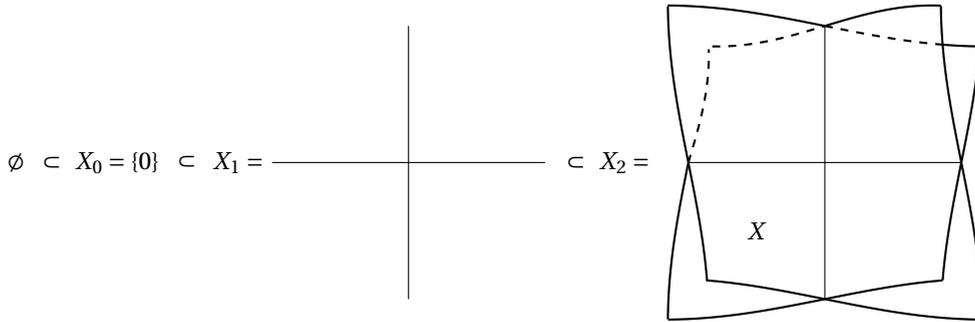


FIGURE 7. Une stratification.

Marie-Hélène Schwartz obtient alors le résultat suivant, conséquence de sa formule (4) donnant la caractéristique d'Euler modifiée $\chi_f(V)$: si $f : V \rightarrow W$ est une application différentiable (surjective) entre variétés différentiables pour laquelle on a une stratification $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de V , telle que la restriction de f à chaque strate V_α soit une immersion (autrement dit une application régulière), alors on a

$$\chi(W) = \text{« défaut de transcendance »} + \text{« défaut algébrique »}, \tag{5}$$

où le premier terme de la somme s'exprime par une intégrale de la forme différentielle Π et le second terme s'exprime en fonction des degrés topologiques locaux de f , constants le long des strates V_α . Ces travaux de Marie-Hélène Schwartz se concrétisent dans la seconde partie de sa thèse [3], en 1953. Elle est alors Assistante à l'Université de Paris, puis nommée à Reims.

3. 1953-1960

3.1. Théorème de Poincaré–Hopf et champs radiaux

Pour une variété singulière X , la notion de champ de vecteurs tangents n'est pas bien définie, puisque le fibré tangent n'est défini que sur la partie lisse de X . D'autre part, la notion d'indice en un point singulier a n'a pas de sens sur une variété singulière puisque, comme on l'a vu, le fait que le bord d'un voisinage de a dans X soit une sphère joue un rôle fondamental dans la définition de l'indice. Les points singuliers de X sont définis comme les points pour lesquels il n'existe pas de voisinage difféomorphe à une boule et dont le bord soit difféomorphe à une sphère.

Pour pallier à ces inconvénients, la première idée de Marie-Hélène Schwartz est de considérer X comme sous-variété stratifiée d'une variété lisse M avec $M \setminus X$ comme strate de M . Un champ de vecteurs stratifié ν sur X est alors une section (continue) du fibré tangent de M telle que, pour tout point x de X , le vecteur $\nu(x)$ est tangent à la strate du point x : $\nu(x) \in T(V_{\alpha(x)})$ où $V_{\alpha(x)}$ est la strate contenant x .

Etant donné un point singulier isolé a de ν , on peut alors calculer l'indice de ν au point a de deux façons : ou bien en considérant la restriction de ν à la strate (lisse) contenant le point a , on

le note $I(v, a; V_{\alpha(a)})$, ou bien en considérant v comme champ de vecteurs tangent à la variété lisse M , on le note $I(v, a; M)$. Ces deux indices sont, a priori, différents.

Deux généralisations du théorème de Poincaré–Hopf semblent donc possibles en écrivant, pour toutes les singularités a_i de v sur X :

$$(i) \quad \chi(X) = \sum I(v, a_i; V_{\alpha(a_i)}) \quad \text{ou bien} \quad (ii) \quad \chi(X) = \sum I(v, a_i; M) \quad (6)$$

Cependant, en général, ces deux formules sont erronées. Nous donnons ci-dessous deux contre-exemples. Le premier d’entre eux, pour la formule (6) (i) est dû à Marie-Hélène Schwartz.

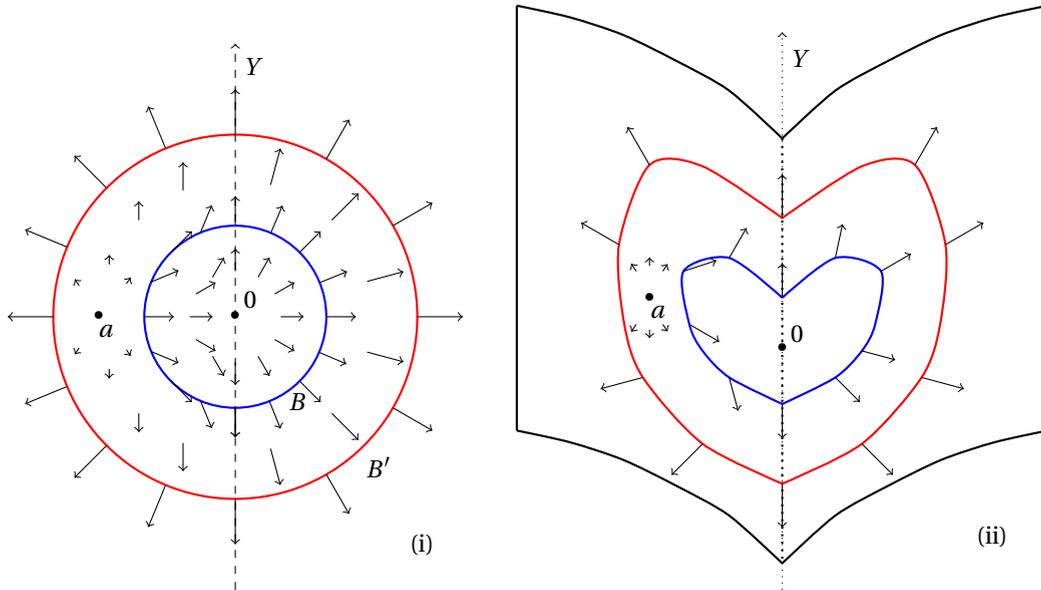


FIGURE 8. Contre-exemple de M.-H. Schwartz.

Dans une première étape, on considère dans \mathbb{R}^2 avec coordonnées (x, y) , deux disques (fermés) centrés à l’origine : B de rayon 1 et B' de rayon 2 (voir figure 8 (i)). On a $\chi(B') = +1$.

Dans le disque B , on considère le champ de vecteurs $v_1(x, y) = (|x|, y)$. L’origine est un point singulier isolé de v_1 avec indice $I(v_1, 0) = 0$.

Sur le bord de B' , on considère le champ de vecteurs $v_2(x, y) = (x, y)$ sortant radialement de B' . On peut étendre v_2 à l’intérieur de B' comme champ de vecteurs v égal à v_2 le long de $\partial B'$ et égal à v_1 à l’intérieur de B , ceci de façon à être tangent à l’axe Y des y le long de Y . Par exemple, le champ de vecteurs

$$v(x, y) = \begin{cases} \left(2|x| - x + (x - |x|)\sqrt{x^2 + y^2}, y \right) & \text{sur } B' \setminus B \\ v_1(x, y) = (|x|, y) & \text{à l'intérieur de } B \end{cases}$$

satisfait ces conditions (figure 8 (i)).

Le champ de vecteurs v admet un point singulier isolé d’indice 0 à l’origine et un point singulier isolé au point de coordonnées $a = (-3/2, 0) \in B' \setminus B$. Par le théorème de Poincaré–Hopf (on est dans \mathbb{R}^2 , lisse), on a

$$\chi(B') = +1 = I(v, 0) + I(v, a),$$

ce qui implique $I(v, a) = +1$.

On remarque que, bien que l’on ait $I(v, 0) = 0$, l’indice en 0 de la restriction de v à Y est $I(v, 0; Y) = +1$.

Dans une deuxième étape, plions la figure le long de l'axe Y de façon à obtenir une surface singulière $x^2 - z^3 = 0$ dans \mathbb{R}^3 (voir la figure 8 (ii)). Le disque B' devient alors une variété singulière X à bord, stratifiée par Y et $X \setminus Y$. Le champ de vecteurs v dans B' définit un champ de vecteurs stratifié, encore noté v sur X . Il admet deux points singuliers isolés 0 et a , d'indices $I(v, 0; Y) = +1$ et $I(v, a) = +1$. On a :

$$\chi(X) = +1 \neq 2 = I(v, a) + I(v, 0; Y).$$

La formule (6) (i) n'est donc pas vérifiée.

On remarque que le champ de vecteurs v n'est pas « radial » au point singulier 0 , dans le sens qu'il n'est pas sortant de la boule unité centrée en 0 dans \mathbb{R}^3 .

