ANNALES MATHÉMATIQUES

BLAISE PASCAL

Noureddine Ghiloufi et Khalifa Dabbek

Prolongement d'un courant positif quasi-plurisurharmonique

Volume 16, n° 2 (2009), p. 287-304.

<http://ambp.cedram.org/item?id=AMBP_2009__16_2_287_0>

Publication éditée par le laboratoire de mathématiques de l'université Blaise-Pascal, UMR 6620 du CNRS Clermont-Ferrand — France

cedram

Article mis en ligne dans le cadre du Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques

http://www.cedram.org/

Annales mathématiques Blaise Pascal **16**, 287-304 (2009)

Prolongement d'un courant positif quasi-plurisurharmonique

Noureddine Ghiloufi
Khalifa Dabbek

Résumé

Le but de cet article est de montrer un résultat de prolongement d'un courant positif, défini en dehors d'un obstacle fermé, dont le dd^c est dominé par un courant positif fermé de masse localement finie. On étudie divers types d'obstacles : soit un ensemble fermé pluripolaire complet, soit l'ensemble des zéros d'une fonction strictement k-convexe positive. Dans la troisième partie, sous des conditions sur la dimension de Hausdorff de l'obstacle, on démontre le prolongement d'un tel courant. On termine par une application sur le prolongement d'un tel courant à travers une variété non Levi-plate. On améliore ainsi des résultats de Dabbek, Elkhadhra et El Mir.

Extension of a positive quasi-plurisuperharmonic current

Abstract

We prove in this article an extension theorem for a positive current defined outside of a closed set ("obstacle"), such that its dd^c is dominated by a closed positive current with locally finite mass. We investigate various types of obstacles : closed complete pluripolar sets, zero sets of strictly k-convex nonnegative functions. In the third part, under suitable conditions on the Hausdorff's dimension of the obstacle, we prove the existence of an extension for such a current. We finish with an application to prove the extension of a such current across a non Levi-flat variety. In this way, we improve previous results due to Dabbek, Elkhadhra and El Mir.

1. Introduction

Étant donné un ensemble fermé A d'un ouvert Ω de $\mathbb{C}^n$ et T un courant positif de bidimension (p,p) défini sur $\Omega \setminus A$. Sous quelles conditions sur

Mots-clés : Fonction plurisousharmonique, Ensemble pluripolaire, Courant positif, Prolongement, Tranchage.
Classification math. : 32U05, 32U40, 32V20.

A et T peut-on prolonger T sur Ω ?
En considérant les courants positifs fermés, SKODA [12] a prouvé qu'un courant positif fermé de masse localement finie se prolonge à travers un ensemble analytique en un courant positif fermé. EL MIR [6] a ensuite amélioré ce résultat en considérant comme obstacle un fermé pluripolaire complet. Pour le cas d'une sous variété CAUCHY-RIEMANN, EL MIR [6] a généralisé le résultat de CHIRKA [1] pour un courant positif fermé. En 1986, EL MIR [7] a montré qu'un courant positif fermé de bidimension (p, p) défini en dehors de l'ensemble des zéros d'une fonction strictement $k-$convexe, avec $p \geq k+1$, se prolonge en un courant positif.
Dans ce papier on généralise quelques résultats parmi celles de DABBEK-ELKHADHRA-EL MIR [4] qui ont eux même amélioré certains résultats de ces auteurs.

Définition 1.1. Soit A un ensemble fermé d'un ouvert Ω de $\mathbb{C}^n$. Un courant positif T de bidimension (p, p) sur $\Omega \setminus A$ est dit *quasi-plurisurharmonique* (quasi-prh) s'il existe un courant positif fermé S de bidimension $(p-1, p-1)$ et de masse localement finie au voisinage des points de A tel que $dd^cT \leq S$ sur $\Omega \setminus A$.

On s'interesse au problème de prolongement des courants positifs quasi-prh à travers des différents obstacles. On commence par le cas d'un obstacle pluripolaire complet, dans ce cas on a besoin du résultat suivant dû à DINH et SIBONY

Théorème 1.2. [5] *Soit A un fermé pluripolaire complet d'une variété complexe X. Soit T un courant positif quasi-prh de bidimension (p, p) sur $X \setminus A$. On suppose que T est de masse localement finie au voisinage des points de A. Alors dd^cT est de masse localement finie au voisinage des points de A, de plus le courant $\widetilde{dd^cT} - dd^c\widetilde{T}$ est positif porté par A. Si de plus T est fermé alors $\widetilde{T}$ est aussi fermé.*

2. Cas d'un obstacle fermé pluripolaire complet

Le résultat principal de cette partie est une généralisation aux courants positifs d'un résultat connu sur les ensembles analytiques [1]. Le cas d'un courant positif fermé est démontré par EL MIR-FEKI [8], le cas d'un courant négatif plurisousharmonique ($S = 0$) est démontré par DABBEK, Elkhadhra et El Mir [4], alors que le cas d'un courant positif plurisousharmonique (psh) où son dd^c est supposé de masse localement finie est démontré par Dabbek [2] (en choisissant $S = dd^cT$).

Théorème 2.1. *Soient A un fermé pluripolaire complet d'un ouvert Ω de $\mathbb{C}^n$ et T un courant positif quasi-prh de bidimension (p,p) sur $\Omega \smallsetminus A$ tel que la mesure de* Hausdorff $\mathscr{H}_{2p}(\overline{Supp\,T} \cap A) = 0$. *Alors $\widetilde{T}$ existe et est positif quasi-prh sur Ω et le courant résiduel $\widetilde{dd^cT} - dd^c\widetilde{T}$ est positif porté par A.*

Démonstration. D'après le théorème 1.2, il suffit de montrer que $\widetilde{T}$ existe. En fait, il suffit de montrer que T est de masse localement finie au voisinage de chaque point z_0 de $\overline{Supp\,T} \cap A$. Pour cela on a besoin de montrer certains résultats préliminaires.

Proposition 2.2. *Soit A un fermé pluripolaire complet d'un ouvert Ω de $\mathbb{C}^n$ et soit T un courant positif de bidimension (p,p) sur $\Omega \smallsetminus A$. On suppose qu'il existe un courant positif fermé S de bidimension $(p-1,p-1)$ de masse localement finie au voisinage des points de A vérifiant $dd^cT \leq S$ sur $\Omega \smallsetminus A$. Soit v une fonction psh de classe $\mathcal{C}^2$, $v \geq -1$ sur Ω telle que $\Omega' = \{z \in \Omega;\ v(z) < 0\}$ soit relativement compact dans Ω. Pour K un compact de Ω', on pose $c_K = -\sup_{z\in K} v(z)$.*
Alors pour tout entier $1 \leq s \leq p$ et pour toute fonction u psh de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω' satisfaisant $-1 \leq u < 0$, il existe une constante $\delta = \delta(u) > 0$ telle qu'on a :

$$\int_{K\smallsetminus A} T \wedge (dd^cu)^p \leq c_K^{-s} \int_{\Omega'\smallsetminus A} T \wedge (dd^cv)^s \wedge (dd^cu)^{p-s} + \delta||\widetilde{S}||_L$$

où L est un compact de Ω contenant Ω' dans son intérieur.

