ANNALES MATHÉMATIQUES

BLAISE PASCAL

Mohammed El Aïdi

Un majorant du nombre des valeurs propres négatives correspondantes à l'opérateur de Schrödinger généralisé.

Volume 19, n° 1 (2012), p. 197-211.

<http://ambp.cedram.org/item?id=AMBP_2012__19_1_197_0>

Publication éditée par le laboratoire de mathématiques de l'université Blaise-Pascal, UMR 6620 du CNRS Clermont-Ferrand — France

cedram

Article mis en ligne dans le cadre du Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
http://www.cedram.org/

Annales mathématiques Blaise Pascal **19**, 197-211 (2012)

Un majorant du nombre des valeurs propres négatives correspondantes à l'opérateur de Schrödinger généralisé.

Mohammed El Aïdi

Résumé

On donne une borne supérieur du nombre des valeurs propres négatives de l'opérateur de Schrödinger généralisé, cette borne est donnée en fonction d'un nombre fini de cube dyadiques minimaux.

An upper bound on the number of negative eigenvalues

Abstract

This paper is devoted to give an upper bound of the number of negative eigenvalues of the generalized Schrödinger operator, and this upper bound is given in terms of a finite number of minimal dyadic cubes.

1. Introduction

Les auteurs R. Kerman et T. Sawyer ont démontré que le nombre des valeurs propres négatives correspondantes à l'opérateur de Schrödinger $H_{1,V} = -\Delta - V$ est majoré, à une constante multiplicative près, par le nombre N_0 des cubes dyadiques qui vérifient :

$$\frac{1}{\displaystyle\int_{Q_j} V(x)dx} \int_{Q_j} \int_{Q_j} \frac{V(x)V(y)}{|x-y|^{d-2}}\, dx\, dy \geq c(d) > 0, \;\; j \in [1, N_0]. \tag{1.1}$$

Ici $c(d)$ est une constante qui dépend de $d > 2$, voir la partie (B) du [20, Theorem 3.3]. Dans la démonstration, les auteurs se sont inspirés des

Mots-clés : Valeurs propres négatives, Principe de minmax. Cubes dyadiques. Potentiel de Riesz. Résonances.

Classification math. : 34B09, 34L15, 34L25, 34L05, 35J40, 35P15, 35R06, 35R15, 47A75, 47A07, 47A40, 47A10, 57R40, 58D10.

travaux de C. Fefferman, précisement la partie (B) du [13, Theorem 6]. C. Fefferman a montré que le nombre des valeurs propres négatives est donné par le nombre N_0 de cubes dyadiques minimaux qui satisfont :

$$\int_{Q_k} [V(x)]^p dx \geq c' |Q_k|^{1-\frac{2p}{d}}, \; p > 1, \quad k \in \{1, \ldots, N_0\}, \tag{1.2}$$

$|Q_k|$ est le volume du cube dyadique Q_k et c' est une constante.

À la fin de l'article de R. Kerman et T. Sawyer, il y a une remarque qui montre que les inégalités (1.1) et (1.2) sont bien liées, voir [20, Remark 3.5].

Le présent article est destiné à donner une généralisation du [20, Theorem 3.3], précisemment on travaille avec l'opérateur $H_{m,V} := (-\Delta)^m - V$ défini dans $L^2(\mathbb{R}^d)$, avec $d > 2m$ et on montre, grâce à une hypothèse similaire à (1.1), que une borne supérieur du nombre des valeurs propres négatives de $H_{m,V}$ est majorée par un nombre fini de cubes dyadiques minimaux. Pour ce faire, on a besoin du théorème de la trace (appelé aussi l'inégalité de trace) correspondant à l'opérateur de Riesz I_m, en résumé ce théorème nous donne une condition nécessaire et suffisante pour que I_m soit borné. Énonçons le théorème significatif de ce papier.

Théorème 1.1. *Soit V un potentiel positif et élément de $L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$. Si*

$$\int_{Q_j} \int_{Q_j} \frac{V(x)V(y)}{|x-y|^{d-2m}} \, dx \, dy \geq c(d) \int_{Q_j} V(x) \, dx, \; j \in \{1, \ldots, N_0\}, \tag{1.3}$$

avec Q_j sont des cubes dyadiques, $0 < c(d)$ est une constante qui dépend de d. Alors $H_{m,V}$ admet au plus $C(d)N_0$, avec $C(d)$ est une constante qui dépend de d.

