ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

SERGE ALINHAC

Unicité du problème de Cauchy pour des opérateurs du second ordre à symboles réels

Annales de l'institut Fourier, tome 34, nº 2 (1984), p. 89-109

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1984__34_2_89_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
34, 2 (1984), 89-109.

UNICITÉ DU PROBLÈME DE CAUCHY POUR DES OPÉRATEURS DU SECOND ORDRE A SYMBOLES RÉELS

par **Serge ALINHAC**

INTRODUCTION

Nous présentons dans ce travail deux théorèmes d'unicité locale du problème de Cauchy pour des opérateurs du second ordre à symboles principaux réels.

Nous nous sommes efforcés ici d'unifier les hypothèses de certains des nombreux travaux [2], [4], [6], [11], [13] qui ont été publiés sur ce sujet dans ces dernières années, et qui seront discutés, à la suite des théorèmes, aux paragraphes 1.2 et 1.3.

Nous avons choisi de nous restreindre à l'étude d'opérateurs $P(y,D_y)$ $(y \in \mathbf{R}^{n+1})$ dont le symbole sous-principal p_1^s est, en gros, réel; de la sorte, nous évitons de multiplier les conditions de commutations sur les parties réelles et imaginaires du symbole total de P (telles qu'elles apparaissent par exemple dans Alinhac-Zuily [2] et Dehman [6]), dont la signification et la nécessité ne sont pas encore bien comprises.

Il s'agit plutôt ici de mettre en évidence des conditions de « pseudo-convexité » sur le symbole total de l'opérateur (du type de celles que l'on rencontre dans Alinhac [1] et R. Lascar-Zuily [11]), qui étendent celles du travail fondamental d'Hörmander [8] (dans le cas d'un opérateur elliptique possédant des caractéristiques complexes doubles, des conditions générales de « forte pseudo-convexité » sont données dans un récent travail de Lerner [12]).

Rappelons très schématiquement le résultat d'Hörmander [8] dans le cas présent :

Si $\{\varphi=\varphi(y_0)\}$ définit la surface initiale S (pour $\varphi \in C^\infty(\mathbf{R}^{n+1})$), on considère les bicaractéristiques réelles de P, issues de y_0, et tangentes à S; ce sont celles qui passent par (y_0,η_0), où $p(y_0,\eta_0) = 0$, $\{p,\varphi\}(y_0,\eta_0) \equiv \left(\sum_j \frac{\partial p}{\partial \eta_j}\frac{\partial \varphi}{\partial y_j}\right)(y_0,\eta_0) = 0$ (p symbole principal de P). Si ces bicaractéristiques sont convexes et toutes tournées vers la région $\{\varphi \leqslant \varphi(y_0)\}$ (c'est-à-dire $\{p,\{p,\varphi\}\}<0$), alors une solution u de $Pu = 0$, nulle pour $\{\varphi \leqslant \varphi(y_0)\}$, est nulle près de y_0.

Comme, d'après Alinhac [1], on ne peut espérer d'unicité lorsque, pour l'une de ces bicaractéristiques, $\{p,\{p,\varphi\}\}>0$, on élimine ces cas, et seul reste à considérer l'ensemble $\Lambda = \{(y,\eta), p=\{p,\varphi\}=\{p,\{p,\varphi\}\}=0\}$. Il est alors naturel de faire des hypothèses microlocales près de Λ, qui seront de deux types :

- une condition de positivité d'un certain symbole lié à p,
- une condition sur $p_1^s|_\Lambda$.

Il est difficile de comprendre le sens géométrique des conditions de positivité (conditions (1.1.1) ou (1.1.3)); celles qu'on utilise ici ont été suggérées par les travaux de R. Lascar-Zuily [11] et de Nirenberg [13], et se présentent naturellement dans les calculs.

La condition (1.1.2) sur p_1^s n'apparaît véritablement comme une condition de « pseudo-convexité » sur le symbole total que si Λ est involutive (ce qui est effectivement le cas dans [2] et [11]).

Le premier théorème (« cas régulier ») concerne les cas où la surface S ne joue pas un rôle particulier pour P parmi les surfaces $\{\varphi=\text{cte}\}$. Le second en revanche analyse des cas de « dégénérescence » de P sur S, c'est pourquoi on l'appelle « cas singulier ».

