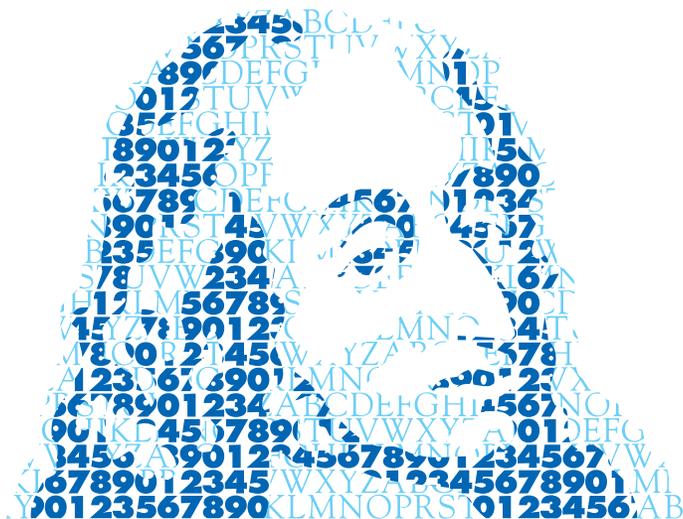


# ANNALES MATHÉMATIQUES



## BLAISE PASCAL

KRZYSZTOF BOGDAN, TOMASZ JAKUBOWSKI

**Problème de Dirichlet pour les fonctions  
 $\alpha$ -harmoniques sur les domaines coniques**

Volume 12, n°2 (2005), p. 297-308.

[http://ambp.cedram.org/item?id=AMBP\\_2005\\_\\_12\\_2\\_297\\_0](http://ambp.cedram.org/item?id=AMBP_2005__12_2_297_0)

© Annales mathématiques Blaise Pascal, 2005, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Annales mathématiques Blaise Pascal » (<http://ambp.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://ambp.cedram.org/legal/>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

*Publication éditée par le laboratoire de mathématiques  
de l'université Blaise-Pascal, UMR 6620 du CNRS  
Clermont-Ferrand — France*

**cedram**

*Article mis en ligne dans le cadre du  
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques  
<http://www.cedram.org/>*

# Problème de Dirichlet pour les fonctions $\alpha$ -harmoniques sur les domaines coniques

Krzysztof Bogdan  
Tomasz Jakubowski

## Résumé

On considère le noyau de Poisson du processus  $\alpha$ -stable symétrique pour un domaine conique. Puis on considère le problème d'intégrabilité du noyau de Poisson à la puissance  $p$ . On donne des conditions sur  $q$  pour qu'il existe une solution au problème de Dirichlet pour les fonctions  $\alpha$ -harmoniques sur les domaines coniques, avec une condition au bord donnée par une fonction de  $L^q$ .

## Mots clés:

fonction  $\alpha$ -harmonique, noyau de Poisson, problème de Dirichlet

## 1 Introduction

Dahlberg [7] a montré que la solution du problème de Dirichlet pour les fonctions harmoniques sur les domaines lipschitziens existe pour toutes les conditions au bord de l'espace  $L^2(\sigma)$ , où  $\sigma$  est la mesure de surface sur le bord. (cf. aussi [9]). Il est intéressant de chercher à étendre ce résultat aux processus de Lévy  $\alpha$ -stables. La propriété de  $L^2$ -intégrabilité peut être cruciale pour l'extension de la procédure de régularisation du noyau de Poisson utilisée dans les démonstrations des estimations de Carleson et de l'inégalité d'Harnack pour les processus  $\alpha$ -stables, cf. [5], Lemme 8 et [15], Lemme 2.1.

Dans cette note nous étudions les fonctions  $\alpha$ -harmoniques, qui sont liées aux processus  $\alpha$ -stables. Notre but est de trouver les valeurs de  $p$  pour lesquelles on peut résoudre le problème de Dirichlet pour un domaine conique  $D$  et la "condition au bord" donnée par les fonctions de  $L^p(\mu)$  avec une mesure naturelle  $\mu$  sur  $D^c$ . Pour cela, on doit connaître l'asymptotique du noyau de Poisson près de la frontière de  $D$ . Auparavant le noyau de Poisson pour les cônes dans le cas  $\alpha$ -stable a été étudié dans [11] et plus généralement

pour des domaines lipschitziens dans [8]. Nous améliorons les estimations de [11] en utilisant les résultats de [8] et [1] qui donnent l'asymptotique exacte de la fonction de Green de notre processus stable pour le domaine  $D$ . Ceci permet de déterminer les conditions nécessaires et suffisantes pour que le problème de Dirichlet considéré ait une solution et donne certaines informations sur le cas des domaines lipschitziens généraux. Notons que des problèmes analogues pour les cônes infinis sont étudiés dans [12] (cf. aussi [13]).