Un exemple de potential pour ce théorème on peut penser au potentiel $V = \chi_Q$ la fonction charactéristique dans un cube dyadique Q. Pour démontrer le théorème 1.1, on s'inspire du schéma et des arguments utlisés pour la démonstration du [20, Theorem 3.3]. On travaillera avec la forme quadratique associée à l'opérateur $H_{m,V}$. Pour cela rappelons la définition d'un opérateur elliptique. Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{R}^d$, soit L_0 un opérateur différentiel d'ordre $2m$, on dit que L_0 est elliptique s'il existe une constante $a_0 > 0$ telle que

$$(L_0 u, u)_{L^2(\mathcal{O})} \geq a_0 \int_{\mathcal{O}} \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u(x)|^2 dx,$$

avec $(\cdot,\cdot)_{L^2(\mathcal{O})}$ est le produit scalaire défini dans l'espace de Hilbert $L^2(\mathcal{O})$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_d$, avec $x = (x_1, x_2, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ et

$$D^\alpha u(x) := \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_d^{\alpha_d}}.$$

Les conditions aux bords généralisées de Dirichlet et la formule de Green généralisée nous fournissent que l'opérateur $L_0 = (-\Delta)^m$ est elliptique. Soit Q_V la forme quadratique associée à $H_{m,V}$ et pour simplifier on définit Q_V par :

$$Q_V(u) := a_0 \int_{\mathcal{O}} \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u(x)|^2 dx - \int_{\mathcal{O}} V(x)|u(x)|^2 dx, \text{ pour } u \in C_0^\infty(\mathcal{O}),$$

Q_V est fermée dans $L^2(\mathcal{O})$ donc Q_V est la forme quadratique d'un unique opérateur auto-adjoint à savoir $H_{m,V}$, voir par exemple [27, §VIII.6]. Il existe une façon alternative pour prouver la fermeture de Q_V, ceci en utilisant la capacité essentielle, pour plus de détails voir [23, §16.5].

Dans ce papier on travail dans $\mathbb{R}^d$. Au passage, on remarque que le théorème 1.1 peut s'applique pour un opérateur elliptique à coefficients des fonctions mesurables.

En ce qui concerne l'étude du nombre des valeurs propres négatives correspondant à un opérateur elliptique perturbé par un potentiel, les auteurs Y.Egorov, V.Kondratiev and M.El Aïdi ont montré que ce nombre est majoré par l'intégral du potentiel et où les conditions aux bords sont de Robin, pour plus de détails sur ce sujet voir [11, 10].

La structure de ce papier est la suivante, nous commençons par donner la définition d'un cube dyadique y compris ses propriétés, puis on exposera le théorème de trace correspondant à l'opérateur de Riesz démontré par I. Verbitsky et où sa preuve est simple par rapport à celle du [20, Theorem 2.3], où les auteurs R. Kerman et T. Sawyer traitent le cas général de tout les opérateurs potentiels, leur démonstration est basée sur un théorème d'équivalence entre les opérateurs maximaux et opérateurs potentiels. Enfin, on utilise le principe de minmax ceci pour déterminer un sous-espace vectoriel de $L^2(\mathbb{R}^d)$ tel que $H_{m,V}$ soit de signe positive et que la codimension de ce sous-espace est au plus égal à $C(d)N_0$.

1.1. Quelques Applications en Mathématiques-Physiques

Les auteurs Dolbeault-Flores & Guo-Wei ont donné des conditions suffisantes, qui dépendent de la première valeur propre de l'opérateur de Schrödinger à potentiel nul, pour la structure et pour l'existence d'un nombre fini de solutions [radiales] bornées correspondantes au problème stationnaire de valeur propre non linéaire :

$$(*)\left\{\begin{array}{l} -\Delta u = u^p + \lambda u \text{ dans } B, \\ u > 0 \text{ dans } B \text{ et } u = 0 \text{ sur } \partial B \end{array}\right.$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}$, $p > \dfrac{d+2}{d-2}$, B est une la boule unitée dans $\mathbb{R}^d$ avec $d \geq 3$, pour plus de détails voir [9, 15]. Savoir que la somme de valeurs propres, correspondantes à $H_{m,V}$, est bornée, nous ouvre la voie à chercher des réponses concernant une généralisation des résultats de Dolbeault-Flores & Guo-Wei Guo, à un problème de valeur propre non linéaire d'ordre supérieur, analogue à $(*)$, par exemple en substituant $-\Delta$ par l'opérateur $H_{m,V}$ ou plus géneral par un opérateur différentielle positif elliptique.

Citons quelques applications en mécanique classique ou semi-classique correspondantes à l'opérateur $H_{m,V}$, le problème des vibrations des plaques correspondant à l'étude des propriétés des valeurs propres de l'opérateur biharmonique $H_{2,0}$. Une autre application très intéressante et très active à nos jours est l'étude des résonances, c-à-d les pôles du prolongement méromorphe dans une région du plan complexe, de la résolvante associée à l'opérateur $H_{1,V}$, le nombre des résonnances, selon la classe du potentiel et la nature du domaine, peuvent dépendre du nombre des valeurs propres de $H_{1,V}$. Une littérature sur les propriétés des résonances et sur leurs comptages concernant $H_{1,V}$ est publiée dans (liste non exhaustive) [2, 3, 5, 4, 6, 7, 17, 16, 18, 19, 21, 22, 25, 33].