Le second contre-exemple est un contre-exemple pour la formule (6) (ii). C'est celui du tore pincé obtenu en identifiant un méridien du tore en un point singulier a (figure 9) : on peut construire des champs de vecteurs tangents avec une seule singularité au point singulier a de X . Le tore pincé étant plongé dans \mathbb{R}^3 , on peut faire en sorte que, au moins au voisinage de a , le champ soit restriction au tore pincé d'un champ défini dans une boule $\mathbb{B}^3(a)$ de \mathbb{R}^3 centrée en a , et admettant un point singulier en a ; alors l'indice du champ en a est bien défini, comme champ dans \mathbb{R}^3 . Si l'on considère sur le tore pincé le champ induit par le champ précédemment défini sur le tore (figure 6), et tangent aux parallèles, alors, la formule (6) (ii) n'est pas vérifiée. En effet, $\chi(T) = +1$ et on a dans ce cas $\sum_i I(v, a_i) = I(v, a) = 0$ (figure 9 (i)). En revanche, si l'on considère le champ sortant de la boule $\mathbb{B}^3(a)$, champ que l'on peut prolonger sur le tore pincé sans singularité, alors on obtient (figure 9 (ii))

$$\chi(T) = +1 = \sum_i I(v, a_i) = I(v, a).$$

Cet exemple est le premier exemple de champ radial, notion introduite par Marie-Hélène Schwartz et qui va marquer la suite de ses travaux.

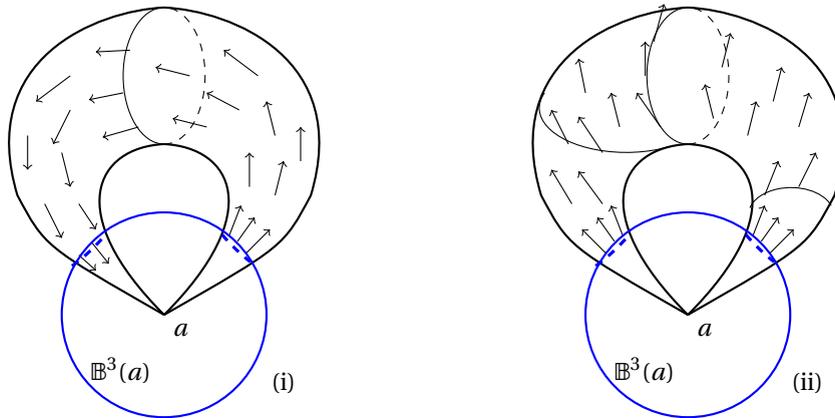


FIGURE 9. Champs de vecteurs sur le tore pincé

La seconde idée de Marie-Hélène Schwartz est donc de considérer des champs de vecteurs stratifiés particuliers, définis sur la variété lisse M contenant X , et appelés champs radiaux. Ceux-ci satisfont (entre autres) une importante propriété : leurs indices calculés dans la variété ambiante ou en restriction à la strate correspondante sont les mêmes. De plus, les champs radiaux sont sortants de voisinages tubulaires convenables des strates.

Avant de donner une idée de ce que sont les champs radiaux, il est important de se rappeler que Marie-Hélène Schwartz les a défini (en 1960, voir [5]) avant même que Hassler Whitney n'introduise en 1965 la notion de « stratification de Whitney » ce qui permet de se faire une

idée des difficultés qu'elle a dû surmonter pour donner la définition des champs radiaux. C'est Bernard Morin qui fait part à Marie-Hélène Schwartz de la prépublication de Whitney sur ce qu'il est convenu maintenant d'appeler les « stratifications de Whitney ». Celles-ci ont beaucoup simplifié sa construction. Explicitons les conditions de Whitney :

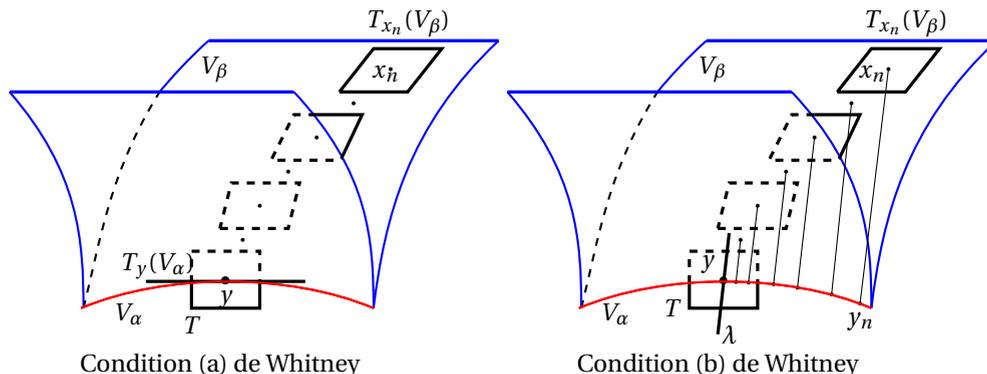


FIGURE 10. Conditions de Whitney.

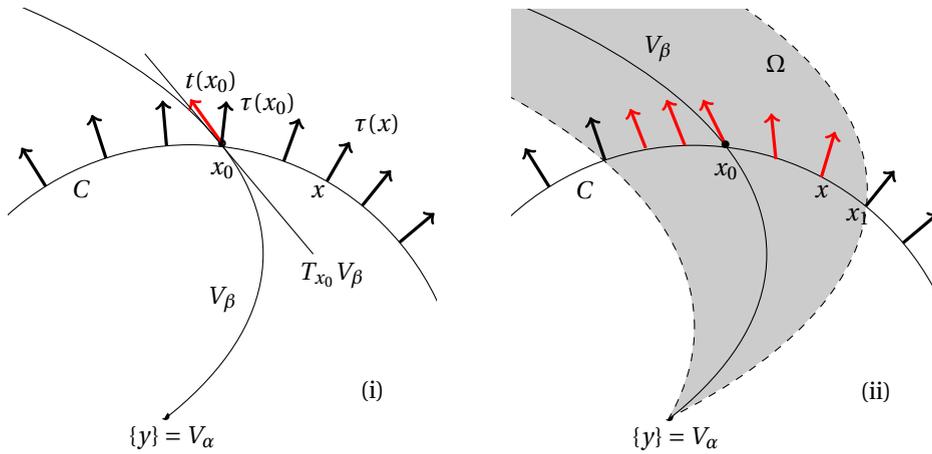
La condition (a) de Whitney dit que, pour toute paire de strates (V_α, V_β) telles que V_α soit dans l'adhérence de V_β et pour toute suite de points x_n de V_β tendant vers $y \in V_\alpha$, si la suite des plans tangents $T_{x_n}(V_\beta)$ admet une limite T au point y , alors T contient le plan tangent à V_α en y .

En tant que variété lisse dans M , la strate V_α admet un voisinage tubulaire \mathcal{F}_α fibré en disques D_y de dimension $n - \dim(V_\alpha)$ au dessus de chaque point y . Une conséquence de la condition (a) est que si $v(y)$ est un vecteur de $T_y(V_\alpha)$, les vecteurs $v(x)$ équipollents à $v(y)$ aux points $x \in V_\beta \cap D_y$ d'un voisinage suffisamment petit de y forment un angle « pas trop grand » avec le plan $T_x(V_\beta)$. Leur projection orthogonale sur ce plan est donc non nulle, ce qui permet un prolongement noté $\tilde{v}_p(x)$ de $v(y)$ « parallèle » et stratifié dans un petit voisinage.

La condition (b) de Whitney dit que, pour toute paire de strates (V_α, V_β) telles que V_α soit dans l'adhérence de V_β , pour toute suite de points x_n de V_β tendant vers $y \in V_\alpha$, et toute suite de points y_n de V_α tendant vers y , si la suite des plans tangents $T_{x_n}(V_\beta)$ admet une limite T au point y , et si la suite des droites $x_n y_n$ admet une limite λ au point y , alors T contient la droite λ .

Le vecteur $\tau(x)$ gradient de la distance à V_α est nul sur V_α , sa longueur augmente avec la distance à V_α et il pointe dans la direction opposée à V_α . Une conséquence de la condition (b) est que, dans un voisinage suffisamment petit de y , pour $x_0 \in V_\beta$, le vecteur $\tau(x_0)$ fait un angle « pas trop grand » avec le plan $T_{x_0}(V_\beta)$. Sa projection orthogonale $t(x_0)$ sur ce plan est donc non nulle, ce qui permet de définir un prolongement stratifié $\tilde{t}(x)$ de $\tau(y)$ dans un petit voisinage.

