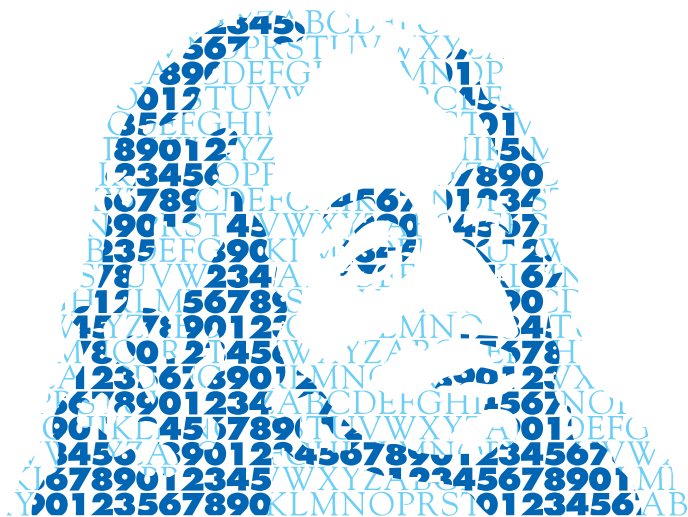


ANNALES MATHÉMATIQUES



BLAISE PASCAL

A. BENAOUA, A. GMIRA, B. HAMRI

**Classification des solutions d'un problème elliptique
fortement non linéaire**

Volume 12, n°1 (2005), p. 161-180.

http://ambp.cedram.org/item?id=AMBP_2005__12_1_161_0

© Annales mathématiques Blaise Pascal, 2005, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Annales mathématiques Blaise Pascal » (<http://ambp.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://ambp.cedram.org/legal/>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

*Publication éditée par le laboratoire de mathématiques
de l'université Blaise-Pascal, UMR 6620 du CNRS
Clermont-Ferrand — France*

cedram

*Article mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
<http://www.cedram.org/>*

Classification des solutions d'un problème elliptique fortement non linéaire

A. Benaouda
A. Gmira
B. Hamri

Résumé

On étudie la classification des solutions du problème elliptique

$$(|u'|^{p-2} u')'(t) + (|u|^{q-1} u)'(t) - f(t) |u|^{m-1} u(t) = 0, \quad t > 0,$$

où $q > 1$, $p \geq m+1 > 2$ et f une fonction changeant de signe. En utilisant une méthode de tir, On montre qu'en partant avec une dérivée initiale nulle toutes les solutions sont globales. De plus si $p > m+1$ et $q > (p-1)(m+1)/p$ l'ensemble des solutions est constitué d'une seule solution à support compact et de deux familles de solutions; celles qui sont strictement positives et celles qui changent de signes. On montre aussi que ces deux familles tendent vers l'infini quand t tend vers l'infini.

Key words: elliptique fortement non linéaire, existence globale, classification.

AMS Subject Classification: 35K55,35K65.

1 Introduction

Ce travail concerne l'étude du problème elliptique suivant

$$(Q) \begin{cases} (|u'|^{p-2} u')'(t) + (|u|^{q-1} u)'(t) - f(t) |u|^{m-1} u(t) = 0 & (E_1) \\ u(0) = A, \quad u'(0) = 0 & (E_2) \end{cases}$$

où $p > 2$, $q > 1$, $m > 1$ et A un paramètre réel.

On suppose que f vérifie les hypothèses (H) suivantes:

(H_1) $f \in C^1(]0, +\infty[) \cap C([0, +\infty[)$,

(H_2) f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$,

(H_3) il existe une constante $\tau > 0$ telle que f est strictement positive sur $]\tau, +\infty[$ et $f(\tau) = 0$.

Ce problème intervient lors de l'étude de l'existence de l'interface pour le problème parabolique dégénéré suivant

$$(P) \begin{cases} u_t = (|u_x|^{p-2} u_x)_x + (|u|^{q-1} u)_x - f(t) |u|^{m-1} u = 0 & \text{dans } (0, \infty) \times (0, \infty), \\ u_x(0, t) = 0 & \text{dans } (0, \infty), \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{dans } (0, \infty). \end{cases}$$

La première équation de ce problème sert comme modèle mathématique pour le phénomène de diffusion- convection-réaction. Par exemple, on peut la considérer comme une équation de combustion dans un milieu continue ayant une conductivité $K = |u_x|^{p-2} \geq 0$, qui dépend du gradient de la température, par contre le terme de la convection $(|u|^{q-1} u)_x$, dépend de la température ainsi que de son gradient. Quant au terme de réaction, constitué de $-f(t) |u|^{m-1} u$ est un terme perturbateur. Il est intéressant de noter que si $p = q = 2$ et si le terme de convection $(|u|^{q-1} u)_x$ est remplacé par $-u^3$ avec $f(t) = -\sqrt{t}$ on obtient l'équation de Painlevé qui a été étudiée par [7], [8], et [9]. D'autre part si $p = 2$, $q \geq 1$ et $0 < m < 1$ le problème (Q) a été étudié par [4].

Ici on s'intéresse au cas $p > 2$ et $q > 1$.

Tout d'abord, on appelle solution du problème (Q) toute fonction u de classe \mathcal{C}^1 telle que $|u'|^{p-2} u'$ soit de classe \mathcal{C}^1 et vérifiant (E_1) et (E_2) .

