

ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

ANDRÉ HAEFLIGER

Quelques remarques sur les applications différentiables d'une surface dans le plan

Annales de l'institut Fourier, tome 10 (1960), p. 47-60

http://www.numdam.org/item?id=AIF_1960__10__47_0

© Annales de l'institut Fourier, 1960, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

QUELQUES REMARQUES
SUR LES APPLICATIONS DIFFÉRENTIABLES
D'UNE SURFACE DANS LE PLAN

par André HAEFLIGER
(Institute for Advanced Study, Princeton.)

I. — INTRODUCTION.

Soit f une application différentiable d'une surface V dans une surface W ; par surface (ou variété) nous entendrons toujours une surface (ou variété) munie d'une structure différentiable, et différentiable signifiera toujours de classe C^∞ . On dit qu'un point z de V est un point *régulier* de f si le rang de f en z est deux, et un point *singulier* si ce rang est plus petit que deux. Au voisinage d'un point régulier, f est un homéomorphisme différentiable de rang deux (difféomorphisme).

H. Whitney a montré dans [2] que toute application de V dans W pouvait être approchée par une application différentiable f , dite *excellente*, qui présente comme seuls points singuliers z ceux des deux types suivants : après choix de coordonnées locales convenables (x, y) dans V et (u, v) dans W , les coordonnées de z étant $(0, 0)$, f s'exprime localement sous la forme

$$1) \quad u = x, \quad v = y^2$$

ou

$$2) \quad u = x, \quad v = xy - y^3.$$

Les points singuliers de type 1) et 2) forment une courbe C dans V appelée le *pli* de f (défini localement dans les équations 1) par $y = 0$) où le rang de f est un. Les points du type 2) sont les *cusps* de f ; ce sont les points isolés sur le pli C où le rang de la restriction de f à C est zéro; les images par f des cusps sont les points de rebroussement de $f(C)$; dans les équations 2), le pli C est défini par $x = 3y^2$ et $f(C)$ par $4u^3 = 27v^2$. Sur la figure 1, on a représenté en trait gras le

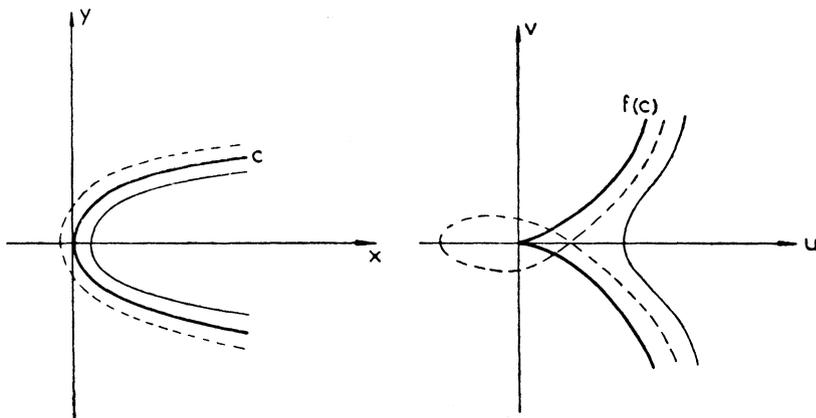


FIG. 1.

pli C et son image au voisinage d'un cusp, en trait fin ou pointillé deux courbes parallèles à C et leurs images par f .

Nous donnons d'abord au § 2 un critère (Théorème 1) permettant de décider si une application excellente d'une surface dans le plan peut être obtenue en considérant d'abord la surface immergée dans l'espace à 3 dimensions, et en la projetant ensuite dans un plan parallèlement à une direction.

Dans le § 3 nous considérons une application excellente d'une surface compacte V orientable dans le plan. D'après Thom (cf. [1]) la classe d'homologie modulo 2 du pli C de f est nulle et le nombre des cusps est pair. Dans le théorème 2 nous établissons, dans un cas particulier, une relation entre le nombre des cusps de f et la position de C dans V .