On prendra garde de ce que, d'une part, il faut donner un sens précis aux notions considérées ci-dessus (limite de plans, angles, etc.). D'autre part il est clair que les champs $\tilde{v}_p(x)$ et $\tilde{t}(x)$ obtenus ne sont pas des champs continus (en tant que champ de vecteurs dans M). En effet, regardons le cas du champ $\tilde{t}(x)$: dans la figure 11 (i), V_α est un singleton $\{y\}$, la strate V_β est une courbe et M est le plan. Considérons un point x_0 de V_β , intersection d'un petit cercle C centré en y avec V_β . De façon à obtenir un champ tangent aux strates, nous avons vu que l'on remplace $\tau(x_0)$ par sa projection $t(x_0)$ sur $T_{x_0}(V_\beta)$. Mais alors, le champ n'est pas continu : $t(x_0)$ n'est pas limite des vecteurs $\tau(x)$ lorsque x tend vers x_0 le long du cercle C . Pour pallier à cet inconvénient, Marie-Hélène Schwartz considère des voisinages Ω « effilés » des strates (ici de la strate V_β) dans lesquels elle modifie le champ $\tau(x)$ de façon à obtenir un champ $t(x)$, appelé champ « transverse », tangent aux strates et aussi continu.



Le champ gradient τ .

Le champ transverse t .

FIGURE 11. Un voisinage « éfilé ».

De façon plus précise, le champ « transverse » est construit comme suit : notons $\lambda \in [0, 1]$ le paramètre de la portion de la courbe C allant de $x_0 = V_\beta \cap C$ au point x_1 intersection de C et du bord de Ω . Au point x de la courbe, de paramètre λ , le champ $t(x)$ est égal à

$$t(x) = \lambda \tau(x) + (1 - \lambda) t_x(x_0)$$

où $t_x(x_0)$ est le vecteur équipollent à $t(x_0)$ au point x . (voir la figure 11 (ii)).

De la même façon, dans les voisinages « éfilés » des strates, on construit un champ « parallèle » $v_p(x)$ tangent aux strates et aussi continu, à partir du champ $\tilde{v}_p(x)$.

Le champ radial, extension d'un champ de vecteurs v défini et tangent à V_α est alors défini localement, dans un tube autour de V_α dans M , (figure 12) comme somme des deux vecteurs : parallèle et transverse :

$$v_{\text{rad}}(x) = v_p(x) + t(x). \tag{7}$$

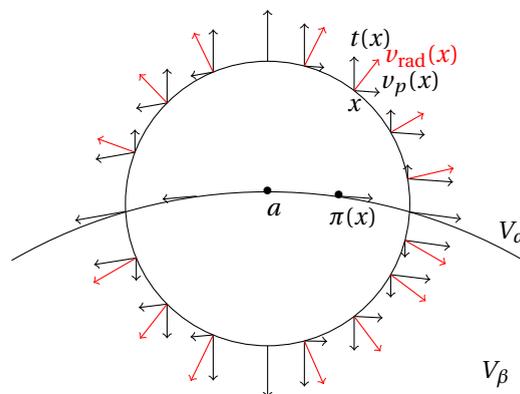


FIGURE 12. Extension radiale d'un champ de vecteur

Il est remarquable que Milnor, dans sa preuve du Théorème de Poincaré–Hopf ([26, Lectures à l’université de Virginia, décembre 1963]) publiée à la même époque, et indépendamment, utilise une construction similaire. Milnor montre le théorème suivant [26, §6, Théorème 1, p. 38–39] : Soit M une variété lisse, compacte et sans bord $M \subset \mathbb{R}^k$, on note N_ε le voisinage fermé de M composé des points x de \mathbb{R}^k tels que $\|x - y\| < \varepsilon$ pour un y dans M . Pour ε suffisamment petit, N_ε est une variété lisse, voisinage tubulaire de M , à bord ∂N_ε . Pour tout champ de vecteurs ν sur M à points singuliers a_i non dégénérés, la somme des indices $I(\nu, a_i)$ est égal au degré de l’application de Gauss

$$\gamma : \partial N_\varepsilon \rightarrow \mathbb{S}^{k-1}$$

qui associe à chaque $x \in \partial N_\varepsilon$ le vecteur unité normal sortant de ∂N_ε . Pour ce faire, Milnor considère dans N_ε le champ de vecteurs w somme du champ parallèle à ν et du vecteur transverse. Cependant Milnor considère des champs non dégénérés donc d’indice ± 1 et des variétés lisses. Il ne l’applique pas aux variétés singulières stratifiées.

Bien qu’il soit facile d’avoir une idée intuitive de la construction, on imagine les difficultés et obstacles surmontés par Marie-Hélène Schwartz pour écrire de façon cohérente et correcte la définition et la construction, tant locale que globale des champs « parallèle » et « transverse », tenant en compte toutes les strates. Il lui faut en fait tout un livre [10] pour écrire la description globale des champs radiaux dont on peut donner maintenant la définition.

Le champ radial ν_{rad} est un champ stratifié défini globalement comme suit (figure 13) : le champ admet des singularités isolées a_i^0 en les strates de dimension 0, il est sortant de boules $B_{a_i^0}$ voisinages de ces points (dans l’espace ambiant M), il est donc d’indice $+1$ en ces points. Le champ est donc déjà défini dans un voisinage $\cup B_{a_i^0} \cap V_1$ du bord des strates V_1 de dimension 1. On le prolonge à l’intérieur de ces strates avec des points singuliers isolés a_i^1 d’indices $I(\nu_{\text{rad}}, a_i^1)$. (voir la figure 13). Comme précédemment, la méthode de prolongement radial consiste à étendre le champ ainsi défini sur V_1 dans un tube \mathcal{T}_1 , voisinage dans M de la strate V_1 par parallélisme et à lui ajouter un champ « transversal » nul le long de la strate, et dont la longueur augmente avec la distance à la strate.

L’une des principales difficultés surmontées par Marie-Hélène Schwartz est de montrer que l’on peut procéder à cette construction dans le tube \mathcal{T}_1 autour de la strate V_1 , de façon à obtenir un champ stratifié, c’est-à-dire tangent à toutes les strates contenant V_1 dans leur bord et « sortant » du tube \mathcal{T}_1 le long de son bord. Le champ est alors défini dans un voisinage du bord des strates de dimension 2. On peut le prolonger à l’intérieur de ces strates avec de points singuliers isolés a_k^2 et on continue la procédure par strates de dimensions croissantes, comme à l’étape précédente, jusqu’à la dimension de X .

Les tubes sont donc des voisinages tubulaires des strates sur lesquelles on construit le champ par prolongement radial de façon à rester tangent aux strates. Le champ radial est non nul et sortant le long de ces tubes. On obtient donc finalement un champ défini dans un tube \mathcal{T} autour de X et sortant de ce tube. On remarque que le bord de \mathcal{T} peut être facilement rendu lisse.

Le champ ν obtenu a cette jolie propriété d’avoir les mêmes points singuliers a_i que sa restriction à V_α dans le tube \mathcal{T}_α autour de chaque strate V_α et d’avoir même indice en a_i , que ce soit comme champ tangent à M ou que ce soit comme champ tangent à V_α , autrement dit :

$$I(\nu_{\text{rad}}, a_i; V_\alpha) = I(\nu_{\text{rad}}, a_i; M). \quad (8)$$

On note $I(\nu_{\text{rad}}, a_i)$ cet indice.

C’est le moment de rappeler la version « à bord » du théorème de Poincaré–Hopf : Si \mathcal{T} est une sous-variété différentiable compacte d’une variété différentiable M à bord $\partial \mathcal{T}$ lisse et si ν est un champ de vecteurs tangent à M , strictement sortant de \mathcal{T} le long de $\partial \mathcal{T}$ et à points singuliers isolés a_i dans \mathcal{T} , alors on a $\chi(\mathcal{T}) = \sum_i I(\nu, a_i)$.

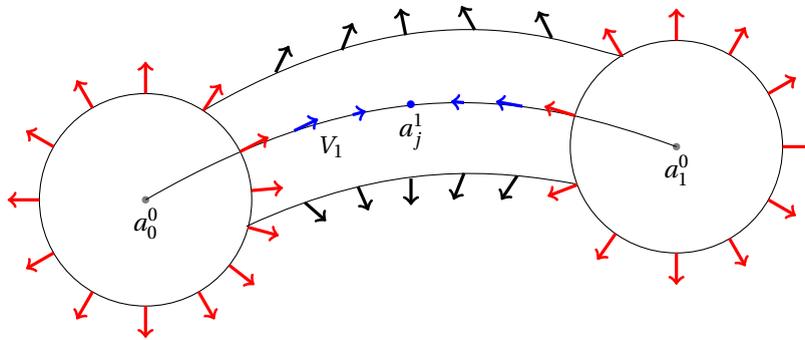


FIGURE 13. Le champ radial sur les strates de dimension 0 et 1 est construit dans l'ordre : rouge, bleu, noir

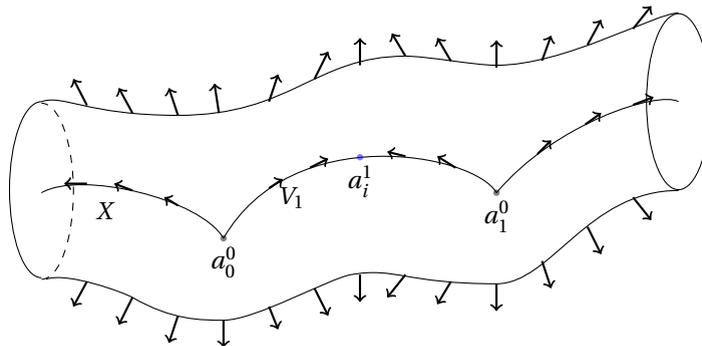


FIGURE 14. Le champ radial est sortant de tubes autour de \$X\$.