L'équation (E_1) peut se ramener au système d'équations différentielles du premier ordre suivant:

$$(S) \begin{cases} X' = |Y|^{\frac{2-p}{p-1}} Y \\ Y' = -q |X|^{q-1} |Y|^{\frac{2-p}{p-1}} Y + f(t) |X|^{m-1} X \end{cases}$$

Comme la fonction

$$(t, X, Y) \longrightarrow \left(|Y|^{\frac{2-p}{p-1}} Y, -q |X|^{q-1} |Y|^{\frac{2-p}{p-1}} Y + f(t) |X|^{m-1} X \right)$$

est localement Lipschitzienne sur l'ensemble $\{(t, X, Y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^+\}$, le théorème de Cauchy - Lipschitz (voir par exemple [1]) assure l'existence et l'unicité d'une solution locale autour d'un point quelconque t_0 tel que $u(t_0)u'(t_0) \neq 0$. Or pour le problème (Q), la dérivée de u est nulle, et alors ce théorème ne s'applique plus. Cependant, en exploitant une idée

CLASSIFICATION DES SOLUTIONS D'UN PROBLÈME ELLIPTIQUE

utilisée auparavant par [5], on peut prouver l'existence et l'unicité locale pour le problème (Q). Pour cela il faut noter que si u est une solution sur un intervalle $[0, T_A[$, alors elle vérifie

$$u(t) = A + \int_0^t G(F(u(s)))ds, \quad \forall t \in [0, T_A[\tag{1.1}$$

où

$$G(s) = |s|^{\frac{2-p}{p-1}} s, \quad s \in \mathbb{R} \tag{1.2}$$

et

$$F(u)(s) = |A|^{q-1} A - |u|^{q-1} u(s) + \int_0^s f(\tau) |u|^{m-1} u(\tau)d(\tau) \tag{1.3}$$

c'est à dire que u est le point fixe d'un opérateur T défini sur l'espace fonctionnel

$$M = \{ \varphi \in \mathcal{C}^0([0, T_A]); \|\varphi(t) - A\| \leq R, \forall t \in [0, T_A] \}$$

par

$$T(\varphi)(t) = A + \int_0^t G(F(\varphi)(s))ds \tag{1.4}$$

où R est un paramètre à déterminer pour que T opère de M dans M et qu'elle soit contractante. Par suite le théorème du point fixe s'applique. Pour se faire il suffit de suivre les mêmes étapes qui ont été utilisé dans [2] et [3] pour déduire facilement que pour chaque $A \in \mathbb{R}^*$, le problème (Q) admet une solution unique u définie sur un intervalle maximal $[0, T_{\max}[$.

Si on note par $u(t, A)$ la solution du problème (Q) alors $u(t, -A) = -u(t, A)$; et par suite, sans perdre de généralité on va supposer tout au long de ce travail que A est un paramètre strictement positif.

Il faut remarquer aussi que la fonction u est de classe \mathcal{C}^∞ sur l'ensemble des points où la dérivée ne s'annule pas. Le but de ce papier est de donner une classification complète des solutions du problème (Q) pour le cas $q > 1$, $p \geq m + 1 > 2$. Plus exactement on obtient les résultats suivants:

En Supposant que $q > 1$ et $p \geq m + 1 > 2$. Alors pour chaque $A > 0$, le problème (Q) admet une unique solution qui est globale. Si en plus $q >$

m on montre l'existence de solutions strictements positives; ces solutions changent une et seule fois de monotonie et tendent vers l'infini quand t tend vers ∞ .

Si $p > m + 1$ et $q > (p - 1)(m + 1)/p$ l'ensemble des solutions est constitué d'une seule solution à support compact et de deux autres familles de solutions; celles qui sont strictement positives et celles qui changent de signes. ces dernières tendent vers l'infini quand t tend vers l'infini et ne peuvent s'annuler qu'une seule fois au plus au delà de la constante τ .

La suite du travail sera divisée en deux sections. La section 2 sera consacrée à l'existence globale (via une fonction d'énergie) et à quelques résultats préliminaires. Quant à la classification des solutions elle va être développée dans la section 3.

2 Existence globale et résultats préliminaires

On commence cette section par le résultat suivant

Proposition 2.1: *Supposons que $q > 1$ et $p \geq m + 1 > 2$. Alors pour tout $A > 0$, la solution du problème (Q) est globale.*

DÉMONSTRATION: Elle va se faire par l'absurde. Pour cela supposons que l'intervalle maximal d'existence $[0, T_{\max}[$ est borné et considérons la fonction d'énergie suivante

$$E(t) = \frac{p-1}{p} |u'|^p(t) - f(t) \frac{|u|^{m+1}(t)}{m+1}, \quad (2.1)$$

pour tout $t \in [0, T_{\max}[$. Alors

$$E'(t) = -q |u|^{q-1} u'^2(t) - f'(t) \frac{|u|^{m+1}(t)}{m+1}. \quad (2.2)$$

CLASSIFICATION DES SOLUTIONS D'UN PROBLÈME ELLIPTIQUE

Comme f est croissante, on déduit que E est décroissante et que pour $t \in [0, T_{\max}[$, on a

$$|u'|^p \leq B \left[1 + \frac{f(t)}{|f(0)|} A^{-m-1} |u|^{m+1}(t) \right] \quad (2.3)$$

où

$$B = \frac{p}{(p-1)(m+1)} A^{m+1} |f(0)|. \quad (2.4)$$

En particulier

$$|u'(t)| \leq B^{\frac{1}{p}} \left[1 + \frac{|f(T_{\max})|}{|f(0)|} A^{-m-1} |u(t)|^{m+1} \right]^{\frac{1}{p}}. \quad (2.5)$$

