

ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

DANIEL BARLET

**Contribution du cup-produit de la fibre de
Milnor aux pôles de $|f|^{2\lambda}$**

Annales de l'institut Fourier, tome 34, n° 4 (1984), p. 75-107

http://www.numdam.org/item?id=AIF_1984__34_4_75_0

© Annales de l'institut Fourier, 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

CONTRIBUTION DU CUP-PRODUIT DE LA FIBRE DE MILNOR AUX PÔLES DE $|f|^{2z}$

par Daniel BARLET

Introduction.

Dans cet article, nous considérons un représentant de Milnor $f: X \rightarrow D$ d'un germe à l'origine de C^{n+1} de fonction holomorphe non constante.

Après avoir montré dans [2] que tout bloc de Jordan de taille k (*) pour une valeur propre $\exp(-2i\pi u)$ de la monodromie T agissant sur $H^*(X(s_0), C)$, la cohomologie à coefficients complexes de la fibre de Milnor $X(s_0)$ de la fibration C^∞ localement triviale $f: X - f^{-1}(0) \rightarrow D - \{0\}$, produit effectivement un pôle d'ordre au moins k en un point congru à $-u \pmod{Z}$ dans le prolongement méromorphe de la distribution $|f|^{2z}$, j'ai essayé d'améliorer ce résultat dans le cas où $u = 0$ (valeur propre 1 de T). En effet, le prolongement méromorphe de $|f|^{2z}$ admet toujours (même si df ne s'annule pas sur X) des pôles simples aux entiers strictement négatifs. Une interprétation de ce fait est, à mon avis, que $1 \in H^0(X(s_0), C)$ (si $X(s_0)$ est non connexe, ce 1 désigne la moyenne des composantes connexes de $X(s_0)$) est vecteur propre pour la valeur propre 1 de T . Comme je pensais que le fait que 1 soit valeur propre de T en degré strictement positif devait affecter le comportement du prolongement méromorphe de $|f|^{2z}$ aux entiers négatifs, j'ai cherché à prouver le résultat suivant de « contribution sur-effective pour la valeur propre 1 de la monodromie » : si en degré > 0 T admet un bloc de Jordan de taille k pour la valeur propre 1, alors le prolongement méromorphe de $|f|^{2z}$ admet un pôle d'ordre au moins $k + 1$ aux entiers

(*) C'est-à-dire tout système libre $\{e_1 \dots e_k\}$ de $H^*(X(s_0), C)$ vérifiant $(T - e^{-2i\pi u} \text{Id})e_j = e_{j-1}$ pour $j \geq 2$ et $(T - e^{-2i\pi u} \text{Id})e_1 = 0$.

négatifs assez grands (en valeur absolue). Ce résultat est le corollaire 1 du théorème 1.

Après avoir prouvé ce résultat, je me suis aperçu que ceci pouvait s'interpréter comme une interaction non triviale, via le cup-produit, entre le bloc de Jordan considéré et le vecteur propre $1 \in H^0(X(s_0), \mathbb{C})$ de T pour la valeur propre 1. L'idée d'étendre alors cette démonstration à deux blocs de Jordan pour une même valeur propre de T , en degrés p et q avec $p + q \geq 1$, dont les vecteurs propres e_1 et ε_1 vérifient $e_1 \cup \overline{\varepsilon_1} \neq 0$ dans $H^{p+q}(X(s_0), \mathbb{C})$ s'imposait alors et ceci ne demandait en fait qu'un effort technique.

A ma connaissance, c'est la première apparition du cup-produit de la fibre de Milnor dans l'étude des pôles du prolongement méromorphe de $|f|^{2z}$ et le résultat du théorème 1 éclaire d'un jour nouveau les relations entre monodromie et polynôme de Bernstein-Sato.

Pour terminer cette introduction, précisons le plan de cet article : après un court § 0 où l'on énonce le théorème 1 et où l'on en déduit deux corollaires, le § 1 est consacré à la preuve du théorème 1 dans le cas particulier où $k = l = 1$ (les deux blocs de Jordan sont réduits à leurs vecteurs propres). Le § 2 est une digression destinée à prouver le théorème 2 qui précise encore la contribution « sur-effective de la valeur propre 1 » dans le cas d'une fonction à singularité isolée. Elle est placée là étant donné le lien étroit qu'il y a entre la preuve du théorème 2 et celle qui est donnée au § 1.

Le § 3 donne la démonstration du théorème 1 dans le cas général.

Je remercie M. Herrera d'avoir bien voulu détailler dans l'appendice la preuve de la positivité des exposants caractéristiques (résultat dû à B. Malgrange).

0.

Soit $f: X \rightarrow D$ un représentant de Milnor d'un germe de fonction holomorphe (non constant) à l'origine de \mathbb{C}^{n+1} . Nous nous proposons d'établir le résultat suivant :

THÉORÈME 1. — *Soit $s_0 \in D - \{0\}$ un point base et notons par T l'opérateur de monodromie sur $H^*(X(s_0), \mathbb{C})$. Supposons que T admette deux blocs de Jordan e_1, \dots, e_k en degré p et $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_l$ en degré q pour une même valeur propre $\exp(-2i\pi u)$; supposons de plus que l'on ait $p + q \geq 1$ et que le cup-produit $e_1 \cup \overline{\varepsilon_1}$ soit non nul dans $H^{p+q}(X(s_0), \mathbb{C})$.*

Alors le prolongement méromorphe de la distribution $|f|^{2z}$ admet un pôle d'ordre au moins $k + \ell$ en un point de la forme $-u - v$ pour v entier assez grand.

Avant de passer à la démonstration du théorème 1, donnons deux applications immédiates dans le cas où la valeur propre est égale à 1 :

COROLLAIRE 1 (« Contribution sur-effective pour la valeur propre 1 »). — Si, avec les notations ci-dessus, T admet en degré $p \geq 1$ un bloc de Jordan e_1, \dots, e_k pour la valeur propre 1, alors le prolongement méromorphe de la distribution $|f|^{2z}$ admet un pôle d'ordre au moins $k + 1$ aux entiers négatifs assez grands en valeur absolue.

COROLLAIRE 2. — Avec les notations ci-dessus, les blocs de Jordan de T pour la valeur propre 1 sont au plus de taille (n, n) .

Ce dernier résultat a été obtenu, dans le cas d'une singularité isolée, par Steenbrink voir [S]).

Preuve du corollaire 1. — On prend dans le théorème 1 $\ell = 1$, $\varepsilon_1 = 1 \in H^0(X(s_0), \mathbb{C})$ et donc $q = 0$; l'hypothèse $e_1 \cup \overline{\varepsilon_1} \neq 0$ dans $H^{p+q}(X(s_0), \mathbb{C})$ est clairement satisfaite puisque l'on a $e_1 \cup 1 = e_1$. Le corollaire 1 n'est donc qu'un cas bien particulier du théorème 1.

Preuve du corollaire 2. — Un bloc de Jordan de taille au moins $(n+1, n+1)$ pour la valeur propre 1 de T provoquerait, d'après le corollaire 1, un pôle d'ordre au moins $n + 2$ en un entier négatif pour le prolongement méromorphe de la distribution $|f|^{2z}$. De manière précise, il existerait une forme différentielle $\varphi \in C_c^\infty(X)$ de type $(n+1, n+1)$ telle que le prolongement méromorphe à \mathbb{C} de la fonction holomorphe pour $\operatorname{Re}(z) \gg 0$

$$z \rightarrow \int_X |f|^{2z} \varphi$$

ait un pôle d'ordre au moins $n + 2$ en un entier négatif. Si K est le support de φ , il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que l'on ait

$$f^m \Omega_X^{n+1} \subset \Omega_X^n \wedge df \text{ au voisinage de } K(*).$$

(*) C'est le Nullstellensatz puisque $df = 0$ implique $f = 0$ sur X (une seule valeur critique pour f sur $X : 0$); de plus, X est de Stein et on peut supposer K holomorphiquement convexe.

Alors il existe une forme $\psi \in C_c^\infty(X)$ de type (n,n) vérifiant

$$|f|^{2m}\varphi = \psi \wedge df \wedge d\bar{f} \text{ sur } X.$$

On aura donc également un pôle d'ordre au moins $n + 2$ en un entier négatif pour le prolongement méromorphe de $\int_X |f|^{2z}\psi \wedge df \wedge d\bar{f}$.

Mais par Fubini, on a :

$$\int_X |f|^{2z}\psi \wedge df \wedge d\bar{f} = \int_C |s|^{2z} ds \wedge d\bar{s} \int_{f=s} \psi.$$

Donc le développement asymptotique en $s = 0$ de la fonction $s \rightarrow \int_{f=s} \psi$ (voir [1]) contient un terme non nul du type

$$|s|^{2a} (\text{Log } s\bar{s})^{n+j} \quad \text{pour } j \in \mathbf{N}^*,$$

ce qui contredit le théorème de développement asymptotique de [1], d'où le corollaire 2.

1. Démonstration du théorème pour $k = \ell = 1$.

En vertu du lemme A de [2], nous pouvons supposer données deux formes holomorphes w_1 et w_2 sur X , de degrés respectifs p et q , vérifiant :

$$\text{i) } dw_j = (m_j + u) \frac{df}{f} \wedge w_j, \quad j = 1, 2$$

$$\text{ii) } w_1 \wedge \bar{w}_2|_{X(s_0)} \neq 0 \text{ dans } H^{p+q}(X(s_0), \mathbf{C})$$

où m_1 et m_2 sont deux entiers positifs. Quitte à multiplier w_1 et w_2 par des puissances convenables de f , on peut toujours se ramener au cas où $m_1 = m_2 (= m)$; c'est ce que nous ferons dans la suite.

Définissons le courant T de type (p,q) sur X , en posant, pour $\eta \in C_c^\infty(X)$ de type $(n-p+1, n-q+1)$:

$$\langle T, \eta \rangle = \text{Pf}(z = -m - u, \int_X |f|^{2z} w_1 \wedge \bar{w}_2 \wedge \eta)$$

où $\text{Pf}(z=a, F(z))$ désigne le coefficient constant du développement de

Laurent en $z = a$ de la fonction méromorphe F . Il résulte du lemme 1 de [2] que ceci définit bien un courant sur X .

Le lemme que nous allons donner maintenant n'est pas logiquement indispensable pour la preuve du théorème 1 dans le cas $k = \ell = 1$ puisque son résultat sera conséquence du lemme 1 qui le suit. Mais il met en évidence la manière dont nous allons relier notre hypothèse à l'existence d'un pôle d'ordre au moins 2 pour le prolongement méromorphe de $|f|^{2z}$.

LEMME 0. — Si, avec les notations introduites plus haut, on a $id'd''T \neq 0$ sur X , alors il existe une forme différentielle $\alpha \in C_c^\infty(X)$ de type $(n-p+1, n-q+1)$ telle que le prolongement méromorphe de la fonction holomorphe pour $\operatorname{Re}(z) \gg 0$ $z \rightarrow \int_X |f|^{2z} w_1 \wedge \bar{w}_2 \wedge \alpha$ ait un pôle d'ordre au moins égal à 2 au point $z = -m - u - 1$.

Précisons que par construction $T|_{X^*}$ coïncide avec la forme différentielle C^∞ de type (p, q) $|f|^{-2(m+u)} w_1 \wedge \bar{w}_2$ qui est d -fermée vu nos hypothèses et dont la restriction à $X(s_0)$ ne peut être d -exacte. La preuve du théorème 1 dans le cas $k = \ell = 1$ serait donc achevée si de l'égalité $id'd''T = 0$ sur X on pouvait déduire que T est d -exact sur X . Ceci sera l'idée générale de la démonstration que nous donnerons. La réalisation technique sera plus compliquée; en particulier, nous montrerons seulement que le pôle d'ordre au moins 2 apparaît nécessairement en $z = -m - u - r - 1$ avec $r = \operatorname{Sup}\{p, q\} + 1$ c'est-à-dire strictement à gauche de $-m - u - 1$.