Dans les deux cas, on a supposé que le support de la solution u considérée rencontrait S en un compact assez petit près de y_0, situation qui est obtenue d'habitude par une procédure de « convexification » ou « d'éclatement ». En effet, comme nous nous concentrons sur l'étude de cas « limite » une telle modification de S ou de P n'est en général pas possible.

1. PRINCIPAUX RÉSULTATS ET COMMENTAIRES

1.1.

Soit Ω un ouvert de $\mathbf{R}^{n+1}$ $(n \geqslant 1)$, où la variable est notée y (η étant la variable duale) et $y_0 \in \Omega$.

Dans toute la suite, $P(y,D_y)$ dénotera un opérateur différentiel du second ordre, à coefficients $C^\infty(\Omega)$, de symbole principal $p(y,\eta)$ réel.

Soit $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ une fonction réelle, $d\varphi \neq 0$ dans Ω, $\varphi(y_0) = 0$: la surface initiale S est définie par $\{\varphi = 0\}$.

Notons enfin $\{f,g\} = \sum_j \left(\dfrac{\partial f}{\partial \eta_j}\dfrac{\partial g}{\partial y_j} - \dfrac{\partial f}{\partial y_j}\dfrac{\partial g}{\partial n_j}\right)$ le crochet de Poisson de deux fonctions sur le fibré cotangent $T^*(\Omega)$, p_1^s le symbole sous-principal de P, et σ la 2-forme symplectique standard sur $T^*(\Omega)$.

THÉORÈME 1.1.1. (*cas régulier*). — *Soient* P *et* φ *comme ci-dessus. Faisons les hypothèses suivantes :*

1) $\{\{p,\varphi\},\varphi\} \neq 0$ *dans* Ω.

2) *Si* $p = \{p,\varphi\} = 0$, *alors* $\{p,\{p,\varphi\}\} \leqslant 0$.

3) *L'ensemble* Λ *des points de* $T^*(\Omega)\backslash 0$ *où* $p = \{p,\varphi\} = \{p,\{p,\varphi\}\} = 0$ *est une sous-variété.*

4) *Il existe* $C \in \mathbf{R}$ *et* $a \in C^\infty(\Omega)$, *réelle, telles que*

$$e = -\frac{1}{2}\{p,\{p,\varphi\}\} + ap + C\{p,\varphi\}^2 \geqslant 0 \tag{1.1.1.}$$

au voisinage de Λ, e *étant transversalement elliptique à* Λ.

5) $dp = 0$ *sur* Λ.

6) $p_1^s|_\Lambda \in \mathbf{R}$.

7) *On se trouve dans l'un des trois cas suivants :*

i) $H_{\{p,\varphi\}}$ *est transverse à* Λ.

ii) $H_{\{p,\varphi\}}$ *est tangent à* $\dot\Lambda$, σ *est de rang constant sur* Λ, *et pour un* $\varepsilon > 0$, *on a*

$$(1-\varepsilon)T^+(e) - \frac{1}{2}\{p_1^s, \{p,\varphi\}\} + ap_1^s \geqslant 0 \quad \textit{sur } \Lambda \tag{1.1.2.}$$

(où $T^+(e)$ *désigne la* tr^+ *de* e *restreint à* $(\{p,\varphi\}=0)\cap(\varphi=\varphi(y))$, *pour la structure symplectique induite par* σ).

iii) $p_1^s|_\Lambda = 0$.

Il existe alors un voisinage ouvert $V \subset \Omega$ *de* y_0 *(ne dépendant que de* S) *tel que si* $u \in C^\infty(\Omega)$, $Pu = 0$, $\operatorname{supp} u \subset \{\varphi \geqslant 0\}$, *et* $\operatorname{supp} u \cap S \subset\subset V$, *alors* $u = 0$ *près de* y_0.

THÉORÈME 1.1.2 (*cas singulier*). — *Soient* P *et* φ *comme ci-dessus. Faisons les hypothèses suivantes :*

1) $\{\{p,\varphi\},\varphi\} \neq 0$ *dans* Ω.