Soit maintenant t_0 proche de T_{\max} , alors en intégrant cette inéquation sur $(t_0, t) \subset [0, T_{\max}[$, on obtient

$$\int_{t_0}^t |u'(\tau)| \left[1 + \frac{f(T_{\max})}{|f(0)|} A^{-m-1} |u(\tau)|^{m+1} \right]^{-\frac{1}{p}} d\tau \leq B^{1/p} [T_{\max} - t_0]. \quad (2.6)$$

Si on pose

$$c = \frac{|f(T_{\max})|}{|f(0)|} A^{-m-1},$$

en tenant compte du fait que $m \leq p - 1$ on obtient

$$\lim_{t \rightarrow T_{\max}} \left| \int_{t_0}^t u'(\tau) [1 + c |u(\tau)|^{m+1}]^{-\frac{1}{p}} d\tau \right| = \lim_{t \rightarrow T_{\max}} \left| \int_{|u(t_0)|}^{|u(t)|} [1 + cs^{m+1}]^{-\frac{1}{p}} ds \right| = \infty.$$

Ce qui contredit (2.6). Par conséquent $T_{\max} = \infty$ et alors la preuve de la proposition est terminée. \square

Le résultat suivant montre la monotonie des solutions positives à partir d'un certain rang, plus exactement on la

Proposition 2.2: *Supposons que u est strictement positive alors ou bien elle est strictement décroissante ou bien il existe $t_0 \geq \tau$ tel que $u' < 0$ sur $]0, t_0[$ et $u' > 0$ sur $]t_0, +\infty[$.*

DÉMONSTRATION: D'après l'équation (E_1) ,

$$\left(|u'|^{p-2} u'\right)'(0) = f(0)u^m(0) \quad (2.7)$$

Ainsi l'hypothèse (H_3) implique que u est concave dans un voisinage à droite de 0. Par suite, ou bien u' est toujours décroissante ou bien elle s'annule et dans ce cas on note par t_0 son premier zéro. Alors à gauche de t_0 , la fonction u' doit être croissante car elle était négative avant t_0 . C'est à dire $|u'|^{p-2} u'$ est croissante à gauche de t_0 , et par continuité on doit avoir $\left(|u'|^{p-2} u'\right)'(t_0) \geq 0$. Mais

$$\left(|u'|^{p-2} u'\right)'(t_0) = f(t_0)u^{m+1}(t_0), \quad (2.8)$$

d'où nécessairement $t_0 \geq \tau$.

On distingue maintenant deux cas.

1. Si $t_0 > \tau$, alors $\left(|u'|^{p-2} u'\right)'(t_0) = f(t_0)u^{m+1}(t_0) > 0$, et par suite la fonction $t \rightarrow |u'|^{p-2} u'(t)$ est strictement croissante à droite de t_0 et alors de nouveau, d'après l'hypothèse (H_3) , la solution u est strictement croissante sur $]t_0, +\infty[$.
2. Si $t_0 = \tau$, alors $\left(|u'|^{p-2} u'\right)'(t_0) = 0$. Si u devient concave en un point t à droite de τ , alors u' est négative et par suite

$$\left(|u'|^{p-2} u'\right)'(t) = -q|u|^{q-1} u'(t) + f(t)u^m(t) > 0, \quad (2.9)$$

Ce qui est absurde. D'où nécessairement u croit à droite de τ et elle reste toujours croissante.

Dans les deux cas on déduit que $u'(t) > 0$ pour tout $t \in]t_0, +\infty[$. Ce qui termine la preuve.

□

Lemme 2.3: *Soit u une solution strictement positive. Alors ou bien $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = +\infty$ ou bien $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = 0$.*

DÉMONSTRATION: D'après la proposition 2.2, il n'y a que deux possibilités: soit que la fonction u' s'annule soit qu'elle est strictement négative. Si u' s'annule en un point t_0 , alors de nouveau d'après la proposition 2.2 elle va rester strictement positive sur $]t_0, +\infty[$; et par suite en faisant tendre t vers $+\infty$ on déduit facilement que $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = +\infty$.

On suppose maintenant que u' est strictement décroissante. Soit $L = \lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)$. Intégrons l'équation (E_1) sur $]0, t[$ avec $t > \tau$. On obtient

$$|u'|^{p-2} u'(t) = -u^q(t) + A^q + \int_0^t f(s)u^m(s)ds. \quad (2.10)$$

Or

$$\int_0^t f(s)u^m(s)ds \geq \int_0^\tau f(s)u^m(s)ds + L^m \int_\tau^t f(s)ds,$$

d'où

$$|u'|^{p-2} u'(t) \geq -u^q(t) + A^q + \int_0^\tau f(s)u^m(s)ds + L^m \int_\tau^t f(s)ds \quad (2.11)$$

D'autre part comme f est strictement croissante et $f(\tau) = 0$, alors $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_\tau^t f(s)ds = +\infty$. Ainsi si $L > 0$, en faisant tendre t vers $+\infty$ dans l'inéquation (2.11) on obtient $\lim_{t \rightarrow +\infty} u'(t) = +\infty$, ce qui est absurde. Par suite on a bien $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = 0$. Ceci termine la preuve. \square

Pour finir cette section on montre que le produit uu' s'annule en un point fini, plus exactement on a la

Proposition 2.4: *Supposons que $p \geq m + 1$. Alors il existe une constante T fini telle que $u > 0$ et $u' < 0$ sur $]0, T[$, et $u(T)u'(T) = 0$.*

DÉMONSTRATION: Supposons par l'absurde que $u > 0$ et $u' < 0$ sur $(0, +\infty)$. De l'équation (E_1) on déduit en particulier que pour tout $t > \tau$, $(|u'|^{p-2} u')'(t) > 0$; c'est à dire que la fonction $t \rightarrow |u'|^{p-2} u'(t)$ est croissante sur $(\tau, +\infty)$. Or d'après le lemme 2.3, $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = 0$ et alors nécessairement $\lim_{t \rightarrow +\infty} u'(t) =$