Dans le cas d'une variété singulière \$X\$ et pour un champ radial \$v_{\text{rad}}\$, Marie-Hélène Schwartz montre qu'ainsi, directement ou par récurrence sur les strates, on retrouve la formule de Poincaré-Hopf [8, 9]

$$\chi(X) = \sum_i I(v_{\text{rad}}, a_i).$$

Comme on l'a dit, la méthode utilisée par Marie-Hélène Schwartz exige des techniques très fines et minutieuses d'extensions, de recollements et de suivi des propriétés souhaitées (telles que l'obtention d'un champ stratifié). Nous avons déjà signalé que Marie-Hélène Schwartz avait, dans un premier temps, écrit cette construction sans utiliser les conditions de stratification de Whitney, ce qui montre les difficultés surmontées.

On remarquera que, si la caractéristique d'Euler-Poincaré permet d'obtenir une classification des surfaces lisses, compactes, sans bord, il n'en est pas de même pour les variétés singulières comme le montre l'exemple d'un tore pincé en deux points et dont la caractéristique d'Euler (+2) est égale à celle de la sphère. Un exemple illustrant la construction du champ radial est donné par les surfaces \$X\$ et \$Y\$ suivantes :

La caractéristique d'Euler-Poincaré d'un tore pincé en trois points : \$A, B, C\$ (figure 15 (i)) peut être facilement calculée à l'aide d'un champ radial construit sur le modèle de la figure 9 (ii). En chaque point singulier, l'indice du champ est égal à +1 donc \$\chi(X) = +3\$. Il est facile de confirmer ce résultat par la formule d'Euler-Poincaré à l'aide d'une triangulation de \$X\$.



Marie-Hélène Schwartz donne une conférence sur les champs radiaux à l'université de Kyoto, mai 1984. Photo : M.-H. Schwartz

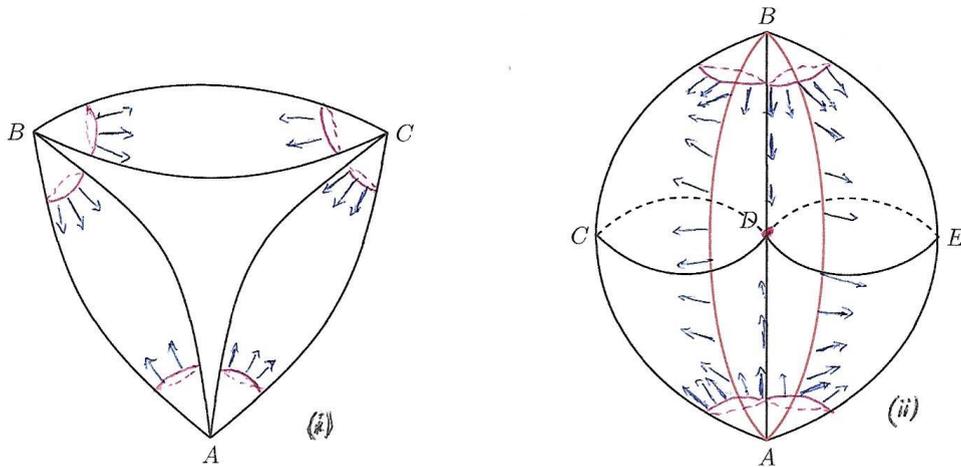


FIGURE 15. Variétés singulières de caractéristique d'Euler-Poincaré égale à 3

La variété singulière $Y \subset \mathbb{R}^3$ de la figure 15 (ii) peut être stratifiée en

$$Y_0 = \{A, B\} \subset]A, B[\subset Y$$

On construit donc un champ radial en prenant d'abord un champ v sortant de boules (dans \mathbb{R}^3) centrées en les points A et B (strates de dimension 0) et tangent aux strates. Il est d'indice +1 en ces points. Le champ est étendu sur la strate $]A, B[$ avec une singularité isolée en un point D . Son indice en ce point est -1 . Par extension radiale de ce champ dans un voisinage tubulaire (dans \mathbb{R}^3) de la strate $]A, B[$, le champ obtenu v n'a pas d'autre singularité que D dans le tube et il est d'indice -1 en ce point (voir figure 13 avec $D = a_1^1$). Notons Y_0 pour Y moins les voisinages tubulaires de A, B et $]A, B[$, on obtient une variété lisse composée de

deux composantes connexes, chacune homéomorphe à un disque. Le champ ν est un champ entrant dans Y_0 le long du bord. Il peut donc être prolongé en un champ ayant un point singulier dans chaque composante (par exemple en C et E), d'indice $+1$ en chacun d'eux. On a alors $\chi(Y) = 4 - 1 = +3$. Ici aussi, il est facile de confirmer ce résultat par la formule d'Euler-Poincaré à l'aide d'une triangulation de Y .

4. 1963-2013

4.1. *Classes caractéristiques des variétés singulières*

Marie-Hélène Schwartz est nommée Professeur à Lille en 1963 ([33, p. 331]). Elle y restera jusqu'à sa retraite en 1981. La période est encore marquée par les travaux de Chern. Celui-ci a publié en 1946 deux articles où il définit les classes de « Chern », des variétés analytiques complexes [21]. Il en donne plusieurs définitions différentes, en particulier en utilisant la théorie d'obstruction et en utilisant les formes différentielles Ω_r et Π_r mentionnées plus haut. En suivant Marie-Hélène Schwartz, nous retiendrons la théorie d'obstruction.

Les espaces considérés sont maintenant des variétés analytiques complexes. Les champs de vecteurs sont donc des champs de vecteurs complexes. Les notions de stratifications et en particulier de conditions de Whitney restent valables dans le contexte complexe. On continue cependant à noter les dimensions réelles.

L'utilisation des stratifications de Whitney donne à Marie-Hélène Schwartz l'idée d'étendre la définition de ses champs de vecteurs radiaux aux champs de r -repères. Il lui est ainsi naturel de penser à la définition des classes de Chern par obstruction et de vouloir définir de telles classes caractéristiques pour les variétés singulières, par obstruction à la construction de champs de r -repères « radiaux ».

4.1.1. *Cas d'une variété complexe lisse*

Considérons d'abord le cas d'une variété complexe lisse M de dimension (complexe) m .

Le fibré TM est maintenant le fibré tangent complexe. Un r -repère $\nu^{(r)} = (\nu_1, \dots, \nu_r)$ au dessus d'une partie A de M est un ensemble de r vecteurs complexes tangents à M et \mathbb{C} -linéairement indépendants en tous points. Le champ $\nu^{(r)}$ est une section du fibré $V_r(TM)$ associé à TM mais dont les fibres $T_x(M)$ sont remplacées par l'ensemble des r -repères de $T_x(M)$. La « fibre type » est donc l'ensemble des r -repères complexes de \mathbb{C}^m , notée $V_r(\mathbb{C}^m)$ et appelée variété de Stiefel complexe. Comme TM , le fibré $V_r(TM)$ est localement trivial : tout point a de M admet un voisinage U tel que l'on ait : $V_r(TM)|_U \cong U \times V_r(\mathbb{C}^m)$. Chaque r -repère $\nu^{(r)}(x)$ est représenté par un point dans $V_r(T_xM)$.

La théorie d'obstruction permet, dans ce contexte, de répondre à la question suivante : quelle est l'obstruction pour construire un champ de r -repère tangent à la variété M ? Pour des raisons qui apparaîtront par la suite, nous considérons une décomposition de M en « cellules » homéomorphes à des boules et dont le bord est homéomorphe à une sphère.

De la même façon qu'à la figure 4, considérons alors un r -repère $\nu^{(r)}$ défini sur le bord ∂d d'une cellule d de dimension k d'une décomposition cellulaire (D) de M et telle que d soit contenue dans un domaine U de trivialité du fibré $V_r(TM)$. On obtient une application

$$\begin{aligned} \partial d &\xrightarrow{\nu^{(r)}} V_r(TM)|_U \cong U \times V_r(\mathbb{C}^m) \xrightarrow{pr_2} V_r(\mathbb{C}^m), \\ x &\longmapsto (x, \nu^{(r)}(x)) \longmapsto \nu^{(r)}(x) \end{aligned}$$

où pr_2 désigne la seconde projection (voir figure 16), et donc une application

$$\mathbb{S}^{k-1} \cong \partial d \xrightarrow{pr_2 \circ \nu^{(r)}} V_r(\mathbb{C}^m).$$

qui détermine un élément du groupe d'homotopie $\pi_{k-1}(V_r(\mathbb{C}^m))$ noté $[\xi(v^{(r)}, d)]$ (voir 3).