Démonstration. Il existe une fonction f psh négative sur Ω' qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\Omega' \smallsetminus A$ telle que $A \cap \Omega' = \{z \in \Omega';\ f(z) = -\infty\}$. Pour $\lambda \in]0, c_K[$, $\nu \in]0, \lambda[$, $m \in \mathbb{N}$ et ϵ suffisamment petit, on pose $\varphi_m(z) = \mu u(z) + \frac{f(z)+m}{m+1}$, $\quad \varphi_{m,\epsilon}(z) = \max_\epsilon(v(z)+1,\ \varphi_m(z))$ où $\max_\epsilon$ est le produit de convolution de la fonction $(x_1,x_2) \longmapsto \max(x_1,x_2)$ avec un noyau régularisant positif sur $\mathbb{R}^2$ qui dépend uniquement de $||(x_1,x_2)||$. La fonction $\varphi_{m,\epsilon}$ est psh de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω', de plus $\varphi_{m,\epsilon} = v+1$ sur un voisinage de $\partial\Omega' \cup (\Omega' \cap \{f \leq -m\}$. En effet, pour $z \in \partial\Omega'$ on a $v(z) = 0$ et

$$\varphi_m(z) = \underbrace{\mu u(z)}_{\leq 0} + \underbrace{\frac{\overbrace{f(z)}^{<0} + m}{m+1}}_{<1} < 1 \text{ donc } \max(\varphi_m(z), v(z)+1) = v(z)+1.$$

Pour $z \in \Omega' \cap \{f \leq -m\}$, $\varphi_m(z) = \mu u(z) + \underbrace{\dfrac{f(z)+m}{m+1}}_{\leq 0} \leq \underbrace{\mu u(z)}_{<0} < \underbrace{1+v(z)}_{\geq 0}$

donc $\max(\varphi_m(z), v(z)+1) = v(z)+1$.
Considérons l'ouvert $\Omega'_m := \Omega' \cap \{f > -m\}$ alors

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega'_m} T \wedge (dd^c u)^{p-s} \wedge (dd^c \varphi_{m,\epsilon})^{s-1} \wedge dd^c(\varphi_{m,\epsilon} - (v+1)) \\
&= \int_{\Omega'_m} dd^c T \wedge (dd^c u)^{p-s} \wedge (dd^c \varphi_{m,\epsilon})^{s-1} \wedge (\varphi_{m,\epsilon} - (v+1)) \\
&\leq \int_{\Omega'_m} S \wedge (dd^c u)^{p-s} \wedge (dd^c \varphi_{m,\epsilon})^{s-1} \wedge (\varphi_{m,\epsilon} - (v+1)).
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega'_m} T \wedge (dd^c u)^{p-s} \wedge (dd^c \varphi_{m,\epsilon})^{s} \\
&\qquad \leq \int_{\Omega'_m} T \wedge (dd^c u)^{p-s} \wedge (dd^c \varphi_{m,\epsilon})^{s-1} \wedge dd^c v \\
&\qquad\qquad + \int_{\Omega'_m} S \wedge (dd^c u)^{p-s} \wedge (dd^c \varphi_{m,\epsilon})^{s-1} \wedge (\varphi_{m,\epsilon} - (v+1)).
\end{aligned}$$

Par récurrence on a

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega'_m} T \wedge (dd^c u)^{p-s} \wedge (dd^c \varphi_{m,\epsilon})^{s} \\
&\leq \int_{\Omega'_m} T \wedge (dd^c u)^{p-s} \wedge (dd^c v)^{s} \\
&\qquad + \int_{\Omega'_m} S \wedge (dd^c u)^{p-s} \wedge (\varphi_{m,\epsilon} - (v+1)) \wedge \sum_{j=1}^{s} (dd^c \varphi_{m,\epsilon})^{s-j} \wedge (dd^c v)^{j} \\
&\leq \int_{\Omega'_m} T \wedge (dd^c u)^{p-s} \wedge (dd^c v)^{s} \\
&\qquad + \int_{\Omega'_m} S \wedge (dd^c u)^{p-s} \wedge (\varphi_{m,\epsilon} - (v+1)) \wedge (dd^c(\varphi_{m,\epsilon} + v))^{s}. \qquad (2.1)
\end{aligned}$$

Comme $\Omega' \subset L$ où L est un compact de Ω, que toutes les fonctions sont $\mathcal{C}^2$ et que S est positif fermé alors d'après l'inégalité de CHERN-LEVINE-NIRENBERG, il existe une constante $\delta_1 = \delta_1(||u||_{\infty(L)},\ ||v||_{\infty(L)})$ telle que

$$\int_{\Omega'_m} S \wedge (dd^c u)^{p-s} \wedge (\varphi_{m,\epsilon} - (v+1))(dd^c(\varphi_{m,\epsilon} + v))^s \leq \delta_1 ||\widetilde{S}||_L. \quad (2.2)$$

Soit $R > 0$ un réel et $K_R = \{z \in K;\ f(z) \geq -R\}$; pour $m \geq R$, on a $K_R \subset \Omega'_m$ et pour tout $z \in K_R$ on a $\varphi_m(z) = \mu \underbrace{u(z)}_{\geq -1} + \frac{f(z)+m}{m+1} \geq -\mu + \frac{m-R}{m+1}$.

Or $\frac{m-R}{m+1} - \mu = 1 - \lambda + \left[(\lambda - \mu) - \frac{1+R}{m+1}\right]$ et il existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m \geq m_0$ on a $\frac{1+R}{m+1} < \lambda - \mu$. D'où pour $m \geq m_0,\ \varphi_m(z) > 1 - \lambda$. Puisque $v \leq -c_K$ sur K_R, on obtient $v + 1 \leq 1 - c_K \leq 1 - \lambda$ et donc $\varphi_{m,\epsilon} \equiv \varphi_m$ sur un voisinage de K_R. De plus d'après les inégalités (2.1) et (2.2)

$$\int_{K_R} T \wedge (dd^c u)^{p-s} \wedge (dd^c \varphi_m)^s \leq \int_{\Omega'_m} T \wedge (dd^c u)^{p-s} \wedge (dd^c v)^s + \delta_1 ||\widetilde{S}||_L.$$

Remarquons que $dd^c \varphi_m = \mu dd^c u + \frac{1}{m+1} dd^c f \geq \mu dd^c u$ donc $(dd^c \varphi_m)^s \geq \mu^s (dd^c u)^s$ et par suite

$$\mu^s \int_{K_R} T \wedge (dd^c u)^p \leq \int_{\Omega'_m} T \wedge (dd^c u)^{p-s} \wedge (dd^c v)^s + \delta_1 ||\widetilde{S}||_L.$$

Comme $\Omega'_m \subset \Omega' \smallsetminus A$, alors

$$\mu^s \int_{K_R} T \wedge (dd^c u)^p \leq \int_{\Omega' \smallsetminus A} T \wedge (dd^c u)^{p-s} \wedge (dd^c v)^s + \delta_1 ||\widetilde{S}||_L.$$

Lorsque $R \to +\infty$ et $\mu \to c_K$,

$$c_K^s \int_{K \smallsetminus A} T \wedge (dd^c u)^p \leq \int_{\Omega' \smallsetminus A} T \wedge (dd^c u)^{p-s} \wedge (dd^c v)^s + \delta_1 ||\widetilde{S}||_L.$$

□

Dans toute la suite $\mathbb{B}^k$ représente la boule unité de $\mathbb{C}^k$.

Proposition 2.3. *Soient A un fermé pluripolaire complet de $\mathbb{B}^k \times \mathbb{B}^{n-k}$ de $\mathbb{C}^n$ et T un courant positif quasi-prh de bidimension (p,p) sur $\mathbb{B}^k \times \mathbb{B}^{n-k} \smallsetminus A$. On suppose que pour $k \leq p < n$, on a :*

a) *Il existe $0 \leq r < 1$ pour lequel T est de masse localement finie au voisinage des points de l'ensemble $\{(z', z'') \in \mathbb{B}^k \times \mathbb{B}^{n-k};\ |z''| > r\}$.*

b) *$T \wedge (dd^c|z'|^2)^k$ est de masse localement finie sur $\mathbb{B}^k \times \mathbb{B}^{n-k}$.*

Alors $\widetilde{T}$ existe et est positif quasi-prh sur $\mathbb{B}^k \times \mathbb{B}^{n-k}$.