0. D'autre part comme u' ne s'annule pas, alors u'' existe. Soit maintenant une suite $(t_n)_{n>0}$ qui tend vers l'infini telle que $\lim_{t \rightarrow +\infty} u''(t_n) = 0$. De telle suite existe car $\lim_{t \rightarrow +\infty} u'(t) = 0$. En utilisant de nouveau l'équation (E_1) , on déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(t_n)u^m(t_n) = 0$ et par conséquent l'énergie au point t_n , $E(t_n) = \frac{p-1}{p} |u'(t_n)|^p - \frac{f(t_n)}{m+1} u^{m+1}(t_n)$ converge vers zéro lorsque n tend vers $+\infty$. Mais on sait que l'énergie est décroissante donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} E(t) = 0$. De plus pour tout $t \in]0, +\infty[$, $E(t) > 0$. On déduit en particulier, que pour tout $t > \tau$

$$u'(t) < - \left[\frac{pf(t)}{(p-1)(m+1)} \right]^{\frac{1}{p}} u^{\frac{m+1}{p}}(t). \tag{2.12}$$

Intégrons maintenant cette inéquation et rappelons que $p \geq m+1$ et que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{\tau}^t f^{\frac{1}{p}}(s) ds = +\infty$ on aboutit à une contradiction.

Ce qui termine la preuve de la proposition 2.4. □

Remarque 2.5: Si on pose

$$\Gamma = \sup \{t > 0; u > 0 \text{ et } u' < 0 \text{ sur } [0, t]\}.$$

Alors la proposition 2.4 montre que si $p \geq m+1$, Γ est une constante strictement positive et $u(\Gamma)u'(\Gamma) = 0$. D'autre part, en utilisant le lemme 2.3 et la proposition 2.2, on déduit que toute solution strictement positive tend vers $+\infty$ quand t tend vers $+\infty$.

3 Classification des solutions

Dans cette section on va donner une classification complète des solutions ainsi que leurs comportements asymptotique quand t tend vers $+\infty$.

Les solutions sont classées en trois familles : celles qui sont strictement positives, celles qui changent de signe et enfin celles qui sont à support compact. Pour cela on introduit les notations suivantes

CLASSIFICATION DES SOLUTIONS D'UN PROBLÈME ELLIPTIQUE

$$\begin{aligned}
 P &= \{A > 0, \quad u(t) > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}^+\} \\
 N &= \{A > 0; \exists t_0 \in \mathbb{R}^+, \quad u(t_0) < 0\} \\
 C &= \{A > 0; \exists t_0 \in \mathbb{R}^+, \quad u > 0 \text{ et } u' < 0 \text{ sur }]0, t_0[\text{ et } u(t) = u'(t_0) = 0\}
 \end{aligned}$$

Proposition 3.1: *Supposons que $p \geq m + 1$ et $q > m$. Alors l'ensemble P est un ouvert non vide.*

DÉMONSTRATION: Le fait que P soit un ouvert provient de la dépendance continue de la solution par rapport aux paramètres. Pour montrer que P est un ouvert, on va même montrer mieux: qu'il existe $A^* > 0$ tel que $]A^*, +\infty[\subset P$. Ceci va se faire par l'absurde.

Pour cela supposons qu'il existe une suite $(A_k)_{k>0}$ tendant vers $+\infty$ telle que $A_k \notin P$.

Soit le réel Γ_k tel que $u(\Gamma_k, A_k)u'(\Gamma_k, A_k) = 0$ (Γ_k existe d'après la proposition 2.4). Comme $A_k \notin P$, alors on aura $u(\Gamma_k, A_k) = 0$.

Intégrons maintenant l'équation (E_1) sur $]0, \Gamma_k[$ et en tenant compte du fait que $u' < 0$ sur $]0, \Gamma_k[$, on obtient

$$|u'|^{p-2} u'(\Gamma_k) = A_k^q + \int_0^{\Gamma_k} f(s)u^m(s)ds \leq 0, \quad (3.1)$$

d'où

$$A_k^q \leq - \int_0^{\Gamma_k} f(s)u^m(s)ds.$$

En utilisant de nouveau l'hypothèse (H_3) , on déduit que

$$A_k^q \leq - \int_0^\tau f(s)u^m(s)ds \leq A_k^m \int_0^\tau |f(s)| ds.$$

En particulier, on aura

$$A_k^{q-m} \leq \int_0^\tau |f(s)| ds. \quad (3.2)$$

Mais comme $q > m$, alors le premier membre de cette inégalité tend vers $+\infty$ quand k tend vers $+\infty$; par contre le second membre est fini. Ce qui est absurde. □

L'étude de l'ensemble N nécessite certains résultats préliminaires. Pour cela on considère le problème suivant:

$$(L) \quad \begin{cases} (|w'|^{p-2} w')' = f(0) |w|^{m-1} w, \\ w(0) = 1, \quad w'(0) = 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

Lemme 3.2: *Supposons que $p \geq m + 1$. Alors le problème (L) admet une unique solution w . Cette solution oscille autour de l'axe ox .*

DÉMONSTRATION: En ramenant (L) à un problème de point fixe, il est facile de montrer que (L) admet une solution locale unique w . Soit $[0, T_{\max}[$ l'intervalle maximal d'existence. En multipliant la première équation du problème (L) par w' , on obtient

$$\frac{p-1}{p} (|w'(t)|^p)' = \frac{f(0)}{m+1} (|w|^{m+1})'(t) \quad \forall t \in [0, T_{\max}[. \quad (3.4)$$

