ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

ANDRÉ PIRIOU

Microdistributions de Fourier classiques dans le cadre analytique réel

Annales de l'institut Fourier, tome 34, nº 4 (1984), p. 109-134

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1984__34_4_109_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
34, 4 (1984). 109-134.

MICRODISTRIBUTIONS DE FOURIER CLASSIQUES DANS LE CADRE ANALYTIQUE RÉEL

par André PIRIOU

Introduction.

Si X est une variété analytique et Λ une sous-variété lagrangienne conique analytique de $T^*X\backslash 0$, on donne une description du faisceau des microdistributions (dans le cadre analytique réel) de Fourier (classiques) associées à Λ à partir de distributions représentées à l'aide de phases analytiques réelles et d'amplitudes qui sont des réalisations holomorphes tronquées de symboles analytiques.

Dans le cadre C^∞, le contour d'intégration par rapport à la variable de fréquence est $\mathbf{R}^N$. Ici, pour pouvoir utiliser facilement les fonctions de troncature, et par analogie avec les « bons contours » définis par J. Sjöstrand [10], on déforme $\mathbf{R}^N$ en un contour de $\mathbf{C}^N$ le long duquel la partie imaginaire de la phase possède une propriété convenable de positivité. Les singularités analytiques des distributions ainsi définies peuvent alors s'étudier à l'aide du théorème de la phase stationnaire complexe, et on obtient un théorème de changement de phase analogue à celui du cas C^∞, ainsi qu'un théorème de composition sous les hypothèses standard de transversalité.

On traite le cas particulier des micro-opérateurs pseudo-différentiels analytiques, et son application au calcul symbolique des opérateurs pseudo-différentiels analytiques classiques définis par L. Boutet de Monvel [2], L. Boutet de Monvel et P. Kree [3].

Signalons que les applications aux propriétés de « transmissions analytiques », et en particulier à l'étude du comportement au bord, de part et d'autre des parties lisses du conoïde bicaractéristique, de la solution fondamentale d'un opérateur différentiel strictement hyperbolique à coefficients analytiques, ont été étudiées par H. Bougrini [1].

Les principaux outils utilisés ici sont le théorème de la phase stationnaire complexe (voir [10]) et le calcul des symboles analytiques (voir [3], [9], [10]) en particulier la propriété d'existence de réalisations holomorphes de symboles analytiques, établis par L. Boutet de Monvel et P. Kree [3]. On donne en appendice une démonstration élémentaire de ce résultat (sous une forme un peu plus générale), en utilisant une transformation de Fourier-Borel.

1. Phases, amplitudes, contours et distributions de Fourier.

Soient U un ouvert relativement compact de $\mathbf{R}^n$ et V un ouvert conique de $\mathbf{R}^N | 0$. On considère une fonction de phase $\varphi(x, \theta)$ dans un voisinage conique $U_1 \times V_1$ de $\bar{U} \times \bar{V}$ dans $\mathbf{R}^n \times (\mathbf{R}^n \backslash 0)$, avec $\varphi(x,\theta)$ analytique à valeurs réelles, homogène de degré 1 en θ, $(\varphi'_x, \varphi'_\theta) \neq 0$ en chaque point.

Soit $\tilde{U}_1 \times \tilde{V}_1$ un voisinage complexe conique (pour l'action de $\mathbf{R}^+$) de $U_1 \times V_1$ dans $\mathbf{C}^n \times (\mathbf{C}^N | 0)$, dans lequel $\varphi(x, \theta)$ se prolonge en fonction holomorphe, avec $(\varphi'_x, \varphi'_\theta) \neq 0$ en chaque point.

On considère un symbole analytique $\sum_{j \geqslant 0} a_j(x, \theta)$ de degré d dans $\tilde{U}_1 \times \tilde{V}_1$: c'est une série formelle de fonctions $a_j(x, \theta)$, holomorphes dans $\tilde{U}_1 \times \tilde{V}_1$, homogènes en θ de degré $d - j$, et telles que :

Pour tout compact K de $U_1 \times V_1$, il existe $C_K \geqslant 0$ avec $|a_j(x,\theta)| \leqslant C_K^{j+1} j!$ pour $j \in \mathbf{N}$, $(x,\theta) \in K$.

Soit $a(x,\theta)$ une réalisation holomorphe de $\sum_{j \geqslant 0} a_j(x,\theta)$ dans un voisinage complexe conique $\tilde{U} \times \tilde{V}$ de $U \times V$ dans $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^N | 0$: c'est une fonction holomorphe dans $\tilde{U} \times \tilde{V}$, telle qu'il existe $C \geqslant 0$ avec

$$\left| a(x,\theta) - \sum_{j=0}^{J-1} a_j(x,\theta) \right| \leqslant C^{J+1} J! |\theta|^{d-J} \quad \text{pour} \quad J \geqslant 1, \ (x,\theta) \in \tilde{U} \times \tilde{V}.$$

(Voir l'appendice pour l'existence d'une telle réalisation.)

Considérons une fonction de troncature ζ avec

(1) $\zeta \in C^\infty(\mathbf{R}^N)$, $\zeta(\theta) = 0$ si $|\theta|$ petit, $\zeta(\theta)$ homogène de degré 0 en θ si $|\theta|$ grand, et $(\text{Supp conique } \zeta) \cap S_{N-1} \subset\subset V \cap S_{N-1}$, où S_{N-1} est la sphère unité de $\mathbf{R}^{N-1}$.

Soit enfin V_0 un ouvert conique de $\mathbf{R}^N \backslash 0$ avec

$$(\text{Supp conique } \zeta) \cap S_{N-1} \subset\subset V_0 \cap S_{N-1} \subset\subset V \cap S_{N-1}.$$

Donnons la

DÉFINITION 1. — *On appelle φ-déformation de V_0 une application C^∞*

$$\begin{aligned} [0,T] \times U \times V_0 &\to \tilde{V} \quad (T>0) \\ (t,x,\alpha) &\mapsto \theta = \theta(t,x,\alpha) \end{aligned}$$

homogène de degré 1 en α, analytique par rapport à x, avec

$$\theta(t,x,\alpha) = \alpha + O(t|\varphi'_\theta(x,\alpha)|\,|\alpha|)$$
$$\frac{\partial\theta}{\partial\alpha}(t,x,\alpha) \quad \textit{injective}$$

et telle qu'il existe $c > 0$ vérifiant

(2) $$\operatorname{Im} \varphi(x,\theta(t,x,\alpha)) \geqslant ct|\varphi'_\theta(x,\alpha)|^2\,|\alpha|.$$

Exemple 1. — On peut prendre $\theta(t,x,\alpha) = \alpha + it\varphi'_\theta(x,\alpha)\,|\alpha|$, avec $t \in [0,T]$, $T > 0$ assez petit.

En effet, la formule de Taylor montre que, pour $\theta = \theta(t,x,\alpha)$:

$$\varphi(x,\theta) = \varphi(x,\alpha) + it\,|\varphi'_\theta(x,\alpha)|^2\,|\alpha| + O(t^2|\varphi'_\theta(x,\alpha)|^2\,|\alpha|),$$

d'où

$$\operatorname{Im} \varphi(x,\theta) \geqslant \frac{t}{2}\,|\varphi'_\theta(x,\alpha)|^2\,|\alpha| \qquad \text{pour} \qquad t \geqslant 0 \quad \text{assez petit.}$$

THÉORÈME 1. — *Soient* U, V, $\varphi(x,\theta)$, $a(x,\theta)$, $\zeta(\theta)$, V_0, $\theta(t,x,\alpha)$ *comme ci-dessus. Pour* $0 < t \leqslant T$, *on désigne par*

(3) $$u_t(x) = \int_{\substack{\theta=\theta(t,x,\alpha)\\ \alpha\in V_0}} e^{i\varphi(x,\theta)} a(x,\theta)\zeta(\alpha)\, d\theta_1 \wedge \ldots \wedge d\theta_N$$

la distribution $u_t \in \mathscr{D}'(\mathrm{U})$ *définie par*

$$(4)\quad u_t(x) = \int_{\mathrm{V}_0} e^{i\varphi(x,\theta(t,x,\alpha))} a(x,\theta,(t,x,\alpha))\zeta(\alpha)\frac{\mathrm{D}\theta(t,x,\alpha)}{\mathrm{D}\alpha}\,d\alpha$$

au sens des intégrales oscillantes. Alors on a

$$\mathrm{SS}u_t \subset \{(x,\varphi'_x(x,\alpha) \mid x \in \mathrm{U}, \alpha \in \text{Supp conique } \zeta, \varphi'_\theta(x,\alpha) = 0\}$$

où SS *désigne le spectre singulier analytique* (*voir* [9], [10]).

Démonstration. — Soit $(x_0, \xi_0) \in \mathrm{U} \times (\mathbf{R}^n \backslash 0)$ tel que $\varphi'_x(x_0, \alpha) - \xi_0$ et $\varphi'_\theta(x_0, \alpha)$ ne s'annulent pas simultanément pour $\alpha \in$ Supp conique ζ. Pour montrer que $(x_0, \xi_0) \notin \mathrm{SS}u$, on considère (voir [10]) une fonction $\psi(x,y,\xi)$ analytique au voisinage de (x_0, x_0, ξ_0) et une fonction de troncature $\chi \in \mathrm{C}_0^\infty(\mathbf{C}^n)$ telles que :

$$\psi(x_0,x_0,\xi_0) = 0, \qquad \psi'_y(x_0,x_0,\xi_0) = \xi_0$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{Im}\,\psi(x,y,\xi) \leqslant 0\\ \mathrm{Im}\,\psi(x_0,y,\xi_0) \leqslant -c|x_0-y|^2\end{array}\right\} \quad \text{pour} \quad x, y, \xi \text{ réels}, \quad (c>0)$$

$$\chi \text{ à support voisin de } x_0, \qquad \chi = 1 \text{ au voisinage de } x_0,$$

et on établit la décroissance exponentielle en τ lorsque $\tau \to +\infty$ de la quantité

$$(5)\qquad \mathrm{I}(x,\xi,\tau) = \langle u_t(y), \chi(y)e^{-i\tau\psi(x,y,\xi)}\rangle$$

pour (x,ξ) dans un voisinage réel assez petit de (x_0, ξ_0).