Démonstration.
Quitte à considérer $T \wedge \beta^{p-k}$ On peut supposer que $k = p$. Pour $r < a < t < 1$, on pose $v_\epsilon(z) = max_\epsilon(|z'|^2 - t^2, \dfrac{1}{t^2 - a^2}(|z''|^2 - t^2))$. La fonction v_ϵ est psh, $\mathcal{C}^\infty$ et vérifie $-1 \leq v_\epsilon < 0$ dans $t\mathbb{B}^k \times t\mathbb{B}^{n-k}$ et $v_\epsilon \equiv |z'|^2 - t^2$ dans $\{|z''| \leq a\}$.

$$\begin{aligned}\int_{(t\mathbb{B}^k \times t\mathbb{B}^{n-k}) \smallsetminus A} T \wedge (dd^c v_\epsilon)^k &= \int_{(t\mathbb{B}^k) \times \{|z''| < a\} \smallsetminus A} T \wedge (dd^c |z'|^2)^k \\ &\quad + \int_{(t\mathbb{B}^k) \times \{a \leq |z''| < t\} \smallsetminus A} T \wedge (dd^c v_\epsilon)^k\end{aligned}$$

D'après les hypothèses a) et b), les termes à droite de cette égalité sont finis. Soient K un compact de $t\mathbb{B}^k \times t\mathbb{B}^{n-k}$ et S le courant positif fermé de bidimension $(p-1, p-1)$ de masse localement finie au voisinage des points de A vérifiant $dd^c T \leq S$ sur $\mathbb{B}^k \times \mathbb{B}^{n-k} \smallsetminus A$. En appliquant la proposition 2.2 avec T, $u = |z|^2 - t^2$, $v = v_\epsilon$ et $L = \overline{t'\mathbb{B}^k \times t'\mathbb{B}^{n-k}}$ où $t < t' < 1$ on aura

$$0 \leq \int_{K \smallsetminus A} T \wedge \beta^p \leq c_K^{-p} \int_{t\mathbb{B}^k \times t\mathbb{B}^{n-k} \smallsetminus A} T \wedge (dd^c v_\epsilon)^p + \delta ||\widetilde{S}||_L < +\infty.$$

Par suite T est de masse localement finie au voisinage des points de A. $\square$

Proposition 2.4. *Soient A un ensemble fermé pluripolaire complet de $\mathbb{B}^k \times \mathbb{B}^{n-k}$ et T un courant positif quasi-prh de bidimension (p, p) sur $\mathbb{B}^k \times \mathbb{B}^{n-k} \smallsetminus A$. On suppose que pour $k \leq p < n$, on a :*

a) *Il existe $0 \leq r < 1$ pour lequel T est de masse localement finie au voisinage des points de l'ensemble $\{(z', z'') \in \mathbb{B}^k \times \mathbb{B}^{n-k},\ |z''| > r\}$.*

b) *Il existe un ouvert $\mathcal{O} \subset \mathbb{B}^k$ tel que $T \wedge (dd^c |z'|^2)^k$ soit de masse localement finie sur $\mathcal{O} \times \mathbb{B}^{n-k}$.*

Alors $\widetilde{T}$ existe et est positif quasi-prh sur $\mathbb{B}^k \times \mathbb{B}^{n-k}$.

Démonstration. Sans perte de généralité, on peut supposer que $p = k$. Par application de la proposition 2.3 sur l'ouvert $\mathcal{O} \times \mathbb{B}^{n-k}$, T est de masse localement finie sur $\mathcal{O} \times \mathbb{B}^{n-k}$. On fixe deux réels $r < a < t < 1$ et on considère une fonction psh v de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{B}^k \times \mathbb{B}^{n-k}$ telle que $(dd^c v)^k$ soit portée par $\mathcal{O}$ et $-1 \leq v < 0$.

On pose $v_\epsilon(z) = max_\epsilon(\pi^* v, \frac{1}{t^2-a^2}(|z''|^2 - t^2))$ où π est la projection canonique de $\mathbb{C}^n$ sur $\mathbb{C}^k$. Puisque $-1 \leq v_\epsilon < 0$ sur $t\mathbb{B}^k \times t\mathbb{B}^{n-k}$ et $v_\epsilon \equiv \pi^* v$ sur $\{|z''| < a\}$ on obtient

$$\begin{aligned}&\int_{(t\mathbb{B}^k \times t\mathbb{B}^{n-k}) \smallsetminus A} T \wedge (dd^c v_\epsilon)^p \\ &= \int_{(t\mathbb{B}^k) \times \{|z''|<a\} \smallsetminus A} T \wedge (dd^c(\pi^* v))^p + \int_{(t\mathbb{B}^k) \times \{a \leq |z''| < t\} \smallsetminus A} T \wedge (dd^c v_\epsilon)^p.\end{aligned}$$

Or $(dd^c(\pi^* v))^p$ est portée par $\mathcal{O} \times \mathbb{B}^{n-k}$ et T est de masse localement finie sur $\mathcal{O} \times \mathbb{B}^{n-k}$, donc la première intégrale du membre droit de la dernière égalité est finie. Par la condition a), la deuxième intégrale est aussi finie ; alors par la proposition 2.2, pour K compact de $t\mathbb{B}^k \times t\mathbb{B}^{n-k}$ et L un compact de $\mathbb{B}^k \times \mathbb{B}^{n-k}$ contenant $t\mathbb{B}^k \times t\mathbb{B}^{n-k}$ dans son intérieur,

$$\int_{K \smallsetminus A} T \wedge \beta^p \leq c_K^{-p} \int_{(t\mathbb{B}^k \times t\mathbb{B}^{n-k}) \smallsetminus A} T \wedge (dd^c v_\epsilon)^p + \delta ||\widetilde{S}||_L$$

où S est le courant positif fermé de bidimension $(p-1, p-1)$ de masse localement finie au voisinage des points de A vérifiant $dd^c T \leq S$ sur $\mathbb{B}^k \times \mathbb{B}^{n-k} \smallsetminus A$. D'où l'existence de $\widetilde{T}$. □

Suite de la démonstration du théorème 2.1. On va montrer que T est de masse localement finie au voisinage de chaque point $z_0 \in A$. Sans perte de généralité, on peut supposer que z_0 est l'origine. Puisque $\mathscr{H}_{2p}(\overline{Supp\, T} \cap A) = 0$, il existe un système de coordonnées et un ouvert $\mathbb{B}^p \times \mathbb{B}^{n-p} \subset \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^{n-p}$, tels que $(\overline{Supp\, T} \cap A) \cap (\mathbb{B}^p \times \partial \mathbb{B}^{n-p}) = \emptyset$. Par conséquent l'application $\pi : (\overline{Supp\, T} \cap A) \cap (\mathbb{B}^p \times \mathbb{B}^{n-p}) \longrightarrow \mathbb{B}^p$ est propre. Comme $\pi(\overline{Supp\, T} \cap A)$ est un fermé de mesure de Lebesgue nulle dans $\mathbb{B}^p$, on peut trouver un ouvert $\mathcal{O} \subset \mathbb{B}^p \smallsetminus \pi(\overline{Supp\, T} \cap A)$. Et par suite T est de masse localement finie dans $\mathcal{O} \times \mathbb{B}^{n-p}$. Donc T vérifie les conditions de la proposition 2.4, d'où $\widetilde{T}$ existe et d'après le Théorème 1.2, le courant $\widetilde{dd^c T} - dd^c \widetilde{T}$ est positif porté par A. On a $\widetilde{S} \geq \widetilde{dd^c T}$. Donc $dd^c \widetilde{T} \leq \widetilde{S}$ or d'après El Mir [6] $\widetilde{S}$ est fermé, ce qui prouve que $\widetilde{T}$ est quasi-prh. □

Comme consequence du théorème 2.1 on démontre le théorème suivant qui généralise des résultats, de Siu [11] pour les courants positifs fermés, de Dabbek-Elkhadhra-El Mir [4] pour les courants négatifs psh et de Dabbek [2] pour un courant positif psh T tel que $\widetilde{dd^c T}$ existe.