D'où

$$|w'(t)|^p = \frac{p}{(p-1)(m+1)} f(0) [|w|^{m+1}(t) - 1], \quad \forall t \in [0, T_{\max}[. \quad (3.5)$$

Par suite nécessairement $|w(t)| \leq 1$ pour tout $t \in [0, T_{\max}[$. Ce qui implique que T_{\max} est infini et ainsi l'équation précédente peut s'écrire sous la forme suivante

$$|w'(t)| = M [1 - |w|^{m+1}(t)]^{\frac{1}{p}}, \quad \forall t > 0 \quad (3.6)$$

avec $M = \left[\frac{p|f(0)|}{(p-1)(m+1)} \right]^{\frac{1}{p}}$. D'autre part, l'équation, (3.3) implique

que la solution w est une fonction strictement décroissante sur un voisinage à droite de zéro. On affirme qu'elle va changer de sens de variation. En effet, supposons qu'elle reste tout le temps décroissante. D'où on doit avoir $w(t) > -1$ pour tout $t > 0$. Or, en intégrant l'équation (3.6), on obtient

$$\int_{w(t)}^1 \frac{ds}{(1 - |s|^{m+1})^{\frac{1}{p}}} = Mt, \quad \forall t > 0. \quad (3.7)$$

Ce qui est absurde car le premier membre de cette égalité est fini, alors que le second membre tend vers $+\infty$ quand t tend vers $+\infty$. Par conséquent il existe nécessairement $t_0 > 0$ tel que $w'(t_0) = 0$ et alors l'équation (3.6) implique que $w(t_0) = -1$. Mais d'un autre côté les constantes ne sont pas des solutions et comme $|w(t)| \leq 1$, alors w devient nécessairement strictement croissante.

En intégrant de nouveau l'équation (3.6), mais cette fois-ci sur un intervalle $]t_0, t[$ (avec $t > t_0$), on déduit l'existence d'un point $t_1 > t_0$ tel que $w'(t_1) = 0$ et $w(t_1) = 1$. En suivant ce procédé on montre que la solution w oscille autour de l'axe ox . De plus si on note par $(t_i)_{i \geq 0}$ les zéros successifs de la dérivée, la fonction w est donnée par la formule implicite suivante:

$$\int_{-1}^{w(t)} \frac{ds}{[1 - |s|^{m+1}]^{\frac{1}{p}}} = M(t - t_{2i}), \quad \forall t \in]t_{2i}, t_{2i+1}[. \quad (3.8)$$

et

$$\int_{w(t)}^1 \frac{ds}{(1 - |s|^{m+1})^{\frac{1}{p}}} = M(t - t_{2i+1}), \quad \forall t \in]t_{2i+1}, t_{2(i+1)}[. \quad (3.9)$$

Ce qui termine la preuve du Lemme 3.2. □

On est en mesure d'énoncer le résultat concernant l'ensemble N .

Proposition 3.3: *Supposons que $p > m + 1$ et $q > \frac{(p-1)(m+1)}{p}$. Alors l'ensemble N est un ouvert non vide.*

DÉMONSTRATION: En s'inspirant de la méthode d'Haraux et Weissler [6], la preuve va se faire en deux étapes.

Étape 1. Il existe $A_* > 0$ tel que $]0, A_*[\subset N$.

On se donne μ_0 tel que $\mu_0^k z_0 = \frac{\tau}{2}$ où τ est le zéro de la fonction f et z_0 est le premier zéro de la solution w du problème (L) avec

$$k = \frac{p-1-m}{p}. \quad (3.10)$$

Soient A une constante positive et u la solution du problème (Q) correspondante, on introduit la fonction v_A définie par

$$v_A(t) = \mu_0 A^{-1} u(\mu_0^k A^k t) \tag{3.11}$$

Alors v_A est la solution du problème suivant

$$\begin{cases} (|v'_A|^{p-2} v'_A)' = -A^{q-k-m} (|v_A|^{q-1} v_A)' + g(t) |v_A|^{m-1} v_A, \\ v_A(0) = \mu_0, v'_A(0) = 0 \end{cases} \tag{3.12}$$

où $g(t) = f(\mu_0^k A^k t)$.

Montrons que v_A et v'_A sont bornés sur tout compact de \mathbb{R}^+ pour A assez petit. Pour cela on se donne une constante $T > 0$. Comme l'énergie donnée par (2.1) est décroissante et que la fonction f est négative et croissante sur $[0, \tau[$, alors on déduit que

$$|u(s)| \leq A, \quad \forall s \in]0, \tau[.$$

De plus pour tout $A < A_0 = (\frac{\tau}{T})^{\frac{1}{k}} \mu_0^{-1}$ on aura $\mu_0^k A^k t < \tau$, pour tout $t \in [0, T]$ et par suite

$$|v_A(t)| \leq \mu_0, \quad \forall t \in [0, T]. \tag{3.13}$$

En intégrant la première équation de (3.12) sur $]0, t[\subset [0, T]$, et en tenant compte du fait que $p \geq m + 1$, on déduit que pour tout $A \leq A_0$, il existe une constante $C > 0$ indépendante de A telle que

$$|v'_A(t)| \leq C, \quad \forall t \in [0, T].$$

Par conséquent, le théorème d'Arzela -Ascoli implique l'existence d'une suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tendant vers 0 quand n tend vers ∞ telle que v_{A_n} converge uniformément dans $C^{1,\alpha}([0, T])$ lorsque n tend vers ∞ , vers la solution du problème suivant

$$(L_{\mu_0}) \quad \begin{cases} (|w'_{\mu_0}|^{p-2} w'_{\mu_0})' = f(0) |w_{\mu_0}|^{m-1} w_{\mu_0} \\ w_{\mu_0}(0) = \mu_0, w'_{\mu_0}(0) = 0. \end{cases} \tag{3.14}$$