En posant $\dfrac{\mathrm{D}\theta(t,x,\alpha)}{\mathrm{D}\alpha} = \mathrm{J}(x,\alpha)$, on obtient, d'après (4) :

$$(6)\quad \mathrm{I}(x,\xi,\tau) = \tau^{\mathrm{N}} \int_{\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^{\mathrm{N}}} e^{i\tau[\varphi(y,\theta) - \psi(x,y,\xi)]} a(y,\tau\theta)\zeta(\tau\alpha)\,\chi(y)\mathrm{J}(y,\alpha)\,dy\,d\alpha$$

où $\theta = \theta(t,y,\alpha)$.

Posons $\mathrm{F}(y,\alpha,x,\xi) = \varphi(y,\theta(t,y,\alpha)) - \psi(x,y,\xi)$.

Puisque $\psi'_y(x_0,x_0,\xi_0) = \xi_0 \in \mathbf{R}^n \mid \{0\}$ et par homogénéité de degré 1 en α, on voit qu'il existe $r > 0$ tel que $|\mathrm{F}'_y| \geqslant r$ pour $(x,\xi) = (x_0, \xi_0)$, $|\alpha| \leqslant r$, et y dans un voisinage de supp χ. On commence par montrer que la contribution de $\{|\alpha| \leqslant r\}$ dans (6) est à décroissance exponentielle en τ. Pour cela, on effectue la déformation de contour en y,

$\mathbf{R}^n \ni y \mapsto y_s = y + is\bar{F}'_y(y,\alpha,x,\xi)f(y)$ où $f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, $0 \leqslant f \leqslant 1$, $f(y) = 1$ au voisinage de x_0, avec $\operatorname{Supp} f$ assez voisin de x_0 et $s \geqslant 0$ assez voisin de 0 pour que la déformation se fasse dans la région où la fonction de troncature χ est holomorphe.

La formule de Stokes permet de remplacer la contribution de $\{|\alpha| \leqslant r\}$ dans (6) par

$$\tau^N \int_{|\alpha|\leqslant r} e^{i\tau F(y_s,\alpha,x,\xi)} a(y_s, \tau\theta(t,y_s,\alpha))\zeta(\tau\alpha)\chi(y_s)J(y_s,\alpha)\, dy\, d\alpha.$$

La formule de Taylor donne

$$\begin{aligned} F(y_s,\alpha,x,\xi) = {} & F(y,\alpha,x,\xi) \\ & + is|F'_y(y,\alpha,x,\xi)|^2 f(y) + O(s^2|F'_y|^2 f^2(y)). \end{aligned}$$

Si $s > 0$ est choisi assez petit, on obtient donc, pour $(x,\xi) = (x_0,\xi_0)$, $y_s \in \operatorname{Supp}\chi$ et $|\alpha| \leqslant r$:

$$\operatorname{Im} F(y_s,\alpha,x_0,\xi_0) \geqslant c|y-x_0|^2 + \frac{s}{2} r^2 f(y) \geqslant c' > 0,$$

et par continuité on obtient bien $\operatorname{Im} F(y_s,\alpha,x,\xi) \geqslant c'/2$ si (x,ξ) est dans un voisinage assez petit de (x_0,ξ_0).

Il reste donc à étudier l'intégrale

$$(7) \quad \tau^N \int_{\substack{\theta=\theta(t,y,\alpha) \\ y\in\mathbf{R}^n,\ \alpha\in\mathbf{R}^N,\ |\alpha|\geqslant r}} e^{i\tau\Phi(y,\theta,x,\xi)} a(y,\tau\theta)\zeta(\tau\alpha)\chi(y)\, dy\, d\theta_1 \wedge \ldots \wedge d\theta_N$$

où on a posé

$$\Phi(y,\theta,x,\xi) = \varphi(y,\theta) - \psi(x,y,\xi).$$

On effectue une déformation en y analogue à la précédente :

$$\mathbf{R}^n \ni y \mapsto Y_s = y + is\, \bar{F}'_y(y,\alpha,x,\xi)\frac{f(y)}{|\alpha|},$$

qui permet de remplacer (7) par :

$$(8) \quad \tau^N \int_{\Gamma_{x,\xi}} e^{i\tau\Phi(Y,\theta,x,\xi)} a(Y,\tau\theta)\zeta(\tau\alpha)\chi(Y)\, dY_1 \wedge \ldots \wedge dY_n \wedge d\theta_1 \wedge \ldots \wedge d\theta_N,$$

où $\Gamma_{x,\xi}$ est la restriction à $\{|\alpha| \geqslant r\}$ du contour

$$\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^N \ni (y,\alpha) \mapsto (Y_s(y,\alpha,x,\xi),\ \theta(t,Y_s(y,\alpha,x,\xi),\alpha)).$$

Comme précédemment, on obtient, sur l'image du contour $\Gamma_{x,\xi}$ et pour $s > 0$ assez petit :

$$\operatorname{Im} \Phi \geqslant \operatorname{Im} F(y,\alpha,x,\xi) + \frac{s}{2} |F'_y(y,\alpha,x,\xi)|^2 \frac{f(y)}{|\alpha|} \geqslant 0.$$

(On rappelle que $F(y,\alpha,x,\xi) = \varphi(y,\theta(t,y,\alpha)) - \psi(x,y,\xi))$.

On a, avec des constantes $C \geqslant 0$ et $\tau > 0$:

$$\operatorname{Im} \Phi \geqslant c|y-x_0|^2 - C(|x-x_0|+|\xi-\xi_0|) + c|\varphi'_\theta(x,\alpha)|^2 |\alpha| + c|F'_y| \frac{f(y)}{|\alpha|}.$$

Soit $\varepsilon > 0$ assez petit pour que $f(y) = 1$ lorsque $|y-x_0| \leqslant \varepsilon$. Quand $|y-x_0| \geqslant \varepsilon$, la minoration précédente prouve que $\operatorname{Im} \Phi \geqslant c' > 0$ si $|x-x_0| + |\xi - \xi_0|$ est assez petit. D'autre part, pour $(x,y,\xi) = (x_0,x_0,\xi_0)$, on obtient, avec $\theta = \theta(t,x_0,\alpha)$:

$$(9) \quad \operatorname{Im} \Phi \geqslant c[|\varphi'_0(x_0,\alpha)|^2 |\alpha| + |\varphi'_x(x_0,\theta) - \xi_0 + \varphi'_\theta(x_0,\theta)\theta'_y(x_0,\alpha)|^2 \frac{1}{|\alpha|}.$$

Par hypothèse, le second membre de (9) reste strictement positif pour $\alpha \in \operatorname{Supp}$ conique ζ, et on en déduit qu'il est minoré par $c''|\alpha|$ (avec $c''>0$) lorsque $\alpha \in \operatorname{Supp}$ conique ζ et $|\alpha| \geqslant r$. Par perturbation, on obtient $\operatorname{Im} \Phi \geqslant \frac{c''}{2}|\alpha|$ pour $\alpha \in \operatorname{Supp}$ conique ζ, $|\alpha| \geqslant r$, (x,ξ) assez voisin de (x_0,ξ_0), $|y-x_0| \leqslant \varepsilon$, ε assez petit. Ceci prouve la décroissance exponentielle en τ de (8), et achève la démonstration du théorème 1.

Notons que dans le théorème 1 on considère u_t avec $t > 0$. On peut dans certains cas prendre $t = 0$:

PROPOSITION 1. — *Soient* U, V, $\varphi(x,\theta)$, $a(x,\theta)$, $\zeta(\theta)$ *comme précédemment, avec de plus :* $V = \mathbf{R}^N \backslash 0$

$$\zeta(\theta) = 0 \quad \textit{pour} \quad |\theta| \textit{ petit}, \quad \theta \in \mathbf{R}^N\backslash 0$$
$$\zeta(\theta) = 1 \quad \textit{pour} \quad |\theta| \textit{ grand}, \quad \theta \in \mathbf{R}^N\backslash 0.$$

Alors la distribution

$$(10) \qquad u(x) = \int_{\mathbf{R}^N} e^{i\varphi(x,\theta)}\zeta(\theta)a(x,\theta)\,d\theta \quad (u \in \mathscr{D}'(\mathrm{U}))$$

coïncide, modulo une fonction analytique, avec une distribution $u_t(t>0)$ *de la forme* (4).

Démonstration. — Soit $h \in \mathrm{C}^\infty(\mathbf{R}^N)$ avec $h(\alpha) = 0$ si $|\alpha| < \mathrm{R}$, $h(\alpha) = 1$ si $|\alpha| \geqslant 2\mathrm{R}$, $0 \leqslant h \leqslant 1$. On effectue dans (10) la déformation de contour en θ, pour $t \geqslant 0$ assez petit :

$$\mathbf{R}^N \ni \alpha \mapsto \theta = \alpha + it\varphi'_\theta(x,\alpha)|\alpha|h(\alpha) = \theta_t(x,\alpha)$$

si R est choisi assez grand, cette déformation a lieu dans la région où $\chi(\theta)$ est holomorphe, donc

$$(11) \quad u(x) = \int_{\theta=\theta_t(x,\alpha),\alpha\in\mathbf{R}^N} e^{i\varphi(x,\theta)}\zeta(\theta)a(x,\theta)\,d\theta_1 \wedge \ldots \wedge d\theta_N .$$

Lorsque $|\alpha| \leqslant \mathrm{R}$, on a $\theta_t(x,\alpha) = \alpha$, et la partie correspondante de (11) est analytique par rapport à x.

Lorsque $\mathrm{R} \leqslant |\alpha| \leqslant 3\mathrm{R}$, on a $\zeta(\theta_t(x,\alpha)) = 1$, donc la partie correspondante de (11) est encore analytique par rapport à x.

Si on considère une fonction $\zeta_1 \in \mathrm{C}^\infty(\mathbf{R}^N)$ avec $\zeta_1(\alpha) = 0$ si $|\alpha| \leqslant 2\mathrm{R}$, $\zeta_1(\alpha) = 1$ si $|\alpha| \geqslant 3\mathrm{R}$, on obtient donc, modulo une fonction analytique, et pour $t > 0$ assez petit :

$$u(x) \equiv \int_{\theta=\theta(t,x,\alpha),\ \alpha\in\mathbf{R}^N} e^{i\varphi(x,\theta)}\zeta_1(\alpha)a(x,\theta)\,d\theta_1 \wedge \ldots \wedge d\theta_N$$

avec $\theta(t,x,\alpha) = \alpha + it\varphi'_\theta(x,\theta)|\alpha|$, qui est de la forme (4) avec la φ-déformation de l'exemple 1.