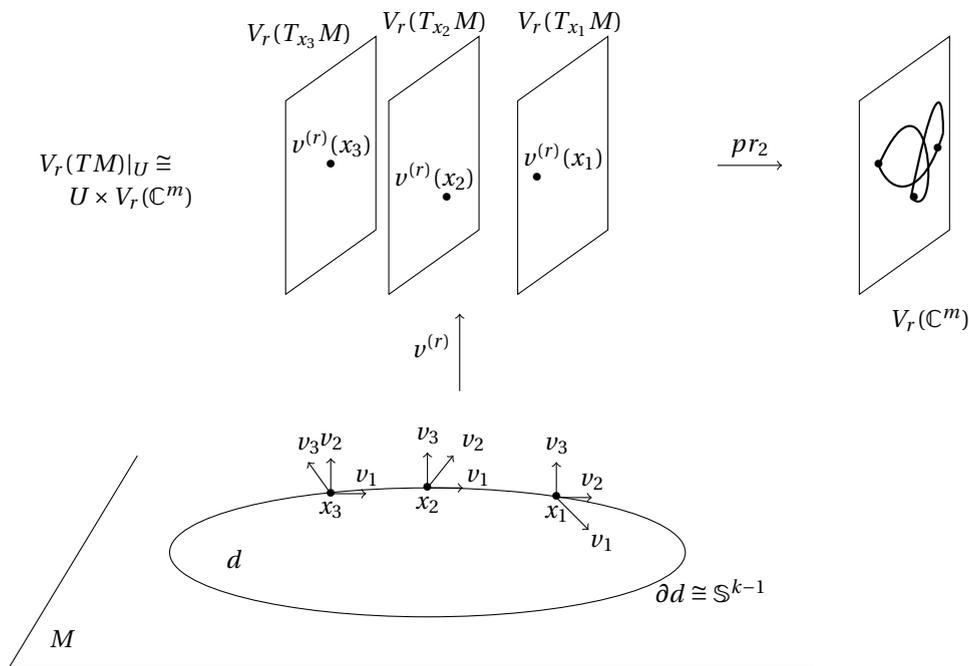


FIGURE 16. L'application $pr_2 \circ v^{(r)} : \mathbb{S}^{k-1} \rightarrow V_r(\mathbb{C}^m)$.

Supposons que $[\xi(v^{(r)}, d)] = 0$, alors, la théorie d'homotopie classique nous dit que l'application $\mathbb{S}^{k-1} \rightarrow V_r(\mathbb{C}^m)$ définie sur le bord \mathbb{S}^{k-1} de la boule $d \cong \mathbb{B}^k$ peut être étendue à l'intérieur de la boule. En d'autres mots, si $[\xi(v^{(r)}, d)] = 0$, alors, l'application $v^{(r)} : \partial d \rightarrow V_r(\mathbb{C}^m)$, i.e. le r -repère, peut être étendue à l'intérieur de la cellule d . Cela signifie qu'il n'y a pas d'obstruction à l'extension de la section $v^{(r)}$ à l'intérieur de d , sans singularité. Ceci est le cas, par exemple, si $\pi_{k-1}(V_r(\mathbb{C}^m)) = 0$.

On peut résumer la situation par le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \partial d \cong \mathbb{S}^{k-1} & \longrightarrow & V_r(\mathbb{C}^m) \\ \downarrow & \nearrow ? & \\ d \cong \mathbb{B}^k & & \end{array}$$

De façon à répondre à la question précédente, nous avons besoin de connaître les groupes d'homotopie de $V_r(\mathbb{C}^m)$. Ceux-ci ont été calculés par Stiefel et par Whitney (voir [35]) :

Les groupes d'homotopie de la variété de Stiefel $V_r(\mathbb{C}^m)$ des r -repères complexes de \mathbb{C}^m satisfont

$$\pi_i(V_r(\mathbb{C}^m)) = \begin{cases} 0 & \text{pour } i < 2m - 2r + 1 \\ \mathbb{Z} & \text{pour } i = 2m - 2r + 1. \end{cases} \tag{9}$$

Considérons alors un r -repère $v^{(r)}$ défini sur le bord ∂d d'une k -cellule d .

Si $k < 2(m - r + 1)$, on a $\pi_{k-1}(V_r(\mathbb{C}^m)) = 0$ et donc $[\xi(v^{(r)}, d)] = 0$. Le r -repère $v^{(r)}$ peut être étendu à l'intérieur de d sans singularité.

Si $k = 2(m - r + 1)$, alors, on peut étendre le r -repère $v^{(r)}$ à l'intérieur de la cellule d avec une singularité isolée au barycentre \hat{d} de la cellule de la façon suivante. Le champ étant défini

sur le bord de la cellule, on peut l'étendre à l'intérieur de d par une homothétie dont le centre est le barycentre \hat{d} . On obtient alors un indice $[\xi(v^{(r)}, d)] \in \pi_{k-1}(V_r(\mathbb{C}^m)) \cong \mathbb{Z}$ que l'on définit comme indice du champ de r -repères au point \hat{d} , noté $I(v^{(r)}, \hat{d})$. L'indice mesure l'obstruction à l'extension du champ de repères $v^{(r)}$ à l'intérieur de d ,

La dimension $2p = 2(m - r + 1)$ est appelée « dimension d'obstruction » à la construction d'un r -repère complexe tangent à la variété M de dimension (réelle) $2m$.

4.1.2. Cas d'une variété complexe singulière

Dans le cas d'une variété singulière X plongée dans une variété lisse M , une stratification de M sera donnée par une stratification de X à laquelle on ajoute la strate $M \setminus X$. Considérons une triangulation (K) de M compatible avec la stratification, cela signifie que chaque simplexe ouvert est contenu dans une seule strate. Suivant le calcul précédent, la dimension d'obstruction à la construction d'un champ de r -repères tangent à une strate de dimension (réelle) $2s$ est égale à $2(s - r + 1)$. La dimension d'obstruction varie donc avec les strates, ce qui ne permet pas de définir une classe globale.

L'idée fondamentale de Marie-Hélène Schwartz est de travailler non pas avec une triangulation (K) de M compatible avec la stratification, mais avec une décomposition cellulaire (D) duale de (K) dans M . Les cellules de la décomposition duale (D) sont transverses aux strates, ce qui se traduit par $\text{codim}(d \cap V_\alpha) = \text{codim}(d) + \text{codim}(V_\alpha)$, ou encore $\text{dim}(d \cap V_\alpha) = 2(s - r + 1)$. Dans M de dimension réelle $2m$, l'intersection d'une cellule de dimension $2p = 2(m - r + 1)$ avec une strate V_α de dimension $2s$ est donc une cellule de dimension $2(s - r + 1)$, ce qui correspond exactement à la dimension d'obstruction à la construction d'un champ de r -repères le long de cette strate.

Concrètement, étant donnée une triangulation (orientée) (K) d'une variété orientée lisse M de dimension (réelle) $2m$, on construit une décomposition cellulaire (D) duale de (K) de la façon suivante : on considère une subdivision barycentrique (K') de (K) . Le barycentre d'un simplexe $\sigma \in K$ sera noté par $\hat{\sigma}$. Tout simplexe de K' peut alors s'écrire

$$(\hat{\sigma}_{i_1}, \hat{\sigma}_{i_2}, \dots, \hat{\sigma}_{i_p})$$

où $\sigma_{i_1} < \sigma_{i_2} < \dots < \sigma_{i_p}$. Ici, le symbole $\sigma < \sigma'$ signifie que σ est une face de σ' .

La cellule duale du simplexe σ , notée $d(\sigma)$, est l'ensemble de tous les simplexes (fermés) τ de (K') tels que $\tau \cap \sigma = \{\hat{\sigma}\}$. Le dual d'un k -simplexe est bien une cellule homéomorphe à une boule de dimension $2m - k$ et son bord est homéomorphe à une sphère \mathbb{S}^{2m-k-1} . L'unique point d'intersection $d(\sigma) \cap \sigma$ est le barycentre $\hat{\sigma}$ de σ , également barycentre de $d(\sigma)$. La cellule $d(\sigma)$ est orientée de telle façon que l'orientation de $d(\sigma)$ suivie de celle de σ soit l'orientation de M .

L'ensemble des cellules duales fournit une décomposition cellulaire de M .

Dans la figure 17, le barycentre du sommet $A = \sigma_0$ est A lui-même, la cellule duale de σ_0 est la cellule grisée. La cellule duale du segment $\sigma_1 = AB$ est composée des deux segments $A'\hat{\sigma}_1$ et $\hat{\sigma}_1 B'$ (en double ligne). La cellule duale du triangle $\sigma_2 = ABC$ est le point A' , barycentre de σ_2 .

Revenons au cas d'une variété analytique complexe singulière X de dimension $2n$, sous-variété d'une variété analytique complexe lisse M de dimension $2m$. On considère une stratification de Whitney de M telle que X soit réunion de strates et on considère une triangulation (K) de M compatible avec les strates. On considère enfin une décomposition cellulaire (D) duale de (K) dans M . Une remarque importante pour la suite est que, si d est une cellule duale d'un simplexe σ de (K) situé dans X , alors le barycentre $\hat{d} = d \cap \sigma$ de d est situé dans σ donc dans X .