Démonstration du lemme 0. — Soit $\beta \in C_c^\infty(X)$ de type $(n-p, n-q)$ vérifiant

$$\langle id'd''T, \beta \rangle = 1.$$

Une telle forme existe d'après notre hypothèse $id'd''T \neq 0$.
On aura donc :

$$1 = \langle T, id'd''\beta \rangle = \operatorname{Pf}(z = -m - u, \int_X |f|^{2z} w_1 \wedge \bar{w}_2 \wedge id'd''\beta).$$

Pour $\operatorname{Re}(z) \gg 0$, on peut appliquer (deux fois) la formule de Stokes à l'intégrale

$$\int_X |f|^{2z} w_1 \wedge \bar{w}_2 \wedge id'd''\beta,$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} (-1)^{p+q} \int_X |f|^{2z} w_1 \wedge \bar{w}_2 \wedge id' d'' \beta &= \int_X id' (|f|^{2z} w_1 \wedge \bar{w}_2 \wedge d'' \beta) \\ &\quad - i(z+m+u) \int_X |f|^{2z} \frac{df}{f} \wedge w_1 \wedge \bar{w}_2 \wedge d'' \beta \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (-1)^{p+q+1} \int_X |f|^{2z} \frac{df}{f} \wedge w_1 \wedge \bar{w}_2 \wedge d'' \beta &= \\ &\quad \int_X d'' (|f|^{2z} \frac{df}{f} \wedge w_1 \wedge \bar{w}_2 \wedge \beta) \\ &\quad - (z+m+u) \int_X |f|^{2z} \frac{d\bar{f}}{\bar{f}} \wedge \frac{df}{f} \wedge w_1 \wedge \bar{w}_2 \wedge \beta \end{aligned}$$

car

$$\begin{aligned} d'' (|f|^{2z} \frac{df}{f} \wedge w_1 \wedge \bar{w}_2 \wedge \beta) &= z |f|^{2z} \frac{d\bar{f}}{\bar{f}} \wedge \frac{df}{f} \wedge w_1 \wedge \bar{w}_2 \wedge \beta \\ &\quad + (-1)^{p+1} |f|^{2z} \frac{df}{f} \wedge w_1 \wedge d\bar{w}_2 \wedge \beta \\ &\quad + (-1)^{p+q+1} |f|^{2z} \frac{df}{f} \wedge w_1 \wedge \bar{w}_2 \wedge d'' \beta \end{aligned}$$

et $dw_2 = (m+u) \frac{df}{f} \wedge w_2$ donne pour le second terme :

$$\begin{aligned} (-1)^{p+1} |f|^{2z} \frac{df}{f} \wedge w_1 \wedge (m+u) \frac{d\bar{f}}{\bar{f}} \wedge \bar{w}_2 \wedge \beta &= \\ &\quad (m+u) |f|^{2z} \frac{d\bar{f}}{\bar{f}} \wedge \frac{df}{f} \wedge w_1 \wedge \bar{w}_2 \wedge \beta. \end{aligned}$$

On a donc au total, pour $\text{Re}(z) \gg 0$

$$\begin{aligned} \int_X |f|^{2z} w_1 \wedge \bar{w}_2 \wedge id' d'' \beta &= \\ &\quad - i(z+m+u)^2 \int_X |f|^{2z} \frac{d\bar{f}}{\bar{f}} \wedge \frac{df}{f} \wedge w_1 \wedge \bar{w}_2 \wedge \beta. \end{aligned}$$

Comme la partie finie en $z = -m - u$ du premier membre vaut 1, le

prolongement méromorphe de $\int_X |f|^{2z} \frac{df}{f} \wedge \frac{d\bar{f}}{\bar{f}} \wedge w_1 \wedge \bar{w}_2 \wedge \beta$ admet un pôle d'ordre ≥ 2 en $z = -m - u$ et en posant $\alpha = \beta \wedge df \wedge d\bar{f}$, le prolongement méromorphe de $\int_X |f|^{2z} w_1 \wedge \bar{w}_2 \wedge \alpha$ aura un pôle d'ordre ≥ 2 en $z = -m - u - 1$, ce qui achève la preuve du lemme 0.

Pour $j \in \mathbf{Z}$ et $\gamma \in C_c^\infty(X)$ forme différentielle de type $(n-p+1, n-q+1)$, posons :

$$\langle \mathcal{C}_j, \gamma \rangle = \text{Res}(z = -m - u, \int_X |f|^{2z} f^{-j-1} w_1 \wedge \bar{w}_2 \wedge \gamma)$$

et

$$\langle \check{\mathcal{C}}_j, \gamma \rangle = \text{Res}(z = -m - u, \int_X |f|^{2z} f^{-j-1} w_1 \wedge \bar{w}_2 \wedge \gamma)$$

où $\text{Res}(z = a, F(z))$ désigne le résidu en $z = a$ de la fonction méromorphe F . Le lemme 1 de [2] montre que les \mathcal{C}_j et $\check{\mathcal{C}}_j$ sont des courants de type (p, q) sur X . Comme pour $\gamma \in C_c^\infty(X^*)$ la fonction $\int_X |f|^{2z} w_1 \wedge \bar{w}_2 \wedge \gamma$ est entière, les supports des courants \mathcal{C}_j et $\check{\mathcal{C}}_j$ sont contenus dans $\{f=0\}$. On a de plus les relations évidentes $f\mathcal{C}_{j+1} = \mathcal{C}_j$ et $f\check{\mathcal{C}}_{j+1} = \check{\mathcal{C}}_j$, $\forall j \in \mathbf{Z}$.

LEMME 1. — *Sous l'hypothèse que pour toute forme différentielle $\alpha \in C_c^\infty(X)$ de type $(n-p, n-q+1)$ et que pour toute forme différentielle $\beta \in C_c^\infty(X)$ de type $(n-p+1, n-q)$ les prolongements méromorphes des fonctions*

$$\begin{aligned} & \int_X |f|^{2z} f^{-j-1} \frac{df}{f} \wedge w_1 \wedge \bar{w}_2 \wedge \alpha \\ & \int_X |f|^{2z} f^{-j-1} \frac{d\bar{f}}{\bar{f}} \wedge w_1 \wedge \bar{w}_2 \wedge \alpha \\ & \int_X |f|^{2z} f^{-j-1} \frac{d\bar{f}}{\bar{f}} \wedge w_1 \wedge \bar{w}_2 \wedge \beta \end{aligned}$$

et

$$\int_X |f|^{2z} f^{-j-1} \frac{df}{f} \wedge w_1 \wedge \bar{w}_2 \wedge \beta$$

n'aient pas de pôles d'ordre supérieur ou égal à 2 en $z = -m - u$ pour

$j \leq j_0$, où $j_0 \in \mathbf{N}$ est donné, on aura les égalités suivantes entre courants sur X :

$$d''\bar{c}_j = 0, \quad d''\bar{c}_j = -(j+1) d\bar{f} \wedge \bar{c}_{j+1}, \quad d''T = d\bar{f} \wedge \bar{c}_0$$

et

$$d''\check{c}_j = 0, \quad d''\check{c}_j = -(j+1) d\check{f} \wedge \check{c}_{j+1}, \quad d''T = d\check{f} \wedge \check{c}_0$$

pour tout $j \leq j_0$.

Démonstration. — Pour $\operatorname{Re}(z) \gg 0$ et $\varphi \in C_c^\infty(X)$ de degré $2n+1-(p+q)$, on aura :

$$\begin{aligned} & (-1)^{p+q} \int_X |f|^{2z} \bar{f}^{-j-1} w_1 \wedge \bar{w}_2 \wedge d\varphi = \int_X d[|f|^{2z} \bar{f}^{-j-1} w_1 \wedge \bar{w}_2 \wedge \varphi] \\ & - z \int_X |f|^{2z} \frac{d\bar{f}}{\bar{f}} \bar{f}^{-j-1} w_1 \wedge \bar{w}_2 \wedge \varphi \\ & \quad - (z-j-1) \int_X |f|^{2z} \bar{f}^{-j-1} \frac{d\bar{f}}{\bar{f}} \wedge w_1 \wedge \bar{w}_2 \wedge \varphi \\ & - (m+u) \int_X |f|^{2z} \bar{f}^{-j-1} \frac{d\bar{f}}{\bar{f}} \wedge w_1 \wedge \bar{w}_2 \wedge \varphi \\ & \quad - (-1)^p \int_X |f|^{2z} \bar{f}^{-j-1} w_1 \wedge (m+u) \frac{d\bar{f}}{\bar{f}} \wedge \bar{w}_2 \wedge \varphi. \end{aligned}$$

On aura donc, au moins pour $\operatorname{Re}(z) \gg 0$:

$$\begin{aligned} & (-1)^{p+q} \int_X |f|^{2z} \bar{f}^{-j-1} w_1 \wedge \bar{w}_2 \wedge d\varphi = \\ & - (z+m+u) \int_X |f|^{2z} \frac{d\bar{f}}{\bar{f}} \bar{f}^{-j-1} w_1 \wedge \bar{w}_2 \wedge \varphi \\ & - (z+m+u-j-1) \int_X |f|^{2z} \bar{f}^{-j-1} \frac{d\bar{f}}{\bar{f}} \wedge w_1 \wedge \bar{w}_2 \wedge \varphi. \end{aligned}$$

Ce qui donne, vu notre hypothèse de pôles d'ordre ≤ 1 en $z = -m-u$ pour $j \leq j_0$

$$(-1)^{p+q} \langle \bar{c}_j, d\varphi \rangle = (j+1) \langle d\bar{f} \wedge \bar{c}_{j+1}, \varphi \rangle.$$

Soit $d\bar{c}_j = -(j+1) d\bar{f} \wedge \bar{c}_{j+1}$ pour $j \leq j_0$.

De même, on a :

$$\begin{aligned} \langle dT, \varphi \rangle &= (-1)^{p+q+1} \langle T, d\varphi \rangle \text{ et pour } \operatorname{Re}(z) \gg 0 \\ (-1)^{p+q} \int_X |f|^{2z} w_1 \wedge \bar{w}_2 \wedge d\varphi &= \int_X d(|f|^{2z} w_1 \wedge \bar{w}_2 \wedge \varphi) \\ &\quad - (z+m+u) \int_X |f|^{2z} \frac{df}{f} \wedge w_1 \wedge \bar{w}_2 \wedge \varphi \\ &\quad - (z+m+u) \int_X |f|^{2z} \frac{d\bar{f}}{\bar{f}} \wedge w_1 \wedge \bar{w}_2 \wedge \varphi. \end{aligned}$$

Ce qui donne, puisque $j_0 \geq 0$

$$\langle d''T, \varphi \rangle = -\operatorname{Res}(z = -m-u, \int_X |f|^{2z} \bar{f}^{-1} d\bar{f} \wedge w_1 \wedge \bar{w}_2 \wedge \varphi),$$

soit

$$d''T = d\bar{f} \wedge \bar{c}_0 \quad \text{et} \quad d'T = df \wedge \check{c}_0.$$

Le calcul pour les \check{c}_j est tout à fait analogue. Ceci achève la preuve du lemme 1.

Nous allons maintenant donner une généralisation du lemme C_1 de [2] sous une forme qui nous permettra (outre l'utilisation immédiate que nous allons en faire) d'améliorer le corollaire 1 (dans le cas $k=1$) pour une singularité isolée (voir le théorème 2).

LEMME C'_1 . — Soit p, q, r des entiers naturels vérifiant $r \geq p+1$.