On précise maintenant le théorème 1 en étudiant la singularité de u_t en un point $(x_0,\varphi'_x(x_0,\alpha_0))$ tel que $\varphi'_\alpha(x_0,\alpha_0) = 0$.

THÉORÈME 2. — *Sous les hypothèses du théorème* 1, *on pose*

$$\mathrm{C}_\varphi = \{(x,\alpha) \in \mathrm{U} \times \mathrm{V} \mid \varphi'_\alpha(x,\alpha) = 0\},$$
$$i_\varphi(x,\alpha) = (x,\varphi'_x(x,\alpha)), \quad \Lambda_\varphi = i_\varphi(\mathrm{C}_\varphi).$$

On suppose que φ *est non dégénérée, et que* i_φ *est un difféomorphisme de* C_φ *sur* Λ_φ.

Soit $(x_0,\xi_0) = i_\varphi(x_0,\alpha_0)$ *avec* $(x_0,\alpha_0) \in C_\varphi$. *Alors, pourvu que la fonction de troncature* $\zeta(\alpha)$ *soit égale à* 1 *dans un voisinage conique de* α_0 *pour* $|\alpha|$ *grand, le germe de microdistribution défini (dans le cadre analytique) par* $u_t(0<t<T)$ *en* (x_0,ξ_0) *ne dépend que du germe en* (x_0,ξ_0) *de microdistribution de Fourier défini (dans le cadre* C^∞*) par la phase* $\varphi(x,\theta)$ *et le symbole* $\sum_j a_j(x,\theta)$ (*voir* [6]). *En particulier, il ne dépend ni de la réalisation* $a(x,\theta)$ *choisie pour* $\sum_j a_j(x,\theta)$, *ni de la* φ*-déformation utilisée, ni de la troncature* ζ, *ni de* $t > 0$. *On le note* $\mu_{\varphi,\Sigma a_j}(x_0,\xi_0)$.

Démonstration. — On reprend le début de la démonstration du théorème 1, en particulier (5), (8). Pour $(x,\xi) = (x_0,\xi_0)$, la phase Φ de (8) admet le point stationnaire non dégénéré $(Y,\theta) = (x_0,\alpha_0)$. En effet, on sait que $\operatorname{Im} \psi''_{yy}(x_0,x_0,\xi_0)$ est définie négative, et il suffit d'appliquer le lemme élémentaire suivant pour

$$A = \varphi''_{xx}(x_0,\alpha_0), \qquad B = \varphi''_{x\theta}(x_0,\alpha_0), \qquad D = \varphi''_{\theta\theta}(x_0,\alpha_0), \qquad M = -\psi''_{yy}(x_0,x_0,\xi_0):$$

LEMME. — *Soit* $T = \left(\begin{array}{c|c} A+M & B \\ \hline tB & D \end{array}\right)$ *où* A, D *sont des matrices carrées symétriques réelles,* B *une matrice réelle,* M *une matrice symétrique complexe avec* Im M *définie positive,* $\begin{pmatrix} B \\ D \end{pmatrix}$ *de rang maximal.*

Alors T *est régulière.*

On a déjà vu qu'on peut restreindre l'intégration dans (8) à $\{|y-x_0| \leqslant \varepsilon\}$, où $\varepsilon > 0$ est arbitraire.

Montrons qu'on peut aussi la restreindre à $\{|\alpha-\alpha_0| < \varepsilon'\}$, avec $\varepsilon' > 0$ arbitraire. Pour cela, on constate que le second membre de (9) s'annule maintenant au point (unique) $\alpha = \alpha_0$, et on en déduit qu'il est minoré par $c''|\alpha|$ (avec $c'' > 0$) lorsque $\alpha \in \operatorname{Supp}$ conique ζ, $|\alpha| \geqslant r$, $|\alpha-\alpha_0| \geqslant \varepsilon'$, et on conclut comme à la fin de la démonstration du théorème 1.

En prenant ε, ε' assez petits, on peut appliquer le théorème de la phase stationnaire complexe (voir [10]) à l'intégrale

$$\tau^N \int_{\Gamma_{x,\xi};\, |y-x_0| \leqslant \varepsilon,\, |\alpha-\alpha_0| \leqslant \varepsilon'} e^{i\tau\Phi(Y,\theta,x,\xi)} a(Y,\tau\theta)\, dY_1 \wedge \ldots \wedge dY_n \wedge d\theta_1 \wedge \ldots \wedge d\theta_N .$$

En appelant $(Y(x,\xi),\ \theta(x,\xi))$ la solution locale (Y,θ) de

$$\begin{cases} \varphi'_\theta(Y,\theta) = 0 \\ \varphi'_y(Y,\theta) - \psi'_y(x,Y,\xi) = 0 \end{cases}$$

on obtient, pour (x,ξ) assez voisin de (x_0,ξ_0) :

$$\langle u_t(y),\, e^{-i\tau\psi(x,y,\xi)}\chi(y)\rangle = e^{-i\tau\psi(x,Y(x,\xi),\xi)}b(x,\xi,\tau)$$

où $b(x,\xi,\tau)$ est une réalisation d'un symbole analytique

$$\sum_{j\geq 0} b_j(x,\xi)\tau^{\frac{N-n}{2}+d-j}$$

ne dépendant que de φ, ψ, Σa_j et d'un difféomorphisme de Morse

$$(Y,\theta) \mapsto z = z(Y,\theta;x,\xi)$$

transformant $\Phi(Y,\theta,x,\xi)$ en $-\psi(x,y(x,\xi),\xi) + \dfrac{i}{2}z^2$, et vérifiant la condition suivante d'orientation :

- $\mathbf{R}^{n+N} \ni (y,\alpha) \mapsto \operatorname{Re} z \in \mathbf{R}^{n+N}$ est à déterminant jacobien positif (on a posé $z = z(Y_s(y,\alpha,x,\xi),\, \theta(t,Y_s(y,\alpha,x,\xi),\alpha);x,\xi))$.

L'hypothèse $\dfrac{\partial\theta}{\partial\alpha}(t,y,\alpha)$ injective montre que si le paramètre s de déformation en y est pris assez petit, cette condition est réalisée si on choisit le difféomorphisme de Morse tel que :

- $\mathbf{R}^{n+N} \ni (y,\alpha) \mapsto \operatorname{Re} z(y,\alpha;x_0,\xi_0) \in \mathbf{R}^{n+N}$ est à déterminant jacobien positif.

Cette condition ne fait intervenir ni la φ-déformation, ni la valeur de t, de sorte que le germe en (x_0,ξ_0) de microdistribution défini (dans le cadre analytique) pour u_t ne dépend que de φ et $\sum_j a_j(x,\theta)$.

Pour montrer qu'il ne dépend que du genre de microdistribution défini (dans le cadre C^∞) par la distribution

$$u_0(x) = \int_{\mathbf{R}^N} e^{i\varphi(x,\theta)}\zeta(\theta)a(x,\theta)\,d\theta,$$

on commence par se ramener, par changement de variable analytique en x, au cas où Λ_φ est transverse à $\{\xi=\xi_0\}$, c'est-à-dire au cas où

$$(12) \qquad \begin{pmatrix} \varphi''_{xx} & \varphi''_{x\theta} \\ \varphi''_{\theta x} & \varphi''_{\theta\theta} \end{pmatrix} \text{ est régulière en } (x_0,\alpha_0).$$

Pour $\varphi \in \mathbf{C}$, on pose

$$\psi_\rho(x,y,\xi) = y.\xi - i\rho(x-y)^2.$$

Pour $\rho > 0$, on peut considérer (5) avec $\psi = \psi_\rho$:

$$\mathrm{I}_\rho(x,\xi,\tau) = \langle u_t(y), e^{-i\tau\psi_\rho(x,y,\xi)}\chi(y)\rangle,$$

et on aboutit à (8) avec la phase

$$\Phi = \Phi_\rho(\mathrm{Y},\theta,x,\xi) = \varphi(y,\theta) - y.\xi + i\rho(x-y)^2.$$

Pour $(x,\xi,\rho) = (x_0,\xi_0,0)$, cette phase admet le point stationnaire $(\mathrm{Y},\theta) = (x_0,\alpha_0)$, et ce point stationnaire est non dégénéré d'après (12). Il est donc maintenant possible de considérer ρ comme paramètre supplémentaire (au voisinage de 0), et d'utiliser un difféomorphisme de Morse

$$(\mathrm{Y},\theta) \mapsto z = z(\mathrm{Y},\theta;x,\xi,\rho)$$

holomorphe au voisinage de $(x,\alpha_0;x_0,\xi_0,0)$ et vérifiant la condition d'orientation :

- $\mathbf{R}^{n+\mathrm{N}} \ni (y,\alpha) \mapsto \operatorname{Re} z(y,\alpha;x_0,\xi_0,0)$ à déterminant jacobien positif.

En appelant $(\mathrm{Y}(x,\xi,\rho),\ \theta(x,\xi,\rho))$ la solution locale (holomorphe) de

$$\begin{cases} \varphi'_\theta(\mathrm{Y},\theta) = 0 \\ \varphi'_y(\mathrm{Y},\theta) - \xi + 2i\rho(y-x) = 0 \end{cases}$$

la formule de la phase stationnaire complexe donne encore pour $\rho > 0$ assez petit :

$$(13) \qquad \begin{aligned} &\mathrm{I}_\rho(x,\xi,\tau) = e^{-i\tau\psi_\rho(x,\mathrm{Y}(x,\xi,\rho),\xi)}b_\rho(x,\xi) \\ &b_\rho(x,\xi) \sim \sum_{j\geqslant 0} b_j(x,\xi,\rho)\tau^{\frac{\mathrm{N}-n}{2}+d-j} \quad \text{au sens analytique} \end{aligned}$$

avec des coefficients $b_j(x,\xi,\rho)$ qui dépendent analytiquement de ρ dans un voisinage de 0 dans $\mathbf{C}$, comme le montre la formule

$$b_j(x,\xi,\rho) = (2\pi)^{\frac{n+N}{2}} \sum_{k+\ell=j} \frac{1}{\ell\,!}\left(\frac{\Delta z}{2}\right)^{\ell}\left[a_k(Y,\theta)\frac{D(Y,\theta)}{Dz}\right]\Bigg|_{z=0},$$

où (Y,θ) s'obtient en fonction de $(z;x,\xi,\rho)$ en inversant le difféomorphisme de Morse.