2) *Il existe une sous-variété* Λ_s *de* $T^*(\Omega)\backslash 0$, $C \in \mathbf{R}$ *et* $a \in C^\infty(\Omega)$, *réelle, telle que, pour* $\varphi \geqslant 0$,

$$e_s = -\frac{1}{2}\varphi\{p,\{p,\varphi\}\}+ap+C\{p,\varphi\}^2 \geqslant \varphi^2 b, \tag{1.1.3}$$

où le symbole réel du second ordre b *a les propriétés suivantes :*

i) b *est elliptique et positif sur* $\{\varphi=p=\{p,\varphi\}=0)\backslash\Lambda_s$.

ii) $b \geqslant 0$ *au voisinage de* Λ_s, *et transversalement elliptique à* Λ_s.

3) $\dfrac{a}{\{\{p,\varphi\},\varphi\}} < 1$ *sur* S.

4) $p = dp = 0$ *sur* Λ_s.

5) $p_1^s = 0$ *sur* Λ_s.

Il existe alors un voisinage ouvert $V \subset \Omega$ *de* y_0 *(ne dépendant que de* S) *tel que si* $u \in C^\infty(\Omega)$, $Pu = 0$, $\operatorname{supp} u \subset \{\varphi \geqslant 0\}$, *et* $\operatorname{supp} u \cap S \subset\subset V$, *alors* $u = 0$ *près de* y_0.

1.2. Discussion des hypothèses des théorèmes.

1) L'hypothèse 1) des théorèmes signifie simplement que les surfaces $\{\varphi=\mathrm{cte}\}$ sont non-caractéristiques pour P dans Ω. Rappelons que cette hypothèse n'est pas nécessaire dans les cas traités par Hörmander [8]. Pour une discussion de la « pseudo-convexité » dans certains cas où S est caractéristique, on pourra consulter Saint-Raymond [14].

2) L'hypothèse 2) du théorème 1.1.1. est suggérée par le contre-exemple d'Alinhac [1]. Elle ne semble pouvoir être affaiblie qu'en des points où $p'_\eta = 0$, ce qui est effectivement le cas dans le théorème 1.1.2, condition (1.1.3.) (voir également les exemples 1.3.9.).

3) La condition (1.1.1.) implique en particulier $de = 0$ sur Λ, c'est-à-dire $F_p^2 H_\varphi = 0$, où F_p est la matrice fondamentale de p. La positivité de e fait intervenir les dérivées troisièmes de p.

L'hypothèse d'ellipticité transverse de e permet de se restreindre à Λ pour énoncer les conditions sur p_1^s, et aussi de microlocaliser (étant admise la condition 5) du théorème 1.1.1.).

4) La condition 5) du théorème 1.1.1. est suggérée par le contre-exemple de Bahouri [4]. Sa nécessité n'est toutefois pas complètement claire, car la conclusion des théorèmes suppose ici $\operatorname{supp} u \cap S$ compact, tandis que, dans le contre-exemple précité, on a seulement $\operatorname{supp} u = \{\varphi \geqslant 0\}$.

5) La condition 6) du théorème 1.1.1. a été choisie pour simplifier le problème. Elle n'est nullement nécessaire, et peut être remplacée, comme dans Alinhac-Zuily [2] ou Dehman [6], par des conditions de commutation dont la nécessité n'est pas bien comprise.

6) L'hypothèse 3) du théorème 1.1.2. se comprend simplement sur l'exemple $P = D_t^2 + t^\alpha D_x^2$. La condition de positivité requiert $a + \alpha > 0$, tandis que les cas non fuchsiens $\alpha \leqslant -2$ ne possèdent pas d'unicité locale; d'où la limitation sur a.

1.3. Exemples.

Ces exemples sont tous formulés dans des coordonnées $y = (t,x)$, avec $\varphi \equiv t$.