Étant donnée une courbe C d'une surface compacte V et une application différentiable f_0 de C dans le plan telle que $f_0(C)$ présente un nombre fini de points de rebroussement,

on peut se demander à quelles conditions f_0 peut se prolonger suivant une application différentiable f de V dans le plan telle que C soit le pli de f . Cette question se ramène essentiellement au problème suivant : donner des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une immersion f_0 dans le plan du bord C d'une surface compacte orientée V puisse se prolonger suivant une immersion de V . Ce problème semble très difficile, déjà dans le cas où V est un disque (problème posé par Hopf). Une première condition nécessaire bien connue est que l'indice de la courbe $f_0(C)$ par rapport à tout point du plan doit être positif ou nul ; une deuxième condition est que le degré normal de $f_0(C)$ doit être égal à la caractéristique d'Euler-Poincaré de V (cf. § 4, Th. 3). Ces conditions ne sont pas suffisantes.

A la fin de chaque paragraphe, nous indiquons brièvement comment les propriétés démontrées dans le cas des surfaces peuvent se généraliser à des variétés de plus grande dimension.

Dans les figures représentant une application excellente f d'une surface V dans le plan, la courbe grasse représente l'image du pli C de f (*contour apparent*) et les traits fins continus et pointillés représentent les images de deux courbes sur V parallèles à C et de chaque côté de C .

II. — FACTORISATION PAR UNE IMMERSION

Nous dirons qu'une application d'une surface V dans le plan R^2 de coordonnées (u, v) peut se factoriser par une immersion dans l'espace numérique à 3 dimensions R^3 de coordonnées (u, v, w) s'il existe une immersion g de V dans R^3 telle que $f = pg$, où p est la projection naturelle $(u, v, w) \rightarrow (u, v)$ de R^3 sur R^2 .

THÉORÈME 1. — *Une application excellente f d'une surface V compacte dans le plan R^2 peut se factoriser par une immersion g dans R^3 si et seulement si sur chaque composante connexe C_i du pli C de f le nombre des cusps est pair ou impair suivant que C_i admet un voisinage orientable ou non.*

Ainsi dans le cas d'une surface orientable, il faut et il suffit que le nombre des cusps soit pair sur chaque composante connexe de C .

La figure 2 montre un exemple d'une application d'une sphère dans le plan qui ne peut se factoriser par une immersion. Le pli est formé de deux parallèles C' et C'' contenant chacun un cusp; l'image d'une bande bordée par deux parallèles entre C' et C'' est un ruban en forme de huit bordé par les

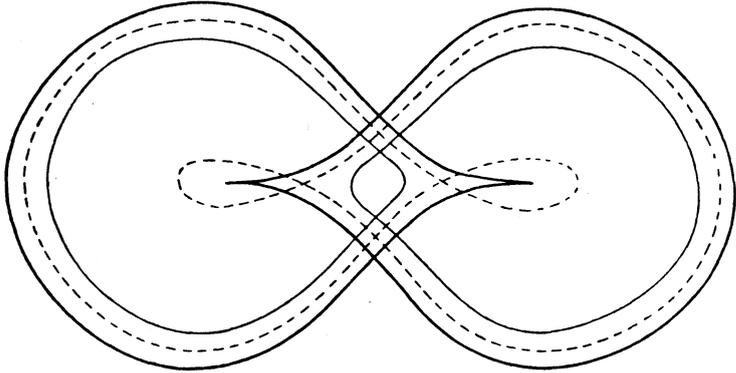


FIG. 2.

deux courbes pointillées; les courbes représentées par un trait fin continu sont les images de parallèles bordant des calottes polaires.

Désignons par \tilde{f} le prolongement de f aux vecteurs tangents à V . La restriction de \tilde{f} à l'espace des vecteurs tangents à V en un point z de C est une application linéaire dont le noyau $N(z)$ est un sous-espace vectoriel de dimension un; on a donc le long de C un champ N de directions (non orientées): le champ des noyaux de \tilde{f} .