On peut reprendre les considérations précédentes avec $\rho = i\mu$, $\mu \in \mathbf{R}$ assez voisin de 0, alors $\psi_\rho(x,y,\xi) = y.\xi + \mu(x-y)^2$ est réelle pour x, y, ξ réels, ainsi que $Y(x,\xi,\rho)$. Le théorème de la phase stationnaire donne, pour tout $t \geqslant 0$:

$$\langle u_t(y),\ \chi(y)e^{-i\tau\psi_\rho(x,y,\xi)}\rangle = e^{-i\tau\psi(x,Y(x,\xi,\rho),\xi)}b_\rho(x,\xi)$$

$$b_\rho(x,\xi) \sim \sum_{j\geqslant 0} b_j(x,\xi,\rho)\tau^{\frac{N-n}{2}+d-j} \quad \text{au sens de } C^\infty.$$

Si le germe de microdistribution (au sens C^∞) de u_0 (ou de u_t) en (x_0,ξ_0) est nul, les coefficients $b_j(x,\xi,\rho)$ sont nuls pour (x,ξ) voisin de (x_0,ξ_0), $j \geqslant 0$, $\rho = i\mu$ lorsque μ est réel assez petit. Par prolongement analytique, on obtient alors $b_j(x,\xi,\rho) = 0$ pour $\rho > 0$ assez petit d'où, d'après (13), la décroissance exponentielle en τ de $I_\rho(x,\xi,\tau)$ pour (x,ξ) assez voisin de (x_0,ξ_0). (Noter que $Y(x_0,\xi_0,\rho) = x_0$; donc, pour $\rho > 0$ fixé, $|\mathrm{Im}\,\psi(x,Y(x,\xi,\rho),\xi)|$ est arbitrairement petit si (x,ξ) est assez voisin de (x_0,ξ_0)).

On donne maintenant un théorème de changement de phase analogue à celui du cas C^∞.

THÉORÈME 3. — *On se place dans les conditions du théorème* 2, *et on considère une deuxième phase* $\tilde\varphi(x,\tilde\theta)$ *vérifiant les hypothèses analogues à* φ, *avec* $\tilde\varphi'_{\tilde\theta}(x_0,\tilde\alpha_0) = 0$, $\tilde\varphi'_x(x_0,\tilde\alpha_0) = \xi_0$, $\Lambda_{\tilde\varphi} = \Lambda_\varphi$. *Alors il existe un germe en* $(x_0,\tilde\alpha_0)$ *de symbole analytique* $\sum_{j\geqslant 0}\tilde a_j(x,\tilde\theta)$ *de degré* $\tilde d = d + \dfrac{N-\tilde N}{2}$ (*où* $\tilde N$ *est la dimension de la variable de fréquence* $\tilde\theta$) *tel que* $\mu_{\tilde\varphi,\Sigma\tilde a_j} = \mu_{\varphi,\Sigma a_j}$ *en* (x_0,ξ_0).

Démonstration.

Premier cas : on suppose $N = \tilde N$, $\mathrm{sgn}\,\varphi''_{\theta\theta}(x_0,\alpha_0) = \mathrm{sgn}\,\tilde\varphi''_{\tilde\theta\tilde\theta}(x_0,\tilde\alpha_0)$.

Dans ce cas, le théorème d'équivalence de phases de Hörmander [6] s'adapte mot à mot au cas analytique réel, et montre qu'il existe un difféomorphisme local analytique homogène de degré 1 $(x,\tilde\theta) \mapsto (x,\theta(x,\tilde\theta))$ tel que $\varphi(x,\theta(x,\tilde\theta)) = \tilde\varphi(x,\tilde\theta)$.

Le théorème 2 montre alors qu'on obtient le résultat cherché en prenant

$$\tilde{a}_j(x,\tilde{\theta}) = a_j(x,\theta(x,\tilde{\theta}))\frac{D\theta(x,\tilde{\theta})}{D\tilde{\theta}}.$$

Deuxième cas : augmentation du nombre de variables de fréquence. On pose $\tilde{\theta} = (\theta,w)$ avec $w \in \mathbf{R}^M$, $\tilde{\alpha}_0 = (\alpha_0,0)$, $\tilde{\varphi}(x,\tilde{\theta}) = \varphi(x,\theta) + \frac{Q(w)}{2|\theta|}$, où Q est une forme quadratique réelle non dégénérée. Soit $\zeta_1 \in C_0^\infty(\mathbf{R}^M)$ avec $\zeta_1 = 1$ au voisinage de 0. Si on considère la distribution $U(x) = \int_{\mathbf{R}^N} e^{i\varphi(x,\theta)}\zeta(\theta)a(x,\theta)\,d\theta$, le théorème de la phase stationnaire par rapport à la variable w donne, modulo C^∞ :

$$U(x) \equiv \int_{\mathbf{R}^{N+M}} e^{i\tilde{\varphi}(x,\tilde{\theta})}\zeta(\theta)\zeta_1\left(\frac{w}{|\theta|}\right)\tilde{a}(x,\theta,w)\,d\theta\,dw$$

avec

$$\tilde{a} \sim \sum_j \tilde{a}_j,\quad \tilde{a}_j(x,\theta,w) = c^{-1}a_j(x,\theta)|\theta|^{-M/2},$$
$$c = (2\pi)^{M/2}|\det Q|^{-\frac{1}{2}}e^{i\frac{\pi}{4}\operatorname{sgn} Q}.$$

La conclusion résulte alors du théorème 2.

Troisième cas : diminution du nombre de variables de fréquence. On pose $\theta = (\tilde{\theta},w)$ avec $w \in \mathbf{R}^M$, $\alpha_0 = (\tilde{\alpha}_0,0)$, $\varphi(x,\theta) = \tilde{\varphi}(x,\tilde{\theta}) + \frac{Q(w)}{2|\tilde{\theta}|}$, et

$$U(x) = \int_{\mathbf{R}^{\tilde{N}+M}} e^{i\varphi(x,\theta)}\zeta(\tilde{\theta})\zeta_1\left(\frac{w}{|\tilde{\theta}|}\right)a(x,\theta)\,d\theta,$$

où Q, ζ_1 sont choisis comme précédemment.

Le théorème de la phase stationnaire donne encore, modulo C^∞ :

$$U(x) \equiv \int_{\mathbf{R}^{\tilde{N}}} e^{i\tilde{\varphi}(x,\tilde{\theta})}\zeta(\tilde{\theta})a(x,\tilde{\theta})\,d\tilde{\theta},$$

avec $\tilde{a} \sim \sum_\ell \tilde{a}_\ell$,

$$\tilde{a}_\ell(x,\tilde{\theta}) = c|\theta|^{M/2}\sum_{j+k=\ell}\frac{|\theta|^k}{k!}\left[\left\langle\frac{i}{2}Q^{-1}\partial_w,\partial_w\right\rangle^k\tilde{a}_j(x,\tilde{\theta},w)\right]\Bigg|_{w=0}.$$

On vérifie que $\Sigma\tilde{a}_\ell$ est un symbole analytique ce qui permet de conclure comme aux cas précédents.

2. Microdistributions de Fourier.

Grâce aux théorèmes 1, 2, 3, on peut énoncer la

DÉFINITION 2. — *Soient* X *une variété analytique réelle de dimension* n, T^*X *son fibré cotangent,* S^*X *son fibré en sphères cotangentes,* π *la projection canonique de* $T^*X\backslash 0$ *sur* S^*X. *Soient* Λ *une sous-variété lagrangienne analytique conique de* $T^*X\backslash 0$, $S\Lambda$ *sa projection sur* S^*X, *et* $m \in \mathbf{R}$. *On désigne par* $\mathscr{I}^m_\Lambda$ *le sous-faisceau sur* S^*X *des microdistributions (dans le cadre analytique) ainsi défini :* $\mathscr{I}^m_\Lambda$ *est porté par* $S\Lambda$ *et, pour tout* $(x_0,\xi_0) \in \Lambda$, *la fibre de* $\mathscr{I}^m_\Lambda$ *en* $\pi(x_0,\xi_0)$ *est constituée par les germes* $\mu_{\varphi,\Sigma a_j}(x_0,\xi_0)$ *décrits au théorème* 2, *tels que* $\Lambda_\varphi \subset \Lambda$, Σa_j *de degré* $d = m + \frac{n}{4} - \frac{N}{2}$.

Le faisceau $\mathscr{I}^m_\Lambda$ (qui peut être aussi considéré comme faisceau sur $S\Lambda$) est le faisceau des microdistributions de Fourier de degré m associées à la variété lagrangienne Λ. Si on appelle $\mathscr{M}\mathscr{D}_\infty$ le faisceau sur S^*X des microdistributions dans le cadre C^∞, le théorème 2 peut s'exprimer par

(14) Le morphisme naturel $\mathscr{I}^m_\Lambda \to \mathscr{M}\mathscr{D}_\infty$ est injectif.

On étudie maintenant la composition des micronoyaux de Fourier. Soient X, Y, Z des variétés analytiques réelles de dimensions n_1, n_2, n_3, et $\Lambda_1 \subset T^*X \times (T^*Y|0)$, $\Lambda_2 \subset (T^*Y|0) \times T^*Z$ des sous-variétés lagrangiennes coniques analytiques, vérifiant les hypothèses standard de composition transverse, en posant par exemple

$$\Lambda'_1 = \{(x,\xi),(y,\eta) \mid (x,\xi,y,-\eta) \in \Lambda_1\} :$$

(15) L'intersection $(\Lambda'_1 \times \Lambda'_2) \cap (T^*X \times \mathrm{Diag}\,(T^*Y \times T^*Y) \times T^*Z)$ est transverse.

(16) La composée $\Lambda'_1 \circ \Lambda'_2$ est contenue dans $T^*(X \times Z)\backslash 0$, et la projection de (15) dans $T^*(X \times Z)\backslash 0$ est propre à fibre finie.