Soit V une variété analytique complexe vérifiant

$$H^i(V, \Omega_X^h) = 0 \quad \text{pour } 1 \leq i \leq p \quad \text{et} \quad q \leq h \leq p+q-1.$$

Soit $f: V \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur V et soit $(T_j)_{j \in [0, r]}$ des courants de type (p, q) sur V , $(u_j)_{j \in [0, r]}$ des nombres complexes, satisfaisant les égalités suivantes entre courants sur V

$$dT_j = u_j d\bar{f} \wedge T_{j+1} \quad \text{pour } j \in [0, r-1]$$

(ceci équivaut, vu les types, à $d'T_j = 0$ et $d''T_j = u_j d\bar{f} \wedge T_{j+1}$ pour $j \in [0, r-1]$). Alors il existe des $(p+q)$ formes holomorphes $(S_j)_{j \in [0, r-p]}$ et des courants $(U_j)_{j \in [0, r-p]}$ de degré $p+q-1$ sur V vérifiant

$$T_j = (-1)^p S_j + dU_j - u_j d\bar{f} \wedge U_{j+1}$$

et $dS_j = \bar{u}_j df \wedge S_{j+1}$ pour $j \in [0, r-p-1]$.

La preuve est tout à fait similaire à celle du lemme C_1 de [2]. Nous la donnons pour être complet.

Démonstration. — Si $p = 0$, les courants T_j sont d' -fermés et de type $(0, q)$; d'après le lemme de Dolbeault-Grothendieck, les T_j sont des conjugués de formes holomorphes et on peut donc prendre $S_j = \bar{T}_j$ et $U_j = 0$ pour $j \in [0, r]$.

Pour $p \geq 1$, T_j est un courant d' fermé de type (p, q) sur V . Donc T_j définit une classe dans $H^p(V, \Omega^q)$ via la résolution de Dolbeault de Ω^q . L'hypothèse donne donc l'existence de courants $U_j^{p-1, q}$ de type $(p-1, q)$ sur V pour $j \in [0, r]$ et vérifiant $d'U_j^{p-1, q} = T_j$ pour tout $j \in [0, r]$.

Supposons construits, pour $k \in [1, \ell]$ avec $1 \leq \ell \leq p-1$ des courants $U_j^{p-k, q+k-1}$ de type $(p-k, q+k-1)$ pour $j \in [0, r-k]$ vérifiant sur V

$$(*) \quad d'U_j^{p-k, q+k-1} = d''U_j^{p-k+1, q+k-2} - u_j d\bar{f} \wedge U_{j+1}^{p-k+1, q+k-2}$$

pour

$$j \in [0, r-k] \quad \text{et} \quad k \in [1, \ell].$$

Calculons alors, pour $j \in [0, r-\ell-1]$

$$d'[d''U_j^{p-\ell, q+\ell-1} - u_j d\bar{f} \wedge U_{j+1}^{p-\ell, q+\ell-1}].$$

Pour $\ell = 1$, on obtient, puisque $d'd'' + d''d' = 0$

$$- d''d'U_j^{p-1, q} + u_j d\bar{f} \wedge d'U_{j+1}^{p-1, q}$$

soit

$$- d''T_j + u_j d\bar{f} \wedge T_{j+1} = 0.$$

Pour $\ell \geq 2$, on obtient de même

$$\begin{aligned} & - d''d'U_j^{p-\ell, q+\ell-1} + u_j d\bar{f} \wedge d'U_j^{p-\ell, q+\ell-1} \\ &= - d''[d''U_j^{p-\ell+1, q+\ell-2} - u_j d\bar{f} \wedge U_{j+1}^{p-\ell+1, q+\ell-2}] \\ &\quad + u_j d\bar{f} \wedge [d''U_{j+1}^{p-\ell+1, q+\ell-2} - u_j d\bar{f} \wedge U_{j+2}^{p-\ell+1, q+\ell-2}] \\ &= - u_j d\bar{f} \wedge d''U_{j+1}^{p-\ell+1, q+\ell-2} + u_j d\bar{f} \wedge d''U_{j+1}^{p-\ell+1, q+\ell-2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Pour $\ell \leq p-1$, on peut donc trouver (puisque $H^{p-\ell}(V, \Omega^{q+\ell})=0$) des courants $U_j^{p-\ell-1, q+\ell}$ de type $(p-\ell-1, q+\ell)$ sur V pour $j \in [0, r-\ell-1]$ qui vérifient

$$d'U_j^{p-\ell-1, q+\ell} = d''U_j^{p-\ell, q+\ell-1} - u_j d\bar{f} \wedge U_{j+1}^{p-\ell, q+\ell-1}.$$

Ceci achève la construction des $U_j^{p-k, q+k-1}$ pour $j \in [0, r-k]$ et $k \in [1, p-1]$ vérifiant (*).

Pour $\ell = p$, on a encore

$$d'[d''U_j^{0, p+q-1} - u_j d\bar{f} \wedge U_{j+1}^{0, p+q-1}] = 0$$

pour $j \in [0, r-p]$. En posant, pour $j \in [0, r-p]$

$$S_j = d''U_j^{0, p+q-1} - u_j d\bar{f} \wedge U_{j+1}^{0, p+q-1},$$

on obtient que S_j est un courant de type $(p+q, 0)$ sur V d'' -fermé. C'est donc une forme holomorphe de degré $(p+q)$ sur V d'après Dolbeault-Grothendieck. De plus pour $j \in [0, r-p-1]$, on a

$$\begin{aligned} d''S_j &= u_j d\bar{f} \wedge d''U_{j+1}^{0, p+q-1} \\ &= u_j d\bar{f} \wedge S_{j+1}. \end{aligned}$$

Posons maintenant pour $j \in [0, r-p]$

$$U_j = \sum_1^p (-1)^{k-1} U_j^{p-k, q+k-1}.$$

Alors U_j est un courant de degré $p+q-1$ sur X et on a

$$\begin{aligned} dU_j &= \sum_1^p (-1)^{k-1} dU_j^{p-k, q+k-1} \\ &= d'U_j^{p-1, q} + \sum_1^{p-1} [(-1)^k d'U_j^{p-k-1, q+k} + (-1)^{k+1} d''U_j^{p-k, q+k-1}] \\ &\quad + (-1)^{p-1} d''U_j^{0, q+p-1} \\ dU_j &= T_j + \sum_1^{p-1} (-1)^k [d'U_j^{p-k-1} - d''U_j^{p-k, q+k-1}] \\ &\quad + (-1)^{p-1} [S_j + u_j d\bar{f} \wedge U_{j+1}^{0, p+q-1}], \end{aligned}$$

d'où puisque $j \in [0, r-p]$ en utilisant (*)

$$dU_j = T_j + u_j d\bar{f} \wedge U_{j+1} + (-1)^{p-1} \bar{S}_j,$$

ce qui achève la démonstration.

Remarques. — 1° On obtient un résultat analogue en conjuguant le lemme précédent.

2° On obtient immédiatement une variante vectorielle du lemme C'_1 (pour des courants à valeurs dans C^k , les u_j étant alors des matrices (k, k) à coefficients complexes; cf. la remarque suivant le lemme B_2 de [2]). Elle sera utilisée pour le cas général du théorème 1.

Posons $r-1 = \text{Sup}\{p, q\} = j_0$. Alors le lemme C'_1 , sous les hypothèses du lemme 1, nous fournit des $(p+q)$ -formes holomorphes $(\Omega_j)_{j \leq r-p}$ et $(\check{\Omega}_j)_{j \leq r-q}$ des courants de degré $p+q-1$ $(U_j)_{j \leq r-p}$ et $(V_j)_{j \leq r-q}$ vérifiant

$$\begin{aligned} \bar{C}_j &= (-1)^p \bar{\Omega}_j + dU_j - (j+1) d\bar{f} \wedge U_{j-1} \\ d\Omega_j &= -(j+1) df \wedge \Omega_{j+1} \\ (* *) \quad \check{C}_j &= (-1)^q \check{\Omega}_j + dV_j - (j+1) df \wedge V_{j+1} \\ d\check{\Omega}_j &= -(j+1) df \wedge \check{\Omega}_{j+1} \quad \text{pour } j \leq 0. \end{aligned}$$

En fait, seules vont nous intéresser les égalités $(*)$ pour $j=0$. Nous allons montrer que l'on peut choisir $\Omega_0, \check{\Omega}_0, \Omega_1, \check{\Omega}_1$ les U_j et les V_j de manière à satisfaire de plus les relations

$$f\check{\Omega}_1 = \Omega_0, \quad f\check{\Omega}_1 = \check{\Omega}_0.$$

Ceci va résulter immédiatement de la généralisation suivante du lemme C_2 de [2]:

LEMME C'_2 . — Dans la situation du lemme C'_1 , si on a

$$f.T_{j+1} = T_j \quad \text{pour } j \in [0, r-1]$$

et

$$u_{j+1} = u_j - 1 \quad \text{pour } j \in [0, r-1]$$

alors dans la conclusion, on peut choisir les $(p+q)$ -formes holomorphes $(S_j)_{j \in [0, r]}$ vérifiant de plus

$$fS_{j+1} = S_j \quad \text{pour } j \in [0, r-p].$$

La preuve est la même que celle du lemme C_2 de [2].

Remarque. — On a également une variante vectorielle « évidente » pour ce lemme; elle sera utilisée dans la démonstration du cas général du théorème 1.

Comme les hypothèses du lemme C'_2 sont vérifiées par les $\tilde{\mathcal{C}}_j$ (resp. par les $\tilde{\mathcal{C}}_j$, quitte à conjuguer), on obtient les relations désirées, qui donnent en fait :

$$d\Omega_0 = -\frac{df}{f} \wedge \Omega_0$$

$$d\check{\Omega}_0 = -\frac{df}{f} \wedge \check{\Omega}_0.$$

Alors les relations $d(f\Omega_0)=0$ et $d(f\check{\Omega}_0)=0$ montrent que Ω_0 et $\check{\Omega}_0$ induisent des sections nulles sur D^* du fibré de Gauss-Manin $s \rightarrow H^{p+q}(X_s, \mathbb{C})$.

Comme $df \wedge \Omega_0$ et $df \wedge \check{\Omega}_0$ sont (holomorphes) d -fermées sur X , il existe des formes holomorphes A et \check{A} de degré $p+q$ sur X vérifiant

$$dA = df \wedge \Omega_0 \quad \text{et} \quad d\check{A} = df \wedge \check{\Omega}_0$$

puisque X est de Stein et contractible.

La proposition suivante nous permettra de montrer que A et \check{A} induisent également des sections nulles sur D^* du fibré de Gauss-Manin $s \rightarrow H^{p+q}(X_s, \mathbb{C})$.

PROPOSITION (Positivité des exposants caractéristiques; due à B. Malgrange). — *Dans la situation de Milnor $f: X \rightarrow D$ si A est une r -forme holomorphe relativement fermée sur X avec $r \geq 1$ et si $\gamma(s)$ est une section horizontale multiforme sur D^* du fibré de Gauss-Manin $s \rightarrow H_r(X_s, \mathbb{C})$, alors on a*

$$\lim_{|s| \rightarrow 0} \int_{\gamma(s)} A = 0 \quad (*).$$

La preuve pour un germe à singularité isolée est détaillée dans $[M_1]$. Le cas général avec $r = n$ est traité dans l'appendice de $[M_2]$ dans le cadre algébrique. Malgrange dit en remarque dans $[M_3]$ que la preuve dans le cas général avec $1 \leq r \leq n$ est analogue à celle de $[M_1]$. Il m'a paru intéressant et utile de demander à Herrera de détailler la preuve de ce résultat en appendice.

(*) Pour préciser le sens de cette limite, on peut, par exemple, fixer un secteur angulaire d'ouverture $< 2\pi$ en 0.