Le théorème 1 est une conséquence des deux lemmes suivants:

LEMME 1. — *Le nombre des cusps sur une composante C_0 du pli de f est pair si un voisinage suffisamment petit de C_0 et le champ des noyaux N_0 de \tilde{f} le long de C_0 sont tous deux orientables ou non orientables, impair si l'un est orientable et l'autre pas.*

LEMME 2. — *L'application excellente f de V dans \mathbb{R}^2 peut se factoriser par une immersion g dans \mathbb{R}^3 si et seulement si le champ N des noyaux de \tilde{f} le long de C est orientable.*

Démonstration du lemme 1. — On peut choisir un voisinage U de C_0 difféomorphe au quotient du plan $R^2(x, y)$ par la relation d'équivalence associée à l'action du groupe G engendré par la transformation $x' = x + 1, y' = y$ ou $y' = -y$ suivant que U est orientable ou non, le quotient de la droite $d: y = 0$ étant difféomorphe à C_0 . Le champ N_0 le long de C_0 se relève suivant un champ D de directions dans R^2 le long de d invariant par G .

Choisissons une orientation de la direction du champ D à l'origine et prolongeons-la par continuité à D ; nous obtenons ainsi un champ \hat{D} de directions orientées le long de d . Soit $n_2(x)$ la projection sur l'axe $x = 0$ du vecteur unitaire définissant la direction orientée du champ \hat{D} au point $(x, 0)$. Les points $(x, 0)$ de d où D est tangent à d , c'est-à-dire où $n_2(x) = 0$, correspondent aux cusps sur C_0 ; on vérifie qu'en ces points, en revenant aux équations locales d'un cusp, on a $dn_2(x)/dx \neq 0$. Si U et N_0 sont tous deux orientables ou non, alors $n_2(1) = n_2(0)$; si U est orientable et N_0 ne l'est pas ou inversement, alors $n_2(1) = -n_2(0)$. Ainsi le nombre de cusps sur C_0 , c'est-à-dire le nombre de zéros de $n_2(x)$ sur l'intervalle $[0, 1]$, est pair dans le premier cas et impair dans le second.

Démonstration du lemme 2. — Si l'immersion g existe, alors la fonction coordonnée ω sur V (c'est-à-dire la fonction ωg) est telle que, pour tout point z de V , l'intersection des noyaux de f et ω en tout point z de V est le vecteur zéro, et réciproquement. Ceci équivaut à dire que la fonction ω est régulière en tout point z de C et que la tangente à la ligne de niveau de ω en z est transverse au noyau $N(z)$ de f .

Considérons une métrique riemannienne sur V . Si une telle fonction ω existe sur V , alors le gradient de ω en tout point z de C n'est jamais orthogonal au noyau $N(z)$ de f ; sa projection orthogonale sur $N(z)$ n'est donc jamais nulle et définit une orientation de $N(z)$.

Réciproquement supposons le champ N orientable. Reprenon la représentation et les notations de la démonstration du lemme 1. Soit $n_1(x)$ la projection sur l'axe $y = 0$ du vecteur unitaire définissant la direction orientée du champ \hat{D} au point $(x, 0)$. Comme N est orientable, $n_1(x)$ est une fonction de

période 1. On peut l'approcher par une fonction différentiable $n'(x)$ de période 1 ayant un nombre fini de zéros sur l'intervalle $[0, 1[$ et une dérivée non nulle en ces points; il en résulte que $n'(x)$ s'annule un nombre pair de fois sur cet intervalle; on peut supposer ce nombre positif, $n'(x)$ devant être assez proche de $n_1(x)$ pour que les vecteurs $(n_1(x), n_2(x))$ et $(n'(x), n_2(x))$ ne soient jamais orthogonaux. On peut construire une fonction différentiable $r(x)$ de période 1 telle que

$$dr(x)/dx = a(x)n'(x),$$

où $a(x)$ est une fonction différentiable non nulle. Alors le gradient de la fonction $h(x, y) = a(x)n_2(x)y + r(x)$ n'est jamais orthogonal au champ D ; comme cette fonction est invariante par le groupe G , elle définit par passage au quotient une fonction différentiable ω_0 dans le voisinage U de C_0 dont les lignes de niveau sont transverses au champ N_0 en tout point de C_0 . Répétant cette construction pour chaque composante connexe C_i de C , et utilisant le théorème d'extension de Whitney, on construira une fonction différentiable ω sur V qui coïncide avec les fonctions construites ω_i dans un voisinage des C_i .