Exemple 1.3.1. — $P = D_t^2 + p_1(t,x,D_x) + ip_2(t,x,D_x)$. C'est le cas étudié par Alinhac-Zuily [2]. Considérons les hypothèses du théorème 1.1.1. : les conditions 1)-5) sont triviales, avec $\Lambda = \{\tau = 0\}$; la condition 6) signifie $p_2 \equiv 0$. La condition (1.1.2.) signifie $ap_1 + p'_{1_t} = 0$, ce qui est un peu plus fort mais essentiellement la même chose que la condition (H_2) du théorème 1.1. de [2]. On vérifie facilement que le théorème 1.1.1. s'applique aussi bien à P après « éclatement », c'est-à-dire à l'opérateur $D_t^2 + (\delta - |x|^2)^2 p_1((\delta - |x|^2)t,x,D_x)$ (notations de [2]).

Exemple 1.3.2. — Considérons un opérateur « de type Schrödinger » du type envisagé par R. Lascar et Zuily [11] :

$$P = D_t^2 + Q(t,x,D_{x'}) + cD_{x_n},$$

où $x = (x',x_n)$, $p = \tau^2 + q$, et c est réelle non nulle. Leur hypothèse de pseudo-convexité s'écrit :

$$(\psi) \qquad q'_t - \frac{c'_t}{c}\, q \geqslant \text{cte } |\xi'|^2 .$$

Ceci implique trivialement les conditions 2)-6) du théorème 1.1.1., avec $\Lambda = (\tau=0\,,\,\xi'=0)$. On se trouve dans le cas 7) ii), avec Λ involutive (donc $T^+(e)=0$), et la condition (1.1.2.) devient, avec $p_1^s = q_1^s + c\xi_n$,

$$c_t\xi_n - \frac{c_t}{c}\, c\xi_n = 0 \quad \text{(elle est identiquement vérifiée).}$$

Dans ce cas aussi, il convient d'appliquer le théorème 1.1.1. après « convexification » de P.

Exemple 1.3.3. — Dehman [6] a considéré des opérateurs de la forme :

$$P = D_t^2 + Q(t,x,D_{x'}) + R(t,x,D_x), \quad R \text{ du } 1^{\text{er}} \text{ ordre où } x = (x',x''),$$

avec contrairement à l'exemple précédent, $x'' = (x''_1, \ldots, x''_m)$, $m \geqslant 1$.

Lorsque $m > 1$, des difficultés considérables apparaissent, liées à la « convexification » : celles-ci imposent de nombreuses conditions de crochet, dans le détail desquelles on n'a pas voulu entrer ici. Cet exemple montre que, pour des opérateurs généraux, on ne peut espérer donner des conditions qui soient à la fois stables par « convexification » (ou éclatement) et assez proches de conditions nécessaires.

Exemple 1.3.4. — Soit $P = D_t^2 + \mu(D_1^2 + x_1^2 D_2^2) - 2e^{-t} D_1^2 + cD_2$, avec $0 < \mu < 2$, c réel. On a :

$$e = 4C\tau^2 + \xi_1^2(2(1-a)e^{-t} + a\mu) + a\mu x_1^2\xi_2^2,$$

et

$$\Lambda = \{\tau=0, \xi_1=0, x_1=0\}.$$

Pour toutes constantes $C > 0$ et a, $0 < a < \frac{2}{2-\mu}$, la condition (1.1.1.) est satisfaite, les autres conditions 1)-6) étant trivialement vérifiées.

On se trouve dans le cas 7) ii), et le noyau de $\sigma|_\Lambda$ est engendré par $\frac{\partial}{\partial t}\cdot$

La tr^+ de la restriction de e à $\{\tau=0, t=0\}$ est $T^+(e) = |\xi_2|\,[a\mu(2-(2-\mu)a)]^{1/2}$, donc la condition (1.1.2.) s'écrit :

$$\exists\, a,\quad 0 < a < \frac{2}{2-\mu},\qquad |c_t + ac|^2 < a\mu(2-(2-\mu)a).$$

On vérifie aisément que ceci équivaut aux conditions $cc_t - \mu < 0$, $\mu(2-\mu)c_t^2 - 2\mu cc_t + \mu^2 > 0$, $(cc_t+\mu)(2-\mu) + c^2 > 0$.

En particulier, si $c_t \equiv 0$, la condition (1.1.2.) est toujours vérifiée, et le théorème 1.1.1. s'applique à p.