Application. — Comme on a $dA = df \wedge \Omega_0$ et $d\check{A} = df \wedge \check{\Omega}_0$ et $r = p + q \geq 1$ dans notre situation, on aura pour toute section horizontale multiforme $\gamma(s)$ du fibré de Gauss-Manin $s \rightarrow H_{p+q}(X_s, \mathbb{C})$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \int_{\gamma(s)} A &= \int_{\gamma(s)} \nabla A = \int_{\gamma(s)} \Omega_0 = 0 \\ \left(\text{resp. } \frac{\partial}{\partial s} \int_{\gamma(s)} \check{A} &= \int_{\gamma(s)} \nabla \check{A} = \int_{\gamma(s)} \check{\Omega}_0 = 0 \right) \end{aligned}$$

où ∇ désigne la connexion de Gauss-Manin, puisque l'on a vu que Ω_0 et $\check{\Omega}_0$ induisent 0 dans $H^{p+q}(X_s, \mathbb{C})$ pour tout $s \in D^*$.

On en déduit que $\int_{\gamma(s)} A$ et $\int_{\gamma(s)} \check{A}$ sont constantes sur D^* . Elles sont donc nulles d'après la proposition ci-dessus, ce qui montre bien que A et \check{A} induisent 0 dans $H^{p+q}(X_s, \mathbb{C})$ pour tout $s \in D^*$.

Toujours sous les hypothèses du lemme 1, les relations entre courants sur X :

$$d''T = df \wedge \check{c}_0 = (-1)^p df \wedge \check{\Omega}_0 + df \wedge dV_0$$

et

$$d''T = d\check{f} \wedge c_0 = (-1)^q d\check{f} \wedge \check{\Omega}_0 + d\check{f} \wedge dU_0$$

donnent

$$d(T \pm \check{A} + df \wedge V_0 \pm \check{A} + d\check{f} \wedge U_0) = 0,$$

c'est-à-dire la fermeture sur X du courant de degré $p + q$

$$T \pm \check{A} \pm \check{A} + df \wedge V_0 + d\check{f} \wedge U_0.$$

Comme $H^{p+q}(X, \mathbb{C}) = 0$ (puisque $p+q \geq 1$ et puisque X est contractible) et que le complexe de De Rham des courants est une résolution fine du faisceau constant \mathbb{C} sur X , il existe un courant W sur X de degré $p + q - 1$ vérifiant

$$T = \pm \check{A} \pm \check{A} - df \wedge V_0 - d\check{f} \wedge U_0 + dW \text{ sur } X.$$

Comme A et \check{A} (et donc \bar{A}) induisent 0 dans $H^{p+q}(X_s, \mathbb{C})$ pour $s \in D^*$ et comme $T|_{X^*} = \frac{w_1 \wedge \bar{w}_2}{|f|^{2(m+n)}}$ n'induit pas 0 dans $H^{p+q}(X_{s_0}, \mathbb{C})$ par hypothèse, nous allons montrer (par un argument directement dérivé du lemme D de [2]) que les hypothèses du lemme 1 conduisent à une contradiction, ce qui achèvera la preuve du théorème 1 pour $k = \ell = 1$.

Reprenons les notations du lemme D de [2]:

Soit

$$\begin{array}{ccc}
 F: f^{-1}(D_0) & \xrightarrow{\sim} & X(s_0) \times D_0 \\
 & \searrow & \swarrow \\
 & D_0 &
 \end{array}$$

une C^∞ trivialisation de f au-dessus d'un disque D_0 assez petit de centre $s_0 \in D^*$. Soit φ une forme C^∞ à support compact de degré $2n - (p+q)$ sur $X(s_0)$ vérifiant $d\varphi = 0$ et représentant le $(p+q)$ -cycle $c(s_0) \in \hat{H}_{p+q}(X(s_0), \mathbb{Z})$ (*) via la dualité de Poincaré

$$H_{p+q}(X(s_0), \mathbb{C}) \simeq H_c^{2n-(p+q)}(X(s_0), \mathbb{C}).$$

Alors $F^*(\text{pr}_1^*(\varphi))$ est une $2n - (p+q)$ -forme C^∞ sur $f^{-1}(D_0)$ qui induit $c(s)$ sur $X(s)$ pour $s \in D_0$ où c désigne l'unique section horizontale du fibré de Gauss-Manin $s \rightarrow H_{p+q}(X(s), \mathbb{C})$ sur D_0 qui vaut $c(s_0)$ en s_0 . Si g est une fonction de $C_c^\infty(D_0)$ vérifiant

$$i/2 \int_{D_0} g(s) ds \wedge \bar{d}s = 1.$$

$$\text{Posons } \psi = f^* \left(\frac{i}{2} g(s) ds \wedge \bar{d}s \right) \wedge F^*(\text{pr}_1^*(\varphi)).$$

Alors ψ est une forme C^∞ à support compact dans $f^{-1}(D_0)$ vérifiant $d\psi = 0$, $\psi \wedge df = 0$ et $\psi \wedge d\bar{f} = 0$.

On a degré $(\psi) = 2n + 2 - (p+q)$. Montrons que ψ représente l'image de $c(s_0)$ (via la dualité de Poincaré) dans $H_c^{2n+2-(p+q)}(f^{-1}(D_0), \mathbb{C})$.

Si θ est une $(p+q)$ -forme C^∞ d -fermée sur $f^{-1}(D_0)$, on aura

$$\int_{f^{-1}(D_0)} \psi \wedge \theta = \int_{D_0} \frac{i}{2} g(s) ds \wedge \bar{d}s \int_{X(s)} F^*(\text{pr}_1^*(\varphi)) \wedge \theta$$

d'après Fubini (pour un produit!). Comme $c(s)$ et $c(s_0)$ sont homologues dans $f^{-1}(D_0)$ pour $s \in D_0$, on aura

$$\int_{c(s)} \theta = \int_{c(s_0)} \theta, \quad \forall s \in D_0$$

(*) $\hat{H}_{p+q}(X(s), \mathbb{Z})$ désigne l'image de $H_{p+q}(X(s), \mathbb{Z})$ dans $H_{p+q}(X(s), \mathbb{C})$.

(car $d\theta=0$) et comme $F^*(\text{pr}_1^*(\varphi))$ représente $c(s)$ dans $H_c^{2n-(p+q)}(X(s),\mathbb{C})$ pour $s \in D_0$, on a

$$\int_{X(s)} F^*(\text{pr}_1^*(\varphi)) \wedge \theta = \int_{c(s)} \theta = \int_{c(s_0)} \theta.$$

On obtient donc finalement

$$\int_{f^{-1}(D_0)} \psi \wedge \theta = \int_{D_0} \frac{i}{2} g(s) ds \wedge d\bar{s} \int_{c(s_0)} \theta = \int_{c(s_0)} \theta,$$

ce qui prouve notre assertion.

Maintenant pour $\theta = \frac{w_1 \wedge \bar{w}_2}{|f|^{2(m+u)}}$ qui est bien C^∞ d -fermée de degré $p+q$ sur $f^{-1}(D_0)$ (pourvu que $0 \notin D_0$), on obtient

$$\begin{aligned} \int_{c(s)} \frac{w_1 \wedge \bar{w}_2}{|f|^{2(m+u)}} &= (-1)^{p+q} \int_{f^{-1}(D_0)} \frac{w_1 \wedge \bar{w}_2}{|f|^{2(m+u)}} \wedge \psi \\ &= (-1)^{p+q} \langle \pm \bar{A} \pm A - df \wedge V_0 - d\bar{f} \wedge U_0 + dW, \psi \rangle. \end{aligned}$$

Mais on a $\langle \bar{A}, \psi \rangle = 0$ et $\langle A, \psi \rangle = 0$ puisque ψ représente $c(s_0)$ dans $H_c^{2n+2-(p+q)}(f^{-1}(D_0), \mathbb{C})$ et que l'on sait que $\int_{c(s_0)} \bar{A} = \int_{c(s_0)} A = 0$.

Par ailleurs, les relations $\psi \wedge df = 0$, $\psi \wedge d\bar{f} = 0$ et $d\psi = 0$ montrent que l'on a

$$\langle df \wedge V_0, \psi \rangle = 0 \quad \langle d\bar{f} \wedge U_0, \psi \rangle = 0$$

et

$$\langle dW, \psi \rangle = 0.$$

On a donc $\int_{c(s_0)} \frac{w_1 \wedge \bar{w}_2}{|f|^{2(m+u)}} = 0$ pour tout $c(s_0) \in \tilde{H}_{p+q}(X(s_0), \mathbb{Z})$, ce qui contredit l'hypothèse (puisque $\frac{w_1}{f^{m+u}}$ induit e_1 dans $H^p(X(s_0), \mathbb{C})$ et $\frac{w_2}{\bar{f}^{m+u}}$ induit ε_1 dans $H^q(X(s_0), \mathbb{C})$ avec des choix convenables de déterminations de $\text{Log } f$ sur $f^{-1}(D_0)$).

Ceci achève la preuve du théorème dans le cas où $k = \ell = 1$.

Remarque. — On a en fait prouvé que si m est l'entier que l'on a introduit au début de la démonstration (en fait $m = \text{Sup}(m_1, m_2)$) avec les

notations d'alors), un pôle d'ordre au moins égal à 2 apparaît en $z = -m - u - r - 1$ avec $r = \text{Sup}\{p, q\} + 1$ pour le prolongement méromorphe du courant $|f|^{2z} w_1 \wedge \bar{w}_2$.

2.

Avant de passer à la démonstration du théorème 1 dans le cas général, nous allons montrer comment un examen attentif de la preuve que nous venons de donner pour $k = \ell = 1$ permet d'obtenir le résultat suivant :

THÉORÈME 2. — *Soit n un entier strictement positif.*

Soit $f: X \rightarrow D$ un représentant de Milnor d'un germe $\tilde{f}: (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ de fonction holomorphe à singularité isolée. Soit w une n -forme holomorphe sur X vérifiant

$$a) \quad dw = m \frac{df}{f} \wedge w \quad \text{où } m \in \mathbb{N}^*,$$

$$b) \quad w \text{ induit un élément non nul de } H^n(X(s_0), \mathbb{C}) \text{ pour un } s_0 \in D^*.$$

Alors il existe un entier $r \geq 0$ et une n -forme holomorphe w' sur un voisinage ouvert U de 0 telle que pour $\rho \in C_c^\infty(U)$ valant identiquement 1 au voisinage de 0, de prolongement méromorphe de

$$\int_X |f|^{2z} f^r \cdot \rho w \wedge \bar{w}' \wedge df \wedge d\bar{f}$$

ait un pôle d'ordre ≥ 2 en un entier négatif (assez grand en valeur absolue).

Remarque. — Comme par Fubini, on a

$$\int_C |s|^{2z} s^r ds \wedge d\bar{s} \int_{f=s} \rho w \wedge \bar{w}' = \int_X |f|^{2z} f^r df \wedge d\bar{f} \wedge (\rho w \wedge \bar{w}').$$

Le théorème 2 montre que pour w vérifiant a) et b), il existe w' holomorphe au voisinage de 0 telle que la fonction $s \rightarrow \int_{f=s} \rho w \wedge \bar{w}'$ admette un terme non nul en $\bar{s}' |s|^{2k} \text{Log}(s\bar{s})$ pour $k \in \mathbb{N}$ assez grand. Ce résultat est la clé de la non-dégénérescence de la forme hermitienne canonique sur la fibre de Milnor d'une singularité isolée (voir [3]).

Démonstration du théorème 2. — Posons $V = X - \{0\}$; comme df ne s'annule pas sur V , le prolongement méromorphe de $\int_V |f|^{2z} \varphi$ pour toute forme différentielle $\varphi \in C_c^\infty(V)$ de type $(n+1, n+1)$ n'a que des pôles simples (au pire) aux entiers négatifs. Mais on a de plus $H^i(V, \mathcal{O}) = 0$ pour $1 \leq i \leq n-1$ (on a supposé $n \geq 1$).