Théorème 2.5. *Soient A un ensemble analytique irréductible de dimension complexe p d'un ouvert Ω de $\mathbb{C}^n$ et T un courant positif quasi-prh de bidimension (p,p) sur $\Omega \smallsetminus A$ tel que T soit de masse localement finie au voisinage d'un point $z_0 \in A$. Alors $\widetilde{T}$ existe et est positif et le courant résiduel $\widetilde{dd^cT} - dd^c\widetilde{T}$ est positif porté par A.*

Démonstration. Notons $\widetilde{A} = \{z \in Reg(A);\ T$ est de masse localement finie au voisinage du point $z\}$. Il est clair que $\widetilde{A}$ est un ouvert non vide de $Reg(A)$. De plus, $\widetilde{A}$ est fermé. En effet, soit $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite de points de $\widetilde{A}$ qui converge vers un point $a \in Reg(A)$ (on suppose que $a = 0$). Il existe un système de coordonnées $(z_1, ..., z_n)$ et un ouvert $r\mathbb{B}^p \times r\mathbb{B}^{n-p}$ tels que $Reg(A) \cap (r\mathbb{B}^p \times r\mathbb{B}^{n-p}) = \{z_{p+1} = .. = z_n = 0\}$. Comme $a_j \longrightarrow a = 0$ il existe j_0 tel que $a_{j_0} \in r\mathbb{B}^p \times r\mathbb{B}^{n-p}$. Or T est de masse localement finie au voisinage de a_{j_0}, donc T satisfait aux hypothèses de la proposition 2.4. D'où T est de masse localement finie au voisinage des points de $r\mathbb{B}^p \times r\mathbb{B}^{n-p}$, c'est à dire que $a \in \widetilde{A}$ et par suite $\widetilde{A}$ est un fermé de $Reg(A)$. Comme $Reg(A)$ est connexe, on a $\widetilde{A} = Reg(A)$. De plus $\mathscr{H}_{2p-1}(\overline{Supp\,T} \cap Sing(A)) = 0$, le théorème 2.1 implique que T est de masse localement finie au voisinage des points de $Sing(A)$, donc $\widetilde{T}$ existe et le courant résiduel $\widetilde{dd^cT} - dd^c\widetilde{T}$ est positif porté par A. □

Si on note par S le courant positif fermé de la définition qui domine dd^cT alors $\widetilde{S}$ n'est pas nécessairement fermé, donc $\widetilde{T}$ peut être non quasi-prh.

3. Cas des zéros d'une fonction strictement $k-$convexe

Définition 3.1. Soit u une fonction continue à valeurs réelles définie dans un ouvert Ω de $\mathbb{C}^n$. On dit que u est strictement k-convexe sur Ω s'il existe une (1,1)-forme ω continue sur Ω et admettant en chaque point $(n-k)$ valeurs propres strictement positives telle que le courant $dd^cu - \omega$ soit positif dans Ω.

Lemme 3.2. [7] *Soient u une fonction strictement k-convexe dans un ouvert Ω de $\mathbb{C}^n$ et γ une $(1,1)-$forme positive à coefficients continus dans Ω. Alors pour tout $z \in \Omega$, il existe un voisinage V_z de z dans Ω et une fonction f strictement psh de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans V_z telle que $dd^cu \wedge (dd^cf)^k - \gamma^{k+1}$ soit positif dans V_z.*

La démonstration du résultat principal de cette section (Théorème 3.5) est basée sur la proposition suivante

Proposition 3.3. *Soit u une fonction strictement k-convexe sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}^n$. Pour $c \in \mathbb{R}$, on pose $\Omega_c = \{z \in \Omega;\ u(z) \leq c\}$. Soit T un courant positif quasi-prh de bidimension (p,p) sur $\Omega \setminus \Omega_c$.*
Si $p \geq k+1$ alors T se prolonge en un courant de masse localement finie au voisinage des points de Ω_c.

On retrouve le résultat d'El Mir [7] (pour les courants positifs fermés).

Démonstration. Il suffit de prolonger T au voisinage des points de $\partial\Omega_c$. Soit $z_0 \in \Omega$ tel que $u(z_0) = c$. Montrons qu'il existe W un voisinage ouvert de z_0 tel que l'intégrale $\displaystyle\int_{W \setminus \Omega_{c+\frac{2}{s}}} T \wedge \beta^p$ soit bornée indépendamment de s. Par hypothèse, il existe un système de coordonnées, un voisinage ouvert V de z_0 et $\lambda > 0$ tels que

$$dd^c u + \frac{\lambda}{2}\sum_{j=1}^{k} idz_j \wedge d\overline{z}_j - 2\sum_{j=k+1}^{n} idz_j \wedge d\overline{z}_j$$

soit un courant positif sur V. Soit $r > 0$ tel que $B(z_0, r) \subset V$ et χ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur Ω telle que $\chi = 0$ sur $\overline{B}(z_0, \frac{r}{2})$ et $\chi = -1$ sur $\Omega \setminus B(z_0, \frac{2}{3}r)$. Pour $\delta > 0$ suffisamment petit, on pose $v = u + \delta\chi$. Choisissons ε_s suffisamment petit tel que la suite régularisante $v_s = v * \rho_{\varepsilon_s}$ vérifie $0 \leq v - v_s \leq \dfrac{1}{s}$ et

$$dd^c v_s + \lambda\sum_{j=1}^{k} idz_j \wedge d\overline{z}_j - \sum_{j=k+1}^{n} idz_j \wedge d\overline{z}_j$$

soit une forme positive pour tout s. D'après le lemme précédent $dd^c v_s \wedge \alpha^k - \beta^{k+1} \geq 0$, avec $\alpha = dd^c f$. Or f est strictement psh, donc il existe une constante $\tau > 0$ telle que $\tau\alpha^{p-(k+1)} \geq \beta^{p-(k+1)}$. Quitte à remplacer f par $c.f$ on a $dd^c v_s \wedge \alpha^{p-1} - \beta^p \geq 0$, donc $T \wedge \beta^p \leq T \wedge dd^c v_s \wedge \alpha^{p-1}$ sur $V \setminus \Omega_c$.
Soit $(h_s)_s$ une suite de fonctions convexes, croissantes et positives telle que

- $0 \leq \sup(t-c, 0) - h_s(t) \leq \frac{1}{s} \quad \forall s \in \mathbb{N},\ \forall t \in \mathbb{R}$
- $h'_s(t) = 1$ pour $t \geq c + \frac{1}{s}$.