COROLLAIRE. — *Soit f une application excellente d'une surface V dans le plan telle que le pli C de f soit connexe. Alors f peut toujours se factoriser par une immersion dans \mathbb{R}^3 .*

Démonstration. — Considérons un voisinage tubulaire U de C . Suivant que U est orientable ou non, U est un ruban simple ou un ruban de Möbius et la frontière de U se compose de deux cercles dans le premier cas et d'un seul dans le second. La caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi(U)$ de U est toujours zéro. Le complémentaire S de U est immergé dans le plan; c'est donc une surface orientable dont la caractéristique $\chi(S)$ sera pair ou impair suivant que son bord se compose de deux cercles ou d'un seul. Donc $\chi(V) = \chi(U) + \chi(S)$ sera pair ou impair suivant que U est orientable ou non; mais d'après Thom [1], le nombre de cusps est de même parité que $\chi(V)$ et le théorème 1 implique donc bien le corollaire.

Généralisation. — Toute application d'une variété V de dimension $n > 2$ dans l'espace euclidien \mathbb{R}^{2n-2} peut être approchée par une application différentiable f , qui peut être aussi

appelée *excellente*, dont les points singuliers forment une courbe C : en chaque point z de C , le rang du prolongement de f aux vecteurs tangents à V en z est $n - 1$ et le noyau $N(z)$ de cette application est un sous-espace vectoriel de dimension un qui n'est pas tangent à C en z . (Cf. [3]).

Comme précédemment (lemme 2), on montre qu'une application excellente f d'une variété V de dimension n dans R^{2n-2} peut se factoriser par une immersion dans R^{2n-1} si et seulement si le champ des noyaux N de f le long de C est orientable. En général, si V est compacte, on peut orienter N sauf en un nombre fini de points qui représentent un cycle homologue à zéro dans V , car il est dual à la n -ème classe de Stiefel-Whitney normale de V qui est toujours nulle. Donc si C est connexe, on peut orienter B et la généralisation du lemme 2 donne le

COROLLAIRE BIS. — *Soit f une application excellente d'une variété de dimension n dans l'espace euclidien R^{2n-2} telle que la courbe des points singuliers de f soit connexe. Alors f peut toujours se factoriser par une immersion dans R^{2n-1} .*

REMARQUES 1. — Une construction analogue à celle du lemme 2 montre qu'on pourra factoriser toute application excellente f de V dans R^{2n-2} par une application dans R^{2n-1} qui présente autant de points cuspidaux qu'il y a de composantes connexes de C le long desquelles le champ N est non orientable.

2. — Si l'on considère R^{2n-2} comme un sous-espace linéaire de R^{2n-1} , les mêmes critères s'appliquent pour décider si l'application f de V dans R^{2n-2} peut être approchée, avec approximation sur les dérivées d'ordre ≤ 2 , par une immersion dans R^{2n-1} .

III. — SUR LE NOMBRE DES CUSPS

THÉORÈME 2. — *Soit f une application excellente d'une surface compacte orientable V dans le plan. Supposons que le pli C de f partage V en deux parties V_1 et V_2 dont C est la frontière commune. Alors le nombre des cusps de f est au moins égal à la différence des caractéristiques d'Euler-Poincaré de V_1 et V_2 .*

Démonstration. — Rappelons tout d'abord que, d'après Morse, on peut évaluer la caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi(S)$ d'une surface S à bord B en comptant convenablement les points singuliers d'une fonction différentiable h sur S . Soient (x, y) des coordonnées locales au voisinage d'un point z de B telles que S soit défini par $y \geq 0$ et B par $y = 0$; exprimée dans ces coordonnées, h est la restriction au demi-plan $y \geq 0$ d'une fonction différentiable h' . Si une ligne de niveau de h' est tangente à B en z avec un contact du premier ordre, la contribution de z pour le calcul de $\chi(S)$ sera non nulle seulement si le gradient de h' en z est dirigé vers l'intérieur de S et elle sera $+1$ ou -1 suivant que la restriction de f à B a un minimum ou un maximum en z .