## 2 Définitions et Notations

Soit  $(X_t, \mathbb{P}^x)$  un processus de Lévy  $\alpha$ -stable, invariant par rotations sur  $\mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 2$ .  $\mathbb{P}^x$  est la loi de probabilité du processus  $X_t$  commençant en  $x$ . La fonction caractéristique de ce processus est donnée par

$$\mathbb{E}^0 e^{i\xi \cdot X_t} = e^{-t|\xi|^\alpha}$$

où  $\alpha \in (0, 2)$ .  $(X_t, \mathbb{P}^x)$  est un processus de Markov. Pour un domaine ouvert  $D \subset \mathbb{R}^d$ , on définit un temps d'arrêt  $\tau_D = \inf\{t \geq 0 : X_t \in D^c\}$ , le *premier temps de sortie* de  $D$  et la mesure harmonique

$$\omega_D^x(A) = \mathbb{P}^x(X_{\tau_D} \in A)$$

pour tout Borélien  $A$ .

On dit qu'une fonction  $u$  sur  $\mathbb{R}^d$  est *singulière  $\alpha$ -harmonique* sur  $D$  si

$$u(x) = \mathbb{E}^x u(X_{\tau_A}), \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

pour tout ensemble compact  $A \subset D$  et  $u(x) = 0$  pour  $x \in D^c$ .

On dit qu'une fonction  $u$  sur  $\mathbb{R}^d$  est *régulière  $\alpha$ -harmonique* sur  $D$  si

$$u(x) = \mathbb{E}^x f(X_{\tau_D}), \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

pour une certaine fonction  $f$  sur  $D^c$ . Comme  $u = f$  sur  $D^c$ , on peut considérer  $u$  comme la solution du problème de Dirichlet avec "la condition au bord"  $f$  (cf. aussi [2], [14]). Une autre caractéristique de  $\alpha$ -harmonicité par le Laplacien fractionnel

$$\Delta^{\alpha/2} \psi(x) = \mathcal{A}_{d,\alpha} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\psi(y) - \psi(x) - \mathbb{1}_{\{|x-y|<1\}} |y-x| \nabla \psi(y-x)}{|x-y|^{d+\alpha}},$$

LE PROBLÈME DE DIRICHLET POUR LES FONCTIONS  $\alpha$ -HARMONIQUES

avec une certaine constante de normalisation  $\mathcal{A}_{d,\alpha}$ , est donnée dans [4].

Nous utiliserons les notations de [3] et [8] sur les domaines de Lipschitz. Soit  $D$  un domaine borné de Lipschitz avec le rayon de localisation  $r_0$  et la constante de Lipschitz  $\lambda$ . Pour  $x \in \mathbb{R}^d$ , on note  $\delta(x) = \inf_{z \in \partial D} |x - z|$ . On fixe deux points  $x_0, x_1 \in D$  tels que  $\delta(x_0) \geq r_0/2$  et  $|x_1 - x_0| = r_0/4$ . Pour tout  $Q \in \partial D$  et  $0 < s \leq r_0/32$ , on note par  $A_s(Q) \in D$  un point tel que

$$B(A_s(Q), \kappa s) \subset D \cap B(Q, s),$$

où  $\kappa = 1/(2\sqrt{1 + \lambda^2})$ . Si  $s > r_0/32$  on pose  $A_s(Q) = x_1$ . Pour tout  $x, y \in D$  on note  $r(x, y) = \max(\delta(x), \delta(y), |x - y|)$ . Si  $x, y \in D$  et  $r = r(x, y) \leq r_0/32$ , on pose par  $A_{x,y}$  un point dans  $D$  tel que

$$B(A_{x,y}, \kappa r) \subset D \cap B(x, 3r) \cap B(y, 3r).$$

Si  $r(x, y) > r_0/32$  on met  $A_{x,y} = x_1$ . On peut prouver facilement que les points  $A_s(Q)$  et  $A_{x,y}$  existent (cf. [3]).