Or la solution w_{μ_0} de ce problème est donnée exactement par

$$w_{\mu_0}(t) = \mu_0 w(\mu_0^k t) \tag{3.15}$$

où w est la solution du problème (L). Comme w change de signe au point z_0 alors la fonction w_{μ_0} change de signe au point $\mu_0^k z_0 = \frac{\tau}{2}$. Par conséquent

la fonction v_A et par suite la solution $u(\cdot, A)$ change de signe pour A assez petit. C'est à dire $A \in N$.

Étape 2. N est un ouvert. Pour cela on se donne $A_0 \in N$ et soit $\Gamma_0 > 0$ tel que $u(\Gamma_0)u'(\Gamma_0) = 0$. Comme $u'(\Gamma_0, A_0) \neq 0$, en utilisant la dépendance continue par rapport aux paramètres, on déduit que pour toute constante $A > 0$ proche de A_0 , $u'(\Gamma(A), A) \neq 0$. Or le produit $u'u$ doit s'annuler au point $\Gamma(A)$, ce qui donne nécessairement $u(\Gamma(A), A) = 0$. Par conséquent $A \in N$ et alors l'ensemble N est un ouvert. Ceci termine la preuve. \square

Il est facile de voir que les solutions qui changent de signe vérifient les résultats suivants

Proposition 3.4: *Soit u une solution qui change de signe, alors u ne peut s'annuler qu'une seule fois au plus au delà de la constante τ . De plus $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = \pm\infty$.*

Remarque 3.5:

1. S'il existe $t_0 \geq \tau$ tel que $u(t_0) < 0$ alors $u(t) < 0$ pour tout $t > t_0$ tout en étant concave.
2. Les pentes aux points où la solution s'annule sont décroissantes.

Pour finir ce travail on va montrer que l'ensemble C est réduit à un seul élément; plus exactement on a le résultat suivant

Proposition 3.6: *Supposons que $p > m + 1$ et $q > \frac{(p-1)(m+1)}{p}$. Alors il existe une et une seule constante A telle que u soit positive et à support compact.*

La démonstration de la proposition repose sur le comportement de la solution au bord du support. Ce comportement est donné par le

Lemme 3.7: *On suppose $q > \frac{(p-1)(m+1)}{p}$. Soit u une solution du problème (Q) qui est à support compact $[0, T]$. Alors*

$$\lim_{t \rightarrow T} |u'|^p u^{-m-1}(t) = \frac{p}{(m+1)(p-1)} f(T) \quad (3.16)$$

DÉMONSTRATION: En multipliant l'équation (E_1) par u' et en intégrant sur $]t, T[$ on obtient

$$\begin{aligned} \frac{p-1}{p} |u'|^p u^{-m-1}(t) &= \frac{f(t)}{m+1} + qu^{-m-1}(t) \int_t^T u^{q-1} u'^2(s) ds \\ &+ \frac{1}{(m+1)} u^{-m-1}(t) \int_t^T f'(s) u^{m+1}(s) ds. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Pour obtenir la formule (3.16) on va montrer que chacun des deux termes qui contient l'intégrale tend vers 0 quand t tend vers T . Comme u , est décroissance alors

$$0 < \frac{1}{(m+1)} u^{-m-1}(t) \int_t^T f'(s) u^{m+1}(s) ds < \frac{1}{m+1} (f(T) - f(t)) \quad (3.18)$$

et par suite le dernier terme de l'égalité (3.17) tend vers 0 quand t tend vers T . Quant à la première intégrale il faut remarquer que la solution u est convexe sur $]t, T[$ pour t proche de T et alors l'inégalité suivante est vérifiée

$$\int_t^T u^{q-1} u'^2(s) ds \leq -|u'(t)| \int_t^T u^{q-1}(s) u'(s) ds \leq \frac{1}{q} |u'(t)| u^q(t) \quad (3.19)$$

D'où

$$qu^{-m-1}(t) \int_t^T u^{q-1} u'^2(s) ds < |u'(t)| u^{q-m-1}(t) \quad (3.20)$$

En combinant (3.17)-(3.18) et (3.20) on déduit que pour tout t proche de T on a

$$|u'|^p u^{-m-1}(t) \leq \frac{p}{p-1} |u'(t)| u^{q-m-1}(t) + C, \quad (3.21)$$

où

$$C = \frac{p}{(p-1)(m+1)} [2f(T) - f(t)] \leq \frac{2p}{(p-1)(m+1)} f(T). \quad (3.22)$$

Si on pose $y = |u'|^p u^{-m-1}$ alors y vérifie l'inégalité

$$y(t) \leq \frac{p}{p-1} y^{1/p} u^{q-(m+1)(p-1)/p}(t) + \frac{2p}{(p-1)(m+1)} f(T). \quad (3.23)$$

Or $q > \frac{(m+1)(p-1)}{p}$ et $u(T) = 0$, d'où

$$y(t) \leq \frac{p}{p-1} y^{1/p} + \frac{2p}{(p-1)(m+1)} f(T). \quad (3.24)$$

Ce qui implique nécessairement que la fonction y est bornée c'est à dire qu'il existe une constante $K > 0$ telle que $|u'|^p(t) \leq K u^{m+1}(t)$, et alors

$$|u'(t)| u^{q-m-1}(t) \leq K^{1/p} u^{q-(m+1)(p-1)/p}(t). \quad (3.25)$$

Par conséquent

$$\lim_{t \rightarrow T} |u'(t)| u^{q-m-1}(t) = 0. \quad (3.26)$$

Finalement en passant à la limite sur t dans la relation (3.21) et en tenant compte de (3.18) et (3.20) l'égalité (3.16) découle. Ce qui termine la preuve. \square