On fait de plus l'hypothèse technique suivante, qui permettra d'utiliser des troncatures en y :

(17) Si $(x,\xi,y,\eta) \in \Lambda'_1$ (resp. $(y,\eta,z,\zeta) \in \Lambda'_2$) alors y s'exprime continûment au moyen de (x,ξ) (resp. : (z,ζ)).

Considérons des ouverts U, V, W de $T^*X|0$, $T^*Y|0$, $T^*Z|0$, et des ouverts Ω_1, Ω_2, Ω_3 de X, Y, Z tels que :

$$\mathrm{Proj}_X U \subset \Omega_1, \qquad \mathrm{Proj}_Y V \subset \Omega_2, \qquad \mathrm{Proj}_Z W \subset \Omega_3.$$

Soit Ω'_2 un ouvert relativement compact de Ω_2, avec :

(18) $\quad y \in \Omega'_2 \quad$ lorsque $\quad (x,\xi,y,\eta) \in \Lambda'_1$ et $(x,\xi) \in U$.

(19) $\quad y \in \Omega'_2 \quad$ lorsque $\quad (y,\eta,z,\zeta) \in \Lambda'_2$ et $(z,\zeta) \in W$.

(20) $\quad (y,\eta) \in V \quad$ lorsque $\quad \begin{cases} (x,\xi,z,\zeta) \in (\Lambda'_1 \circ \Lambda'_2) \cap (U \times W) \\ (x,\xi,y,\eta) \in \Lambda'_1 . \\ (y,\eta,z,\zeta) \in \Lambda'_2 \end{cases}$

Soient des microdistributions

$$\mu_1 \in \mathscr{I}^{m_1}_{\Lambda_1}(\pi(U \times V)), \qquad \mu_2 \in \mathscr{I}^{m_2}_{\Lambda_2}(\pi(V \times W)),$$

qu'on suppose représentables par des distributions de Fourier

$$u_1 \in \mathscr{D}'(\Omega_1 \times \Omega_2), \qquad u_2 \in \mathscr{D}'(\Omega_2 \times \Omega_3)$$

dans les conditions du théorème 2.

Considérons les opérateurs

$$A_1 : C_0^\infty(\Omega_2) \to \mathscr{D}'(\Omega_1), \qquad A_2 : C_0^\infty(\Omega_3) \to \mathscr{D}'(\Omega_2)$$

de noyaux u_1, u_2. Soit $\chi \in C_0^\infty(\Omega_2)$ telle que $\chi(y) = 1$ pour $y \in \Omega_2$.

D'après le théorème 1 et les hypothèses faites sur Λ'_1, Λ'_2, on sait (voir [4], [5]) que $A_1 \circ \chi \circ A_2$ a un sens comme opérateur $A : C_0^\infty(\Omega_3) \to \mathscr{D}'(\Omega_1)$, et on a la

PROPOSITION 2. — *Soit* $u \in \mathscr{D}'(\Omega_1 \times \Omega_3)$ *le noyau de l'opérateur* $A = A_1 \circ \chi \circ A_2$. *Alors la microdistribution* μ *définie par* u *dans* $\pi(U \times W)$ *ne dépend ni du choix des représentants* u_1, u_2 *de* μ_1, μ_2 *ni du choix de la fonction de troncature* χ.

On a $[\pi^{-1}\,\mathrm{Supp}\,\mu]' \subset [\pi^{-1}\,\mathrm{Supp}\,\mu_1]' \circ [\pi^{-1}\,\mathrm{Supp}\,\mu_2]'$.

On pose $\mu = \mu_1 \circ \mu_2$.

Démonstration. — Soient des opérateurs

$$P : C_0^\infty(\Omega_2) \to \mathscr{D}'(\Omega_1), \qquad Q : C_0^\infty(\Omega_3) \to \mathscr{D}'(\Omega_2);$$

rappelons (voir [7]) que sous les hypothèses standard d'existence du composé $P \circ Q$, on a

$$\begin{aligned} SS'(P \circ Q) \subset [(SS'P) \circ (SS'Q)] \cup [SS'P \circ (Y \times \{0\} \times Z \times \{0\})] \\ \cup [(X \times \{0\} \times Y \times \{0\}) \circ SS'Q] \end{aligned}$$

où le spectre singulier d'un opérateur est, par définition, le spectre singulier de son noyau.

On en déduit, en utilisant le théorème 1 et les hypothèses précédentes, que $SS'(A_1 \circ \chi \circ A_2)$ est contenu dans la réunion des trois ensembles

$$SS'A_1 \circ SS'[\chi] \circ SS'A_2 \tag{21}$$

$$SS'A_1 \circ SS'[\chi] \circ (Y \times \{0\} \times Z \times \{0\}) \tag{22}$$

$$(X \times \{0\} \times Y\{0\}) \circ SS'[\chi] \circ SS'A_2 \tag{23}$$

où $[\chi] : C_0^\infty(Y) \to C_0^\infty(Y)$ est l'opérateur de multiplication par χ.

D'après (18), (19), (20) et puisque $\chi = 1$ dans Ω'_2, on voit que (21) a même intersection avec $U \times W$ que $SS'A_1 \circ SS'A_2$. Puisque le noyau de $[\chi]$ a son support dans la diagonale de $\Omega_2 \times \Omega_2$, on voit de même que l'intersection de (22) avec $\{(x,\xi) \in U\}$ est vide, et symétriquement que l'intersection de (23) avec $\{(z,\zeta) \in W\}$ est vide, ce qui implique la proposition 2.

Définissons la composition des micronoyaux; on définit la variété lagrangienne Λ par $\Lambda' = \Lambda'_1 \circ \Lambda'_2$. Pour $j = 1,2$, soient des microdistributions $\mu_j \in J_\Lambda^{m_j}(\mathcal{O}_j)$, où $\mathcal{O}_j$ est un ouvert de $S\Lambda_j$. Définissons l'ouvert $\mathcal{O}$ de $S\Lambda$ par $\pi^{-1}\mathcal{O}' = \pi^{-1}\mathcal{O}'_1 \circ \pi^{-1}\mathcal{O}'_2$. Pour $\pi(x_0,\xi_0,z_0,\zeta_0) \in \mathcal{O}'$, considérons un des points $(y_0,\eta_0) \in T^*Y \backslash 0$ tels que

$$\pi(x_0,\xi_0,y_0,\eta_0) \in \mathcal{O}'_1, \qquad \pi(y_0,\eta_0,z_0,\zeta_0) \in \mathcal{O}'_2.$$

L'hypothèse (17) permet de construire des voisinages ouverts U, V, W de (x_0,ξ_0), (y_0,η_0), (z_0,ζ_0), des voisinages ouverts Ω_1, Ω_2, Ω_3, de x_0, y_0, z_0, un voisinage ouvert $\Omega'_2 \subset\subset \Omega_2$ de x_0 tels que les conditions (18), (19), (20) soient satisfaites, et tels que les restrictions $\mu_1|_{U \times V}$, $\mu_2|_{V \times W}$

de μ_1, μ_2 à $\pi(U\times V)$, $\pi(V\times W)$ soient représentables par des distributions de Fourier dans $\Omega_1 \times \Omega_2$, $\Omega_2 \times \Omega_3$:

$$u_1(x,y) = \int_{\theta=\theta(x,y,\alpha),\,\alpha\in\mathbf{R}^N} e^{i\varphi(x,y,\theta)}\zeta_1(\alpha)a(x,y,\theta)\,d\theta_1 \wedge \ldots \wedge d\theta_N$$

$$u_2(y,z) = \int_{w=w(y,z,\beta),\,\beta\in\mathbf{R}^M} e^{ii\psi(y,z,w)}\zeta_2(\beta)b(y,z,w)\,dw_1 \wedge \ldots \wedge dw_M$$

où on a repris les notations des théorèmes 1, 2, et sous-entendu le paramètre t $(t>0)$ de déformation. En considérant dans $\pi(U\times W)$ la microdistribution $(\mu_1|_{U\times V})\circ(\mu_2|_{V\times W})$ définie à la proposition 2, et en ajoutant les contributions ainsi obtenues pour tous les points (y_0,η_0) tels que $\pi(x_0,\xi_0,y_0,\eta_0)\in\mathcal{O}'_1$, $\pi(y_0,\eta_0,z_0,\zeta_0)\in\mathcal{O}'_2$ (ces points sont en nombre fini d'après (16)), on obtient par recollement une microdistribution μ dans $\mathcal{O}'$, qu'on note $\mu = \mu_1\circ\mu_2$.

THÉORÈME 4. — *Sous les hypothèses* (15), (16), (17) *et avec les notations précédentes, soient des microdistributions* $\mu_1 \in \mathscr{I}^{m_1}_{\Lambda_1}(\mathcal{O}_1)$, $\mu_2 \in \mathscr{I}^{m_2}_{\Lambda_2}(\mathcal{O}_2)$. *Alors la microdistribution composée* $\mu = \mu_1\circ\mu_2$ *est dans* $\mathscr{I}^{m_1+m_2}_{\Lambda}(\mathcal{O})$, *et*

$$[\mu^{-1}\,\mathrm{Supp}\,\mu]' \subset [\pi^{-1}\,\mathrm{Supp}\,\mu_1]'\circ[\pi^{-1}\,\mathrm{Supp}\,\mu_2]'.$$

Démonstration. — Par construction, μ est représentée au voisinage de $\pi(x_0,\xi_0,y_0,\eta_0)\in\mathcal{O}'$ par une somme finie de distributions de la forme

$$(24)\quad u(x,z) = \int_{\substack{\theta=\theta(x,y,\alpha)\\ w=w(y,z,\beta)}} e^{i[\varphi(x,y,\theta)+\psi(y,z,w)]}\,\chi(y)\zeta_1(\alpha)\zeta_2(\beta)a(x,y,\theta)\,b(y,z,w)\,d\theta\wedge dw\wedge dy$$

où φ est une phase pour Λ_1 au voisinage de (x_0,y_0,α_0) et ψ une phase pour Λ_2 au voisinage de (y_0,z_0,β_0).