Soit alors h une fonction linéaire dans le plan telle que $f(C)$ ne soit tangent aux lignes de niveau de h qu'en des points isolés distincts des images des cusps. Soit $h_i (i = 1, 2)$ la restriction de hf à V_i . Un point z de V_i sera un point singulier de h_i seulement si $z \in C$ et si *a*) $f(C)$ est tangent en $f(z)$ à une ligne de niveau de h , ou *b*) z est un cusp, car en un tel point le rang de la restriction à C de f (et par suite de hf) est zéro.

Dans le cas *a*), la contribution de z sera la même par symétrie pour le calcul de $\chi(V_1)$ et $\chi(V_2)$. Dans le cas *b*), le gradient de hf en z est dirigé vers l'intérieur de l'une des surfaces V_1 et V_2 et vers l'extérieur de l'autre; la contribution de z sera donc ± 1 pour l'une des surfaces et zéro pour l'autre, d'où l'inégalité.

REMARQUE. — Si l'on a orienté la surface V et le pli C au voisinage d'un cusp z , on peut donner un signe à ce cusp par la convention suivante: z sera positif si l'orientation de V est définie par la tangente orientée de C en z et la normale à C en z dirigée vers l'intérieur de C (c'est-à-dire dans le sens de l'axe des x positifs dans la représentation locale 2) du § 1).

Orientons alors la surface à bord V_1 et la courbe C comme le bord de V_1 ; soit n_1 le nombre des cusps positifs, n_2 celui des cusps négatifs (un cusp z est positif si, au voisinage de z , V_1 est à l'intérieur de C). On a alors la formule: $\chi(V_1) - \chi(V_2) = n_1 - n_2$.

EXEMPLES. — 1) Si la surface V est un tore et si le pli C de f est connexe, alors C borde un disque sur V et

$|\chi(V_1) - \chi(V_2)| = 2$; donc f présente au moins deux cusps. Les figures 3 et 4 montrent une telle situation avec le minimum

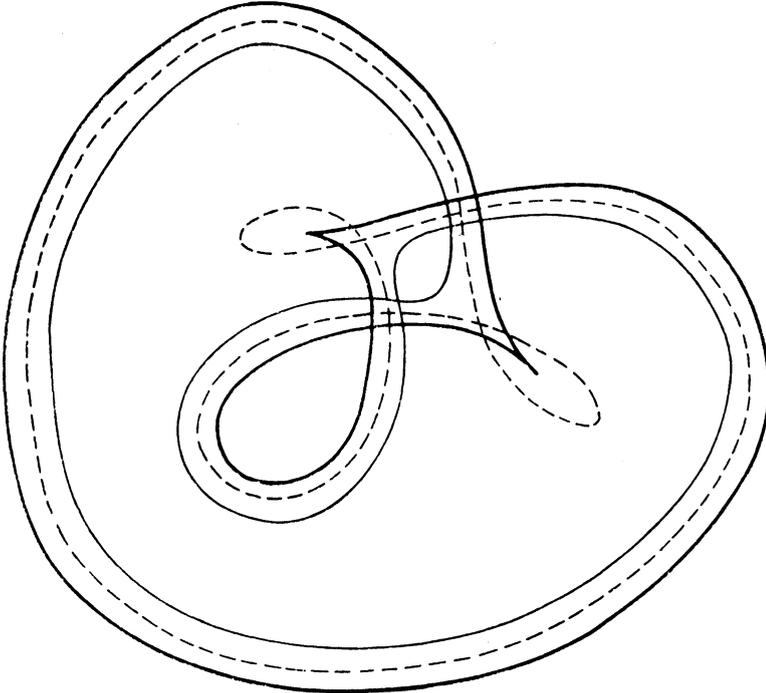


FIG. 3.

de cusps: le trait fin continu borde un disque et le trait pointillé borde le complémentaire d'un disque dans le tore (c'est-à-dire un disque avec deux anses entrecroisées, comme dans la figure 5).