Si  $D$  est un domaine lipschitzien et  $x \in D$ , la mesure harmonique à la densité  $P_D(x, y)$ ,  $y \in D^c$ , appelée le noyau de Poisson [2]. On définit l'opérateur de Green  $G_D$  par

$$G_D f(x) = \mathbb{E}^x \int_0^{\tau_D} f(X_t) dt.$$

Le noyau de cet opérateur est la fonction de Green  $G_D(x, y)$  d'ensemble  $D$ , c'est-à-dire

$$G_D f(x) = \int_D f(y) G_D(x, y) dy.$$

Il est bien connu que  $G_D(x, y) > 0$  sur  $D \times D$ ,  $G_D(\cdot, \cdot)$  est symétrique et  $G_D(x, y) = 0$  si  $x$  ou  $y$  est dans  $D^c$ . De plus  $G_D(x, x) = \infty$  pour  $x \in D$  ([10]). On définit

$$\phi(x) = G_D(x_0, x) \wedge 1.$$

Dans ce qui suit, toutes les constantes sont positives et ne dépendent que de l'ensemble  $D$  et de l'indice  $\alpha$ .  $f \approx g$  signifie qu'il existe une constante  $C$  telle que  $C^{-1}f(x) \leq g(x) \leq Cf(x)$ , pour tout  $x$ .

### 3 Le noyau de Poisson pour les cônes

Pour tout  $y \in D^c$ , on note  $y' = A_{\delta(y)}(S)$ , où  $S$  est un point de  $\partial D$  tel que  $|y - S| = \delta(y)$ . On note que pour  $\delta(y) < r_0/32$ , par définition  $\kappa\delta(y) \leq \delta(y') \leq \delta(y)$ , et donc  $\delta(y') \approx \delta(y)$ . Le Théorème 2 de [8] donne l'estimation du noyau de Poisson pour un domaine de Lipschitz:

$$P_D(x, y) \approx \frac{\phi(x)\phi(y')}{\phi^2(A_{x,y'})\delta(y)^\alpha(1 + \delta(y))^\alpha} |x - y|^{\alpha-d}, \quad x \in D, y \in (\bar{D})^c. \quad (3.1)$$

Notons que

$$\delta(A_{x,y'}) \approx |x - y|, \quad (3.2)$$

d'après (52) p. 440 dans [8]. Si  $D$  est un domaine lisse alors les estimations ci-dessus donnent (cf. aussi [6])

$$P_D(x, y) \approx \frac{\delta(x)^{\alpha/2}}{\delta(y)^{\alpha/2}(1 + \delta(y))^{\alpha/2}} |x - y|^{-d}, \quad x \in D, y \in (\bar{D})^c.$$

Soit  $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 2$ , un cône infini *circulaire* de sommet 0:

$$\Gamma = \left\{ y = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d : y_d > \eta \sqrt{y_1^2 + \dots + y_{d-1}^2} \right\},$$

où  $\eta \in \mathbb{R}$ .

On appelle *cône lisse*, un ensemble borné  $D$  tel que  $D \cap B(0, r_0) = \Gamma \cap B(0, r_0)$  et tel que  $\partial D$  soit lisse sauf au sommet du cône. Dorénavant, on supposera que  $D$  est un cône lisse.

Si  $\Gamma$  est un cône infini circulaire, soit  $M_\Gamma(x)$  le noyau de Martin avec pôle à l'infini, c'est-à-dire  $M_\Gamma$  est la fonction singulière  $\alpha$ -harmonique sur  $\Gamma$ , régulière  $\alpha$ -harmonique sur tous les ensembles bornés ouverts dans  $\Gamma$  et normalisé tel que  $M_\Gamma(x_0) = 1$  pour un certain  $x_0 \in \Gamma$ , voir [1] pour plus de détails.

Notons que  $M_\Gamma(x) = |x|^\beta M_\Gamma(x/|x|)$ , où  $0 \leq \beta < \alpha$  pour le cône infini *général*, voir le Théorème 3.2 dans [1]. Par le principe de Harnack à la frontière (voir par exemple le Lemme 3.1 dans [1]), les estimées des fonctions  $\alpha$ -harmoniques pour les domaines lisses ([6], [10]) et par homogénéité de la fonction  $\delta$  pour les cônes lisses, on en déduit que

$$\phi(x) \approx M_\Gamma(x) = M_\Gamma(x/|x|) |x|^\beta \approx \delta(x/|x|)^{\alpha/2} |x|^\beta \approx \delta(x)^{\alpha/2} |x|^{\beta-\alpha/2}$$