Nous allons montrer que si pour $j \leq n+1$ les courants $\tilde{\mathcal{E}}_j$ définis par

$$\langle \tilde{\mathcal{E}}_j, \varphi \rangle = \text{Res} \left(z = -m, \int_X |f|^{2z} \tilde{f}^{m-j-1} w \wedge \varphi \right)$$

pour $\varphi \in C_c^\infty(X)$ de type $(1, n+1)$, n'ont pas tous des restrictions à V qui sont d' -exactes. Sinon on applique la stratégie de démonstration du théorème 1 (cas $k=\ell=1$) en posant: $w_1 = w$ et $w_2 = f^m$ ($\varepsilon_1 = 1 \in H^0(X(s_0), \mathbb{C})$, donc $q=0$ et $p=n$); les courants $\tilde{\mathcal{E}}_j$ ne seront pas utiles ici car on a

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\mathcal{E}}_j, \varphi \rangle &= \text{Res} \left(z = -m, \int_X |f|^{2z} \tilde{f}^m f^{-j-1} w \wedge \varphi \right) \\ &= \text{Res} \left(\xi = 0, \int_X |f|^{2\xi} f^{-(m+j+1)} w \wedge \varphi \right), \end{aligned}$$

donc $\langle \tilde{\mathcal{E}}_j, \varphi \rangle = 0$ pour $\varphi \in C_c^\infty(V)$ puisque df ne s'annule pas sur V (on est ramené par un argument de partition de l'unité à voir que pour $\theta \in C_c^\infty(\mathbb{C})$ $\int_X |s|^{2z} s^{-\nu} \theta(s) ds \wedge \bar{d}s$ n'a pas de pôle en $z=0$ pour $\nu \in \mathbb{N}$, ce qui résulte aisément d'un développement de Taylor et d'un calcul en coordonnées polaires).

Donc sous l'hypothèse que les $\tilde{\mathcal{E}}_j|_V$ soient pour $j \leq n+1$ d' -exactes comme courants sur V , on peut appliquer le lemme C'_1 . Le pas suivant consiste à montrer que la forme holomorphe de degré $n+1$, d -fermée $df \wedge \Omega_0$ sur V est d -exacte et que la forme holomorphe A sur V qui vérifie $dA = df \wedge \Omega_0$ se prolonge holomorphiquement à X . Ceci résulte immédiatement de l'hypothèse $n \geq 1$ et de Hartogs (on utilise ici à nouveau le fait que X est contractible). En poursuivant ainsi le raisonnement, on contredira l'hypothèse $w|_{X(s_0)} \neq 0$ dans $H^n(X(s_0), \mathbb{C})$. Donc il existe $j_0 \leq n+1$ tel que $\tilde{\mathcal{E}}_{j_0}$ induise une classe non triviale dans $H^n(V, \mathcal{O})$ (ce qui revient à dire que $\tilde{\mathcal{E}}_{j_0}$ n'est pas d' -exact sur V). Mais comme $V = X - \{0\}$, on a (avec $n \geq 1$) classiquement $H^n(V, \mathcal{O}) \simeq H_{\{0\}}^{n+1}(X, \mathcal{O})$ qui est le dual fort du dual de Fréchet $\Omega_{X,0}^{n+1}$ des

germes de formes holomorphes de degré $n + 1$ en 0 dans \mathbb{C}^{n+1} . C'est-à-dire que $H^n(V, \mathcal{O})$ s'identifie à l'espace de Fréchet des fonctionnelles analytiques de degré 0 à support l'origine dans \mathbb{C}^{n+1} . Le lemme suivant va nous permettre d'identifier la fonctionnelle analytique associée au courant $\bar{\mathcal{C}}|_V$:

LEMME 2. — On conserve les notations ci-dessus. Soit $\bar{\mathcal{C}}$ un courant de type $(0, n)$ sur X vérifiant $d''\bar{\mathcal{C}} = 0$ sur $V = X - \{0\}$. Alors la fonctionnelle analytique Ξ associée, via l'isomorphisme

$$H^n(V, \mathcal{O}) \simeq H_{\{0\}}^{n+1}(X, \mathcal{O})$$

et la dualité $H_{\{0\}}^{n+1}(X, \mathcal{O}) \simeq (\Omega_{X,0}^{n+1})'$, à la classe de $\bar{\mathcal{C}}$ dans $H^n(V, \mathcal{O})$ (calculée à la Dolbeault) est donnée, au signe près, par

$$\langle \Xi, \tilde{\omega} \rangle = \langle d''\bar{\mathcal{C}}, \rho\omega \rangle$$

pour $\tilde{\omega} \in \Omega_{X,0}^{n+1}$, où ω est un représentant de $\tilde{\omega}$ défini sur l'ouvert U_ω contenant 0 et où $\rho \in C_c^\infty(U_\omega)$ vérifie $\rho \equiv 1$ au voisinage de 0.

Démonstration. — Vérifions déjà que $\langle \Xi, \tilde{\omega} \rangle$ est bien définie; pour cela, considérons un autre représentant de $\tilde{\omega}$, disons ω_1 sur l'ouvert U_{ω_1} contenant 0, et soit $\rho_1 \in C_c^\infty(U_{\omega_1})$ vérifiant $\rho_1 \equiv 1$ près de 0. Alors la forme $\rho_1\omega_1 - \rho\omega$ est dans $C_c^\infty(X)$ et vaut identiquement 0 près de 0. Comme $\text{Supp}(d''\bar{\mathcal{C}}) \subseteq \{0\}$ on a bien

$$\langle d''\bar{\mathcal{C}}, \rho\omega \rangle = \langle d''\bar{\mathcal{C}}, \rho_1\omega_1 \rangle.$$

Donc Ξ est bien une forme linéaire sur $\Omega_{X,0}^{n+1}$. Vérifions sa continuité : si $\tilde{\omega}_\nu \rightarrow 0$ dans $\Omega_{X,0}^{n+1}$, alors il existe un ouvert U contenant 0 et des représentants ω_ν des $\tilde{\omega}_\nu$ sur U qui convergent vers 0 uniformément sur tout compact de U . On a alors (par la formule de Cauchy) convergence uniforme sur tout compact de U de toutes les dérivées et si $\rho \in C_c^\infty(U)$, $\rho\omega_\nu \rightarrow 0$ dans $C_c^\infty(U)$ pour sa topologie habituelle. On a donc $\langle d''\bar{\mathcal{C}}, \rho\omega_\nu \rangle = \langle \Xi, \tilde{\omega}_\nu \rangle$ qui tend vers 0. Remarquons d'autre part que Ξ ne dépend bien que de $\bar{\mathcal{C}}|_V$ et pas du prolongement $\bar{\mathcal{C}}$ à X que l'on s'est donné : si $\bar{\mathcal{C}}_1$ est un courant sur X vérifiant $\bar{\mathcal{C}}_1|_V = \bar{\mathcal{C}}|_V$, alors $\bar{\mathcal{C}}_1 - \bar{\mathcal{C}}$ est à support l'origine et donc

$$- \langle d''(\bar{\mathcal{C}}_1 - \bar{\mathcal{C}}), \rho\omega \rangle = \langle \bar{\mathcal{C}}_1 - \bar{\mathcal{C}}, d''(\rho\omega) \rangle = 0$$

car $\rho\omega$ est holomorphe au voisinage de 0 (pour ρ vérifiant $\rho \equiv 1$ au voisinage de 0!).

Montrons maintenant que Ξ est bien la fonctionnelle associée à $\bar{\mathcal{C}}$ par le procédé décrit plus haut :

En Dolbeault la dualité $H^n(X - \{0\}, \mathcal{O}) \simeq (\Omega_{X,0}^{n+1})'$ est classiquement décrite comme suit :

si $\varphi \in C^\infty(V)$ est de type $(0, n)$ et d'' -fermée et si ω représente $\tilde{\omega} \in \Omega_{X,0}^{n+1}$ et est définie et holomorphe au voisinage de la boule fermée de centre 0 et de rayon $\varepsilon > 0$, on pose

$$\langle [\varphi], \tilde{\omega} \rangle = \int_{S_\varepsilon} \varphi \wedge \omega$$

où S_ε est la sphère de centre 0 et de rayon ε .

Pour $0 < \varepsilon' < \varepsilon$, on a, par Stokes

$$\int_{S_\varepsilon} \varphi \wedge \omega - \int_{S_{\varepsilon'}} \varphi \wedge \omega = \int_{\varepsilon' < \|z\| < \varepsilon} d(\varphi \wedge \omega) = 0.$$

Donc pour $\rho \in C_c^\infty(]0, +\infty[)$, d'intégrale égale à 1 et à support contenu dans $]0, \varepsilon[$, on aura aussi

$$\langle [\varphi], \omega \rangle = \int_V \varphi \wedge \omega \wedge d\tilde{\rho}$$

où $\tilde{\rho}$ désigne la fonction radiale définie par ρ ($\tilde{\rho} \in C_c^\infty(V)$).

Si $[\bar{\mathcal{C}}] = [\varphi]$ dans $H^n(V, \mathcal{O})$, on a $\bar{\mathcal{C}} = \varphi + d''\eta$ où η est un courant de type $(0, n-1)$ sur V . On aura alors

$$\int_V \varphi \wedge \omega \wedge d\tilde{\rho} = \langle \bar{\mathcal{C}}, \omega \wedge d\tilde{\rho} \rangle + \langle d''\eta, \omega \wedge d\tilde{\rho} \rangle.$$

Mais comme ω est de type $(n+1, 0)$ et holomorphe, on a

$$d(\tilde{\rho}\omega) = d''(\tilde{\rho}\omega) = d''\tilde{\rho} \wedge \omega = d\tilde{\rho} \wedge \omega.$$

D'où

$$\langle [\varphi], \omega \rangle = \pm \langle d''\bar{\mathcal{C}}, \tilde{\rho}\omega \rangle,$$

ce qui achève la démonstration du lemme 2.

Récapitulons : Il existe donc, sous les hypothèses du théorème 2, $j_0 \leq n+1$ tel que $\bar{\mathcal{C}}_{j_0}$ ait une classe non nulle dans $H^n(V, \mathcal{O})$, ce qui se traduit, grâce au lemme 2, par l'existence d'un ouvert U contenant 0 dans

X d'une $(n+1)$ -forme holomorphe ω sur U telle que pour toute fonction $\rho \in C_c^\infty(U)$ valant identiquement 1 au voisinage de 0, on ait

$$\langle d'' \bar{\mathcal{C}}_{j_0}, \rho \omega \rangle = 1,$$

ce qui donne en conjuguant

$$\langle d' \mathcal{C}_{j_0}, \rho \bar{\omega} \rangle = 1,$$

ou encore

$$\text{Res} \left(z = -m, \int_X |f|^{2z} \bar{f}^{m-j_0-1} w \wedge d'(\rho \bar{\omega}) \right) = -1.$$

Comme on a $d'(\rho \bar{\omega}) = d(\rho \bar{\omega})$, pour $\text{Re}(z) \gg 0$, la formule de Stokes donne

$$\begin{aligned} (-1)^n \int_X |f|^{2z} \bar{f}^{m-j_0-1} w \wedge d(\rho \bar{\omega}) = \\ \int_X d(|f|^{2z} \bar{f}^{m-j_0-1} w \wedge \rho \bar{\omega}) - (z+m) \int_X |f|^{2z} \bar{f}^{m-j_0-1} \frac{df}{f} \wedge w \wedge \rho \bar{\omega}, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\text{Res} \left(z = -m, (z+m) \int_X |f|^{2z} \bar{f}^{m-j_0-1} \frac{df}{f} \wedge w \wedge \rho \bar{\omega} \right) \neq 0.$$

Donc le prolongement méromorphe de $\int_X |f|^{2z} \bar{f}^{m-j_0-1} \frac{df}{f} \wedge w \wedge \rho \bar{\omega}$ a un pôle d'ordre au moins égal à 2 en $z = -m$.