2) V est une surface de genre deux (sphère à deux anses). En généralisant les figures 3 et 4, on peut construire une application de V dans le plan dont le pli borde un disque avec le minimum de 4 cusps.

Dans la figure 5, le pli est à la « taille » de V et partage ainsi la surface en deux tores troués symétriques.

Enfin la figure 6 montre un exemple où le pli C est formé de deux courbes qui bordent d'une part un morceau d'anse (cylindrique) et d'autre par un tore percé de deux trous.

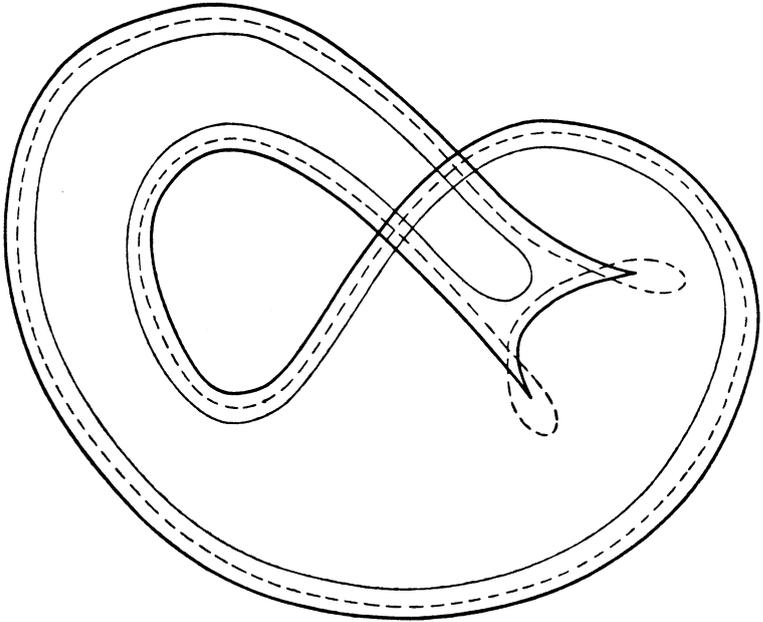


FIG. 4.

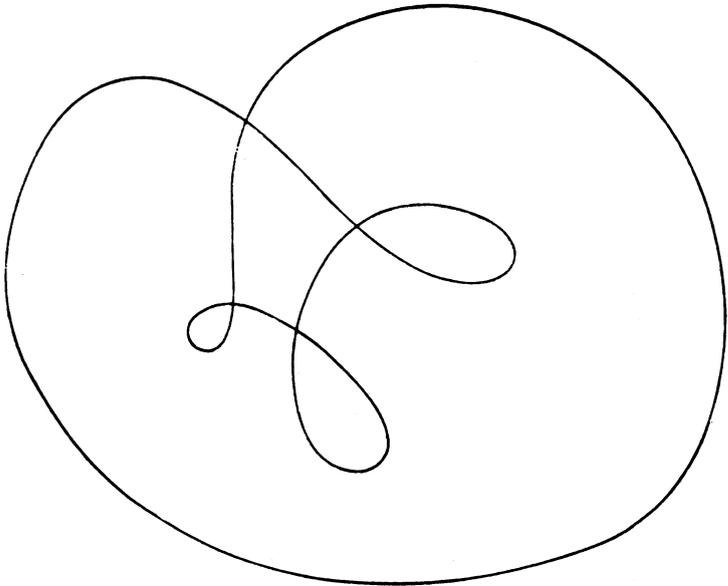


FIG. 5.

Dans tous ces exemples, l'application peut se factoriser par une immersion dans \mathbb{R}^3 .