Posons $u_s = h_s \circ v_s$.
Alors $dd^c u_s \wedge \alpha^{p-1} = (h'_s \circ v_s) dd^c v_s \wedge \alpha^{p-1} + 2(h''_s \circ v_s) i\partial v_s \wedge \overline{\partial} v_s \wedge \alpha^{p-1}$. Pour $a \in B(z_0, \frac{r}{2}) \setminus \Omega_{c+\frac{2}{s}}$, $\quad v_s(a) \geq v(a) - \frac{1}{s} = u(a) - \frac{1}{s} \geq c + \frac{2}{s} - \frac{1}{s} = c + \frac{1}{s}$. Donc sur $B(z_0, \frac{r}{2}) \setminus \Omega_{c+\frac{2}{s}}$, on a $h'_s \circ v_s = 1$ et $h''_s \circ v_s = 0$ ce qui donne $dd^c u_s \wedge \alpha^{p-1} = dd^c v_s \wedge \alpha^{p-1} \geq \beta^p$. De plus u_s s'annule sur un voisinage U_s de Ω_c qui dépend de s.
Soit g une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$, à support compact dans $\Omega \setminus \Omega_c$ telle que $U_s \cap Supp g \neq \emptyset$ avec $0 \leq g \leq 1$, $g \equiv 1$ sur un voisinage de $\partial B(z_0, r) \cap Supp g$ et s'annulant sur $B(z_0, \frac{2}{3}r) \cap Supp\, g$. Posons $T_\varepsilon = T * \rho_\varepsilon$, $B_r = B(z_0, r)$ et $W = B_{\frac{r}{2}}$, alors

$$\int_{W \setminus \Omega_{c+\frac{2}{s}}} T \wedge \beta^p \leq \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{B_r} T_\varepsilon \wedge dd^c u_s \wedge \alpha^{p-1}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
\int_{B_r} T_\varepsilon \wedge dd^c u_s \wedge \alpha^{p-1} &= \int_{B_r} T_\varepsilon \wedge dd^c(g u_s + (1-g) u_s) \wedge \alpha^{p-1} \\
&= \int_{B_r} T_\varepsilon \wedge dd^c(g u_s) \wedge \alpha^{p-1} \\
&\qquad + \int_{B_r} (1-g) u_s dd^c T_\varepsilon \wedge \alpha^{p-1} \\
&\leq \int_{B_r} T_\varepsilon \wedge dd^c(g u_s) \wedge \alpha^{p-1} \\
&\qquad + \int_{B_r} (1-g) u_s S_\varepsilon \wedge \alpha^{p-1}
\end{aligned}$$

La suite $(g u_s)_s$ converge uniformément vers $g(v-c)$.
Il en résulte que $\displaystyle\int_{B_r} T_\varepsilon \wedge dd^c(g u_s) \wedge \alpha^{p-1}$ est finie ; car g est nulle au voisinage de l'obstacle. De plus $\displaystyle\int_{B_r} (1-g) u_s S_\varepsilon \wedge \alpha^{p-1}$ est bornée car $\widetilde{S}$ existe. Donc $\displaystyle\int_{B_r} T_\varepsilon \wedge dd^c u_s \wedge \alpha^{p-1}$ est bornée indépendamment de ε et de s. D'où T est de masse localement finie sur $W \setminus \Omega_c$. □

Corollaire 3.4. *Soit u une fonction strictement psh positive de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}^n$. Pour $a \in \mathbb{R}$, on note $B_a = \{z \in \Omega;\ u(z) < a\}$. Soient $0 \leq s < r$ et $0 < \delta < r - s$ tels que $B_{r+\delta} = \{z \in \Omega;\ u(z) < r + \delta\}$ soit relativement compact dans Ω et T un courant positif de bidimension*

(p,p) sur $\Omega\smallsetminus B_s$. On suppose qu'il existe un courant positif fermé S de bidimension $(p-1,p-1)$ et de masse localement finie au voisinage des points de A vérifiant $dd^cT\leq S$ sur $\Omega\smallsetminus B_s$. Alors il existe $c_1>0,\ c_2>0$ tels que

$$\int_{B_r\smallsetminus B_s}T\wedge(dd^cu)^p\leq c_1\int_{\mathscr{C}(r-\delta,r+\delta)}T\wedge(dd^cu)^p+c_2||u||^p_{\infty(L)}||\widetilde{S}||_L$$

où $\mathscr{C}(r-\delta,r+\delta)=\{z\in\Omega;\ r-\delta<u(z)<r+\delta\},\ L=\overline{B}_{r+\delta}$.
En particulier, si $u(z)=|z|^2$ alors

$$||T||_{B_r\smallsetminus B_s}\leq c_1||T||_{\mathscr{C}(r-\delta,r+\delta)}+c_2||u||^p_{\infty(L)}||\widetilde{S}||_L.$$

Ce corollaire sera utile pour la preuve du théorème 5.2. Notons que ce résultat est démontré dans [4] pour un courant négatif psh.

Démonstration. Posons $u_{\frac{1}{m}}(z)=\max(u(z)-\frac{1}{m}-s,0)$ et $\Psi_m=u_{\frac{1}{m}}*\rho_{\varepsilon_m}$. Pour ε_m suffisamment petit on a $dd^c\Psi_m\geq\frac{dd^cu}{2}$ sur $\{z\in\Omega;\ u(z)>\frac{2}{m}+s\}$ donc

$$\frac{1}{2}\int_{\mathscr{C}(\frac{2}{m}+s,r)}T\wedge(dd^cu)^p\leq\lim_{\varepsilon\to0}\int_{B_r}T_\varepsilon\wedge dd^c\Psi_m\wedge(dd^cu)^{p-1}.$$

Par une démonstration analogue à celle de la proposition 3.3, en choisissant $g\in\mathscr{D}(\mathscr{C}(r-\delta,r+\delta)),\ 0\leq g\leq1,\ g=1$ sur un voisinage de $\mathscr{C}(r-\frac{\delta}{2},r+\frac{\delta}{2})$, la suite $(g\Psi_m)_m$ converge vers $g(u-s)$ pour la topologie $\mathcal{C}^2$.

$$\begin{aligned}\int_{B_r}&T_\varepsilon\wedge dd^c(\Psi_m)\wedge(dd^cu)^{p-1}\\&=\int_{B_r}T_\varepsilon\wedge dd^c(g\Psi_m+(1-g)\Psi_m)\wedge(dd^cu)^{p-1}\\&=\int_{B_r}T_\varepsilon\wedge dd^c(g\Psi_m)\wedge(dd^cu)^{p-1}+\int_{B_r}(1-g)\Psi_m dd^cT_\varepsilon\wedge(dd^cu)^{p-1}\\&\leq\int_{B_r}T_\varepsilon\wedge dd^c(g\Psi_m)\wedge(dd^cu)^{p-1}+\int_{B_r}(1-g)\Psi_m S_\varepsilon\wedge(dd^cu)^{p-1}.\end{aligned}$$

Comme g est nulle sur un voisinage de B_s alors $\int_{B_r}T_\varepsilon\wedge dd^c(g\Psi_m)\wedge(dd^cu)^{p-1}$ est bornée. Par l'inégalité de Chern-Levin-Nirenberg, il existe $c_1>0,\ c_2>0$ indépendantes de m et de ε, telles que

$$\int_{B_r}T_\varepsilon\wedge dd^c\Psi_m\wedge(dd^cu)^{p-1}\leq c_1\int_{Supp\ g}T\wedge(dd^cu)^p+c_2||u||^p_{\infty(L)}||\widetilde{S}||_L.$$

En tendant m vers l'infinie, il suit que $\int_{B_r\smallsetminus B_s} T\wedge(dd^cu)^p \le C\int_{Supp\, g} T\wedge (dd^cu)^p + c_2||u||^p_{\infty(L)}||\widetilde{S}||_L$. □

Théorème 3.5. *Soient u une fonction positive strictement k-convexe sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}^n$, $A = u^{-1}(\{0\})$ et T un courant positif quasi-prh de bidimension (p,p) sur $\Omega\smallsetminus A$.*
Si $p\ge k+1$ alors $\widetilde{T}$ existe.
Si $p\ge k+2$ et u est de classe $\mathcal{C}^2$, alors $dd^c\widetilde{T} = \widetilde{dd^cT}$.