Exemple 1.3.5. — Dans un travail récemment publié, Nirenberg [13] traite le cas $p \geqslant 0$, sous les hypothèses

a) $-\frac{1}{2}\{p,\{p,\varphi\}\} + \mathrm{cte}\; p \geqslant 0$ (globalement en (y,η)).

b) $(p_1^s)^2 \leqslant \mathrm{cte}\; p$.

Ces hypothèses impliquent que sont vérifiées les conditions 1), 2), (1.1.1.), 5), 6), 7) iii), mais non les conditions que Λ soit une variété et que e lui soit transversalement elliptique. Ce cadre plus général permet à l'auteur de considérer des dégénérescences arbitraires de p, mais rend impossible une microlocalisation près de Λ de la condition de convexité *a*), ainsi que le traitement d'exemples tels que 1.3.1. ou 1.3.2.

Exemple 1.3.6. — Considérons l'opérateur

$$P = D_t^2 + \mu(D_1^2 + x_1^2 D_2^2) - 2e^{-t}D_1^2 + c\,D_2$$

de l'exemple 1.3.4., dans le cas $\mu > 2$. La condition (1.1.1.) est satisfaite pour tous $a > 0$, $C > 0$, et la condition (1.1.2.) s'écrit :

$$\exists\, a > 0,\quad |c_t + ac|^2 < a\mu(2+(\mu-2)a).$$

Ceci équivaut aux conditions

$$(c^2 < \mu(\mu-2)) \quad \text{ou} \quad (c^2 \geqslant \mu(\mu-2) \quad \text{et} \quad cc_t - \mu < 0).$$

Néanmoins, on voit immédiatement que le résultat de forte unicité d'Aronszajn et Cordes ([3], [5]), appliqué à P dans les ouverts $\pm x_1 > 0$, implique l'unicité de Cauchy pour tout c. Lorsque P est elliptique hors d'un « petit » ensemble, il apparaît donc que les conditions requises ne sont pas significatives dans la mesure où seule est concernée l'unicité de solutions de l'équation $Pu = f$. En fait, ces conditions impliquent l'unicité de solutions d'inégalités différentielles sur P.

Pour une étude fine du cas $n = 1$, consulter Watanabe [15].

Exemple 1.3.7. — Soit $P = D_t^2 - Q(t,x,D_x)$ + termes d'ordre 1, avec $p = \tau^2 - q$, $q \geqslant 0$: c'est le cas faiblement hyperbolique. En supposant, comme le fait Hörmander [10], que $\{q = 0\}$ est une variété à laquelle q est transversalement elliptique, on se place dans un cas où les conditions 1), 2), 3), 5) du théorème 1.1.1. sont vérifiées avec $\Lambda = \{\tau=0, q=0\}$. La condition (1.1.1.), en revanche, est vérifiée seulement dans le cas particulier où $d\{p,\{p,\varphi\}\} = 0$ sur Λ (cf. 1.2.3)), car on peut choisir $-a$ positif assez grand. Les conditions sur les termes d'ordre inférieur sont alors différentes des conditions de Levi-Ivrii-Petkov [10]. Cette lacune est due au fait que, dans le cas hyperbolique, on dispose d'une technique d'inégalités tout à fait particulière, qui donne les résultats optimaux pour la correction du problème de Cauchy, mais non pour l'unicité seule. On n'a pas su intégrer cette technique au cadre général du présent travail.

Exemple 1.3.8. — Soit $P = D_t^2 + t^3 D_x^2$. On a ici $\Lambda = \{\tau=0, t=0\}$, et (1.1.1.) est vérifiée pour $a = 0$, $C > 0$. Nous sommes dans la situation typique du cas 7) i).

Exemple 1.3.9. — Soit $P = D_t^2 + \varepsilon t^m D_x^2$, $\varepsilon = \pm 1$, $m = 1$ ou 2. On peut appliquer le théorème 1.1.2. à P, avec $\Lambda_s = \varnothing$, car $e_s = (4C+a)\tau^2 + (a+m)\varepsilon t^m \xi^2$: si $\varepsilon = +1$, $a = 0$, et si $\varepsilon = -1$, $a = -3$. On peut donc choisir $b = \text{cte}\,(\xi^2+\tau^2)$, et il n'y a pas de condition sur les termes d'ordre inférieur.