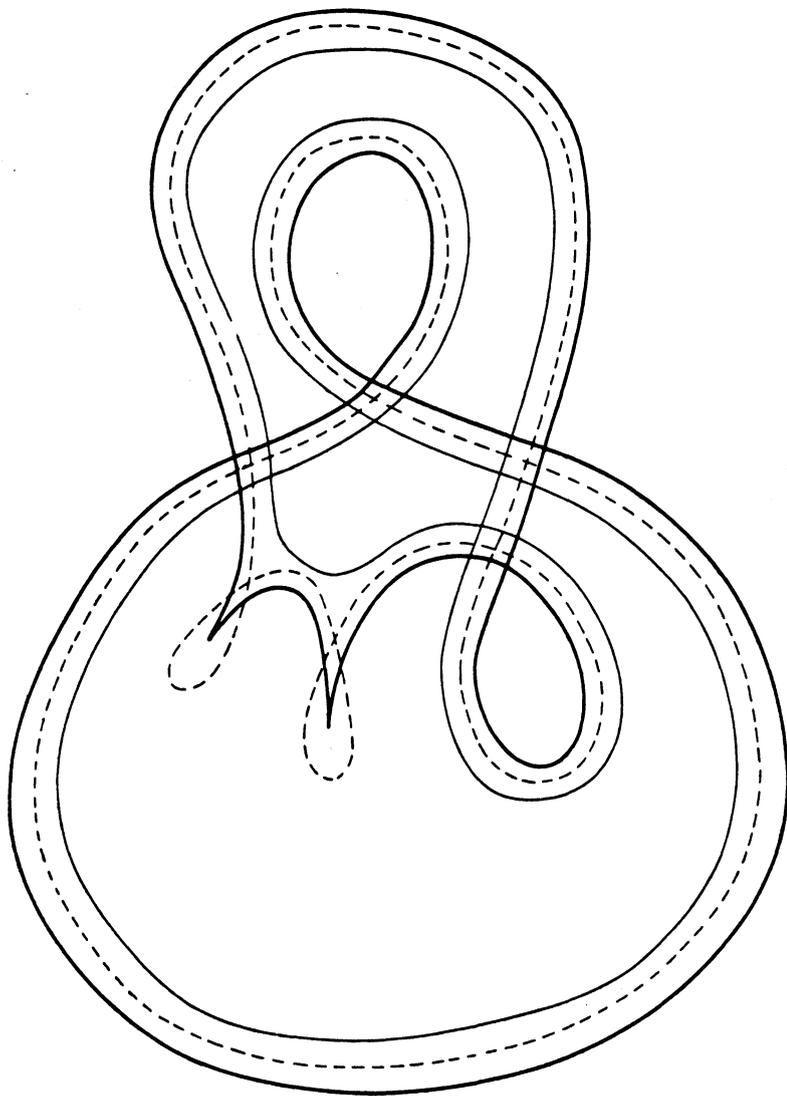


FIG. 6.

Généralisation. — On sait, d'après Thom (cf. [1]) et Whitney (cf. [3]), que toute application dans \mathbb{R}^3 d'une variété V de dimension 3 peut être approchée par une application

différentiable f , dite *excellente*, dont les points singuliers sont de types S_1 , $S_1^{(2)}$ et $S_1^{(3)}$ et où f est défini localement par les équations données dans [3], § 19 (au moins à l'ordre 4).

THÉORÈME 2 bis. — *Soit f une application excellente d'une variété compacte V de dimension 3 dans le plan. Supposons que la surface des points singuliers de f partage V en deux parties V_1 et V_2 dont elle est la frontière commune. Alors le nombre des points singuliers de f de type $S_1^{(3)}$ est au moins égal à la valeur absolue de $\chi(V_1) - \chi(V_2)$.*