Maintenant en utilisant le Nullstellensatz, il existe $\ell \in \mathbb{N}$ et w' holomorphe de degré n au voisinage du support de ρ , vérifiant

$$f' \rho \omega = \rho w' \wedge df.$$

Alors le prolongement méromorphe de

$$\int_X |f|^{2z} \bar{f}^{m-j_0-\ell} \frac{df}{f} \wedge \frac{d\bar{f}}{\bar{f}} \wedge \rho w \wedge \bar{w}'$$

aura un pôle d'ordre ≥ 2 en $z = -m$ et ρ est dans $C_c^\infty(X)$ et vaut identiquement 1 au voisinage de 0. Ceci achève la preuve du théorème 2, en prenant $r = \text{Sup}(-m+j_0+\ell, 0)$; en effet pour $m-j_0-\ell \leq 0$, l'assertion ci-dessus équivaut à l'existence d'un pôle d'ordre ≥ 2 en

$\xi = -j_0 - \ell - 1$ pour $\int_X |f|^{2\xi} f^r \rho w \wedge \bar{w}' \wedge df \wedge d\bar{f}$ (poser $\xi = z - 1 + m - j_0 - \ell$). Pour $m - j_0 - \ell > 0$, remplacer w' par $f^{m-j_0-\ell} w'$ et prendre $r = 0$.

3.

Passons à la démonstration du théorème 1 dans le cas général.

En utilisant le lemme A de [2], on peut trouver des p -formes holomorphes $w_1 \dots w_k$ et des q -formes holomorphes $w'_1 \dots w'_\ell$ sur X vérifiant

$$i) \quad dw_j = (m+u) \frac{df}{f} \wedge w_j + \frac{df}{f} \wedge w_{j-1}, \quad \forall j \in [1, k]$$

avec la convention $w_0 = 0$

$$dw'_j = (m+u) \frac{df}{f} \wedge w'_j + \frac{df}{f} \wedge w'_{j-1}, \quad \forall j \in [1, \ell]$$

avec la convention $w'_0 = 0$

ii) $w_1 \wedge \bar{w}'_1|_{X(s_0)}$ définit un élément non nul de $H^{p+q}(X(s_0), \mathbb{C})$.

On peut choisir le même entier m pour les w_j et les w'_j en multipliant par des puissances convenables de f : si on a

$$dw_j = (m+u) \frac{df}{f} \wedge w_j + \frac{df}{f} \wedge w_{j-1}, \quad \forall j \in [1, k]$$

(toujours avec $w_0 = 0$) en posant $\tilde{w}_j = f^r w_j$, on obtient

$$d\tilde{w}_j = (m+r+u) \frac{df}{f} \wedge \tilde{w}_j + \frac{df}{f} \wedge \tilde{w}_{j-1}, \quad \forall j \in [1, k].$$

Définissons alors le courant T sur X , en posant pour $\alpha \in C_c^\infty(X)$ de type $(n-p+1, n-q+1)$

$$\langle T, \alpha \rangle = \sum_{a=0}^{k-1} \sum_{b=0}^{\ell-1} (-1)^{a+b} P_{a+b}(z = -m-u, \int_X |f|^{2z} w_{a+1} \wedge \bar{w}'_{b+1} \wedge \alpha) (*).$$

(*) $P_\lambda(z = z_0, F(z))$ désigne le coefficient de $\frac{1}{(z-z_0)^\lambda}$ dans le développement de Laurent de la fonction méromorphe F en z_0 .

On a alors l'analogie du lemme 0 pour le cas $k = \ell = 1$ qui montre comment nous allons faire apparaître des pôles d'ordre $\geq k + \ell$ pour le prolongement méromorphe de $|f|^{2z}$.

LEMME 0 bis. — Si on a $id'd''T \neq 0$ sur X , alors le prolongement méromorphe de $|f|^{2z}$ a un pôle d'ordre au moins $k + \ell$ en $z = -m - u - 1$.

Remarquons que comme dans le cas $k = \ell = 1$ on a

$$T|_{X^*} = |f|^{-2(m+u)} w_1 \wedge \bar{w}'_1$$

puisque pour tout $c > 0$ le support du courant $P_c \left(z = z_0, \int_X |f|^{2z} \square \right)$ est contenu dans $\{f=0\}$:

En effet, pour $\varphi \in C_c^\infty(X^*)$, la fonction $\int_X |f|^{2z} \varphi$ est entière.

Preuve du lemme 0 bis. — Pour $\beta \in C_c^\infty(X)$ de type $(n-p, n-q)$ et $\operatorname{Re}(z) \gg 0$, appliquons la formule de Stokes pour calculer

$$\begin{aligned} (-1)^{p+q} \int_X |f|^{2z} w_{a+1} \wedge \bar{w}'_{b+1} \wedge id'd''\beta &= \int_X id[|f|^{2z} w_{a+1} \wedge \bar{w}'_{b+1} \wedge d''\beta] \\ &- i(z+m+u) \int_X |f|^{2z} \frac{df}{f} \wedge w_{a+1} \wedge \bar{w}'_{b+1} \wedge d''\beta \\ &- i \int_X |f|^{2z} \frac{df}{f} \wedge w_a \wedge \bar{w}'_{b+1} \wedge d''\beta \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (-1)^{p+q+1} \int_X |f|^{2z} \frac{df}{f} \wedge w_c \wedge \bar{w}'_{b+1} \wedge d''\beta &= \\ &\int_X d \left(|f|^{2z} \frac{df}{f} \wedge w_c \wedge \bar{w}'_{b+1} \wedge \beta \right) \\ &- (z+m+u) \int_X |f|^{2z} \frac{d\bar{f}}{\bar{f}} \wedge \frac{df}{f} \wedge w_c \wedge \bar{w}'_{b+1} \wedge \beta \\ &- \int_X |f|^{2z} \frac{d\bar{f}}{\bar{f}} \wedge \frac{df}{f} \wedge \bar{w}_c \wedge \bar{w}'_b \wedge \beta \end{aligned}$$

toujours avec la convention $w_0 = 0$ et $w'_0 = 0$ (ici $a \in [0, k-1]$, $b \in [0, \ell-1]$ et $c \in [1, k]$).

On obtient donc, pour $\operatorname{Re}(z) \gg 0$,

$$\begin{aligned} \int_X |f|^{2z} w_{a+1} \wedge \bar{w}'_{b+1} \wedge id' d'' \beta = \\ + i(z+m+u)^2 \int_X |f|^{2z} \frac{df}{f} \wedge \frac{d\bar{f}}{\bar{f}} \wedge w_{a+1} \wedge \bar{w}'_{b+1} \wedge \beta \\ + i(z+m+u) \int_X |f|^{2z} \frac{df}{f} \wedge \frac{d\bar{f}}{\bar{f}} \wedge w_{a+1} \wedge \bar{w}'_b \wedge \beta \\ + i(z+m+u) \int_X |f|^{2z} \frac{df}{f} \wedge \frac{d\bar{f}}{\bar{f}} \wedge w_a \wedge \bar{w}'_{b+1} \wedge \beta \\ + i \int_X |f|^{2z} \frac{df}{f} \wedge \frac{d\bar{f}}{\bar{f}} \wedge w_a \wedge \bar{w}'_b \wedge \beta. \end{aligned}$$

On a donc, par prolongement méromorphe

$$\begin{aligned} P_{a+b} \left(z = -m-u, \int_X |f|^{2z} w_{a+1} \wedge \bar{w}'_{b+1} \wedge id' d'' \beta \right) \\ = iP_{a+b+2} \left(z = -m-u, \int_X |f|^{2z} \frac{df}{f} \wedge \frac{d\bar{f}}{\bar{f}} \wedge w_{a+1} \wedge \bar{w}'_{b+1} \wedge \beta \right) \\ + iP_{a+b+1} \left(z = -m-u, \int_X |f|^{2z} \frac{df}{f} \wedge \frac{d\bar{f}}{\bar{f}} \wedge w_{a+1} \wedge \bar{w}'_b \wedge \beta \right) \\ + iP_{a+b+1} \left(z = -m-u, \int_X |f|^{2z} \frac{df}{f} \wedge \frac{d\bar{f}}{\bar{f}} \wedge w_a \wedge \bar{w}'_{b+1} \wedge \beta \right) \\ + iP_{a+b} \left(z = -m-u, \int_X |f|^{2z} \frac{df}{f} \wedge \frac{d\bar{f}}{\bar{f}} \wedge w_a \wedge \bar{w}'_b \wedge \beta \right). \end{aligned}$$

En sommant, on obtient

$$\begin{aligned} i \sum_{a=0}^{k-1} \sum_{b=0}^{\ell-1} (-1)^{a+b} [P_{a+b+2}(a+1, b+1) \\ + P_{a+b+1}(a+1, b) + P_{a+b+1}(a, b+1) + P_{a+b}(a, b)] \end{aligned}$$

où l'on a noté

$$P_c(a, b) = P_c \left(z = -m-u, \int_X |f|^{2z} \frac{df}{f} \wedge \frac{d\bar{f}}{\bar{f}} \wedge w_a \wedge \bar{w}'_b \wedge \beta \right);$$

on a donc

$$\begin{aligned} & i \sum_{a=0}^{k-1} \sum_{b=0}^{\ell-1} (-1)^{a+b+2} P_{a+b+2}(a+1, b+1) \\ & + i \sum_{a=0}^{k-2} \sum_{b=0}^{\ell-1} (-1)^{a+b+1} P_{a+b+2}(a+1, b+1) \\ & + i \sum_{a=0}^{k-1} \sum_{b=0}^{\ell-2} (-1)^{a+b+1} P_{a+b+2}(a+1, b+1) \\ & + i \sum_{a=0}^{k-2} \sum_{b=0}^{\ell-2} (-1)^{a+b} P_{a+b+2}(a+1, b+1) \end{aligned}$$

en réindexant, compte tenu des égalités $P_c(a,0) = P_c(0,b) = 0 \forall a, b, c$,
puisqu'on a $w_0 = w'_0 = 0$ par convention.

Il reste alors seulement

$$i(-1)^{k+\ell} P_{k+\ell} \left(z = -m-u, \int_X |f|^{2z} \frac{df}{f} \wedge \frac{d\bar{f}}{\bar{f}} \wedge w_k \wedge \bar{w}'_{\ell} \wedge \beta \right).$$

Si $\langle id'd''T, \beta \rangle \neq 0$, on a donc

$$P_{k+\ell} \left(z = -m-u, \int_X |f|^{2z} \frac{df}{f} \wedge \frac{d\bar{f}}{\bar{f}} \wedge w_k \wedge \bar{w}'_{\ell} \wedge \beta \right) \neq 0,$$

c'est-à-dire un pôle d'ordre $\geq k + \ell$ en $z = -m - u - 1$ pour le
prolongement méromorphe de $\int_X |f|^{2z} w_k \wedge \bar{w}'_{\ell} \wedge \square$. Ceci achève la
démonstration du lemme 0 bis.

Introduisons maintenant les courants suivants sur X : pour $\alpha \in C_c^\infty(X)$
de type $(n-p+1, n-q+1)$, posons

$$\langle \tilde{\mathcal{O}}_j^{i,b}, \alpha \rangle = \sum_{a=0}^{k-1} (-1)^{a+b} P_{a+\ell+i-1} \left(z = -m-u, \int_X |f|^{2z} f^{-j-1} w_{a+1} \wedge \bar{w}'_{b+1} \wedge \alpha \right)$$

et

$$\langle \tilde{\mathcal{O}}_j^{a,i}, \alpha \rangle = \sum_{b=0}^{\ell-1} (-1)^{a+b} P_{k+b+i-1} \left(z = -m-u, \int_X |f|^{2z} f^{-j-1} w_{a+1} \wedge \bar{w}'_{b+1} \wedge \alpha \right).$$

Pour $i \in \mathbf{N}^*$, $j \in \mathbf{Z}$ et $a \in [-1, k-1]$, $b \in [-1, \ell-1]$ (ils sont nuls pour
 $a = -1$ ou $b = -1$).