Exemple 1.3.10. — Soit $P = D_t^2 - D_x^2 + t^2 D_y^2 + t^2 D_z^2$, $\varepsilon = \pm 1$. On a ici $e_s = (4C+a)\tau^2 + \eta^2 t(a\varepsilon+\varepsilon) - a\xi^2 + \zeta^2 t^2(2+a)$. Si $\varepsilon = +1$, $a = -\frac{1}{2}$, et si $\varepsilon = -1$, $a = -\frac{3}{2}$. On prend $b = \text{cte}\,(\tau^2+\xi^2+\eta^2+\zeta^2)$, $\Lambda_s = \varnothing$, et il n'y a pas de condition sur les termes d'ordre inférieur.

L'exemple 1.3.10 est dû à Bahouri [4].

Exemple 1.3.11. — Soit $P = D_t^2 + \varepsilon t^4 D_x^2$, $\varepsilon = \pm 1$. On a

$$e_s = (4C+a)\tau^2 + \varepsilon(4+a)t^4\xi^2 :$$

si $\varepsilon = +1$, $a = 0$, si $\varepsilon = -1$, $a = -5$. Le théorème 1.1.2 s'applique avec $\Lambda_s = \{\tau=0, t=0\}$, $b = \text{cte}\,(\tau^2+t^2\xi^2)$. La condition 5) autorise des termes d'ordre un de la forme $cD_t + t\,dD_x$ $(c,d \in \mathbf{C})$.

2. PREUVES DES THÉORÈMES : UNE PREMIÈRE RÉDUCTION

2.1. Invariance des hypothèses par multiplication de l'opérateur.

a) Cas régulier.

Soit f une fonction réelle non nulle C^∞ dans Ω, et P un opérateur satisfaisant aux hypothèses 1)-7) du théorème 1.1.1. pour une certaine fonction a et une constante C. Montrons que fP satisfait également 1)-7) (avec éventuellement une fonction a' et une constante C' différentes).

On a $\{fp,\varphi\} = f\{p,\varphi\}$, $\{(fp,\varphi\},\varphi\} = f\{\{p,\varphi\},\varphi\}$, d'où 1). Lorsque $p = \{p,\varphi\} = 0$, $\{fp,\{fp,\varphi\}\} = f^2\{p,\{p,\varphi\}\}$, d'où 2), 3) et 5), avec la même variété Λ.

Calculons alors

$$e' = -\frac{1}{2}\{fp,\{fp,\varphi\}\} + a'fp + C'\{fp,\varphi\}^2;$$

on a :

$$\{fp,\{fp,\varphi\}\} = f^2\{p,\{p,\varphi\}\} + f\{p,\varphi\}\{p,f\} + fp\{f,\{p,\varphi\}\}.$$

Choisissant $a' = af + \frac{1}{2}\{f,\{p,\varphi\}\}$, il vient

$$e' = f^2 e + (C'-C)f^2\{p,\varphi\}^2 - \frac{1}{2}f\{p,\varphi\}\{p,\varphi\}\{p,f\}.$$

Comme $\{p,f\} = 0$ sur Λ, on aura, pour $\varepsilon > 0$ petit, grâce à l'ellipticité transverse de e, $f^2 e \geqslant \varepsilon\{p,f\}^2$ dans un voisinage convenable de Λ ; ceci implique

$$e' \geqslant \frac{3}{4} f^2 e + \left(C'-C-\frac{1}{4\varepsilon}\right) f^2\{p,\varphi\}^2 .$$

En choisissant C' telle que $C' = C + \frac{1}{4\varepsilon}$, on obtient $e' \geqslant \frac{3}{4} f^2 e$, d'où 4).