LE PROBLÈME DE DIRICHLET POUR LES FONCTIONS  $\alpha$ -HARMONIQUES

pour tout  $x \in D \cap B(0, r_0/2)$ . Encore fois par les estimées des fonctions  $\alpha$ -harmoniques pour les domaines lisses, on en déduit que

$$\phi(x) \approx \delta(x)^{\alpha/2} |x|^{\beta-\alpha/2} \tag{3.3}$$

pour tout  $x \in D$ .  $\beta$  ne depend que de  $\eta, d, \alpha$ . On sait que  $0 < \beta < \alpha$  et  $\beta = \alpha/2$  si  $\eta = 0$  pour les cônes infinis circulaires ([1]). De plus la fonction  $\beta(\eta, \alpha, d)$  est croissante dans la variable  $\eta$ . Soit  $\beta_* = \beta_*(d, \alpha) = \inf_{\eta \in \mathbb{R}} \beta(\eta, d, \alpha)$ .

On sait ([12], [1]) que si  $d \geq 3$  ou  $\alpha \leq 1$  et  $d = 2$ , on a  $\beta_* = 0$ , et d'après le Lemme 3.3 (à la fin de ce paragraphe), pour  $\alpha > 1$  et  $d = 2$ , on a  $\beta_* = (\alpha - 1)/2$ .

On note que pour  $\delta(y) \leq r_0/32$ , on a  $|y'| \approx |y|$ . En effet,  $|y'| \leq |y' - y| + |y| < 2\delta(y) + |y| \leq 3|y|$  puisque  $0 \in \partial D$ . De plus,  $|y| < 2\delta(y) + |y'| < \frac{2}{\kappa}\delta(y') + |y'| < (\frac{2}{\kappa} + 1)|y'|$ . Par des considérations similaires, on obtient le lemme suivant.

**Lemme 3.1:** *Soit  $D$  un cône lisse. Pour tout  $x, z \in D$ , on a*

$$|A_{x,z}| \approx \max(|x|, |z|). \tag{3.4}$$

DÉMONSTRATION: Par symétrie il suffit de considérer le cas  $|x| \geq |z|$ . Alors on a  $r(x, z) = \max(\delta(x), \delta(z), |x - z|) \leq 2|x|$  puisque  $0 \in \partial D$ .

Si  $r(x, z) > r_0/32$ , alors  $A_{x,z} = x_1$  et  $|x| > r_0/64$ . Par suite  $|A_{x,z}| \approx |x|$ .

Si  $r(x, z) \leq r_0/32$ , alors  $|A_{x,z}| \leq |x| + 3r(x, z) \leq 7|x|$ . Maintenant on considère deux cas  $|x| \leq 4r(x, z)$  et  $|x| \geq 4r(x, z)$ .

Si  $|x| \leq 4r(x, z)$ , alors  $|A_{x,z}| \geq \delta(A_{x,z}) \geq \kappa r(x, z) \geq \kappa|x|/4$ .

Si  $|x| \geq 4r(x, z)$ , on a  $|A_{x,z}| \geq |x| - 3r(x, z) \geq \frac{1}{4}|x|$ .

Ainsi, on obtient (3.4) dans tous les cas. □

Ce lemme et les estimées précédentes vont nous permettre de donner une simple preuve d'un résultat obtenu indépendamment dans [12]:

**Théorème 3.2:** *Soit  $D$  un cône lisse. Si  $\delta(y) \leq r_0/32$ , alors*

$$P_D(x, y) \approx \frac{\delta(x)^{\alpha/2}}{\delta(y)^{\alpha/2} |x - y|^d} \left( \frac{\min(|x|, |y|)}{\max(|x|, |y|)} \right)^{\beta-\alpha/2}. \tag{3.5}$$

DÉMONSTRATION: En appliquant (3.3) et (3.2) à la formule (3.1) et en utilisant (3.4) et le fait que  $|y| \approx |y'|$  et  $\delta(y) \approx \delta(y')$ , on obtient

$$\begin{aligned}
 P_D(x, y) &\approx \frac{\delta(x)^{\alpha/2} |x|^{\beta-\alpha/2} \delta(y')^{\alpha/2} |y'|^{\beta-\alpha/2}}{\delta(A_{x,y'})^\alpha |A_{x,y'}|^{2\beta-\alpha} \delta(y)^\alpha |x-y|^{d-\alpha}} \\
 &\approx \frac{\delta(x)^{\alpha/2} |x|^{\beta-\alpha/2} |y'|^{\beta-\alpha/2}}{\delta(y)^{\alpha/2} |A_{x,y'}|^{2\beta-\alpha} |x-y|^d} \approx \frac{\delta(x)^{\alpha/2}}{\delta(y)^{\alpha/2} |x-y|^d} \left( \frac{\min(|x|, |y|)}{\max(|x|, |y|)} \right)^{\beta-\alpha/2}.
 \end{aligned}$$