On construit alors un champ de r -repères $v^{(r)}$ radial dans un voisinage tubulaire de X , strate par strate, comme cela a été fait pour les champs radiaux. Si σ_i est un simplexe de (K) de dimension $2(r - 1)$ dans une strate V_α de dimension $2s$, la cellule duale de σ_i dans M est de dimension $2p = 2(m - r + 1)$ et rencontre V_α suivant une cellule $d_i \cap V_\alpha$ de dimension $2(s - r + 1)$. Sur la strate V_α le champ de repères a des singularités isolées aux barycentres \hat{d}_i de telles cellules

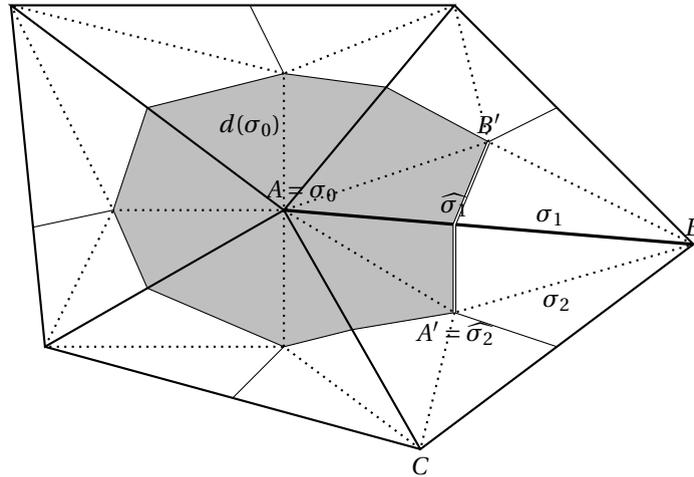


FIGURE 17. Cellules duales.

$d_i \cap V_\alpha$. L'extension radiale du champ de repères, dans d_i admet une singularité isolée en \hat{d}_i , dont l'indice $I(v^{(r)}, \hat{d}_i)$ est le même, qu'il soit calculé dans V_α ou dans M .

Notons $(D)^{2p}$ l'ensemble des cellules de dimension $2p$. Marie-Hélène Schwartz obtient alors un « cocycle obstruteur »

$$\kappa : (D)^{2p} \rightarrow \mathbb{Z}$$

dont la valeur sur une cellule $d_i \in (D)^{2p}$ est égale à $\kappa(d_i) = I(v^{(r)}, \hat{d}_i)$.

L'ensemble des cellules duales des simplexes de (K) , situés dans X , forme un voisinage tubulaire \mathcal{T} de X dans M . Le champ $v^{(r)}$ n'a pas de singularité sur le bord $\partial\mathcal{T}$ de \mathcal{T} . En effet, les $2p$ -cellules situées dans $\partial\mathcal{T}$ ne sont pas duales de simplexes de X . L'application κ est donc nulle sur $\partial\mathcal{T}$, ce qui implique que la classe du cocycle κ définit une classe de cohomologie dans $H^{2p}(\mathcal{T}, \partial\mathcal{T})$. Maintenant pas retraction de $\mathcal{T} \setminus X$ sur $\partial\mathcal{T}$ puis par excision (de $(\mathcal{T}, \mathcal{T} \setminus X)$ sur $(M, M \setminus X)$), Marie-Hélène Schwartz obtient pour chaque $r = 1, \dots, n$, soit donc pour chaque $p = m - r + 1$, une classe

$$c^p(X) = [\kappa] \in H^{2p}(\mathcal{T}, \partial\mathcal{T}) = H^{2p}(\mathcal{T}, \mathcal{T} \setminus X) = H^{2p}(M, M \setminus X).$$

La définition de ces classes fait l'objet d'une pré-publication en 1964 à l'Université de Lille et de deux notes aux CRAS (22 et 29 Mars 1965) [6].

Les notes de Marie-Hélène Schwartz, publiées en français et d'approche difficile, passent inaperçues. Pour l'anecdote, j'ai donné un exposé sur ces classes au séminaire de singularités de Bernard Teissier. J'ai eu la surprise de voir Pierre Dolbeault venir me dire à la fin de mon exposé et sans cacher sa joie, qu'il avait été rapporteur des notes de Marie-Hélène Schwartz et que sans en comprendre toute la construction, il avait senti l'importance de ces classes et qu'il était donc très heureux d'en avoir eu la bonne intuition.

En 1969, Pierre Deligne et Alexandre Grothendieck conjecturent l'existence de classes caractéristiques pour les variétés algébriques complexes, mais en homologie $H_*(X)$. Ces classes sont définies pour toute fonction constructible α sur X et doivent vérifier un système d'axiomes, en particulier donner la classe de Chern classique si X est lisse et si α est la fonction caractéristique 1_X . Rappelons qu'une des définitions possibles de fonction constructible est de dire qu'une fonction $\alpha : X \rightarrow \mathbb{Z}$ est constructible s'il existe une triangulation de X telle que α soit constante à l'intérieur de tout simplexe ouvert.

En fait, si X est une variété analytique (complexe) singulière de dimension réelle $2n$, le morphisme de Poincaré $H^{2n-i}(X) \rightarrow H_i(X)$, cap-produit par la classe fondamentale $[X] \in H_{2n}(X)$, n'est plus un isomorphisme. Il est possible de montrer qu'il n'existe pas, en général, de classe de Chern en cohomologie (absolue) et la conjecture de Deligne et Grothendieck consiste à dire qu'il en existe en homologie.

Cette conjecture sera démontrée en 1974 par Robert MacPherson, par des méthodes de géométrie algébrique (en utilisant l'obstruction d'Euler locale, le transformé de Nash et la classe de Mather).

Connaissant ce résultat, Israel Gel'fand, de passage chez les Schwartz en 1976, propose à Marie-Hélène Schwartz de joindre MacPherson (alors à l'IHES) au téléphone, mais ne réussit pas. C'est quelques jours plus tard qu'elle rencontrera Gel'fand et MacPherson par hasard dans une petite boutique du Boulevard Saint Michel. Marie-Hélène Schwartz y était rentrée pour acheter une chemise pour son mari. La conversation s'engage dans la boutique exiguë et l'impression commune est bien que les deux constructions (de Marie-Hélène Schwartz et de Robert MacPherson) sont « la même chose ».

Ce résultat sera en fait démontré en 1979 par Marie-Hélène Schwartz et moi-même : les classes de MacPherson, pour la fonction constructible 1_X , sont images des classes de Marie-Hélène Schwartz par isomorphisme d'Alexander

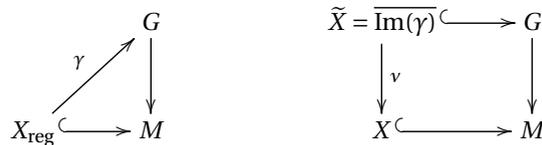
$$H^{2p}(M, M \setminus X) \rightarrow H_{2(r-1)}(X).$$

Ceci prouve donc que Marie-Hélène Schwartz avait, sinon démontré, au moins eu l'idée de la conjecture de Deligne et Grothendieck quatre ans avant que celle-ci ne soit émise! Les classes de Chern des variétés singulières sont maintenant appelées classes de Schwartz–MacPherson.

L'un des éléments que MacPherson a défini et utilisé pour sa construction est l'obstruction d'Euler locale. On en donne ici une définition équivalente due à Marie-Hélène Schwartz et moi-même [1] : étant donnée une variété algébrique complexe X de dimension (complexe) n , plongée dans une variété complexe lisse M de dimension (complexe) m , on définit le « transformé de Nash » \tilde{X} en remplaçant chaque point a de X par l'ensemble de toutes les limites d'espaces tangents pour des suites de points de la partie régulière de X tendant vers a . De façon plus précise, on considère la Grassmannienne $G_n(\mathbb{C}^m)$ des n -plans complexes de \mathbb{C}^m et on appelle G le fibré de base M dont la fibre G_x en un point $x \in M$ est l'ensemble des n -plans complexes de $T_x(M)$. Elle est donc isomorphe à $G_n(\mathbb{C}^m)$. Un élément de G s'écrit (x, P) où $x \in M$ et $P \in G_x$. Sur la partie régulière de X , on définit l'application de Gauss $\gamma : X_{\text{reg}} \rightarrow G$ par

$$\gamma(x) = (x, T_x(X_{\text{reg}})).$$

Le transformé de Nash \tilde{X} est la clôture de l'image de γ dans G .



En général, \tilde{X} n'est pas lisse, cependant c'est une variété analytique et la restriction $\nu : \tilde{X} \rightarrow X$ à \tilde{X} de la projection du fibré $G \rightarrow M$ est analytique. Un point \tilde{a} de \tilde{X} est donc un couple (a, P_a) où $a = \nu(\tilde{a})$ et P_a est un n -plan complexe de $T_a(M)$, limite (dans la Grassmannienne considérée) d'une suite de plans $T_{x_n}(X_{\text{reg}})$, pour x_n suite de points de X_{reg} tendant vers a .