Remarque 3.6. Si de plus $p\ge k+3$ alors d'après El Mir [7], $\widetilde{S}$ est fermé et donc $\widetilde{T}$ est quasi-prh.

Démonstration. Si $p\ge k+1$ alors d'après la proposition 3.3, $\widetilde{T}$ existe. On suppose que $p\ge k+2$ et u est de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω. Comme $S-dd^cT\ge 0$ est fermé de dimension $p-1$ sur $\Omega\smallsetminus A$ et $p-1\ge k+1$ alors d'après le premier cas, $\widetilde{S-dd^cT}$ existe, c'est à dire que $\widetilde{dd^cT}$ existe. D'après [4, theorem 4], on a $dd^c\widetilde{T} = \widetilde{dd^cT}$. □

Corollaire 3.7. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}^n$ et A une variété Cauchy-Riemann de classe $\mathcal{C}^1$ dans Ω telle que $dim_{CR}A = k$. Soit T un courant positif quasi-psh de bidimension (p,p) sur $\Omega\smallsetminus A$.*
Si $p\ge k+1$ alors $\widetilde{T}$ existe et est positif sur Ω.
Si de plus $p\ge k+2$ alors $dd^c\widetilde{T} = \widetilde{dd^cT}$ et il existe une suite $(\varrho_s)_s$ de classe $\mathcal{C}^\infty$, nulle sur un voisinage de A, et qui converge uniformément sur tout compact de $\Omega\smallsetminus A$ vers $1\!\!l_{\Omega\smallsetminus A}$ telle que $d\widetilde{T} = \lim\limits_{s\to+\infty}\varrho_s dT$.

On retrouve le résultat de [4] pour un courant négatif psh.

Démonstration. Localement, il existe une fonction positive u, strictement k-convexe de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $A = u^{-1}(\{0\})$. Il suffit donc d'appliquer le théorème 3.5 pour avoir le résultat. L'existence de la suite $(\varrho_s)_s$ a été prouvé dans la demonstration de [4, theorem 4]. □

Corollaire 3.8. *Soient K un compact pluripolaire complet d'un ouvert Ω de $\mathbb{C}^n$ et T un courant positif quasi-prh de bidimension (p,p) sur $\Omega\smallsetminus K$.*
Si $p\ge 1$ alors $\widetilde{T}$ existe et est positif.
Si $p\ge 2$ alors $\widetilde{T}$ est quasi-prh et le courant résiduel $\widetilde{dd^cT} - dd^c\widetilde{T}$ est positif porté par K.

Ce corollaire nous permet, dans le cas d'un obstacle compact pluripolaire complet, de s'affranchir de l'hypothèse sur la dimension de Hausdorff de l'obstacle (qui est essentiel) dans le théorème 2.1. En fait, El Mir dans [6], a donné un exemple d'un compact pluripolaire complet de dimension de Hausdorff assez grande.

Démonstration. D'après El Mir [6], il existe un ensemble Ω' strictement pseudoconvexe de $\mathbb{C}^n$ tel que $K \subset \Omega' \subset\subset \Omega$, et une fonction u négative, psh sur Ω' telle que e^u soit continue et $K = \{z \in \Omega';\ u(z) = -\infty\}$. Soit φ une fonction continue, strictement psh exhaustive sur Ω'. On pose $c = \sup_{z \in K} \varphi(z)$ et on considère la suite :

$$u_s = \sup\Big(\varphi - c - \frac{1}{s},\ e^{\frac{1}{s}u + |z|^2} - \frac{1}{s},\ 0\Big)$$

Posons $K_s = \{z \in \Omega';\ u_s(z) = 0\}$. Comme dans la démonstration de la proposition 3.3, on montre qu'il existe une constante $c > 0$ telle que $||T||_{\Omega' \smallsetminus K_s} < c$ pour tout entier s, donc $\widetilde{T}$ existe. D'après le théorème 3.5, le courant résiduel $\widetilde{dd^cT} - dd^c\widetilde{T}$ est positif et porté par K. Or $\widetilde{S}$ est fermé (K est fermé pluripolaire complet, on applique [6]) donc $\widetilde{T}$ est quasi-prh. □

4. Cas d'un obstacle fermé

Dans cette section on considère le cas général, un obstacle fermé, et sous des hypothèses sur sa dimension de Hausdorff on arrive à prolonger un courant positif quasi-prh.

Théorème 4.1. *Soient A un fermé d'un ouvert Ω de $\mathbb{C}^n$ et T un courant positif quasi-prh de bidimension (p,p) sur $\Omega \smallsetminus A$ tels que $\mathscr{H}_{2p-2}(\overline{\mathit{Supp}\,T} \cap A)$ soit localement finie. Alors $\widetilde{T}$ existe sur Ω et le courant résiduel $\widetilde{dd^cT} - dd^c\widetilde{T}$ est positif porté par A. En outre, si $\mathscr{H}_{2p-2}(\overline{\mathit{Supp}\,T} \cap A) = 0$ alors $\widetilde{dd^cT} = dd^c\widetilde{T}$.*

On retrouve le résultat de Dabbek-Elkhadhra-ElMir (courant négatif psh).

Démonstration. Le problème est local au voisinage des points de $\overline{\mathit{Supp}\,T} \cap A$, donc on suppose que l'origine $0 \in \overline{\mathit{Supp}\,T} \cap A$. On a $\mathscr{H}_{2p-1}(\overline{\mathit{Supp}\,T} \cap A) = 0$, d'après Shiffman [10], il existe un système de coordonnées tel que pour toute projection $\pi_I : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^{p-1}$, $\pi_I(z) = (z_{i_1}, ..., z_{i_{p-1}})$, où

$I=(i_1,..,i_{p-1})$ est un multi-indice strictement croissant, on a $\pi_I^{-1}(\{0\}\cap(\overline{Supp\,T}\cap A))=\{0\}$ et si $B^{p-1}\times B^{n-p+1}\subset\mathbb{C}^{p-1}\times\mathbb{C}^{n-p+1}$, alors $(\overline{B^{p-1}}\times\partial B^{n-p+1})\cap(\overline{Supp\,T}\cap A)=\emptyset$.
Soit $\delta>0$ tel que $\{\overline{B^{p-1}}\times\overline{B^{n-p+1}}(1-\delta,1+\delta)\}\cap(A\cap\overline{Supp\,T})=\emptyset$. Pour $z'\in B^{p-1}$, on note $A_{z'}=(\overline{Supp\,T}\cap A)\cap(\{z'\}\times B^{n-p+1})$. Comme $\mathscr{H}_{2p-2}(\overline{Supp\,T}\cap A)$ est localement finie, d'après Shiffman [10], $A_{z'}$ est un ensemble discret pour presque tout z'. Sans perte de généralité on peut supposer que $A_{z'}=\{(z',0)\}$. T est $\mathbb{C}-$normal sur $\Omega\smallsetminus A$ donc il est $\mathbb{C}-$plat sur $\Omega\smallsetminus A$.
La tranche $\langle\ T,\pi_I,z'\ \rangle$ existe et est un courant positif quasi-prh de bidimension $(1,1)$ sur $\Omega\smallsetminus A_{z'}$ porté par $\{z'\}\times B^{n-p+1}$. Soit K un compact de $B^{p-1}\times B^{n-p+1}$. Montrons que $\int_{K\smallsetminus A}T\wedge\pi_I^*\beta'^{p-1}\wedge\beta$ est finie. En appliquant le corollaire 3.4 avec $\langle\ T,\pi_I,z'\ \rangle$, il existe $c_1,\ c_2>0$ telles que