La démonstration est semblable à celle du théorème 2. On choisit dans R^3 une fonction linéaire h telle que les variétés de niveau de h coupent « génériquement » $f(V)$ et on évalue $\chi(V_1)$ et $\chi(V_2)$ en comptant les points singuliers des restrictions de hf à V_1 et V_2 . La différence des contributions d'un point $z \in V_1 \cap V_2$ dans le calcul de $\chi(V_1)$ et $\chi(V_2)$ sera non nulle seulement si z appartient à la courbe C des points singuliers de type $S_1^{(2)}$ de f et si la restriction de hf à C a un minimum ou un maximum en z ; dans le premier cas cette différence est -1 , et dans le second $+1$. Ainsi la différence des caractéristiques de V_1 et V_2 sera au moins égale à la somme des différences du nombre des maxima et des minima de hf sur chaque composante connexe de C ; cette somme est elle-même au moins égale au nombre des points de rebroussement de $f(C)$, c'est-à-dire au nombre des points de type $S_1^{(3)}$ de f .

IV. — DEGRÉ NORMAL DU BORD D'UNE SURFACE IMMERGÉE DANS LE PLAN.

Soit V une surface à bord C immergée par une application différentiable f dans le plan. L'orientation naturelle du plan induit une orientation sur V ; orientons alors C comme le bord de V .

C est une réunion de cercles orientés C_1, \dots, C_k . Soit n_i le nombre de tours que fait la normale (ou la tangente) à C_i lorsqu'on fait une fois le tour de C_i dans le sens de son orientation. L'entier somme des n_i ($i = 1, 2, \dots, k$) sera appelé le *degré normal* de C immergé par f .

THÉORÈME 3. — *Le degré normal du bord d'une surface V compacte immergée dans le plan est égal à la caractéristique d'Euler-Poincaré de V .*

Démonstration. — On considère une fonction linéaire h dans le plan telle que $f(C)$ soit tangent aux lignes de niveau de h en un nombre fini de points et avec un contact d'ordre 1. Pour tout point z de C , soit $\nu(z)$ la normale unité à $f(C)$ en $f(z)$ orientée de manière à ce que la tangente orientée à $f(C)$ en z et $\nu(z)$ définissent l'orientation positive du plan (autrement dit $\nu(z)$ est dirigé vers l'intérieur de $f(V)$). L'application ν de C dans le cercle unité S^1 est différentiable et le point η correspondant à la direction du gradient de h est une valeur régulière de ν (c'est-à-dire que le rang de ν en tout point z où $\nu(z) = \eta$ est un). Donc le degré normal, qui n'est autre que le degré de ν , est égal à la somme algébrique des points z de C tels que $\nu(z) = \eta$, le point z étant compté positivement ou négativement suivant que ν en z applique l'orientation de C sur l'orientation de S^1 ou sur son opposée; ceci équivaut à dire que la restriction de hf à C a un minimum ou un maximum en z . Cette somme est donc aussi égale à la caractéristique de V (cf. démonstration du théorème 2).

Généralisation. — Soit V une variété compacte de dimension n à bord C immergée par f dans l'espace numérique R^n . Comme précédemment V est munie de l'orientation induite par celle de R^n et C est orienté comme le bord de V . Si à chaque point z de C on fait correspondre la normale unité à $f(C)$ en $f(z)$ orientée du côté de $f(V)$, on obtient une application ν de C dans la sphère unité S^{n-1} ; le *degré normal* de C immergé par f sera la somme des degrés des restrictions de ν à chaque composante connexe de C . La même démonstration donne le même résultat :

THÉORÈME 3 bis. — *Le degré normal du bord d'une variété compacte V de dimension n immergée dans R^n est égal à $\chi(V)$.*

BIBLIOGRAPHIE

- [1] R. THOM, *les singularités des applications différentiables*, Annales de l'Institut Fourier, VI (1956), pp. 43-87.
 - [2] H. WHITNEY, *on singularities of mappings of Euclidean spaces, I, Mappings of the plane into the plane*, Ann. of Math., 62 (1955), pp. 374-410.
 - [3] H. WHITNEY, *Singularities of mappings of euclidean spaces*, Symposium Internacional de Topologia Algebraica, 1958, Mexico.
-