□

À la fin de ce paragraphe on donne la formule pour le noyau de Martin avec pôle à l'infini d'ensemble  $\mathbb{R}^2 \setminus \{y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_1 = 0, y_2 \geq 0\}$  qui nous a permis calculer  $\beta_*$  pour tous  $d$  et  $\alpha$ .

**Lemme 3.3:** *On fixe  $\alpha \in (1, 2)$ . Alors le noyau de Martin  $M_\Lambda$  associé au cône circulaire  $\Lambda = \mathbb{R}^2 \setminus \{y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_1 = 0, y_2 \geq 0\}$  et normalisé en  $x_0 \in \Lambda$  est donné par la formule*

$$M_\Lambda(x) = \frac{\int_0^\infty t^{(1-\alpha)/2} (t^{\alpha-2} - |x - (0, t)|^{\alpha-2}) dt}{\int_0^\infty t^{(1-\alpha)/2} (t^{\alpha-2} - |x_0 - (0, t)|^{\alpha-2}) dt}.$$

DÉMONSTRATION: Notons  $m(x)$  la fonction du terme à droite. Il est facile de voir qu'elle est continue en 0 et, comme elle a la forme d'un potentiel de Riesz, qu'elle est régulière  $\alpha$ -harmonique sur tous les sous-ensembles bornés ouverts de  $\Lambda$ . Par unicité (voir par exemple le Théorème 3.2 de [1]), il suffit donc de montrer que  $m((0, u)) = 0$  pour tout  $u > 0$ . On voit facilement que  $m((0, u)) = u^{(\alpha-1)/2} m((0, 1))$  et on est donc ramené à montrer que

$$I = \int_0^\infty t^{(1-\alpha)/2} (t^{\alpha-2} - |1 - t|^{\alpha-2}) dt = 0.$$

Pour cela on remarque d'abord que

$$I = \int_0^\infty t^{(1+\alpha)/2} (1 - |1 - t^{-1}|^{\alpha-2}) \frac{dt}{t^2} = \int_0^\infty t^{(-1-\alpha)/2} (1 - |1 - t|^{\alpha-2}) dy$$

et on en déduit que

$$\int_0^\infty t^{(-1-\alpha)/2} ((t^{\alpha-1} - 1) - (t - 1)|1 - t|^{\alpha-2}) dt = 0.$$

En divisant l'intégrale suivant  $[0, 1]$  et  $[1, \infty)$ , en intégrant par parties et en utilisant que  $\alpha > 1$  pour annuler les termes au bord, on montre que le terme de gauche vaut  $2I$ , ce qui termine la preuve. □

## 4 Le problème de Dirichlet pour le cône

Maintenant nous allons considérer le problème de Dirichlet pour les cônes lisses  $D$ . Soit  $\mu(dy) = m(y)dy$  une mesure sur  $D^c$  avec densité  $m > 0$ . Soient  $p \in [1, \infty)$  et  $q \geq 1$  tels que  $1/p + 1/q = 1$ . Une solution du problème de Dirichlet

$$u(x) = \mathbb{E}^x f(X_{\tau_D}) = \int_{D^c} f(y)P_D(x, y)dy = \int_{D^c} f(y)\frac{P_D(x, y)}{m(y)}\mu(dy)$$

existe pour chaque  $f \in L^q(\mu)$  si et seulement si  $P_D(x, y)/m(y) \in L^p(m(y)dy)$  pour un point  $x$  et par suite pour tout  $x \in D$ . Si  $D$  était un domaine lisse,  $P_D(x, y) \approx \delta(y)^{-\alpha/2}$ ,  $\delta(y) \leq r_0/32$  (cf. [6], [8]), alors  $P_D(x, y)/m(y) \in L^p$  pour  $m(y) = \delta(y)^{-\alpha/2}$  et pour chaque  $p \geq 1$ . Le choix naturel de la poids  $m$  est donc  $m(y)dy = \delta(y)^{-r}$ , nommément  $r = \alpha/2$ .