On peut toujours se ramener au cas où

$$(25)\quad \begin{array}{l} \varphi''_{\theta y}(x_0,y_0,\alpha_0) : \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}^{n_2} \text{ injective} \\ \psi''_{wy}(y_0,z_0,\beta_0) : \mathbf{R}^M \to \mathbf{R}^{n_2} \text{ injective.} \end{array}$$

En effet, on sait (voir [5]) que pour des choix convenables de coordonnées locales dans X, Y, Z, on peut représenter localement Λ_1,

Λ_2 par des phases φ, ψ de la forme

$$x \cdot \xi + y \cdot \eta - H_1(\xi,\eta), \qquad y \cdot \eta + z \cdot \zeta - H_2(\eta,\zeta).$$

(Notons que les conditions (25) sont vérifiées par les phases standard $(x-y) \cdot \theta$, $(y-z) \cdot w$ d'opérateurs pseudo-différentiels).

Au voisinage de y_0, on obtient alors

$$|\varphi'_\theta(x_0, y, \alpha_0)| \geqslant c'|y-y_0|, \qquad \text{avec} \qquad c' > 0$$

d'où, dans (24) :

$$\operatorname{Im} \varphi(x,y,\theta) \geqslant c''|\alpha|, \qquad \text{avec} \qquad c'' > 0,$$

lorsque $|y-y_0| \geqslant \varepsilon > 0$ et lorsque (x,α) est dans un voisinage conique assez petit de (x_0, α_0).

On a une minoration analogue pour $\operatorname{Im} \psi(y,z,w)$, donc le germe de μ en $(x_0, \xi_0, z_0, \zeta_0)$ ne fait intervenir, via l'intégrale (24), que les valeurs de y arbitrairement voisines de y_0.

Considérons $\varphi(x,y,\theta) + \psi(y,z,w)$ comme une phase (non homogène) avec variable de fréquence (θ,w,y). Le long du contour d'intégration de (24), on a

$$\operatorname{Im} (\varphi+\psi) \geqslant c'|\varphi'_\theta(x,y,\alpha)|^2 \, |\alpha| + c|\varphi'_w(y,z,\beta)|^2 \, |\beta| .$$

Pour faire apparaître le terme manquant $c|\varphi'_y + \psi'_y|^2$ et obtenir ainsi une $(\varphi+\psi)$-déformation, on va effectuer dans (24) la déformation de contour

$$\mathbf{R}^{n_2} \ni y \mapsto Y_s = y + isF'_y(x,z;\alpha,\beta,y) \frac{f(y)}{|\alpha| + |\beta|}$$

où

$$F(x,z;\alpha,\beta,y) = \varphi(x,y,\theta(x,y,\alpha)) + \psi(y,z,w(y,z,\beta)),$$
$$f \in C_0^\infty(\Omega'_2), \qquad 0 \leqslant f \leqslant 1,$$

$f = 1$ au voisinage de y_0, $s \geqslant 0$ assez petit, de sorte que la déformation se fait dans la région où la fonction de troncature χ est holomorphe. On obtient

$$\operatorname{Im} F(x,z;\alpha,\beta,Y_s) \geqslant \operatorname{Im} F(x,z;\alpha,\beta,y) + s \frac{f(y)}{|\alpha| + |\beta|} \operatorname{Re} [(F'_y)^2] - Cs^2 \frac{f(y)}{|\alpha| + |\beta|} |F'_y|^2 .$$

On peut toujours prendre (voir l'exemple 1) :

$$\begin{cases} \theta = \theta(x,y,\alpha) = \alpha + it\varphi'_\theta(x,y,\alpha)|\alpha| \\ w = w(y,z,\beta) = \beta + it\psi'_w(y,z,\beta)|\beta|. \end{cases}$$

En reportant ces valeurs dans

$$F'_y = \varphi'_y(x,y,\theta) + \varphi'_\theta(x,y,\theta)\theta'_y + \psi'_y(y,z,w) + \psi'_w(y,z,w)w'_y,$$

on obtient

$$F'_y = A + iB, \quad \text{avec} \quad A, B, \in \mathbf{R}^{n_2}, \quad A = R + S,$$

avec

$$\begin{cases} R = \varphi'_y(x,y,\alpha) + \psi'_y(y,z,w) \\ B \text{ et } S \text{ de la forme } O(|\varphi'_\theta(x,y,\alpha)|\,|\alpha| + |\psi'_w(y,z,\beta)|\,|\beta|). \end{cases}$$

Or $\operatorname{Re}[(F'_y)^2] = A^2 - B^2$, $|F'_y|^2 = A^2 + B^2$,

$$A^2 \geqslant R^2 + S^2 - 2|R|\,|S| \geqslant \frac{1}{2}R^2 - S^2,$$

donc :

$$s\operatorname{Re}[(F'_y)^2] - Cs^2|F'_y|^2 \geqslant \frac{s}{2}A^2 - C'sB^2 \geqslant \frac{s}{4}R^2 - s\left(\frac{1}{2}S^2 + C'B^2\right)$$

pour $s \geqslant 0$ assez petit, ce qui donne :

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} F(x,z;\alpha,\beta,Y_s) \geqslant \frac{t}{2}(|\varphi'_\theta(x,y,\alpha)|^2|\alpha| &+ |\psi'_w(y,z,\beta)|^2|\beta|) \\ &+ \frac{s}{4}|\varphi'_y(x,y,\alpha)+\psi'_y(y,z,\beta)|^2\frac{f(y)}{|\alpha|+|\beta|} \\ &- sC''\frac{|\varphi'_\theta(x,y,\alpha)|^2|\alpha|^2 + |\psi'_w(y,z,\beta)|^2|\beta|^2}{|\alpha|+|\beta|} \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} (26) \quad \operatorname{Im} F(x,z;\alpha,\beta,Y_s) \geqslant \frac{t}{4}(|\psi'_\theta(x,y,\alpha)|^2\,|\alpha &+ |\psi'_w(y,z,\beta)|^2\,|\beta|) \\ &+ \frac{s}{4}|\varphi'_y(x,y,\alpha) + \psi'_y(y,z,\beta)|^2\frac{f(y)}{|\alpha|+|\beta|} \quad \text{si} \quad 0 \leqslant s \leqslant \frac{t}{4C''}. \end{aligned}$$

Cette déformation en y permet de remplacer (24) par

$$(27)\quad u(x,z) = \int_{\substack{Y = Y_s(x,z;\alpha,\beta,y) \\ \theta = \theta_t(x,Y,\alpha) \\ w = w_t(Y,z,\beta)}} e^{i[\varphi(x,Y,\theta)+\psi(Y,z,w)]}\chi(Y)\,\zeta_1(\alpha)\zeta_2(\beta)a(x,Y,\theta)\, b(Y,z,w)\, d\theta \wedge dw \wedge dY$$

où $t > 0$ est assez petit, et $s = \dfrac{t}{4C''}\cdot$

Vérifions maintenant que, pour $\varepsilon > 0$ assez petit, la contribution de $\{|\beta| \leqslant \varepsilon|\alpha|\}$ dans cette intégrale est une fonction analytique de (x,z) : il suffit, comme on l'a vu, de prendre $|y-y_0|$ assez petit; on a alors $f(y) = 1$, et (26) donne, sur le contour d'intégration

$$\operatorname{Im}(\varphi+\psi) \geqslant c'\left[|\varphi'_\theta(x,y,\alpha)|^2|\alpha| + |\varphi'_y(x,y,\alpha)|^2\frac{1}{|\alpha|(1+\varepsilon)}\right] - \varepsilon\quad C|\alpha|^2$$

avec $c' > 0$. Mais $\Lambda_1 \subset T^*X \times (T^*Y\backslash 0)$, donc

$$|\varphi'_\theta(x,y,\alpha)|^2|\alpha| + |\varphi'_y(x,y,\alpha)|^2\frac{1}{|\alpha|} \geqslant c''|\alpha|, \quad \text{avec} \quad c'' > 0,$$

d'où $\operatorname{Im}(\varphi+\psi) \geqslant \dfrac{c''}{2}|\alpha|$ lorsque ε est assez petit.

On voit de même qu'on peut se débarasser de la contribution de $\{|\alpha| \leqslant \varepsilon|\beta|\}$ dans (27), et donc multiplier l'amplitude dans (27) par $\zeta_0(\alpha,\beta)$, où $\zeta_0 \in C^\infty(\mathbf{R}^{N+M}\backslash 0)$ est homogène de degré 0 en (α,β), à support dans $\{\varepsilon'|\alpha| \leqslant |\beta|, \varepsilon'|\beta| \leqslant |\alpha|\}$ avec $\varepsilon' > 0$ assez petit.

Enfin, puisque $\chi(Y) = 1$ pour y àssez voisin de y_0, on peut remplacer $\chi(Y)$ par $\chi(y)$, $f(y)$ par 1, et $u(x,z)$ par

$$(28)\quad \tilde{u}(x,z) = \int_{(\theta,w,Y)=\gamma_t(x,z;\alpha,\beta,y)} e^{i[\varphi(x,Y,\theta)+\psi(Y,z,w)]}\,\zeta_1(\alpha)\zeta_2(\beta)\zeta_0(\alpha,\beta)\chi(y)\, a(x,Y,\theta)b(Y,z,w)\, d\theta \wedge dw \wedge dY$$

où le contour γ_t, paramétré par $(\alpha,\beta,y) \in \mathbf{R}^{N+M+n_2}$, est défini par

$$\begin{cases} Y = y + isF'_y(x,z;\alpha,\beta,y)\dfrac{1}{|\alpha| + |\beta|} \\ \theta = \alpha + it\varphi'_\theta(x,Y,\alpha)|\alpha| \\ w = \beta + it\psi'_w(Y,z,\beta)|\beta|, \end{cases}$$

avec $t > 0$ assez petit, $s = \dfrac{t}{4C''}\cdot$

En faisant le changement de paramètre

$$(\alpha,\beta,y) \mapsto (\alpha,\beta,\tilde{y}), \qquad \tilde{y} = (|\alpha|+|\beta|)y$$

et le changement de variable

$$(\theta,w,Y) \mapsto (\theta,w,\tilde{Y}), \qquad \tilde{Y} = ([\theta]+[w])Y,$$

où on a noté par exemple $[\theta]$ la détermination principale de $(\theta^2)^{1/2}$ dans $\{\theta \in \mathbf{C}^N \mid |\mathrm{Im}\,\theta| < |\mathrm{Re}\,\theta|\}$, on obtient un nouveau contour

$$(\theta,\, w,\, \tilde{Y}) = \tilde{\gamma}_t(x,z;\alpha,\beta,\tilde{y})$$

homogène de degré 1 en $(\alpha,\beta,\tilde{y})$, et

$$\tilde{u}(x,z) = \int_{\tilde{\gamma}_t} e^{i\Phi(x,z;\theta,w,\tilde{Y})}\zeta(\alpha,\beta,\tilde{y})\sigma(x,z;\theta,w,\tilde{Y})\, d\theta \wedge dw \wedge d\tilde{Y}$$

avec

$$\begin{aligned} \Phi(x,z;\theta,w,\tilde{Y}) &= \varphi(x,Y,\theta) + \psi(Y,z,w) \\ \sigma(x,z;\theta,w,\tilde{Y}) &= a(x,Y,\theta)b(Y,z,w)([\theta]+[w])^{-n_2} \\ \zeta(\alpha,\beta,\tilde{y}) &= \zeta_1(\alpha)\zeta_2(\beta)\zeta_0(\alpha,\beta)\chi(y). \end{aligned}$$

Il est bien connu que Φ est non dégénérée (d'après (15)) et définit localement la variété lagrangienne Λ (voir [6]).