La conjecture de Beth-Sommerfeld qui dit que le spectre de l'opérateur de Schrödinger à potentiel périodique est absolument continue et constitué d'un nombre fini d'intervalles fermés disjoints, c-à-d un nombre fini de zone instable, cette conjecture dépend bien du nombre de valeurs propres. La validité de cette conjecture a été traitée sous différentes approches ceci en tenant compte aussi de la dimension de l'espace, du domaine et de la classe de potential, voir par exemple [8, 31, 26]. Pour le cas de l'opérateur de Schrödinger généralisé, l'auteur M.Skriganov a montré, via la décomposition de Floquet-Bloch, que la validité de cette conjecture est liée au calcul du nombre de valeurs propres associées à $H_{m,V}$, pour plus de détails voir [29, 30]. Les auteurs A.Sobolev et L.Parnovski dans [24] ont trouvé de nouveaux résultats liés à la validité de cette conjecture pour l'opérateur $H_{m,V}$, avec V périodique para rapport au réseau $(2\pi\mathbb{Z})^n$, leurs méthodes sont inspirées de celles utilisées par M.Skriganov.

2. Lemmes et Définitions

Définition 2.1. On appelle Q un cube **dyadique** d'ordre $l \in \mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}^d$, s'il existe $(k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{Z}^d$ tel que $Q = \prod_{j=1}^{d} \left(k_j 2^l, (k_j+1)2^l\right)$.

Définition 2.2. Soit $\mathcal{B}$ une famille de cubes dyadiques.
On dit que Q est **maximal** dans $\mathcal{B}$, si $Q \in \mathcal{B}$ et n'est pas strictement contenu dans un aucun élément de $\mathcal{B}$.

On dit que Q est **minimal** dans $\mathcal{B}$, si $Q \in \mathcal{B}$ et ne contient aucun élément de $\mathcal{B}$.

À partir de la définition du cube dyadique, on voit bien que deux cubes dyadiques d'ordre différent, nous mène au situations suivantes (qui sont au nombre de trois) : deux cubes dyadiques sont disjoints, sinon l'un est contenu dans l'autre. On déduit la suivante définition qui sera de grande utilité dans la suite, puisque elle nous permet de définir les descendants d'un élément de $\mathcal{B}$.

Définition 2.3. Soient $(Q, Q') \in \mathcal{B}^2$ on dit que Q' est un descendant de Q si Q' est proprement contenu dans Q tel que $Q \setminus Q' \notin \mathcal{B}$. On note $D(Q)$ l'ensemble des descendants de Q. On dit que Q est **ramifié**, s'il existe au moins deux cubes dans $D(Q)$.

Maintenant on rappelle la définition du potentiel de Riesz.

Définition 2.4. Le potentiel de Riesz d'ordre $\alpha \in (0, d)$ est défini dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ par $I_\alpha f(x) = \dfrac{\Gamma(\frac{d-\alpha}{2})}{\pi^{\frac{d}{2}} 2^\alpha \Gamma(\frac{\alpha}{2})} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \frac{f(y)}{|x-y|^{d-\alpha}} dy$, $\Gamma(\cdot)$ est la fonction Gamma définie dans $(0, +\infty)$ par $\Gamma(x) := \displaystyle\int_0^\infty y^{x-1} \exp(-y) dy$.

Dans la suite et pour commodité des calculs on travaille avec le potentiel de Riesz $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \frac{f(y)}{|x-y|^{d-\alpha}} dy$. Avec cette définition, le potentiel de Riesz vérifie la propriété de semi-groupe $I_\alpha . I_\beta = I_{\alpha+\beta}$ pour tout $(\alpha, \beta) \in (0, d)^2$ et $\alpha+\beta < d$, dans la démonstration du théorème 1.1 on utilisera $\alpha = \beta = m$. On rappelle la définition du cône.

Définition 2.5. Soit $x \in \mathbb{R}^d$, B_1 une boule ouverte centrée en x et B_2 une boule ouverte qui ne contient pas x. Par définition un <u>cône fini</u> dans $\mathbb{R}^d$ de sommet x est l'ensemble $\mathcal{C}_x$ défini par

$$\mathcal{C}_x = B_1 \cap \{x + \lambda(x-y) \, avec \; y \in B_2 \; et \; \lambda > 0\}.$$

Définition 2.6. On dit qu'un domaine Ω admet la propriété du cône fini, s'il existe un cône fini $\mathcal{C}$ tel que chaque point $x \in \Omega$ est le sommet d'un cône fini $\mathcal{C}_x$ contenu dans Ω et congru à C.