Remarque 3.8: Le résultat du Lemme précédent peut s'écrire sous la forme suivante:

$$\lim_{t \rightarrow T} \frac{p}{p-m-1} (u^{(p-m-1)/p})'(t) = - \left(\frac{p}{(p-1)(m+1)} \right)^{1/p} f^{1/p}(T). \quad (3.27)$$

Maintenant on est en mesure de montrer la proposition 3.6.

DÉMONSTRATION: Puisque P et N sont deux ouverts non vides disjoints, alors il existe une constante $A \in]0, +\infty[- (P \cup N)$ telle que la solution correspondante est à support compact. En s'inspirant des techniques utilisées par L. A. Peletier dans [10] on va montrer que A est unique. Ce ci va se faire en deux étapes. Pour cela supposons qu'il existe deux constantes $A_1 < A_2$ telles que $u(\cdot, A_1)$ et $u(\cdot, A_2)$ soient à supports compacts. Notons par $[0, T_1]$ et par $[0, T_2]$ respectivement leurs supports.

Etape 1. On affirme que $T_1 < T_2$ et $u(\cdot, A_1) < u(\cdot, A_2)$ sur $[0, T_1]$. Supposons le contraire, c'est à dire qu'il existe $t_0 \in]0, \min(T_1, T_2)[$ tel que

$$u(t, A_1) < u(t, A_2) \quad \text{sur }]0, t_0[\quad \text{et } u(t_0) = v(t_0). \quad (3.28)$$

Pour faciliter l'écriture on posera $u = u(\cdot, A_1)$ et $v = u(\cdot, A_2)$. On introduit maintenant la suite $(u_k)_{k>0}$ définie sur $]0, \frac{1}{k} \min(T_1, T_2)[$ par

$$u_k(t) = k^{-l} u(kt) \quad (3.29)$$

avec

$$l = \frac{p}{p - m - 1}. \quad (3.30)$$

Alors u_k vérifie le problème suivant

$$\left(\left| u_k' \right|^{p-1} u_k' \right)' (t) = -k^\mu (u_k^q)'(t) + f(kt) u_k^m(t) \quad (3.31)$$

où

$$\mu = \frac{p(q - m)}{p - m - 1} - 1. \quad (3.32)$$

Il faut noter que puisque $p > m + 1$, alors $\mu > 0$. Comme pour $t \in [0, \frac{T_1}{k}[$, $u(kt)$ est strictement positive, alors il existe nécessairement $k \in [0, \Gamma]$ tel que $u_k(t) > v(t)$ pour $t \in [0, t_0]$, où

$$\Gamma = \left(\frac{A_1}{2A_2} \right)^{1/l}$$

CLASSIFICATION DES SOLUTIONS D'UN PROBLÈME ELLIPTIQUE

Soit

$$\rho = \sup \{k > 0; u_k(t) > v(t) \text{ sur } [0, t_0]\}. \quad (3.33)$$

Puisque l'ensemble $\{k \in]0, \Gamma[: u_k > v \text{ sur } [0, t_0]\}$

est un ouvert et ρ n'appartient pas à cet ensemble, alors $u_\rho \geq v$. Donc il existe nécessairement $t^* \in [0, t_0]$ tel que $u_\rho(t^*) = v(t^*)$. Mais si $t^* = t_0$ alors $u_\rho(t_0) = \rho^{-l}u(\rho t_0) = v(t_0) = u(t_0)$ ce qui entraîne que $\rho = 1$ et par conséquent $u \geq v$ sur $[0, t_0]$, ce qui est absurde. D'autre part si $t^* = 0$ alors $u_\rho(0) = \rho^{-l}u(0) = \rho^{-l}A_1 = A_2$ ce qui est en contradiction avec le fait que $\rho \leq \Gamma$. Donc on aura nécessairement

$$t^* \in]0, t_0[, \rho \in]0, 1[, u_\rho(t^*) = v(t^*) \text{ et } u_\rho \geq v \text{ sur } [0, t_0].$$

Ce qui implique que la courbe de u_ρ et celle de v sont tangentes au point t^* ; c'est à dire que

$$u_\rho(t^*) = v(t^*) \quad \text{et} \quad u'_\rho(t^*) = v'(t^*). \quad (3.34)$$

D'où la fonction $(u_\rho - v)$ admet un minimum local en t^* .

D'autre part comme u'_ρ et v' ne s'annulent pas en t^* , alors u_ρ et v sont indéfiniment dérivables au point t^* et donc elles vérifient respectivement

$$(p-1) |u'_\rho|^{p-2} u''_\rho(t^*) = -\rho^\mu (u_\rho^q)'(t^*) + f(\rho t^*) u_\rho^m(t^*) \quad (3.35)$$

et

$$(p-1) |v'|^{p-2} v''(t^*) = -\rho^\mu (v^q)'(t^*) + f(t^*) v^m(t^*) \quad (3.36)$$

En faisant la différence de ces deux équations et en tenant compte de (3.34) on obtient

$$(p-1) |u'_\rho(t^*)|^{p-2} (u_\rho - v)''(t^*) = -(\rho^\mu - 1)(u_\rho^q)'(t^*) + (f(\rho t^*) - f(t^*)) u_\rho^m(t^*) < 0. \quad (3.37)$$

Donc $(u_\rho - v)'$ est décroissante en t^* , ce qui contredit le fait que $(u_\rho - v)(t^*)$ est un minimum local. Par conséquent $u(t) < v(t)$ pour tout $t \in [0, T_1]$.