D'autre part, (26) montre que $(\gamma_t)_{t\geqslant 0}$ est une Φ-déformation d'un voisinage de Supp conique ζ, donc le germe défini par u en (x_0,ξ_0,z_0,ζ_0) est une section de $\mathscr{I}_\Lambda^{m_1+m_2}$, ce qui prouve que $\mu \in \mathscr{I}_\Lambda^{m_1+m_2}(\mathcal{O})$. Enfin, la propriété relative à $\mathrm{Supp}\,\mu$ résulte immédiatement de la proposition 2.

3. Exemple des opérateurs pseudo-différentiels analytiques.

On commence par étudier les micro-opérateurs pseudo-différentiels. Soient X une variété analytique réelle, et

$$\Lambda = \{(x,x,\xi,-\xi) \mid (x,\xi) \in T^*X\backslash 0\}$$

le conormal à la diagonale de $X \times X$, privé de sa section nulle. Dans ce cas la relation canonique Λ' est l'identité de $T^*X\backslash 0$, et l'isomorphisme

$$\Lambda \ni (x,x,\xi,-\xi) \mapsto (x,\xi) \in T^*X\backslash 0$$

permet d'identifier $\mathscr{I}^m_\Lambda$ à un faisceau $\mathscr{L}^m$ sur S^*X, appelé faisceau des micro-opérateurs pseudo-différentiels analytiques de degré m.

Au voisinage d'un point $\pi(x_0,\xi_0) \in S^*X$, un tel micro-opérateur $\mathscr{P}$ est représenté, à l'aide de coordonnées locales de X au voisinage de x_0, par un opérateur P de noyau

$$K(x,y) = \int_{\theta=\theta(t,x,y,\alpha),\alpha \in \mathbf{R}^n} e^{i(x-y)\theta} a(x,y,\theta)\zeta(\alpha)\, d\theta_1 \wedge \dots \wedge d\theta_n$$

où on s'est placé dans les conditions du théorème 1 $(t>0)$, $a(x,y,\theta)$ désignant une réalisation de symbole analytique de degré m dans un voisinage conique de (x_0,x_0,ξ_0) dans $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^n \times (\mathbf{C}^n\backslash 0)$.

Pour (x,ξ) dans un voisinage conique réel assez petit de (x_0,ξ_0), considérons le symbole complet σ_P de l'opérateur P, c'est-à-dire le développement asymptotique ordinaire pour $|\xi| \to +\infty$ (modulo $O(|\xi|^{-\infty})$) de $e^{-ix\xi}P(\chi(x)e^{ix\xi})$ où $\chi \in C_0^\infty$ vaut 1 au voisinage de x_0. D'après le théorème 2 et l'étude des opérateurs pseudo-différentiels dans le cadre C^∞, on sait que

$$\sigma_P(x,\xi) = \sum_{\substack{k \in \mathbf{N}^n \\ j \geqslant 0}} \frac{1}{k!}\, \partial_\xi^k D_y^k a_j)(x,x,\xi), \tag{29}$$

et que σ_P ne dépend pas du représentant P choisi pour $\mathscr{P}$.

On peut donc, pour un choix fixé de coordonnées locales dans X, définir le symbole complet $\sigma_{\mathscr{P}}$ de $\mathscr{P}$ par (29), et le théorème 2 montre que :

$$\pi(x_0,\xi_0) \notin \operatorname{Supp} \mathscr{P} \Leftrightarrow \sigma_{\mathscr{P}} = 0 \quad \text{au voisinage de } (x_0,\xi_0). \tag{30}$$

Évidemment, $\sigma_{\mathscr{P}}$ se transforme pour les formules standard lorsqu'on change de coordonnées locales dans X.

Notons que (29) montre que $\sigma_{\mathscr{P}}$ se prolonge en symbole analytique de degré m dans un voisinage conique de (x_0,ξ_0) dans $\mathbf{C}^n \times (\mathbf{C}^n\backslash 0)$.

Soient maintenant $\mathscr{O}$ un ouvert de S^*X, $\mathscr{P} \in \mathscr{L}^{m_1}(\mathscr{O})$, $\mathscr{Q} \in \mathscr{L}^{m_2}(\mathscr{O})$.

Le théorème 4 permet de définir le composé $\mathscr{P} \circ \mathscr{Q} \in \mathscr{L}^{m_1+m_2}(\mathscr{O})$, avec

$$\operatorname{Supp}(\mathscr{P} \circ \mathscr{Q}) \subset \operatorname{Supp} \mathscr{P} \cap \operatorname{Supp} \mathscr{Q}.$$

De plus, la construction de $\mathscr{P} \circ \mathscr{Q}$ et l'étude de la composition des opérateurs pseudo-différentiels dans le cadre C^∞ montrent que

$$\sigma_{\mathscr{P} \circ \mathscr{Q}} = \sigma_{\mathscr{P}} \circ \sigma_{\mathscr{Q}} \tag{31}$$

où le second membre est le composé habituel des symboles (pour un choix fixé de coordonnées locales dans X).

Posons $\mathscr{L}^\infty = \bigcup_m \mathscr{L}^m$ et désignons par $\mathscr{M}\mathscr{D}$ le faisceau sur S^*X des microdistributions dans le cadre analytique. Alors $\mathscr{M}\mathscr{D}$ est un faisceau de $\mathscr{L}^\infty$-modules à gauche, avec

$$\left| \begin{array}{l} \operatorname{Supp}(\mathscr{P}\mu) \subset \operatorname{Supp} \mathscr{P} \cap \operatorname{Supp} \mu \quad \text{pour} \\ \mathscr{P} \in \mathscr{L}^\infty(\mathscr{O}), \quad \mu \in \mathscr{M}\mathscr{D}(\mathscr{O}). \end{array} \right. \tag{32}$$

Soit $\mathscr{P} \in \mathscr{L}^m(\mathscr{O})$. Supposons $\mathscr{P}$ elliptique (au sens ordinaire) dans un ouvert $\mathscr{O}' \subset \mathscr{O}$. Au voisinage de chaque point de $\mathscr{O}'$, pour un choix fixé de coordonnées locales dans X, considérons le symbole complet σ de $\mathscr{P}$; il est elliptique, et on sait (voir [3], [9], [10]) que le symbole inverse σ^{-1} est un symbole analytique de degré $-m$.

En utilisant une réalisation holomorphe de σ^{-1}, on obtient, par recollement grâce à (30), un micro-opérateur $\mathscr{Q} \in \mathscr{L}^{-m}(\mathscr{O}')$ qui vérifie, d'après (30) et (31) :

$$\mathscr{P}|_{\mathscr{O}'} \circ \mathscr{Q} = \mathscr{Q} \circ \mathscr{P}|_{\mathscr{O}'} = I.$$

On en déduit, en utilisant (31) que, pour $\mu \in \mathscr{M}\mathscr{D}(\mathscr{O})$:

$$\operatorname{Supp} \mu \subset (\operatorname{Supp} \mathscr{P}\mu) \cup \operatorname{Car} \mathscr{P},$$

où

$$\operatorname{Car} \mathscr{P} = \{\lambda \in \mathscr{O} \mid \mathscr{P} \text{ non elliptique en } \lambda\}.$$

Terminons par l'étude des opérateurs pseudo-différentiels analytiques. Appelons opérateur pseudo-différentiel analytique de degré m dans X un opérateur $P : C_0^\infty(X) \to \mathscr{D}'(X)$ tel que :

(33) la microdistribution définie par le noyau $K \in \mathscr{D}'(X \times X)$ de P est dans $\mathscr{I}^m_\Lambda(S^*(X \times X))$.

Soit un tel opérateur; son noyau est évidemment analytique en dehors de la diagonale de $X \times X$; si on considère une carte $f : X' \to \Omega \subset \mathbf{R}^n$ de X, le symbole complet $\sigma_P(x,\xi)$ de P se prolonge en symbole analytique de degré m dans un voisinage conique de $\Omega \times (\mathbf{R}^n \backslash 0)$ dans $\mathbf{C}^n \times (\mathbf{C}^n \backslash 0)$; pour Ω_0 ouvert relativement compact de Ω, considérons une réalisation $a(x,\xi)$ de $\sigma_P(x,\xi)$ dans un voisinage complexe de $\Omega_0 \times (\mathbf{R}^n \backslash 0)$. La proposition 1 et (30) montrent que :

(34) la restriction à Ω_0 de $f_* P$ coïncide, modulo un opérateur à noyau analytique dans $\Omega_0 \times \Omega_0$, avec l'opérateur P_0 défini par

$$(P_0 u)(x) = \int_{\mathbf{R}^n} e^{ix\xi} a(x,\xi) \hat{u}(\xi)\, d\xi$$

d'où la proposition suivante, qui établit l'équivalence de la définition (33) avec les définitions classiques données par Boutet-Kree [3], Boutet [2] et Treves [11] :

Proposition 3. — *Un opérateur* $P : C_0^\infty(X) \to \mathcal{D}'(X)$ *est un opérateur pseudodifférentiel analytique de degré* m *dans* X *si et seulement si*

1) *le noyau de* P *est analytique en dehors de la diagonale de* $X \times X$;

2) *pour tout* $x_0 \in X$, *l'opérateur* P *s'écrit localement, modulo un opérateur à noyau analytique, sous la forme* (34), *où* $a(x,\xi)$ *est une réalisation de symbole analytique de degré* m *au voisinage de* $\{x_0\} \times (\mathbf{R}^n \backslash 0)$.