Le « transformé de Nash » est muni d'un fibré « tautologique » Θ dont la fibre $\Theta_{\tilde{a}}$ en un point $\tilde{a} = (a, P_a)$ de \tilde{X} est l'ensemble des vecteurs v du n -plan P_a . Un élément de Θ s'écrit donc $(\tilde{x}, v) = (x, P, v)$ où $x = \nu(\tilde{x}) \in X$, P est un n -plan de $T_x(M)$ et v est un vecteur de P . Si $x \in X_{\text{reg}}$, alors $P = T_x(X_{\text{reg}})$.

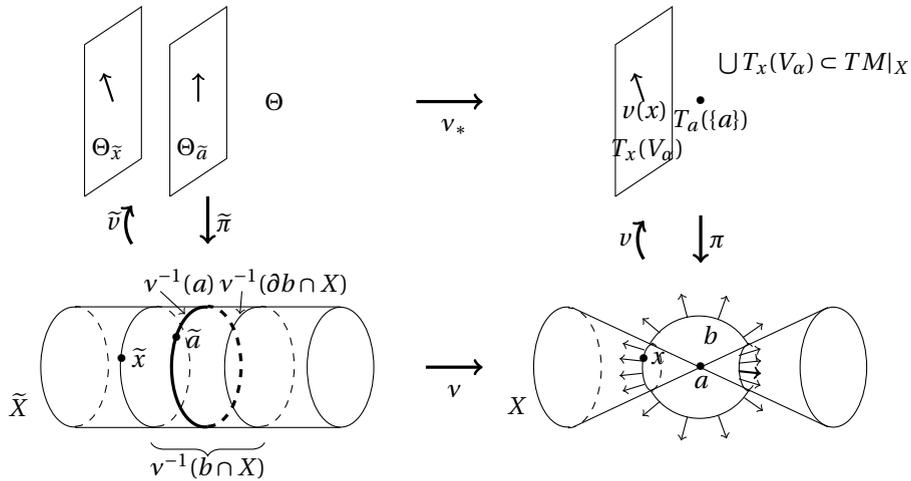


FIGURE 18. Le transformé de Nash.

Ainsi, le transformé de Nash d'un cône X est un cylindre \tilde{X} , la limite (pour x tendant vers a sur une directrice du cône) des plans tangents $T_x(X_{reg})$ donnant lieu à un point \tilde{a} du cercle $v^{-1}(a)$ (voir figure 18).

Si a est un point d'une strate V_α , singularité isolée du champ radial (donc stratifié) ν , notons b une boule dans M suffisamment petite pour que le champ soit sortant de b , sans autre singularité dans b (et donc sur le bord ∂b). L'indice $I(\nu, a)$ est donc égal à $+1$. La condition (a) de Whitney permet de montrer que la restriction de ν à $\partial b \cap X$ se relève en une section $\tilde{\nu}$ de Θ au dessus de $v^{-1}(\partial b \cap X)$. L'obstruction d'Euler locale de X en a , notée $Eu_a(X)$, est l'obstruction à étendre, au dessus de $v^{-1}(b \cap X)$, la section $\tilde{\nu}$ de Θ , laquelle est déjà définie au dessus de $v^{-1}(\partial b \cap X)$. La figure 19 donne un exemple de calcul de l'obstruction d'Euler locale, que l'on peut calculer par la méthode de [1] ou celle de Lê et Teissier [25].

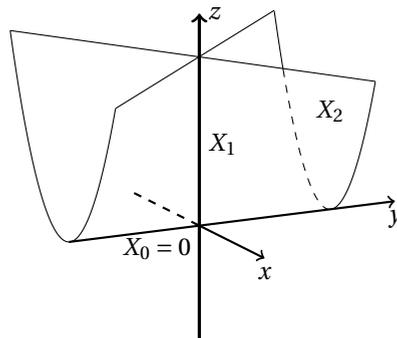


FIGURE 19. Le parapluie de Whitney (trace dans $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{C}^3$)

Un exemple de calcul de l'obstruction d'Euler locale est donné par la surface X d'équation $x^2 - y^2 z = 0$ dans \mathbb{C}^3 , appelée parapluie de Whitney.

Une stratification est donnée par :

- l'origine $X_0 = \{0\}$,
- la strate X_1 qui est l'axe des z moins l'origine, et

- $X_2 = X_{\text{reg}}$ est le complémentaire.

On a :

$$\begin{aligned} \text{Eu}_X(x) &= 1 & \text{si } x \in X_2 = X_{\text{reg}}, \\ \text{Eu}_X(a) &= 2 & \text{si } a \in X_1 \\ \text{Eu}_X(0) &= 1. \end{aligned}$$

Avec Marie-Hélène Schwartz, nous avons montré la propriété fondamentale suivante (Théorème de proportionnalité) : si ν est un champ stratifié et non plus nécessairement radial, avec une singularité isolée en $a \in b$, d'indice $I(\nu, a)$ au point a , alors, par la condition (a) de Whitney, le champ ν se relève en une section $\tilde{\nu}$ de Θ au dessus de $\nu^{-1}(\partial b \cap X)$. L'obstruction à étendre la section $\tilde{\nu}$ en une section de Θ au dessus de $\nu^{-1}(b)$ est égale à

$$\text{Obs}(\nu^{-1}(b), \tilde{\nu}, \tilde{X}) = \text{Eu}_a(X) \cdot I(\nu, a). \quad (10)$$

Un autre élément de la construction de MacPherson est la classe de Mather. Considérons dans $H_*(\tilde{X})$ le cap-produit de la classe de Chern du fibré de Nash Θ par la classe fondamentale de \tilde{X} . Son image par $\nu_* : H_*(\tilde{X}) \rightarrow H_*(X)$ est la classe de Mather $c_M(X)$ de X :

$$c_M(X) = \nu_*(c^*(\Theta) \cap [\tilde{X}]) \in H_*(X).$$

En 1995, Jianyi Zhou [37] a montré que les classes de Mather sont les mêmes que les classes précédemment définies par Wu Wen Tsün en 1965. Il est remarquable que celles-ci ont été publiées la même année que les Notes de Marie-Hélène Schwartz et sont également passées inaperçues car publiées en chinois.

Ces résultats, et surtout les théorèmes de proportionnalité, théorèmes clés de la théorie, ont été repris dans le livre [11] sur les classes caractéristiques que Marie-Hélène Schwartz a publié chez Hermann en 2000, à l'âge de 87 ans.

4.2. Les applications et généralisations

Je cite ici quelques applications des techniques et des résultats de Marie-Hélène Schwartz parmi les plus fameux :

La définition des champs radiaux de Marie-Hélène Schwartz a fait l'objet de plusieurs généralisations, par elle-même d'abord : la propriété de proportionnalité 10 peut servir de définition même à ce qu'elle appelle les champs « préradiaux » [8, 10]. Elle justifie cette définition en disant que la relation (8) est insuffisante pour une définition intrinsèque car elle ne fait pas intervenir les strates intermédiaires. On peut cependant associer à un champ préradial un champ radial ayant mêmes zéros avec mêmes indices [8, Théorème, p. 241] et [10, Théorème 4.3.3]. Le théorème de Poincaré–Hopf est vérifié pour les champs préradiaux [10, §6.4]. La réciproque [10, Théorème 6.3.1] dit que sous des conditions de nullité de caractéristiques d'Euler liées aux strates, alors il existe d'un champ stratifié radial (ou préradial) sans zéro.

Dans le cas de stratifications abstraites, H. King et D. Trotman [23], puis S. Simon [34] ont donné des généralisations de champs radiaux et d'indices de champs de vecteurs permettant d'obtenir des théorèmes de Poincaré–Hopf dans le cas de variétés singulières plus générales.

Les classes de Chern des variétés singulières ont fait l'objet de définitions équivalentes, par exemple par Lê D. T. et B. Teissier en utilisant les variétés polaires [25]. La méthode de Marie-Hélène Schwartz m'a permis de définir des classes de Chern en théorie bivariante de Fulton et MacPherson [15, 22], Claude Sabbah en a donné une autre définition [31, 32] et Jianyi Zhou a montré que nos deux définitions sont équivalentes [37].

D'autres généralisations de classes de Chern ont été données par plusieurs auteurs, dont S. Yokura [36], lequel montre que les classes se relèvent en homologie d'intersection, dans le cas

de singularités isolées. Le relèvement des classes de Schwartz–MacPherson, dans le cas général, a fait l’objet d’un article de G. Barthel, K. H. Fieseler, O. Gabber, L. Kaup et moi-même [13].

Les classes de Schwartz–MacPherson ont fait l’objet et/ou ont été utilisées dans de nombreux articles, entre autres de P. Aluffi, L. Ernström, B. F. Jones, P. Judson III Stryker, L. C. Mihalcea, T. Ohmoto, A. Paruciński, P. Pragacz, A. Weber, S. Yokura, etc.