Dénotons  $D^* = \{y \in D^c : \delta(y) \leq r_0/32\}$ .

**Lemme 4.1:** *Soit  $D$  un cône lisse. Alors*

$$\int_{D^*} |y|^t \delta(y)^s dy < \infty$$

*si et seulement si  $s > -1$  et  $t + s + d > 0$ .*

DÉMONSTRATION: On considère l'ensemble  $E = \{y \in D^* : |y| \leq r_0/32\}$ . On a clairement

$$\int_{D^* \setminus E} |y|^t \delta(y)^s dy < \infty$$

si et seulement si  $s > -1$ .

Soit  $B_k = \{y \in E : 2^{-k-1}r_0/32 < |y| \leq 2^{-k}r_0/32\}$  pour  $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ . On a, par homogénéité de  $\delta$  sur  $B_k$

$$\int_{B_k} |y|^t \delta(y)^s dy = (2^{-k})^{t+s+d} \int_{B_1} |y|^t \delta(y)^s dy = c(2^{-k})^{t+s+d}.$$

Alors

$$\int_E |y|^t \delta(y)^s dy = c \sum_{k=0}^{\infty} (2^{-k})^{t+s+d}$$

ce qui donne la condition  $t + s + d > 0$ .

□

Comme justifié par la discussion au début de cette section, on suppose que  $p \geq 1$  et  $m(y) = \delta(y)^{-r}$ . Soit

$$I_{r,p} = \int_{D^c} \frac{(P_D(x,y)\delta(y)^r)^p}{\delta(y)^r} dy.$$

Alors  $P_D(x,y)/m(y) \in L^p(m(y)dy)$  si  $I_{r,p} < \infty$ .

Soit  $r_\beta = \frac{d\alpha/2 - \alpha + \beta}{d - 1 - \alpha/2 + \beta}$ . Notons que pour  $\beta < \alpha/2$  on a  $0 \leq r_\beta < \alpha/2 < \alpha - \beta$ .

**Lemme 4.2:** *Soient  $\eta < 0$  (ou  $\beta < \alpha/2$ ) et  $p \geq 1$ . On a  $I_{r,p} < \infty$  si et seulement si*

$$\begin{aligned} p &< \frac{1-r}{\alpha/2-r} && \text{pour } -\infty < r \leq r_\beta, \\ p &< \frac{d-r}{\alpha-\beta-r} && \text{pour } r_\beta < r < \alpha - \beta, \\ p &< \infty && \text{pour } \alpha - \beta \leq r \leq d + \alpha, \\ p &< \frac{r-d}{r-d-\alpha} && \text{pour } d + \alpha < r < \infty. \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION: Au debut considérons l'intégrale sur  $D^c \setminus D^*$ . D'après (3.1), on a  $P_D(x,y) \approx \delta(y)^{-d-\alpha}$  pour  $y \in D^c \setminus D^*$ . Alors

$$I_1 := \int_{D^c \setminus D^*} \frac{(P_D(x,y)\delta(y)^r)^p}{\delta(y)^r} dy \approx \int_{D^c \setminus D^*} \delta(y)^{(-d-\alpha+r)p-r} dy < \infty$$

si et seulement si  $(-d-\alpha+r)p-r < -d$ . Si  $r \leq d+\alpha$  on a  $(-d-\alpha+r)p-r \leq -d-\alpha+r-r < -d$  et donc  $I_1$  est finie. Pour  $r > d+\alpha$ ,  $I_1$  est finie si et seulement si  $p < \frac{r-d}{r-d-\alpha}$ .

Maintenant on considère l'intégrale sur  $D^*$ . Si  $x$  est fixé et  $y \in D^*$  alors d'après le Théorème 3.2,  $P_D(x,y) \approx |y|^{\beta-\alpha/2}\delta(y)^{-\alpha/2}$ . D'après le Lemme 4.1

$$I_2 := \int_{D^*} \frac{(P_D(x,y)\delta(y)^r)^p}{\delta(y)^r} dy \approx \int_{D^*} |y|^{(\beta-\alpha/2)p} \delta(y)^{(r-\alpha/2)p-r} dy < \infty$$

si et seulement si

$$(r - \alpha/2)p - r > -1 \tag{4.1}$$

$$(r + \beta - \alpha)p - r + d > 0. \tag{4.2}$$

LE PROBLÈME DE DIRICHLET POUR LES FONCTIONS  $\alpha$ -HARMONIQUES

Soit  $r < \alpha - \beta$ . La condition (4.2) est équivalente à  $p < \frac{d-r}{\alpha-\beta-r}$ .  
 Si  $r \geq \alpha/2$ , (4.1) est satisfaite pour tout  $p \geq 1$ .  
 Si  $r < \alpha/2$ , (4.1) est équivalente à  $p < \frac{1-r}{\alpha/2-r}$ , et puisque  $\frac{1-r}{\alpha/2-r} \leq \frac{d-r}{\alpha-\beta-r}$  si et seulement si  $r < r_\beta$  on obtient la première et la deuxième partie du lemme.