Vu que $d > 2m > m$, on a besoin du résultat suivant qui est extrait du [1, Theorem 8.25] :

Lemme 1. *Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^d$, qui possède la propriété du cône fini. Pour $u \in C^m(\Omega)$ on a :*

$$|u(x)| \leq K(d,m)\left(\sum_{|\alpha|=0}^{m-1} \int_\Omega |D^\alpha u(x)| dx + I_m\Big(\chi_\Omega(x). \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u(x)|\Big)\right).$$

La constante $K(d,m)$ dépend de $d,\ m$ et du volume de Ω.
En résumé, l'idée de la démonstration est d'appliquer la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction $f = u \circ \phi$ avec $\phi(t) = y + t(x-y)$ pour $t \in [0,1]$, para conséquent la première somme, du membre de droite, s'obtient facilement et en ce qui concerne le second terme est un majorant du reste intégral du développement de la fonction u, ce majorant est obtenu par passage en coordonnées sphériques pour y un élément du cône. Quand on examine la démonstration de ce théorème on remarque qu'on peut considérer Ω juste un ouvert possédant la propriété du cône fini. Maintenant pour nôtre étude on a besoin du corollaire suivant

Corollaire 2.7. *Soit un Ω un domaine de $\mathbb{R}^d$ qui possède la propriété du cône fini. Pour $u \in C^m(\Omega)$ on a :*

$$\begin{aligned} |u(x)| \quad &\leq \quad \left| \sum_{|\alpha|\leq m-1} \frac{1}{\alpha!} \sum_{\beta\leq\alpha} P_{\alpha,\beta}(x) \int_\Omega y^\beta D^\alpha u(y)dy \right| \\ &\qquad\qquad + K(d,m) I_m\Big(\chi_\Omega(x). \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u(x)|\Big), \quad (2.1) \end{aligned}$$

$P_{\alpha,\beta}(x)$ est un polynôme en x (voir la démonstration), $y^\beta = y_1^{\beta_1} y_2^{\beta_2} \ldots y_d^{\beta_d}$ lorsque $y = (y_1, y_2, \ldots, y_d) \in \Omega$ et $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_d) \in \mathbb{N}^d$. L'expression $\beta \leq \alpha$ signifie que $\beta_l \leq \alpha_l$ pour tout $l \in \mathbb{N} \cap [1, d]$.

Démonstration. Soit $x \in \Omega$ et considérons un cône C contenu dans Ω de sommet x. On applique la formule de Taylor à la fonction f telle que pour $t \in [0, 1]$ on a $f(t) = u(y + t(x - y))$:

$$f(1) = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} + \frac{1}{(m-1)!} \int_0^1 (1-t)^{m-1} f^{(m)}(t)dt,$$

en utilisant la dérivation des fonctions composées on a :

$$f^{(j)}(t) = \sum_{|\alpha|=j} \frac{j!}{\alpha!} D^\alpha u(y + t(x-y))(x-y)^\alpha.$$

On a :

$$\begin{aligned} u(x) \quad &= \quad \sum_{|\alpha|\leq m-1} \frac{(x-y)^\alpha}{\alpha!} D^\alpha u(y) \\ &\qquad + \sum_{|\alpha|=m} \frac{(x-y)^\alpha}{\alpha!} \int_0^1 m(1-t)^{m-1} D^\alpha u(y + t(x-y))dt \\ &= \quad P_y^{m-1} u(x) + R_y^{m-1} u(x). \qquad (2.2) \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} |u(x)| \quad &= \quad \left| \frac{1}{|C|} \int_C u(x)dy \right| \\ &\leq \quad \left| \frac{1}{|C|} \int_C P_y^{m-1} u(x)dy \right| + \left| \frac{1}{|C|} \int_C R_y^{m-1} u(x)dy \right|, \end{aligned}$$

$|C|$ représente la mesure de Lebesgue du cône C.

En utilisant le développement de la formule de binôme généralisée on a :

$$\begin{aligned}
\int_\Omega P_y^{m-1}u(x)dy &= \sum_{|\alpha|\leq m-1} \frac{1}{\alpha!}\int_\Omega (x-y)^\alpha D^\alpha u(y)dy \\
&= \sum_{|\alpha|\leq m-1} \frac{1}{\alpha!}\int_\Omega \sum_{\beta\leq\alpha} P_{\alpha,\beta}(x)y^\beta D^\alpha u(y)dy \\
&= \sum_{|\alpha|\leq m-1} \frac{1}{\alpha!}\sum_{\beta\leq\alpha} P_{\alpha,\beta}(x)\int_\Omega y^\beta D^\alpha u(y)dy.
\end{aligned}$$

Un majorant de $\int_C R_y^{m-1}u(x)dy$ est donné dans la démonstration du lemme 1, c-à-d comme ce qu'on avait dit avant, on travaille en coordonnées sphériques d'un point du cône et on trouve que l'intégral $\int_C R_y^{m-1}u(x)dy$ est majorée par $K(d,m)\int_C \sum_{|\alpha|=m} \frac{|D^\alpha u(z)|}{|z-x|^{n-m}}dz.$ □

Le théorème suivant, que nous utilisons pour nôtre étude, est dû à I.Verbitsky, qui est extrait du [23, Theorem 2 §11.5] et de la [23, Proposition 2 §11.5], voir aussi [32].