L’obstruction d’Euler locale a fait l’objet de nombreuses définitions équivalentes (Gonzalez–Sprinberg, Lê et Teissier [25], etc.). La notion d’obstruction d’Euler locale ainsi que la description que nous en avons donnée interviennent dans l’étude des feuilletages singuliers, dans les travaux de plusieurs auteurs tels que X. Gomez-Mont, J. Seade, T. Suwa, A. Verjovsky, etc. La méthode des champs radiaux de Marie-Hélène Schwartz permet également de montrer que l’obstruction d’Euler locale satisfait une formule de type Lefschetz [16].

En travaillant sur les champs radiaux et les classes caractéristiques, Marie-Hélène Schwartz a également fait une étude systématique des espaces linéaires (dans un premier temps elle les a appelés pseudo-fibrés [5]). Ceux-ci sont une généralisation de l’espace réunion des espaces tangents aux strates, c’est-à-dire, avec les notations antérieures $\bigcup_{V_\alpha \subset X} T(V_\alpha) \subset TM$. La notion de transformé de Nash pour de tels espaces lui a permis de définir dans ce cadre des classes de Mather et un caractère de Chern [7]. Michał Kwieciński [24] a montré que ce caractère est relié à celui précédemment défini par Baum–Fulton–MacPherson [14].

5. Bibliographie (partielle) de Marie-Hélène Schwartz

Marie-Hélène Schwartz a publié 36 articles et deux livres. Hormis deux articles publiés avec moi-même, elle est seule auteur de ses articles, ce qui est remarquable. Dans la bibliographie ci-dessous, est citée une sélection des articles de Marie-Hélène Schwartz en rapport direct avec le présent article.

Dans son premier livre, « Champs radiaux sur une stratification analytique complexe », publié en 1991, Marie-Hélène Schwartz introduit son point de vue sur les stratifications de Whitney, sur les triangulations compatibles avec une stratification donnée (résultat de S. Łojasiewicz) et principalement sur les champs radiaux.

Marie-Hélène Schwartz a publié en 2000 le livre « Classes de Chern des ensembles analytiques » dans lequel elle reprend la construction de ses classes de façon systématique. Les théorèmes de proportionnalité, théorèmes clés de la théorie, y sont exposés en détails. Dans ce second livre, Marie-Hélène Schwartz expose ainsi l’architecture de sa théorie et la relie à celle de MacPherson. Elle étend cette technique et ses résultats aux champs de repères (en particulier les importants théorèmes de proportionnalité). Ce livre fournit une confrontation explicite entre l’approche axiomatique et l’approche constructive des classes de Chern par théorie d’obstruction.

Articles de M.-H. Schwartz en lien direct avec cet article

- [1] J.-P. Brasselet, M.-H. Schwartz, « Sur les classes de Chern d’un ensemble analytique complexe », in *Caractéristique d’Euler–Poincaré. Seminaire E.N.S. 1978–1979*, Astérisque, vol. 82-83, Société Mathématique de France, 1981, p. 93–147.
- [2] M.-H. Schwartz, « Exemple d’une fonction méromorphe ayant des valeurs déficientes non asymptotiques », *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **212** (1941), p. 382–384.
- [3] ———, « Formules apparentées à celle de Nevanlinna–Ahlfors pour certaines applications d’une variété à n dimensions dans une autre », *Bull. Soc. Math. Fr.* **82** (1954), p. 317–360.
- [4] ———, « Formules apparentées à la formule de Gauss–Bonnet pour certaines applications d’une variété à n dimensions dans une autre », *Acta Math.* **91** (1954), p. 189–244.
- [5] ———, « Espaces pseudo-fibrés et systèmes obstrueteurs », *Bull. Soc. Math. Fr.* **88** (1960), p. 1–55.

- [6] ———, « Classes caractéristiques définies par une stratification d'une variété analytique complexe », *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **260** (1965), p. 3262-3264 et 3535-3537.
- [7] ———, « Classes et caractères de Chern des espaces linéaires », *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **295** (1982), p. 399-402.
- [8] ———, « Champs radiaux et préradiaux associés à une stratification », *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **303** (1986), p. 239-241.
- [9] ———, « Une généralisation du théorème de Hopf pour les champs sortants », *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **303** (1986), p. 307-309.
- [10] ———, *Champs radiaux sur une stratification analytique*, Travaux en Cours, vol. 39, Hermann, 1991.
- [11] ———, *Classes de Chern des ensembles analytiques*, Actualités Mathématiques, Hermann, 2000.

Autres articles cités

- [12] L. Ahlfors, « Zur Theorie der Überlagerungsflächen », *Acta Math.* **65** (1935), p. 157-191.
- [13] G. Barthel, J.-P. Brasselet, K.-H. Fieseler, O. Gabber, L. Kaup, « Relèvement de cycles algébriques et homomorphismes associés en homologie d'intersection », *Ann. Math.* **141** (1995), n° 1, p. 147-179.
- [14] P. Baum, W. Fulton, R. MacPherson, « Riemann–Roch and topological K -theory for singular varieties », *Acta Math.* **143** (1979), p. 155-192.
- [15] J.-P. Brasselet, « Existence des classes de Chern en théorie bivariante », in *Analyse et topologie sur les espaces singuliers. (Actes du Colloque de Luminy 1981)*, Astérisque, vol. 101-102, Société Mathématique de France, 1983, p. 7-22.
- [16] J.-P. Brasselet, Lê D. T., J. Seade, « Euler obstruction and indices of vector fields », *Topology* **39** (2000), n° 6, p. 1193-1208.
- [17] J.-P. Brasselet, T. Nguyễn Thị Bích, « An elementary proof of Euler's formula using Cauchy's Method », à paraître dans *Topology Appl.*
- [18] ———, « O Teorema de Poincaré–Hopf », *C.Q.D.- Revista Eletrônica Paulista de Matemática* **16** (2019), p. 134-162, en portugais.
- [19] S.-S. Chern, « A simple intrinsic proof of the Gauss–Bonnet formula for closed Riemannian manifolds », *Ann. Math.* **45** (1944), p. 747-752.
- [20] ———, « On the curvatura integra in a Riemannian manifold », *Ann. Math.* **46** (1945), p. 674-684.
- [21] ———, « Characteristic classes of hermitian manifold », *Ann. Math.* **47** (1946), p. 85-121.
- [22] W. Fulton, R. MacPherson, *Categorical framework for the study of Singular spaces*, Memoirs of the American Mathematical Society, vol. 243, American Mathematical Society, 1981.
- [23] H. C. King, D. Trotman, « Poincaré–Hopf theorems on singular spaces », *Proc. Lond. Math. Soc.* **108** (2013), n° 3, p. 682-703.
- [24] M. Kwiecinski, « Sur le transformé de Nash et la construction du graphe de MacPherson », Thèse, Université de Provence (France), 1994.
- [25] Lê D. T., B. Teissier, « Variétés polaires locales et classes de Chern des variétés singulières », *Ann. Math.* **114** (1981), p. 457-491, erratum dans *ibid.* **115** (1982), p. 668.
- [26] J. W. Milnor, *Topology from the differentiable viewpoint*, University Press of Virginia, 1965.
- [27] R. Nevanlinna, *Le théorème de Picard–Borel et la théorie des fonctions méromorphes*, Gauthier-Villars, 1929.
- [28] ———, *Eindeutige analytische Funktionen*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 46, Springer, 1936.
- [29] A. Papadopoulos, « Value distribution theory and Teichmüller's paper "Einfache Beispiele zur Wertverteilungslehre" », in *Handbook of Teichmüller theory. Volume VII*, IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics, vol. 30, European Mathematical Society, 2020, p. 585-603.
- [30] É. Picard, « Sur une propriété des fonctions entières », *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **88** (1879), p. 1024-1027.
- [31] C. Sabbah, « Espaces conormaux bivariants », Thèse, Ecole Polytechnique (France), 1986.
- [32] ———, « Quelques remarques sur la géométrie des espaces conormaux », in *Systèmes différentiels et singularités*, Astérisque, vol. 130, Société Mathématique de France, 1986, p. 239-241.
- [33] L. Schwartz, *Un mathématicien aux prises avec le siècle*, Editions Odile Jacob, 1997.
- [34] S. Simon, « A theorem of Poincaré–Hopf type », <https://arxiv.org/abs/0905.4559>, 2009.
- [35] E. Stiefel, « Richtungsfelder und Fernparallelismus in n -dimensionalen Mannigfaltigkeiten », *Comment. Math. Helv.* **8** (1935), p. 305-353.
- [36] S. Yokura, « Algebraic Cycles and Intersection Homology », *Proc. Am. Math. Soc.* **103** (1988), n° 1, p. 41-45.
- [37] J. Zhou, « Classes de Chern pour les variétés singulières, classes de Chern en théorie bivariante », Thèse, Marseille (France), 1995.