Maintenant considérons  $r \geq \alpha - \beta$ . Pour tout  $p \geq 1$  on a

$$(r + \beta - \alpha)p - r + d \geq r + \beta - \alpha - r + d > d - \alpha > 0,$$

$$(r - \alpha/2)p - r + 1 \geq 1 - \alpha/2 > 0,$$

donc on obtient la troisième et la quatrième partie du lemme. □

Puisque le cas  $r = \alpha/2$  semble être le plus important, notons que  $I_{\alpha/2,p} < \infty$  si et seulement si  $p < \frac{2d-\alpha}{\alpha-2\beta}$ .

Pour  $\eta \geq 0$  (ou  $\beta \geq \alpha/2$ ) la condition (4.1) est plus forte que (4.2) et nous facilement obtenons que  $I_{r,p} < \infty$  (pour  $p \geq 1$ ) si et seulement si  $-\infty < r < \alpha/2$  et  $p < \frac{1-r}{\alpha/2-r}$  ou  $\alpha/2 \leq r \leq d + \alpha$  et  $p < \infty$  ou  $d + \alpha < r < \infty$  et  $p < \frac{r-d}{r-d-\alpha}$ .

Bien sur, le cas le plus restrictif est  $\beta < \alpha/2$ . Dans ce cas, l'ensemble  $\{(r, p) : I_{r,p} < \infty\}$  est l'intersection d'un demi-plan et les domaines sous les graphes de trois hyperboles. Notons que  $\{(r, p) : I_{r,p} < \infty\}$  est décroissant quand  $\beta \downarrow \beta_*$ , donc on obtient le corollaire suivant

**Corollaire 4.3:** *Soit  $p \geq 1$ .*

$$\int_{D^c} \frac{(P_D(x, y)\delta(y)^r)^p}{\delta(y)^r} dy < \infty, \quad x \in D, \tag{4.3}$$

*pour chaque cône lisse  $D$  si et seulement si  $-\infty \leq r \leq r_{\beta_*}$  et  $p < \frac{1-r}{\alpha/2-r}$  ou  $r_{\beta_*} < r < \alpha - \beta_*$  et  $p \leq \frac{d-r}{\alpha/2+\beta_*-r}$  ou  $\alpha - \beta_* \leq r \leq d + \alpha$  ou  $d + \alpha < r$  et  $p < \frac{r-d}{r-d-\alpha}$ . En particulier, pour  $r = \alpha/2$ , on a*

$$\int_{D^c} (P_D(x, y)\delta(y)^{\alpha/2})^p \delta(y)^{-\alpha/2} dy < \infty, \tag{4.4}$$

*pour chaque cône lisse  $D$  si et seulement si  $p \leq \frac{2d-\alpha}{\alpha-2\beta_*}$ .*

En conséquence pour  $r = \alpha/2$ , nous avons le résultat suivant.

**Corollaire 4.4:** *La solution du problème de Dirichlet existe pour tous les cônes lisses  $D$  et pour toutes les fonctions  $f \in L^q(\delta(y)^{-\alpha/2} dy)$  si et seulement si  $q \geq \frac{d-\alpha/2}{d-\alpha+\beta_*}$ .*

Considerons la valeur critique  $p^* = \frac{2d-\alpha}{\alpha-2\beta_*}$ , dans le cas  $r = \alpha/2$ . D'après la discussion dans la Section 3, on a  $\beta_* = \frac{\alpha-(d-1)}{2} \vee 0$ . Alors  $p^* > 2$ , pour tout  $d \geq 2$ ,  $\alpha \in (0, 2)$ . Pour  $d = 2$ , on a

$$p^* = \frac{4-\alpha}{\alpha \wedge 1}. \tag{4.5}$$

Considerons le cône infini  $C_\eta = \{y = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d : y_2 > \eta y_1\}$ . On a  $M_{C_\eta}(y) = M_{\Gamma_\eta}(y_1, y_2)$  où  $y = (y_1, \dots, y_d)$  et  $\Gamma_\eta = \{y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_2 > \eta y_1\}$ . On obtient facilement que la valeur critique  $p^*$  pour intégrabilité (locale) du noyau de Poisson pour le cône  $C_\eta$  est la même que pour le cône  $\Gamma_\eta$ , alors (4.5) donne une estimation d'en haut pour le nombres  $p \geq 1$  satisfaisant (4.4) pour tous les domaines lipschitziens dans  $\mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 2$ . Nous pensons que (4.5) est une analogie proche des resultats de Dahlberg [7].