Théorème 2.8. *(Inégalité de la trace). Soit* $1 < p < \infty$ *et soit* $0 < m < d$. *On considère* μ *une mesure de Borel positive definie dans* $\mathbb{R}^d$. *Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) $\int_{\mathbb{R}^d} |I_m f(x)|^p d\mu(x) \leq C\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p dx$, *pour tout* $f\in L_p(\mathbb{R}^d)$.

(2) $\int_B (I_m(\chi_B d\mu))^{p'} \leq C\mu(B)$, *pour toute boule* $B\subset\mathbb{R}^d$, *et* χ_B *est la fonction charactéristique définie dans la boule* B *et* $p' = p/(p-1)$.

L'assertion (2) est appelée condition de Kerman-Sawyer, on a gardé la même écriture C puisque les constantes de (1) et de (2) sont proportionnelles.

Dans la démonstration du théorème 1.1, nous utiliserons ces résultats pour le cas $p=2$ et la mesure μ sera définie par $d\mu(x) = V(x)dx$.

Pour le cas où $m=1$ et pour démontrer le [20, Theorem 3.3], les auteurs R.Kerman et T.Sawyer ont utilisé le lemme suivant dû à E.Fabes, C.Kenig and Serapioni, voir [12, Lemma 1.4].

Lemme 2. *Soit $u \in C^1(\overline{B_R})$, avec $\overline{B_R}$ est la fermeture de la boule euclidienne B_R de rayon R, et $|B_R|$ est le volume de B_R, alors on a*

$$\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R}|u(x)-u(y)|\,dy \leq c\int_{B_R}\frac{|\nabla u(z)|}{|x-y|^{d-1}}\,dz,$$

c est une constante positive.

Comme on le voit que ce lemme est un cas particulier du lemme 1. Dans la démonstration du lemme 2, les auteurs utilisent le théorème de la moyenne à plusieurs variables—donc la pente est exprimée par le gradient de u—dans un segment de $\mathbb{R}^d$, c-à-d $u(x)-u(y)=\nabla u(ty+(1-t)x)\cdot_s(x-y)$ avec $t\in(0,1)$, avec $\cdot_s$ est le produit scalaire défini dans $\mathbb{R}^d$, puis ils utilisent des calculs élémentaires d'intégration et de changement de variables. Donc pour le cas $d>2m>m\geq 1$, on utilise le corollaire 2.7, pour la démonstration du théorème 1.1.

3. Démonstration du théorème 1.1

Soit $\mathcal{B}$ la famille de cubes dyadiques Q qui vérifient

$$\frac{1}{\displaystyle\int_Q V(x)dx}\int_Q\int_Q\frac{V(x)V(y)}{|x-y|^{d-2m}}\,dx\,dy \geq c(d) > 0. \tag{3.1}$$

Grâce à la stricte positivité de la constante $c(d)$, la famille $\mathcal{B}$ est constituée d'une famille finie de cubes dyadiques, sinon on aura une suite infinie de cubes $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ élément de $\mathcal{B}$, cette suite est bien bornée au sens de l'inclusion, donc il existera une sous-suite de cubes $(Q_{n_k})_k\in\mathcal{B}$ tel que (3.1) convergera vers zéro quand l'arête du cube Q_{n_k} tend vers zéro, c-à-d lorsque Q_{n_k} est réduite, par un nombre fini de subdivision, à un point, ce qui est absurde. Alors on peut écrire $\mathcal{B}$ comme :

$$\mathcal{B}=\mathcal{Q}^0\cup\mathcal{Q}^1\cup\mathcal{Q}^2\cup\mathcal{Q}^3,$$

où :

- $\mathcal{Q}^0=\{Q_1,\ldots,Q_{N_0}\}$ est la famille des cubes minimaux de $\mathcal{B}$,
- $\mathcal{Q}^1$ est la famille des cubes maximaux de $\mathcal{B}$,
- $\mathcal{Q}^2$ est la famille des cubes ramifiés de $\mathcal{B}$,
- $\mathcal{Q}^3=\cup_{Q\in\mathcal{Q}^2}D(Q)$ est la famille des descendants des cubes ramifiés de $\mathcal{B}$.

Soit M_0 le cardinal de $\mathcal{B}$, avec $\mathcal{Q}^1 \cup \mathcal{Q}^2 \cup \mathcal{Q}^3 = \{Q_{N_0+1}, \ldots, Q_{M_0}\}$. En suivant l'argument exposé dans les travaux de C.Fefferman voir [13, pages 156-157], argument utilisé dans les travaux de R.Kerman et T.Sawyer, voir la démonstration du [20, Theorem 3.3 part(B)], on a $M_0 \leq C_1(d)N_0$. A la fin de la démonstration, on va voir que la famille des cubes du théorème 1.1 est bien $\mathcal{Q}^0$.