$$\begin{aligned}&\int_{B^{n-p+1}((z',0),1)\smallsetminus A_{z'}}\langle\ T,\pi_I,z'\ \rangle\wedge\beta\\&\leq c_1\int_{B^{n-p+1}(1-\delta,1+\delta)}\langle\ T,\pi_I,z'\ \rangle\wedge\beta+c_2\|\langle\ S,\pi_I,z'\ \rangle\|_L\end{aligned}$$

où $L=(1+\delta)\overline{B^{n-p+1}}$. Par application de la formule de tranchage,

$$\begin{aligned}&\int_{K\smallsetminus A}T\wedge\pi_I^*\beta'^{p-1}\wedge\beta\\&\qquad\leq B\int_{z'}\Big(\int_{B^{n-p+1}((z',0),1)\smallsetminus A_{z'}}\Big\langle\ T,\pi_I,z'\ \Big\rangle\wedge\beta\Big)\beta'^{p-1}\\&\qquad\leq c_1'\int_{z'}\Big(\int_{B^{n-p+1}(1-\delta,1+\delta)}\Big\langle\ T,\pi_I,z'\ \Big\rangle\wedge\beta\Big)\beta'^{p-1}\\&\qquad\qquad+c_2'\int_{z'}\Big(\int_L\Big\langle\ S,\pi_I,z'\ \Big\rangle\Big)\beta'^{p-1}\\&\qquad\leq b_1\int_{B^{p-1}\times(1-\delta,1+\delta)B^{n-p+1}}T\wedge\pi_I^*\beta'^{p-1}\wedge\beta\\&\qquad\qquad+b_2\int_{B^{p-1}\times L}S\wedge\pi_I^*\beta'^{p-1}<+\infty\end{aligned}$$

Il nous reste à montrer que le courant $\widetilde{dd^cT}$ existe, pour cela on montre que $dd^c\widetilde{T}$ est d'ordre zéro. Pour presque tout z', le courant $\langle\ T,\pi_I,z'\ \rangle$ est positif quasi-prh en dehors de $A_{z'}$, qui est fermé pluripolaire complet (discret p.p) ; donc d'après le théorème 1.2, $\langle\ \widetilde{T, \pi_I, z'}\ \rangle$ existe et est quasi-prh c'est à dire qu'il existe un courant positif fermé S_1 sur Ω tel que $dd^c\langle\ \widetilde{T, \pi_I, z'}\ \rangle \leq S_1$. De plus puisque $\langle\ \widetilde{T}, \pi_I, z'\ \rangle = \langle\ \widetilde{T, \pi_I, z'}\ \rangle$ pour presque tout z', le courant $\langle\ dd^c\widetilde{T}, \pi_I, z'\ \rangle = dd^c\langle\ \widetilde{T, \pi_I, z'}\ \rangle \leq S_1$. Donc $\langle\ dd^c\widetilde{T}, \pi_I, z'\ \rangle$ est d'ordre zéro pour presque tout z'. Soit $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ positive. Par la formule de tranchage, on obtient :

$$\int_\Omega dd^c\widetilde{T} \wedge \pi_I^*\beta'^{p-1} \wedge \varphi = \int_{z'\in\pi_I(\Omega)} \langle\ dd^c\widetilde{T}, \pi_I, z'\ \rangle(\varphi)\beta'^{p-1}.$$

Et par suite $dd^c\widetilde{T} \wedge \pi_I^*\beta'^{p-1}$ est d'ordre zéro. Avec une petite perturbation du système de coordonnées, $(\pi_I^*\beta'^{p-1})_I$ forme des générateurs de toute les $(p-1, p-1)-$formes, ce qui donne $dd^c\widetilde{T}$ est d'ordre zéro. Comme $dd^c\widetilde{T} = dd^cT$ sur $\Omega \smallsetminus A$, alors $\widetilde{dd^cT}$ existe et le courant résiduel $S = \widetilde{dd^cT} - dd^c\widetilde{T}$ est positif porté par A.

Dans le cas où $\mathscr{H}_{2p-2}(\overline{Supp\,T} \cap A) = 0$, on a les courants T et dd^cT sont $\mathbb{C}-$normaux sur $\Omega \smallsetminus A$, donc $\widetilde{T}$ et $\widetilde{dd^cT}$ sont $\mathbb{C}-$plats. comme l'espace $\mathscr{F}(\Omega)$ des courants $\mathbb{C}-$plat est stable par dd^c alors le courant résiduel $R = \widetilde{dd^cT} - dd^c\widetilde{T}$ est aussi $\mathbb{C}-$plat qui est porté par A ; or $\mathscr{H}_{2p-2}(\overline{Supp\,R}) = 0$, d'après le théorème de support pour les courants $\mathbb{C}-$plat, $R = 0$. $\square$

Remarque 4.2. Dans le théorème 4.1, la condition $\mathscr{H}_{2p-2}(\overline{Supp\,T} \cap A) = 0$ est "optimale" comme le montre l'exemple suivant :
$\Omega = D = \{z \in \mathbb{C};\ |z| < 1\}$ et $T = -\frac{1}{2\pi}Log|z|$ on a $\widetilde{dd^cT} - dd^c\widetilde{T} = \delta_0$.

5. Cas d'une sous-variété non Levi-plate

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}^n$ et M une variété générique de codimension $m \geq 2$,

$$M = \{z \in \Omega;\ \rho_1(z) = ... = \rho_m(z) = 0\} \tag{5.1}$$

où $\rho_j \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$ et $\partial\rho_1(z) \wedge ... \wedge \partial\rho_m(z) \neq 0$ sur M. Notons $\langle\ .,.\ \rangle$ le produit scalaire euclidien sur $\mathbb{R}^m$ et $\mathbb{S}^{m-1}$ la sphère unité de $\mathbb{R}^m$. Pour tout $b \in \mathbb{S}^{m-1}$, considérons la dimension complexe maximale $s_z(b)$ des sous-espaces vectoriels complexes de $H_z(M)$ (l'espace tangent complexe à M en z) inclus dans l'espace des zéros de la fonction $H_z(M) \ni w \longmapsto L(\langle b, \widetilde{\rho}\rangle(z))(w)$, où $\widetilde{\rho} = (\rho_1, ..., \rho_m)$ et $L(\langle b, \widetilde{\rho}\rangle(z))$ désigne la forme de Levi de la fonction $\langle b, \widetilde{\rho}\rangle$ au point z. Pour tout $a \in \mathbb{S}^{m-1}$, posons $d_z(a) =$

$\inf\{s_z(b), b \in \mathbb{S}^{m-1}$ et $\langle a, b\rangle = 0\}$ puis $def_z(M) = \sup\{d_z(a), a \in \mathbb{S}^{m-1}\}$. On appelle ce nombre le défaut de Levi de la variété M en z. Ce nombre est invariant par biholomorphisme de M, compris entre 1 et $dim_{CR}M$ et qui mesure le degré de "Levi-platitude" de M. Par exemple, si les fonctions ρ_j sont pluriharmoniques, $def_z(M)$ atteint sa valeur maximale $dim_{CR}M$. Réciproquement, si $def_z(M)$ est petit par rapport a $dim_{CR}M$, alors la forme de Levi de M est suffisamment "non dégénérée".