Les méthodes présentées dans cet article s'appliquent également pour des domaines comme des polygones (si  $d = 2$ ) ou des domaines obtenus en réunissant un nombre fini de cônes de façon lisse et les résultats sont les mêmes. Ces méthodes ne marchent pas pour les domaines lipschitziens généraux, puisqu'on ne connaît pas exactement l'asymptotique de  $\phi$  pour ces domaines.

## Remerciements

Nous remercions Piotr Graczyk pour l'aide qu'il nous a apporté dans la préparation de cette note. Nous remercions aussi le rapporteur pour les perspicaces remarques qui ont fait cet article plus facile à lire.

## Références

- [1] Rodrigo Bañuelos and Krzysztof Bogdan. Symmetric stable processes in cones. *Potential Anal.*, 21(3):263–288, 2004.
- [2] Krzysztof Bogdan. The boundary Harnack principle for the fractional Laplacian. *Studia Math.*, 123(1):43–80, 1997.
- [3] Krzysztof Bogdan. Sharp estimates for the Green function in Lipschitz domains. *J. Math. Anal. Appl.*, 243(2):326–337, 2000.

- [4] Krzysztof Bogdan and Tomasz Byczkowski. Potential theory for the  $\alpha$ -stable Schrödinger operator on bounded Lipschitz domains. *Studia Math.*, 133(1):53–92, 1999.
- [5] Krzysztof Bogdan and Tomasz Byczkowski. Probabilistic proof of boundary Harnack principle for  $\alpha$ -harmonic functions. *Potential Anal.*, 11(2):135–156, 1999.
- [6] Zhen-Qing Chen and Renming Song. Estimates on Green functions and Poisson kernels for symmetric stable processes. *Math. Ann.*, 312(3):465–501, 1998.
- [7] Björn E. J. Dahlberg. Estimates of harmonic measure. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 65(3):275–288, 1977.
- [8] Tomasz Jakubowski. The estimates for the Green function in Lipschitz domains for the symmetric stable processes. *Probab. Math. Statist.*, 22(2):419–441, 2002.
- [9] David S. Jerison and Carlos E. Kenig. An identity with applications to harmonic measure. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 2(3):447–451, 1980.
- [10] Tadeusz Kulczycki. Properties of Green function of symmetric stable processes. *Probab. Math. Statist.*, 17(2):339–364, 1997.
- [11] Tadeusz Kulczycki. Exit time and Green function of cone for symmetric stable processes. *Probab. Math. Statist.*, 19(2):337–374, 1999.
- [12] Krzysztof Michalik. Sharp estimates of the Green function, Poisson kernel and Martin kernel of cones for symmetric stable processes. *Preprint*, 2004.
- [13] Krzysztof Michalik and Michał Ryznar. Nontangential convergence of  $\alpha$ -harmonic functions in Lipschitz domains. *To appear in Ill. J. Math.*, 2004.
- [14] Krzysztof Michalik and Krzysztof Samotij. Martin representation for  $\alpha$ -harmonic functions. *Probab. Math. Statist.*, 20(1):75–91, 2000.
- [15] Andrzej Stós. Boundary Harnack Principle for fractional powers of laplacian on Sierpinski carpet. *Preprint*, 2004.

K. BOGDAN ET T. JAKUBOWSKI

KRZYSZTOF BOGDAN  
POLISH ACADEMY OF SCIENCES  
INSTITUTE OF MATHEMATICS  
UL. KOPERNIKA 18  
50-370 WROCLAW  
POLAND  
bogdan@im.pwr.wroc.pl

TOMASZ JAKUBOWSKI  
UNIVERSITÉ D'ANGERS  
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES  
2 BOULEVARD LAVOISIER  
49045 ANGERS CEDEX 01  
FRANCE  
jakubow@im.pwr.wroc.pl