Maintenant on considère la famille

$$\Big(E_j = Q_j \setminus \bigcup_{\substack{k=1\\ k\neq j\\ Q_k\subset Q_j}}^{M_0} Q_k\Big)_{0\leq j\leq M_0}$$

qui forment une partition de $\mathbb{R}^d$ avec $E_0 = \mathbb{R}^d \setminus \bigcup_{j=1}^{M_0} Q_j$. Lorsque $j \in \{1, \ldots, N_0\}$ on a $E_j = Q_j$ ceci est due à la définition des cubes minimaux et que ces dernier ne possèdent pas de descendants.

Pour $V_j = V\chi_{E_j}$ les auteurs C. Fefferman, R. Kerman et T. Sawyer ont montré de deux manières différentes et en utilisant respectivement la décomposition de Calderon-Zygmund et la décomposition de Whitney d'un cube dyadique Q :

$$\int_Q \int_Q \frac{V_j(x)V_j(y)}{|x-y|^{d-2m}}\, dx\, dy \leq C_1 c(d) \int_Q V_j(x)\, dx, \text{ pour } j \in \{0, \ldots, M_0\} \quad (3.2)$$

C_1 est une constante positive.

Lorsque E_j ne sont pas des cubes, alors ils s'expriment comme une réunion de cubes qui ne sont pas forcément deux à deux disjoints, ainsi d'après les travaux de C. Fefferman, voir [13], on a :

Lemme 3. *Soient $Q_1, \ldots, Q_k$ des sous cubes dyadiques deux à deux disjoints d'un cube dyadique Q de $\mathbb{R}^d$. Alors ils existent des cubes $I_1, \ldots, I_r$, qui ne sont pas nécessairement deux à deux disjoints et pas nécessairement dyadiques, tels que :*

$$Q \setminus \bigcup_{j=1}^{k} Q_j = \bigcup_{l=1}^{r} I_l$$

et $r \leq C_d k$, avec C_d est une constante positive qui dépend de d.

Par conséquent en appliquant ce lemme on a : $E_j = \bigcup_{k=1}^{r_j} I_k^j$ où I_k^j sont des cubes de $\mathbb{R}^d$, dans le cas où $j = 0$ on a I_k^0 est constitué d'un produit fini de demi-droite. Par application du lemme 3, le nombre r_j ne dépasse pas $C_2(d)N_0$. L'estimation du nombre des valeurs propres négatives s'appuie sur l'application du lemme de Glazman, énoncé dans [14, Ch1, Theorems 12, 12 bis], voir aussi [28, §28, Lemma 28.1], et qui dit que le nombre des valeurs propres négatives N de l'opérateur $H_{m,V}$ vérifie

$$N = \min_{\mathscr{L}_{\{H_{m,V}\}} \subset L^2(\mathbb{R}^d)} \operatorname{codim} \mathscr{L}_{\{H_{m,V}\}} = \min_{\mathscr{L}_{\{H_{m,V}\}} \subset L^2(\mathbb{R}^d)} \dim \mathscr{L}^{\perp}_{\{H_{m,V}\}},$$

le minimum est pris sur tout les sous-espaces vectoriels $\mathscr{L}_{\{H_{m,V}\}}$ du domaine de définition de la forme quadratique Q_V associée à l'unique opérateur auto-adjoint à savoir $H_{m,V}$. Par définition, on a le sous-espace (admissible)

$$\mathscr{L}_{\{H_{m,V}\}} := \Big\{ u \in L^2(\mathbb{R}^d) \setminus \{0\} \text{ t.q } \Big(H_{m,V} u, u \Big)_{L^2(\mathbb{R}^d)} \geq 0 \Big\} \subset \mathscr{L},$$

avec

$$\begin{aligned} \mathscr{L} \;\; = \;\; & \Big\{ u \in L^2(\mathbb{R}^d) \setminus \{0\} \text{ t.q} \\ & \qquad a_0 \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u(x)|^2 dx \geq \int_{\mathbb{R}^d} V(x) |u(x)|^2 dx \Big\}. \end{aligned}$$

Ainsi, on a $\mathscr{L}^{\perp} \subset [\mathscr{L}_{\{H_{m,V}\}}]^{\perp}$ et

$$N = \min_{\mathscr{L}_{\{H_{m,V}\}} \subset L^2(\mathbb{R}^d)} \dim [\mathscr{L}_{\{H_{m,V}\}}]^{\perp} \leq \min_{\mathscr{L} \subset L^2(\mathbb{R}^d)} \dim \mathscr{L}^{\perp}. \tag{3.3}$$

On choisit le sous-espace suivant

$$\begin{aligned} \Pi \;\; = \;\; & \{ u \in L^2(\mathbb{R}^d) \setminus \{0\} \text{ t.q. } \int_{Q_j} x^\beta D^\alpha u(x) dx = \int_{I_k^j} x^\beta D^\alpha u(x) dx = 0 \\ & \quad \text{pour } 0 \leq j \leq M_0, 0 \leq |\beta| \leq |\alpha| \leq m-1, \ 1 \leq k \leq r_j \}. \end{aligned}$$