On a la généralisation suivante du lemme 1 :

LEMME 1 bis. — *Supposons que le prolongement méromorphe de $|f|^{2z}$ n'ait jamais de pôle d'ordre au moins $k + \ell$ en un point congru à $-u$ modulo \mathbf{Z} . Alors on a les relations suivantes entre courants sur X :*

$$d''\mathcal{C}_j^{i,b} = -(j+1).df \wedge \mathcal{C}_{j+1}^{i,b} + df \wedge [\mathcal{C}_{j+1}^{i,b-1} + \mathcal{C}_{j+1}^{i+1,b}]$$

et

$$d'\mathcal{C}_j^{i,b} = 0 \quad \text{pour } b \in [0, \ell-1]$$

$$d'\check{\mathcal{C}}_j^{a,i} = -(j+1).df \wedge \check{\mathcal{C}}_{j+1}^{a,i} + df \wedge [\check{\mathcal{C}}_{j+1}^{a-1,i} + \check{\mathcal{C}}_{j+1}^{a,i+1}]$$

et

$$d''\check{\mathcal{C}}_j^{a,i} = 0 \quad \text{pour } a \in [0, k-1].$$

On a de plus

$$d''T = df \wedge \check{\mathcal{C}}_0^{k-1,1}$$

$$d'''T = d\check{f} \wedge \check{\mathcal{C}}_0^{1,\ell-1}.$$

Démonstration. — Avec des notations analogues à celles utilisées dans la preuve du lemme 0 bis on a, pour $\beta \in C_c^\infty(X)$ de type $(n-p, n-q+1)$:

$$\begin{aligned} \langle d'T, \beta \rangle &= (-1)^{p+q+1} \langle T, d'\beta \rangle \\ &= \sum_{a=0}^{k-1} \sum_{b=0}^{\ell-1} [(-1)^{a+b} P_{a+b+1}(a+1, b+1) + (-1)^{a+b} P_{a+b}(a, b+1)] \end{aligned}$$

où $P_c(a, b)$ désigne ici $P_c\left(z = -m-u, \int_X |f|^{2z} \frac{df}{f} \wedge w_a \wedge \bar{w}_b \wedge \beta\right)$.

On a donc, comme plus haut

$$\begin{aligned} \langle d''T, \beta \rangle &= \sum_{a=0}^{k-1} \sum_{b=0}^{\ell-1} (-1)^{a+b} P_{a+b+1}(a+1, b+1) \\ &\quad + \sum_{a=0}^{k-2} \sum_{b=0}^{\ell-1} (-1)^{a+b+1} P_{a+b+1}(a+1, b+1) \\ &= \sum_{b=0}^{\ell-1} (-1)^{k+b-1} P_{k+b}(k, b+1) \\ &= \langle df \wedge \check{\mathcal{C}}_0^{k-1,1}, \beta \rangle. \end{aligned}$$

Le calcul pour $d'''T$ est analogue.

Calculons $d'\mathcal{C}_j^{i,b}$: pour $\beta \in C_c^\infty(X)$ de type $(n-p, n-q+1)$, on a

$$\langle d'\mathcal{C}_j^{i,b}, \beta \rangle = (-1)^{p+q+1} \langle \mathcal{C}_j^{i,b}, d'\beta \rangle,$$

ce qui donne, avec la convention

$$P_c(a,b) = P_c\left(z = -m-u, \int_X |f|^{2z} f^{-j-1} \frac{df}{f} \wedge w_a \wedge \bar{w}'_b \wedge \beta\right)$$

$$\langle d'' \mathcal{E}_j^{i,b}, \beta \rangle = \sum_{a=0}^{k-1} (-1)^{a+b} [P_{a+\ell+i}(a+1, b+1) + P_{a+\ell+i-1}(a, b+1)]$$

$$= (-1)^{k+b-1} P_{k+\ell+i-1}(k, b+1),$$

ce qui vaut 0 car $i \geq 1$ et $|f|^{2z}$ n'a pas de pôle d'ordre $\geq k + \ell$ en un point congru à $-u$ modulo \mathbf{Z} (ici on utilise par exemple $z = -m-j-1-u$).

Pour le calcul de $d'' \mathcal{E}_j^{i,b}$, prenons $\alpha \in C_c^\infty(X)$ de type $(n-p+1, n-q)$. Nous utiliserons ici l'identité

$$P_a(z = -m-u, (z+m+u-j-1)F(z))$$

$$= P_{a+1}(z = -m-u, F(z)) - (j+1)P_a(z = -m-u, F(z))$$

pour F méromorphe dans \mathbf{C} .

$$\langle d'' \mathcal{E}_j^{i,b}, \alpha \rangle = \sum_{a=0}^{k-1} (-1)^{a+b} [P_{a+\ell+i}(a+1, b+1) - (j+1)P_{a+\ell+i-1}(a+1, b+1)$$

$$+ P_{a+\ell+i-1}(a+1, b)]$$

où ici

$$P_c(a,b) = P_c\left(z = -m-u, \int_X |f|^{2z} f^{-j-1} \frac{df}{f} \wedge w_a \wedge \bar{w}'_b \wedge \alpha\right).$$

On a

$$\sum_{a=0}^{k-1} (-1)^{a+b} P_{a+\ell+i}(a+1, b+1) = \langle df \wedge \mathcal{E}_{j+1}^{i+1,b}, \alpha \rangle$$

$$\sum_{a=0}^{k-1} (-1)^{a+b} P_{a+\ell+i-1}(a+1, b+1) = \langle df \wedge \mathcal{E}_{j+1}^{i,b}, \alpha \rangle$$

et

$$\sum_{a=0}^{k-1} (-1)^{a+b} P_{a+\ell+i-1}(a+1, b) = \langle df \wedge \mathcal{E}_{j+1}^{i,b-1}, \alpha \rangle$$

d'où

$$d'' \mathcal{E}_j^{i,b} = -(j+1) df \wedge \mathcal{E}_{j+1}^{i,b} + df \wedge [\mathcal{E}_{j+1}^{i+1,b} + \mathcal{E}_{j+1}^{i,b-1}].$$

Les calculs pour les $\tilde{\mathcal{E}}_j^{a,i}$ sont analogues. Ceci achève la preuve du lemme 1 bis.

Considérons maintenant les $\tilde{\mathcal{C}}_j^{i,b}$ pour $i \in [1, k]$ et $b \in [0, \ell - 1]$ comme les composantes d'un courant vectoriel $\tilde{\mathcal{C}}_j$ à valeurs dans $\mathbf{C}^k \otimes_{\mathbf{C}} \mathbf{C}^{\ell}$.

Si u_j est l'endomorphisme de $\mathbf{C}^k \otimes_{\mathbf{C}} \mathbf{C}^{\ell}$ défini par

$$u_j(v_{\alpha} \otimes w_{\beta}) = -(j+1)v_{\alpha} \otimes w_{\beta} + [v_{\alpha+1} \otimes w_{\beta} + v_{\alpha} \otimes w_{\beta-1}]$$

où $v_1 \dots v_k$ et $w_1 \dots w_{\ell}$ désignent les bases canoniques de \mathbf{C}^k et \mathbf{C}^{ℓ} avec les conventions $v_{k+1} = 0$ et $w_0 = 0$ (qui correspondent aux faits que $\tilde{\mathcal{C}}_j^{i,b} = 0$ pour $b = -1$ ($w_0 = 0$) et pour $i \geq k+1$ car alors $a + \ell + i - 1 \geq k + \ell$ pour tout $a \in [0, k-1]$ et l'absence de pôle d'ordre $\geq k + \ell$ montre que tout est nul sous les hypothèses du lemme 1 bis), on aura alors, toujours sous les hypothèses du lemme 1 bis

$$d'\tilde{\mathcal{C}}_j = 0 \quad \text{et} \quad d''\tilde{\mathcal{C}}_j = u_j \cdot d\tilde{f} \wedge \tilde{\mathcal{C}}_{j+1}.$$

De même en définissant les courants $\check{\mathcal{C}}_j$ à valeurs dans $\mathbf{C}^k \otimes_{\mathbf{C}} \mathbf{C}^{\ell}$ avec comme composantes les $\check{\mathcal{C}}_j^{a,i}$ pour $a \in [0, k-1]$ et $i \in [1, \ell]$, on a de manière analogue (mais avec maintenant les conventions $v_0 = 0$ et $w_{\ell+1} = 0$) et \check{u}_j défini par

$$\begin{aligned} \check{u}_j(v_{\alpha} \otimes w_{\beta}) &= -(j+1)v_{\alpha} \otimes w_{\beta} + [v_{\alpha-1} \otimes w_{\beta} + v_{\alpha} \otimes w_{\beta+1}] \\ d''\check{\mathcal{C}}_j &= 0 \quad \text{et} \quad d'\check{\mathcal{C}}_j = \check{u}_j d\tilde{f} \wedge \check{\mathcal{C}}_{j+1}. \end{aligned}$$

En appliquant la variante vectorielle du lemme C₁ aux $\tilde{\mathcal{C}}_j$ et aux $\check{\mathcal{C}}_j$, on obtient des formes holomorphes vectorielles $(\Omega_j)_{j \in \mathbf{Z}}$ ($\check{\Omega}_j)_{j \in \mathbf{Z}}$ de degré $(p+q)$ sur X et des courants vectoriels de degré $p+q-1$ sur X $(U_j)_{j \in \mathbf{Z}}$ $(V_j)_{j \in \mathbf{Z}}$ avec les relations

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{C}}_j &= (-1)^p \tilde{\Omega}_j + dU_j + u_j d\tilde{f} \wedge U_{j+1} \\ d\Omega_j &= \bar{u}_j d\tilde{f} \wedge \Omega_{j+1} \\ \check{\mathcal{C}}_j &= (-1)^q \check{\Omega}_j + dV_j + \check{u}_j d\tilde{f} \wedge V_{j+1} \\ d\check{\Omega}_j &= \check{u}_j d\tilde{f} \wedge \check{\Omega}_{j+1}. \end{aligned}$$

Comme pour le cas $k = \ell = 1$, seules ces relations pour $j = 0$ vont nous être utiles; nous avons également

$$d'T = d\tilde{f} \wedge \tilde{\mathcal{C}}_0^{k-1,1}$$

et

$$d''T = d\tilde{f} \wedge \check{\mathcal{C}}_0^{1,\ell-1}.$$

Comme les formes holomorphes $df \wedge \Omega_0^{1,\ell-1}$ et $df \wedge \check{\Omega}_0^{k-1,1}$ sont d -fermées de degré $p + q + 1$ sur X , elles sont d -exactes et on peut trouver A et \check{A} formes holomorphes de degré $p + q$ sur X vérifiant

$$dA = df \wedge \Omega_0^{1,\ell-1} \quad \text{et} \quad d\check{A} = df \wedge \check{\Omega}_0^{k-1,1} \quad \text{sur } X.$$

Maintenant en utilisant la variante vectorielle du lemme C'_2 , ce qui est possible car on a les relations « évidentes »

$$f\check{\mathcal{C}}_{j+1} = \check{\mathcal{C}}_j \quad \text{et} \quad f\check{\mathcal{C}}_{j+1} = \check{\mathcal{C}}_j$$

pour tout $j \in \mathbb{Z}$, on peut choisir les Ω_j et $\check{\Omega}_j$ pour avoir

$$f\Omega_1 = \Omega_0 \quad \text{et} \quad f\check{\Omega}_1 = \check{\Omega}_0.$$

Supposons montrer que $\Omega_0^{i,b}$ induit 0 dans $H^{p+q}(X_s, \mathbb{C})$ pour tout $s \in D^*$ avec $i - b = v$ (c'est certainement vrai pour $v = k$). On a alors si $i - b = v - 1$

$$d\Omega_0^{i,b} = -df \wedge \Omega_1^{i,b} + df \wedge [\Omega_1^{i+1,b} + \Omega_0^{i,b-1}]$$

et en tenant compte de la relation $f\Omega_1 = \Omega_0$, cela donne

$$d\Omega_0^{i,b} = -\frac{df}{f} \wedge \Omega_0^{i,b} + \frac{df}{f} [\Omega_0^{i+1,b} + \Omega_0^{i,b-1}]$$

ou encore $d(f\Omega_0^{i,b}) = df \wedge [\Omega_0^{i+1,b} + \Omega_0^{i,b-1}]$.