Exemple 5.1.

(1) Si $M = \mathbb{S}^{2n-1} \times \mathbb{S}^{2n-1} \subset \mathbb{C}^{2n}$, alors $dim_{CR}M = 2n-2$ et $def(M) = n-1$ en tout point de M.

(2) Si $M = (\mathbb{S}^3)^n \subset \mathbb{C}^{2n}$, alors $dim_{CR}M = n$ et $def(M) = 1$ en tout point de M.

Le résultat principal de cette partie est

Théorème 5.2. *Soit M une sous-variété de la forme (5.1) dans un ouvert Ω de $\mathbb{C}^n$ et soit T un courant positif quasi-prh de bidimension (p,p) sur $\Omega \setminus M$ tel que $p \geq def_z M + 1$ pour tout $z \in M$, alors $\widetilde{T}$ existe.*

Remarque 5.3. Le cas où T est négatif psh est démontré par Dabbek et Elkhadhra [3] alors que le cas d'un courant positif fermé est dû à Rigat [9]. Si M est une sous-variété Cauchy-Riemann de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $dim_{CR}M < p-1$, on retrouve le Corollaire 3.7.

Pour démontrer le théorème 5.2, on a besoin de rappeler tout d'abord quelques définitions et résultats issus du travail de Sukhov (voir [9] ou [3]).

Définition 5.4. Une variété $\mathcal{C}^2$ générique M vérifiant les conditions du théorème 5.2 est appelée $k-$pseudoconcave en $z \in M$ si et seulement si 0 est un élément de l'enveloppe convexe conique de l'ensemble des $a \in \mathbb{S}^{m-1}$ tels que la forme de Levi de $\langle a, \widetilde{\rho}\rangle$ ait au minimum k valeurs propres strictement positives sur $H_z(M)$.

Définition 5.5. Soient V un cône de $\mathbb{R}^m$ et V^* son cone conjugué, i.e. $V^* = \{a \in \mathbb{R}^m, \langle a, b\rangle \geq 0,\ \forall\ b \in V\}$. Pour $r > 0$, on appelle domaine standard $M(z, r, V)$ un domaine de la forme $M(z, r, V) = \{\xi \in \mathbb{C}^n;\ |z - \xi| < r \textit{ et } \rho(\xi) \in V\}$.

On dit que $M(z, r, V)$ est $k-$pseudoconcave en $z \in M$ si et seulement si M est $k-$convexe en z dans la direction d'un $\sigma \in V^* \setminus \{0\}$, i.e. si la forme de Levi de $\langle\sigma,\rho\rangle$ possède au moins k valeurs propres strictement positives sur $H_z(M)$.

Théorème 5.6. *(*Sukhov*) Soit M une sous-variété comme dans le Théorème 5.2, alors M est $(n-m-def_zM)-$pseudoconcave pour tout $z\in M$. Par suite il existe $r>0$ et un nombre fini de cônes $V_j\subset\mathbb{R}^m,\ j=1,...N$, tels que les $M(z,r,V_j)$ sont $(n-m-def_zM)-$pseudoconcave en z et tels que $B(z,r)\smallsetminus M=\bigcup\limits_{j=1}^{N}M(z,r,V_j)$.*

Démonstration. (*du théorème 5.2*) D'après le Théorème 5.6, pour montrer que T est de masse localement finie au voisinage des points de M, il suffit de montrer que la masse de T est bornée dans chaque $M(z,r,V_j)$ au voisinage de M. Pour cela, soient $j\in\{1,...,N\}$ et $\sigma_j\in V^*\smallsetminus\{0\}$ tels que la forme de Levi $\langle\sigma_j,\rho\rangle$ ait au moins $(n-m-def_zM)$ valeurs propres strictement positives sur $H_z(M)$. Il existe $C_j>0$ tel que la forme de Levi de $\phi_j=\langle\sigma,\rho\rangle+C_j\sum\limits_{k=1}^{m}\rho_k^2$ ait au moins $(n-def_zM-1)$ valeurs propres strictement positives sur l'espace tangent à l'hypersurface $\{\xi\in B(z,r),\ \phi_j(\xi)=0\}$ en z. On a $d\phi_j=\langle\sigma+2C_j\rho,d\rho\rangle$ et donc l'hypothèse $\sigma_j\neq 0$ implique que $d\phi_j\neq 0$. En particulier, il existe $\lambda_j>0$ tel que la forme de Levi de $\psi_j=e^{\lambda_j\phi_j}-1$ ait $(n-def_zM)$ valeurs propres strictement positives sur $\mathbb{C}^n$. Soit $D_j(r)=\{\zeta\in B(z,r),\ \psi_j(\zeta)>0\}$. On a $M(\xi,r'_j,V_j)\subset D_j(r'_j)$ pour $r'_j\ll 1$. D'après les Théorèmes 2.1 et 3.5, T est de masse localement finie au voisinage des points de M, car le complémentaire de M sera la réunion des $D_j(r'_j)$, de plus ψ_j est strictement def_zM-convexe sur $D_j(r'_j)$ et $p\geq def_zM+1$. □

Références

[1] E. Chirka – « On removable singularities of analytic sets », *Dokl. Akad. Nauk USSR* **248** (1979), p. 47–50.

[2] K. Dabbek – « Prolongement d'un courant positif plurisousharmonique », *C. R. Acad. Sci. Paris Série I* **342** (2006), p. 819–823.

[3] K. Dabbek et F. Elkhadhra – « Prolongement d'un courant positif à travers une sous variété non Levi-plate », *C. R. Acad. Sci. Paris Série I* **340** (2005), p. 263–268.

[4] K. Dabbek, F. Elkhadhra et H. El Mir – « Extension of plurisubharmonic currents », *Mathematische Zeitschrift* (2003), p. 455–481.

[5] T.-C. Dinh et N. Sibony – « Pull-back of currents by holomorphic maps », 2006, arXiv :math/0606248.

[6] H. El Mir – « Sur le prolongement des courants positifs fermés », *Acta mathematica* **153** (1984), p. 1–45.

[7] ———, « Prolongement des courants positifs fermés et fonctions-convexes », Complex analysis and applications '85 (Varna, 1985), Publ. House Bulgar. Acad. Sci., Sofia, 1986, p. 199–211.

[8] H. El Mir et I. Feki – « Prolongement et contrôle d'un courant positif fermé par ses tranches », *C. R. Acad. Sci. Paris Série I* **327** (1998), p. 797–802.

[9] S. Rigat – « Prolongement de courants positifs fermés à travers des variétés CR », *C. R. Acad. Sci. Paris Série I* **330** (2000), p. 663–668.

[10] B. Shiffman – « On the removal of singularities of analytic sets », *Mich. Math. J.* **15** (1968), p. 111–120.

[11] Y. T. Siu – « Analyticity of sets associated to lelong numbers and the extension of closed positive currents », *Inv. Math.* **27** (1974), p. 53–156.

[12] H. Skoda – « Prolongement des courants positifs fermés de masse finie », *Inv. Math.* **66** (1982), p. 361–376.

Noureddine Ghiloufi
Département de Mathématiques
Faculté des sciences de Gabès
6072 Gabès
Tunisie
ghiloufi_noureddine@yahoo.fr

Khalifa Dabbek
Département de Mathématiques
Faculté des sciences de Gabès
6072 Gabès
Tunisie
dabbek_15@yahoo.fr