Dans l'ensemble Π, les dérivées sont comprises au sens faible. On a choisi ce sous-espace vectoriel, car, voir plus bas, on remarquera que pour $u \in \Pi$ on a

$$a_0 \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u(x)|^2 dx \geq \int_{\mathbb{R}^d} V(x) |u(x)|^2 dx \,.$$

On observe qu'on a

$$\int_Q D^\alpha u(x) dx = 0 \Rightarrow \int_Q x^\beta D^\alpha u(x) dx = 0,$$

pour Q un cube d'arête fini, car grâce à des majorations basiques, appliquées à la formule de binôme généralisée, on a

$$\left|\int_{Q_j} x^\beta D^\alpha u(x)dx\right| \leq b\left|\int_{Q_j} D^\alpha u(x)dx\right|,$$

avec b est une constante positive. Par conséquent, on peut considérer un autre sous-espace vectoriel plus restreint et contenue dans Π.

D'après la définition de Π on voit que $\Pi = S^\perp_{\alpha,\beta}$ avec $S_{\alpha,\beta}$ un sous-espace vectoriel de dimension égal au nombre de conditions portées sur $u \in \Pi$, alors $\Pi^\perp = S_{\alpha,\beta}$.

Étant donné que tous les E_j possèdent la propriété du cône fini, ainsi pour $x \in E_j$ et par application du corollaire 2.7, bien sûr en utilisant un argument de densité, on a :

$$|u(x)| \leq K(d,m)I_m\Big(\chi_{E_j}(x). \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u(x)|\Big), \qquad \text{pour } u \in \Pi. \tag{3.4}$$

Par conséquent pour $u \in \Pi$ et en utilisant (3.4) on a :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} u^2(x)V(x)dx &= \sum_{j=0}^{M_0}\int_{E_j} |u(x)|^2 V_j(x)dx \\ &\leq K(d,m)^2\sum_{j=0}^{M_0}\int_{E_j}\left(I_m\Big(g(x)\Big)\right)^2 V_j(x)dx \\ &\leq K(d,m)^2 C_1 c(d)\sum_{j=0}^{M_0}\int_{E_j} \Big|\sum_{|\alpha|=m} D^\alpha u(x)\Big|^2 dx \qquad (3.5) \\ &\leq a_0\int_{\mathbb{R}^d}\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha u(x)|^2\, dx.\end{aligned}$$

avec $g(x) := \chi_{E_j}(x)\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha u(x)|$.

Dans la démonstration on a pris $c(d)$ très petite. Pour le passage à l'inégalité (3.5), on a appliqué le théorème 2.8 parce que l'inégalité (3.2) est vérifiée et qu'elle est aussi vraie pour toute boule ceci est dû le fait que les cubes dyadiques, voir la définition, forment une partition de $\mathbb{R}^d$.

Alors N est majoré par la dimension de $\Pi^{\perp}$, c-à-d, majoré par

$$\Big(N_0 + r_0 + \sum_{j=N_0+1}^{M_0} r_j\Big) \cdot \operatorname{card}\Big\{(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^{2d},\ 0 \leq |\beta| \leq |\alpha| \leq\ m-1\Big\},$$

en tenant compte que $r_j \leq C_2(d)N_0$ pour $j \in \{0\} \cup \{N_0+1, \dots, M_0\}$ et que $M_0 \leq C_1(d)N_0$, alors on a $N \leq C(d)N_0$.

Donc les cubes du théorème 1.1 sont bien des cubes dyadiques minimaux. Ce théorème nous donne une majoration optimal sur le nombre des valeurs propres négatives.

Références

[1] R. Adams – *Sobolev space*, Academics Press, 1975.

[2] J. Avron & Bender-Wu – « Formulas for the zeeman effect in hydrogen », *Ann. Phys. Publ. Mat.* **131** (1981), p. 73–94.

[3] A. S. Barreto & M. Zworski – « Existence of resonances in potential scattering », *Commun. Pure Appl. Math.* **49** (1996), p. 1271–1280.

[4] J.-F. Bony & J. Sjöstrand – « Traceformula for resonances in small domains », *J. Funct. Anal.* **184** (2001), no. 2, p. 402–418.

[5] J. Bony – « Minoration du nombre de résonances engendrées par une trajectoire fermée », *Commun. Partial Differ. Equations* **27 No.5-6** (2002), p. 1021–1078.

[6] N. Burq – « Lower bounds for shape resonances widths of long rang Schrödinger operators », *Am. J..Math.* **124, No.4** (2002), p. 677–735.

[7] J. Combes, P. Duclos, M. Klein & R. Seiler – « The shape resonance », *Comm. Math. Phy.* **110** (1987), p. 215–236.

[8] B. Dahlberg & E. Trubowitz – « A remark on two dimensional periodic potentials », *Comment. Math. Helvetici* **57** (1982), p. 130–134.

[9] J. Dolbeault & I. Flores – « Geometry of phase space and solutions of semilinear elliptic equations in a ball », *Trans. Amer. Math. Soc.* **359** (2007), p. 4073–4087.