Les propriétés standard relatives à la composition, aux paramétrix et à la régularité elliptique se déduisent immédiatement des propriétés correspondantes données par les micro-opérateurs.

Appendice. — Existence de réalisations holomorphes de symboles analytiques.

Soient U un ouvert relativement compact de $\mathbf{R}^n$ et V un ouvert conique de $\mathbf{R}^N \backslash 0$. On considère un voisinage conique $U_1 \times V_1$ de $\bar{U} \times \bar{V}$ dans $\mathbf{R}^n \times (\mathbf{R}^N \backslash 0)$, et un symbole analytique $\sum_{j \geq 0} a_j(x,\theta)$ de degré d dans un voisinage conique Ω de $U_1 \times V_1$ dans $\mathbf{C}^n \times (\mathbf{C}^N \backslash 0)$.

THÉORÈME. — *Il existe un voisinage ouvert conique* $\tilde{U} \times \tilde{V} \subset \Omega$ *de* $U \times V$ *dans* $\mathbf{C}^n \times (\mathbf{C}^N \backslash 0)$, *et une fonction* $a(x,\theta)$ *holomorphe dans* $\tilde{U} \times \tilde{V}$ *telle qu'il existe une constante* $C \geqslant 0$ *avec*

$$(0) \quad \left|a(x,\theta) - \sum_{j=0}^{N-1} a_j(x,\theta)\right| \leqslant C^{N+1} N!\, |\theta|^{d-N} \quad \text{pour} \quad N \geqslant 1,$$
$$(x,\theta) \in \tilde{U} \times \tilde{V}.$$

On dit que $a(x,\theta)$ *est une réalisation holomorphe du symbole analytique* $\sum_j a_j(x,\theta)$.

Démonstration. — On peut toujours se ramener au cas $d = 0$. Considérons un voisinage ouvert $\tilde{U}$ de U dans $\mathbf{C}^n$ et un nombre $k \in \mathbf{R}$ avec $0 < k < 1$ tels que, si on pose

$$\tilde{W}_k = \{\theta \in \mathbf{C}^N \mid \operatorname{Re}\theta \in V, |\operatorname{Im}\theta| < k|\operatorname{Re}\theta|\},$$

alors $$\tilde{U} \times \tilde{W}_k \subset\subset \Omega \quad \text{(au sens conique)}.$$

Pour $\theta \in \tilde{W}_k$, notons que

$$\operatorname{Re}(\theta^2) = |\operatorname{Re}\theta|^2 - |\operatorname{Im}\theta|^2 \geqslant (1-k^2)|\operatorname{Re}\theta|^2 \geqslant 0,$$

donc on peut considérer la détermination principale $[\theta]$ de $(\theta)^{\frac{1}{2}}$. On vérifie facilement qu'il existe des constantes c_1, $c_2 > 0$ telles que :

$$(1) \qquad \left.\begin{array}{r} 0 \leqslant \operatorname{Re}[\theta] \leqslant |[\theta]| \leqslant c_1|\theta| \\ |\theta| \leqslant c_2 \operatorname{Re}[\theta] \end{array}\right\} \quad \text{pour} \quad \theta \in \tilde{W}_k.$$

Considérons $\varepsilon \in]0, k[$ assez petit pour que :

$$\theta \in \tilde{W}_\varepsilon \Rightarrow \frac{\theta}{[\theta]} \in \tilde{W}_k.$$

Un raisonnement facile de prolongement analytique montre que

$$a_j(x,\theta) = a_j\left(x, \frac{\theta}{[\theta]}\right)[\theta]^{-j} \quad \text{pour} \quad (x,\theta) \in \tilde{U} \times \tilde{W}_\varepsilon.$$

D'après (1), il existe $c_0 > 0$ tel que

$$\left|a_j\left(x, \frac{\theta}{[\theta]}\right)\right| \leqslant c_0^{j+1} j! \quad \text{pour} \quad j \in \mathbf{N}, \quad (x,\theta) \in \tilde{U} \times \tilde{W}_\varepsilon.$$

Pour $s \in \mathbf{C}$ tel que $|s| < \frac{1}{c_0}$, posons

$$F(x,\theta,s) = \sum_{j=0}^{+\infty} a_j\left(x, \frac{\theta}{[\theta]}\right)\frac{s^j}{j!}.$$

La fonction F est holomorphe pour $x \in \tilde{\mathrm{U}}$, $\theta \in \tilde{\mathrm{W}}_\varepsilon$, $|s| < \frac{1}{c_0}\cdot$

Choisissons $s_0 \in \left]0, \frac{1}{c_0}\right[$, et considérons la transformée de Fourier-Borel de F :

$$\mathrm{A}(x,\theta,\rho) = \rho \int_0^{s_0} e^{-\rho s}\mathrm{F}(x,\theta,s)\,ds.$$

C'est une fonction holomorphe dans $\tilde{\mathrm{U}} \times \tilde{\mathrm{W}}_\varepsilon \times \{\rho \in \mathbf{C} | \mathrm{Re}\,\rho > 0\}$.

Par intégration par parties, on obtient, pour $\mathrm{N} \in \mathbf{N}$:

$$\mathrm{A}(x,\theta,\rho) - \sum_{j=0}^{\mathrm{N}} a_j\left(x, \frac{\theta}{[\theta]}\right)\rho^{-j} = \mathrm{R}_\mathrm{N}(x,\theta,\rho) - \mathrm{S}_\mathrm{N}(x,\theta,\rho),$$

avec

$$\mathrm{R}_\mathrm{N}(x,\theta,\rho) = \rho^{-\mathrm{N}} \int_0^{s_0} e^{-\rho s}\,\partial_s^{\mathrm{N}+1}\mathrm{F}(x,\theta,s)\,ds$$

$$\mathrm{S}_\mathrm{N}(x,\theta,\rho) = e^{-\rho s_0} \sum_{j=0}^{\mathrm{N}} \partial_s^j\mathrm{F}(x,\theta,s_0)\sigma^{-j}.$$

Posons $a(x,\theta) = \mathrm{A}(x,\theta,[\theta])$. C'est une fonction holomorphe dans $\tilde{\mathrm{U}} \times \tilde{\mathrm{W}}_\varepsilon$, avec

$$a(x,\theta) - \sum_{j=0}^{\mathrm{N}} a_j(x,\theta) = \mathrm{R}_\mathrm{N}(x,\theta,[\theta]) - \mathrm{S}_\mathrm{N}(x,\theta,[\theta]). \tag{2}$$

Puisque F est holomorphe, il existe $c_1 \geqslant 0$ avec

$$|\partial_s^j\mathrm{F}(x,\theta,s)| \leqslant c_{c_1}^{j+1} j^j \quad \text{pour} \quad j \geqslant 0, \qquad s \in [0,s_0], \quad (x,\theta) \in \tilde{\mathrm{U}} \times \tilde{\mathrm{W}}_\varepsilon.$$

On en déduit, d'après (1), que

$$|\mathrm{R}_\mathrm{N}(x,\theta)[\theta])| \leqslant c_2^{\mathrm{N}+1}\mathrm{N}!\,|\theta|^{-\mathrm{N}}, \tag{3}$$

et que

$$|\mathrm{S}_\mathrm{N}(x,\theta,[\theta])| \leqslant \sum_{j=0}^{\mathrm{N}} c_2^{j+1} j^j e^{-c|\theta|}|\theta|^{-j}, \quad \text{avec} \quad c > 0.$$

Mais un calcul élémentaire montre que

$$e^{-c|\theta|}|\theta|^{N-j} \leqslant c_3^{N-j}(N-j)^{N-j} \quad \text{avec} \quad c_3 = \frac{1}{ec},$$

d'où $$|\theta|^N |S_N(\theta)| \leqslant \sum_{j=0}^{N} c_2^{j+1} c_3^{N-j} j^j (N-j)^{N-j} \leqslant c_4^{N+1} \sum_{j=0} N^j N^{N-j}$$

avec $c_4 = \max(c_2, c_3)$; on obtient :

$$|\theta|^N |s_N(\theta)| \leqslant c_4^{N+1}(N+1)N^N, \tag{4}$$

d'où la majoration (0) pour $(x,\theta) \in \tilde{U} \times \tilde{W}_\varepsilon$ d'après (2), (3), (4).

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. Bougrini, *Propriétés de transmission analytique pour les distributions intégrales de Fourier*, Thèse de 3ᵉ cycle, Nice, Juin 1983.
[2] L. Boutet de Monvel, Opérateurs pseudo-différentiels analytiques et opérateurs d'ordre infini, *Ann. Inst. Fourier*, 22-3 (1972), 229-268.
[3] L. Boutet de Monvel, P. Kree, Pseudo-differential Operators and Gevrey classes, *Ann. Inst. Fourier*, 17-1 (1967), 295-323.
[4] J. Chazarain, A. Piriou, *Introduction à la théorie des équations aux dérivées partielles linéaires*, Bordas (Dunod), Paris, 1981.
[5] J. J. Duistermaat, Fourier Integral Operators, Courant Institute of Math. Sciences, New-York University (1973).
[6] L. Hörmander, Fourier Integral Operators I, *Acta Mathematica*, 127 (1971), 79-183.
[7] M. Sato, T. Kawai, M. Kashiwara, Microfunctions and Pseudo-differential Equations, *Springer Lecture Notes in Math.*, 287 (1973), 265-529.
[8] P. Schapira, Conditions de positivité dans une variété symplectique. Applications à l'étude des microfonctions, *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.*, 4ᵉ série, 14 (1981), 121-139.
[9] J. Sjöstrand, Propagation of Analytic singularites for Second Order Dirichlet Problems, *Comm. in P.D.E.*, 5 (1) (1980), 41-94.
[10] J. Sjöstrand, Singularités analytiques microlocales, *Astérisque*, 95 (1982), 1-166.
[11] F. Treves, Introduction to Pseudo-differential and Fourier Integral Operators, vol. I. Plenum Press, New-York (1980).

Manuscrit reçu le 14 octobre 1983.

André Piriou,
Université de Nice
I.M.S.P.
Mathématiques
Parc Valrose
06034 Nice Cedex.