Etape 2. D'après l'étape 1, il existe $k \in]0, \Gamma[$ tel que $[0, T_2] \subset \text{supp } u_k$ et $u_k > v$ sur $[0, T_2]$. On définit maintenant le réel

$$\tilde{k} = \sup \{k > 0; u_k > v \text{ sur } [0, T_2]\}. \quad (3.38)$$

Alors ou bien les fonctions $u_{\tilde{k}}$ et v se touchent en un point intérieur à l'intervalle $]0, T_2[$ ou bien elles se touchent au point T_2 . Mais ceci ne peut avoir lieu. En effet s'il existe $\tilde{t} \in]0, T_2[$ tel que $u_{\tilde{k}}(\tilde{t}) = v(\tilde{t})$, on obtient une contradiction comme lors de la première étape. Par contre si $u_{\tilde{k}}(T_2) = v(T_2)$, on va faire appel au lemme 3.7. Pour cela, il faut noter tout d'abord que $\tilde{k} T_2 = T_1$ et $u_{\tilde{k}}(T_2) = 0$. De plus, en tenant compte de l'expression de $u_{\tilde{k}}$ donnée par la formule (3.29) on déduit que

$$\left(u_{\tilde{k}}^{(p-m-1)/p}\right)'(t) = (u^{(p-m-1)/p})'(\tilde{k} t). \quad (3.39)$$

D'où d'après la formule (3.27), on obtient

$$\frac{p}{p-m-1} \left(u_{\tilde{k}}^{(p-m-1)/p}\right)'(T_2) = - \left(\frac{p}{(p-1)(m+1)}\right)^{1/p} f^{1/p}(\tilde{k}T_2) \quad (3.40)$$

En utilisant l'hypothèse (H_2) vérifiée par la fonction f et le fait que $\tilde{k} < 1$, on aboutit à l'inégalité suivante

$$\frac{p}{p-m-1} \left(u_{\tilde{k}}^{(p-m-1)/p}\right)'(T_2) > - \left(\frac{p}{(p-1)(m+1)}\right)^{1/p} f^{1/p}(T_2). \quad (3.41)$$

Mais comme

$$\left(\frac{p}{(p-1)(m+1)}\right)^{1/p} f^{1/p}(T_2) = -\frac{p}{p-m-1} (v^{(p-m-1)/p})'(T_2), \quad (3.42)$$

alors (3.41) devient

$$\left(u_{\tilde{k}}^{(p-m-1)/p}\right)'(T_2) > (v^{(p-m-1)/p})'(T_2).$$

Ce qui est impossible car

$$\begin{cases} u_{\tilde{k}}^{(p-m-1)/p}(t) > v^{(p-m-1)/p}(t) & \forall t \in [0, T_2[\\ u_{\tilde{k}}(T_2) = v(T_2). \end{cases}$$

En conclusion ce qu'on a supposé est impossible et par suite il n'existe qu'une seule solution qui est à support compact. Et la preuve est terminée.

□

Références

- [1] H. Amann. *Ordinary Differential Equations*. Walter de Gruyter, Berlin, New York, 1996.
- [2] B.Benyounes and A.Gmira. On the radial solutions of degenerate quasi-linear equations in \mathbb{R}^N . *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, VIII:411–438, 1999.
- [3] B.Benyounes and A.Gmira. On the selfsimilar solutions of a diffusion convection equation,. *Nonlinear Diff. Equ.Appli.*, 9:277–294, 2002.
- [4] L. A. Peletier and A. Tesi C. Claudi. A free boundary problem involving convection and singular absorption. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 243:191–216, 2000.
- [5] M. Guedda and L. Véron. Bifurcation phenomena associated to the p-Laplace operator. *Trans. Amer. Math. Soc*, 310:419–431, 1988.
- [6] A. Haraux and F. B. Weissler. Non uniqueness for a semilinear initial value problem. *Indiana Unive. Math J.*, 31:167–189, 1982.
- [7] S.P. Hastings and G.B. Macleod. A boundary value problem associated with the second Painlevé transcendent and Korteweg-Vries equation. *Arch. Rat. Mech. Anal*, 73, 1980.
- [8] B. Helfer and F. B. Weissler. On a family of solutions of second Painlevé equation related to superconductivity. *Prépublications Mathématiques de l'Univesité Paris-Nord.*, 23, 1996.
- [9] D. Levi and P. Winternitz. Painlevé transcendent : their asymptotics and physical applications. *NATO ASI Series, B: Physics*, 278, 1990.
- [10] L.A. Peletier and A. Tesi. Global bifurcation and attractivity of stationary solutions of a degenerate diffusion equation. *Adv. In Appl. Math.*, 7:435–454, 1960.

A.BENAOUDA, A.GMIRA ET B.HAMRI

A. BENAOUDA
FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
ET INFORMATIQUE
UNIVERSITÉ ABDELMALEK ESSAÂDI
TÉTOUAN
MAROC
benaouda@fst.ac.ma

A. GMIRA
FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
ET INFORMATIQUE
UNIVERSITÉ ABDELMALEK ESSAÂDI
TÉTOUAN
MAROC
gmira@fst.ac.ma

B. HAMRI
FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
ET INFORMATIQUE
UNIVERSITÉ ABDELMALEK ESSAÂDI
TÉTOUAN
MAROC