[10] Y. V. Egorov & M. El Aïdi – « Spectre négatif d'un opérateur elliptique avec des conditions au bord de Robin », *Publ. Mat.* **45** (2001), no. 1, p. 125–148.

[11] Y. Egorov & V. Kondratiev – « Estimates of the negative spectrum of an elliptic operator, in spectral theory of operators », *(Novgorod, 1989), Amer.Math.Soc.Transl.Ser.2, Amer.Math. Soc., Providence, RI* **150** (1992), p. 129–206.

[12] E. Fabes, C. Kenig & R. Serapioni – « The local regularity of solutions of degenerate elliptic equations », *Comm. in P.D.E.* **7** (1982), p. 77–116.

[13] C. Fefferman – « The uncertainty principle », *Bull. A.M.S* (1983), p. 129–206.

[14] I. Glazman – *Direct methods of qualitative spectral analysis of singular differential operators*, Gosudarstv. Izdat. Fiz.-Mat. Lit., Moscow, 1963. English translation : Daniel Davey and Co., New York, 1966.

[15] Z. Guo & J. Wei – « Global solution branch and morse index estimates of a semilinear elliptic equation with super-critical exponent », *Trans. Amer. Math. Soc.* **363** (2011), p. 4777–4799.

[16] E. Harell & B. Simon – « The mathematical theory of resonances which have exponentially small widths », *Duke Math. J.* **47** (1980), p. 845–902.

[17] B. Helffer & J. Sjöstrand – « Résonances en limite semi-classique », *Mém. Soc. Math. France (N.S.)* (1986), no. 24-25, p. iv+228.

[18] P. D. Hislop & I. M. Sigal – « Shape resonances in quantum mechanics », in *Differential equations and mathematical physics (Birmingham, Ala., 1986)*, Lecture Notes in Math., vol. 1285, Springer, Berlin, 1987, p. 180–196.

[19] P. Hislop & I. Sigal – « Semiclassical resolvent estimates », *Ann. Inst. H.Poincaré Phys. Théor.* **51** (1989), p. 187–198.

[20] R. Kerman & T. Sawyer – « The trace inequality and eigenvalue estimates for Schrödinger operators », *Ann.Inst.Fourier,Grenoble(36)* **4** (1986), p. 207–228.

[21] A. Martin – « Résonance dans l'approximation de born oppenheimer I », *Journal of Differ. Eq.* (1991), p. 204–234.

[22] ———, « Résonance dans l'approximation de born oppenheimer II », *Commun.Math.Phys.* **135** (1991), p. 517–530.

[23] V. Maz'ya – *Sobolev spaces with applications to elliptic partial differential equations*, augmented éd., Grundlehren der Mathematischen

Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 342, Springer, Heidelberg, 2011.

[24] L. Parnovski & A. Sobolev – « On the beth-sommerfeld conjecture for the polyharmonic operator », *Duke Math. J.* **107 Number 2** (2001), p. 209–238.

[25] V. Petkov & M. Zworski – « Breit-wigner approximation and the distribution of resonances », *Comm. Math. Phy.* **204** (1999), p. 329–351, erratum : *Comm. Math. Phys.* **214** (2000), p. 733-735.

[26] V. Popov & M. Skriganov – « A remark on the spectral structure of the two di- mensional Schrödinger operator with a periodic potential », *Zap. Nauchn. Sem. LOMI AN SSSR* **109** (1981), p. 131–133.

[27] M. Reed & B. Simon – *Methods of modern mathematical physics. I*, second éd., Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1980, Functional analysis.

[28] M. Shubin – *Pseudodifferential operators and spectral theory*, Second Edition, Springer-Verlag, 2001.

[29] M. Skriganov – « Finiteness of the number of gaps in the spectrum of the mutlidimensional polyharmonic operator with a periodic potential. », *Mat. Sb (Engl. transl. : Math. USSR Sb. 41 (1982)* **113** (1980), p. 131–145.

[30] M. M. Skriganov – « Geometric and arithmetic methods in the spectral theory of multidimensional periodic operators », *Trudy Mat. Inst. Steklov.* **171** (1985), p. 122.

[31] O. Veliev. – « Asymptotic formulas for the eigenvalues of a periodic Schrödinger operator and the bethe-sommerfeld conjecture », *Functional Anal. Appl.* **21** (1987), p. 87–99.

[32] I. Verbitsky – « Nonlinear potentials and trace inequalities », *The Maz'ya anniversary collection, Vol2 (Rostock, 1998), 323-343, Oper.Theory Adv.Appl., Birkhäuser, Basel,* **110** (1998), p. 323–343.

[33] M. Zworski – « Resonances in physics in geometry », *Notices Amer. Math. Soc.* **46** (1999), p. 319–328.

Mohammed El Aïdi
Departamento de Matemáticas
Universidad Nacional de Colombia.
Avenida Carrera 30, numéro 45-03.
Bogotá, D.C. Colombia.
melaidi@unal.edu.co