Si ∇ dénote la connexion de Gauss-Manin, ceci se traduit par $\nabla(f\Omega_0^{i,b}) = \Omega_0^{i+1,b} + \Omega_0^{i,b-1}$, c'est-à-dire que $f\Omega_0^{i,b}$ est horizontale sur D^* vu notre hypothèse de récurrence ($i+1-b = i-(b-1) = v$). Comme c'est une $(p+q)$ -forme holomorphe sur X , la proposition de Malgrange (voir p. 87) nous donne que $f\Omega_0^{i,b}$ et donc $\Omega_0^{i,b}$ induit 0 dans $H^{p+q}(X_s, \mathbb{C})$ pour $s \in D^*$.

On obtient alors que $\Omega_0^{1,\ell-1}$ (resp. $\check{\Omega}_0^{k-1,1}$) induisent 0 dans $H^{p+q}(X_s, \mathbb{C})$ pour $s \in D^*$. Et donc, comme dans le cas $k = \ell = 1$, \bar{A} et $\check{\bar{A}}$ induisent également 0 dans $H^{p+q}(X_s, \mathbb{C})$ pour $s \in D^*$. Mais on a la relation

$$dT = \pm d\bar{A} \pm d\check{\bar{A}} - d(df \wedge U_0^{1,\ell-1}) - d(df \wedge V_0^{k-1,1}),$$

c'est-à-dire la fermeture sur X du courant

$$T \pm \bar{A} \pm \check{\bar{A}} + df \wedge U_0^{1,\ell-1} + df \wedge V_0^{k-1,1}.$$

On conclut alors, comme précédemment, que les hypothèses du lemme 1 bis conduisent à contredire l'hypothèse du théorème 1. Ceci montre qu'il existe un pôle d'ordre au moins égal à $k + \ell$ pour le prolongement méromorphe de $|f|^{2z}$ en au moins un point congru à $-u$ modulo \mathbf{Z} . Ceci achève la preuve du théorème 1.

Remarque. — Sous l'hypothèse du théorème 1, il est facile de voir que $e_1 \cup \bar{e}_1, \dots, e_\ell \cup \bar{e}_\ell$ et $e_1 \cup \bar{e}_1, \dots, e_k \cup \bar{e}_1$ sont des blocs de Jordan pour T agissant sur $H^{p+q}(X(s_0), \mathbf{C})$ pour la valeur propre 1. Donc l'hypothèse du théorème 1 ne peut être satisfaite que si le polynôme minimal de T en degré $p + q$ contient un facteur $(X-1)^r$ avec $r \geq \text{Sup}(k, \ell)$.

Appendice par M. Herrera (d'après B. Malgrange).

L'objet de cet appendice est de donner une démonstration de la proposition de la page 87, aucune référence autre que la remarque de Malgrange dans $[M_3]$ n'étant accessible.

Considérons donc un représentant de Milnor $f: X \rightarrow D$ d'un germe non constant de fonction holomorphe $f: (\mathbf{C}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbf{C}, 0)$.

Étant donné $s_0 \in D$ désignons par $[0, s_0]$ le segment fermé $\{z \in \mathbf{C}/z = ts_0, t \in [0, 1]\}$. L'ensemble $Y = f^{-1}([0, s_0])$ est alors semi-analytique, et $X(0)$ étant contractile, le champ de vecteur construit par Milnor dans $[M]$ page 52 lemme 5.9, permet de voir que Y est également contractile (*).

Nous allons continuer maintenant la ligne de démonstration de Malgrange $[M_1]$, mais sans faire appel aux triangulations semi-analytiques explicites de cette référence, qui sont peu adaptées aux raisonnements « à la limite » qui vont suivre.

Il est convenable donc d'introduire le complexe des chaînes semi-analytiques à support compact $S.(\mathcal{A}, \mathbf{C})$, à coefficients complexes, de différentielle notée $b.$, associé par Herrera ($[B.H.]$ et $[C.H.]$ ch. 1) à tout ensemble semi-analytique (localement compact) \mathcal{A} d'une variété W .

(*) Si V est un voisinage contractile de $\overline{X(0)}$ dans \bar{X} , l'identité de Y est homotope à une application continue envoyant Y dans $V \cap X$. Ce raisonnement s'étend à $f^{-1}(S)$ pour tout secteur S compact de sommet 0 et d'ouverture $< 2\pi$.

Nous utiliserons les propriétés suivantes de ces complexes :

1° On a un isomorphisme canonique

$$H_*(S.(\mathcal{A}, C)) \simeq H_*(\mathcal{A}, C)$$

2° L'inclusion $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ d'un sous-ensemble semi-analytique fermé \mathcal{A}' de \mathcal{A} induit un homomorphisme différentiel

$$S.(\mathcal{A}', C) \rightarrow S.(\mathcal{A}, C)$$

donnant un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H_*(S(\mathcal{A}, C)) & \xrightarrow{\sim} & H_*(\mathcal{A}, C) \\ \uparrow & & \uparrow \\ H_*(S(\mathcal{A}', C)) & \xrightarrow{\sim} & H_*(\mathcal{A}', C) \end{array}$$

3° Soit U un ouvert semi-analytique de \mathcal{A} . Il existe un homomorphisme $S.(\mathcal{A}, C) \rightarrow S.(\bar{U}, C)$ $\alpha \rightarrow \alpha \cap U$, obtenu par restriction à U des chaînes sur \mathcal{A} (cf [H.] 1.3), qui n'est pas en général compatible aux différentielles. Pour

$$\alpha \in S_q(\mathcal{A}, C) \text{ vérifiant } b_q \alpha \cap (\bar{U} - U) = \emptyset$$

on a

$$b_q(\alpha \cap U) = (b_q \alpha) \cap U + \beta$$

où

$$b_q \alpha \in S_{q-1}(\mathcal{A}, C) \text{ et } \beta \in ZS_{q-1}(\bar{U} - U, C).$$

4° Pour toute forme C^∞ φ de degré q sur W et toute chaîne $\alpha \in S_q(\mathcal{A}, C)$ on peut définir l'intégrale $\int_\alpha \varphi$ par intégration sur les points simples de α (en tenant compte, bien sûr, des orientations et des multiplicités données par α). Si en outre $\varphi = d\psi$ ou ψ est C^∞ sur W de degré $q - 1$, on a (cf [C.H.] 1.6.7.) la formule de Stokes :

$$\int_\alpha d\psi = \int_{b_q \alpha} \psi.$$

5° Supposons que φ , forme C^∞ de degré q sur W , ait une

restriction nulle sur les points simples de \mathcal{A} . Alors

$$\int_{\alpha} \varphi = 0 \text{ pour toute } \alpha \in S_q(\mathcal{A}, \mathbb{C}) \text{ (cf [C.H.] 1.6.1.)}$$

Reprenons le fil de la démonstration de Malgrange : soit $\Gamma_0 \in S_r(X(s_0), \mathbb{C})$ un cycle représentant $\gamma(s_0) \in H_r(X(s_0), \mathbb{C})$. L'homologie de Y étant triviale (et $r \geq 1$) on a une chaîne $\Delta \in S_{r+1}(Y, \mathbb{C})$ telle que $b_{r+1}\Delta = \Gamma_0$.

Pour chaque $s \in [0, s_0]$ posons

$$\begin{aligned} \Delta_s &= f^{-1}([0, s]) \cap \Delta \\ \text{et} \quad \Delta'_s &= f^{-1}(]s, s_0]) \cap \Delta. \end{aligned}$$

Il est clair que l'on a $\Delta_s + \Delta'_s = \Delta$ et donc que

$$b_{r+1}\Delta_s + b_{r+1}\Delta'_s = \Gamma_0.$$

De cette égalité et de la propriété 3° ci-dessus on déduit :

$$b_{r+1}\Delta'_s = \Gamma_0 - \Gamma_s \text{ et } b_{r+1}\Delta_s = \Gamma_s$$

où $\Gamma_s \in ZS_r(X(s), \mathbb{C})$. On en déduit alors que Γ_s est un représentant de $\gamma(s) \in H_r(X(s), \mathbb{C})$ et la formule de Stokes donne (propriété 4°)

$$I(s) = \int_{\gamma(s)} A = \int_{\Gamma_s} A = \int_{\Delta_s} dA.$$

Si dans cette égalité on fait tendre s vers 0, on obtient par un raisonnement de la théorie classique de l'intégration

$$\lim_{s \rightarrow 0} \int_{\Delta_s} dA = \int_{\Delta_0} dA$$

où Δ_0 désigne la variété des points $(r+1)$ lisses de $X(0) \cap \Delta$, avec les orientations et multiplicités induites par Δ . La restriction de dA sur les points simples de $X(0)$ étant nulle, on obtient bien $\int_{\Delta_0} dA = 0$ par la propriété 5° ci-dessus (*). Ceci achève la preuve de la proposition. □

(*) Si f n'a pas de facteur multiple on peut remplacer l'hypothèse de fermeture relative de A par la condition $dA \wedge df = 0$ qui suffit pour conclure.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] D. BARLET, Développement asymptotique des fonctions obtenues par intégration dans les fibres, *Inv. Math.*, 68 (1982), 129-174.
- [2] D. BARLET, Contribution effective de la monodromie aux développements asymptotiques. Preprint, Institut E. Cartan (Nancy), à paraître aux *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.*, (84).
- [3] D. BARLET, La forme hermitienne canonique sur la fibre de Milnor d'une hypersurface à singularité isolée. A paraître.
- [M₁] B. MALGRANGE, Intégrales asymptotiques et monodromie, *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.*, t. 7 (1974), 405-430.
- [M₂] B. MALGRANGE, Sur les polynômes de I. N. Bernstein. Séminaire Goulaouic-Schwartz (1973/74), exposé 20.
- [M₃] B. MALGRANGE, Polynômes de Bernstein-Sato, *Publication de l'IRMA* (Strasbourg), RCP 25 (1980), p. 42-58.
- [S] J. H. M. STEENBRINK, Mixed Hodge structure on the vanishing cohomology, Report 76-06, Math. Institut, Amsterdam.
- [M] J. MILNOR, Singular points of complex hypersurfaces, *Annals of Math. Studies*, 61, Princeton University Press, 1968.
- [B.H.] T. BLOOM, M. HERRERA, De Rham Cohomology of an analytic space, *Invent. Math.*, n° 7 (1969), 275-296.
- [C.H.] N. COLEFF, M. HERRERA, les courants résiduels associés à une forme méromorphe, *Lecture Notes* n° 633, Springer-Verlag.

Manuscrit reçu le 23 janvier 1984.

Daniel BARLET,
 Université de Nancy I
 UER Sciences Mathématiques
 Équipe d'Analyse Globale ERA n° 839
 B.P. 239
 54506 Vandœuvre-les-Nancy Cedex.