On a $H_{\{fp,\varphi\}} = f H_{\{p,\varphi\}} + \{p,\varphi\} H_f$, donc $H_{\{fp,\varphi\}} = f H_{\{p,\varphi\}}$ sur Λ. Dans le cas 7) ii), la restriction de e' à $\{\{p,\varphi\}=0\} \cap \{\varphi=\varphi(y)\}$ vaut $f^2 e$, donc $T^+(e') = f^2 T^+(e)$; d'autre part le symbole sous principal $(fP)_1^s$ de fP vaut $f p_1^s$ sur Λ, d'où

$$a'(fP)_1^s - \frac{1}{2}\{(fP)_1^s, \{fp,\varphi\}\} = f^2\left[a p_1^s - \frac{1}{2}\{p_1^s, \{p,\varphi\}\}\right],$$

et (1.1.2.) est valable, ainsi que 6).

b) Cas singulier.

Un calcul très voisin du précédent montre que

$$e_s' = f^2 e_s + (C'-C) f^2\{p,\varphi\}^2 - \frac{1}{2}\varphi f\{p,\varphi\}\{p,f\},$$

en choisissant $a' = af + \frac{1}{2}\varphi\{f,\{p,\varphi\}\}$.

Choisissons $\varepsilon > 0$ assez petit pour que $b - \frac{\varepsilon}{4f^2}\{p,f\}^2$ soit positif et elliptique sur $S \cap \{p=\{p,\varphi\}=0\}$ hors de Λ_s (quitte à restreindre légèrement Ω), et transversalement elliptique près de Λ_s; pour $\varphi(y) \geqslant \varphi(y_0)$, il vient

$$e_s' \geqslant \varphi^2 f^2\left[b - \frac{\varepsilon}{4f^2}\{p,f\}^2\right] + \left(C'-C-\frac{1}{4\varepsilon}\right) f^2\{p,\varphi\}^2,$$

en sorte que le choix $C' = C + \frac{1}{4\varepsilon}$ assure 2).

A cause de 4), on a $(f\mathrm{P})_1^s = fp_1^s = 0$ sur Λ_s, d'où 5). Enfin, sur S, $\dfrac{a'}{\{\{fp,\varphi\},\varphi\}} = \dfrac{a}{\{\{p,\varphi\},\varphi\}}$, d'où 3).

2.2. Un choix spécial de coordonnées.

Montrons qu'on peut choisir, localement près de y_0, des coordonnées (x,t) telles que $t = \varphi$, et P ne contient pas de termes « croisés ».

Soit X le champ réel partie principale de l'opérateur $[\mathrm{P},\varphi] = \mathrm{P}\varphi - \varphi\mathrm{P}$: son symbole principal est $\dfrac{1}{i}\{p,\varphi\}$, et X est transverse à S car $\mathrm{X}(\varphi) = -\{\{p,\varphi\},\varphi\} \neq 0$ par hypothèse.

Considérons l'application Φ qui, à un point m de Ω, fait correspondre l'intersection avec S de la courbe intégrale de X passant par m (cette application n'est définie, bien entendu, que près de S). Soient V et V_1, $\mathrm{V} \subset\subset \mathrm{V}_1 \subset\subset \Omega$, des voisinages de ouverts de y_0 dans Ω tels qu'il existe un difféomorphisme h de $\mathrm{V}_1 \cap \mathrm{S}$ sur un voisinage ω_1 de 0 dans $\mathbf{R}_x^n$. Il existe alors $\varepsilon > 0$ assez petit pour que l'application

$$\tilde{\Phi} : \mathscr{U} = \Phi^{-1}(\mathrm{V}_1 \cap \mathrm{S}) \cap \{|\varphi(y) - \varphi(y_0)| < \varepsilon\} \to \mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^n,$$

définie par $m \to \tilde{\Phi}(m) = (\varphi(m),\ h(\Phi(m)))$, existe et soit un difféomorphisme de $\mathscr{U}$ sur $]-\varepsilon,\varepsilon[\, \times \omega_1$.

Dans toute la suite, nous travaillerons dans le voisinage $\omega_1 \times\,]-\varepsilon,\varepsilon[$ de l'origine dans $\mathbf{R}_{x,t}^{n+1}$, avec l'opérateur transformé de P par $\tilde{\Phi}$, et la fonction $u \circ \tilde{\Phi}^{-1}$, que nous noterons encore, par abus, P et u.

La partie principale de P est de la forme

$$-g\,\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\sum_i \alpha_i\,\frac{\partial^2}{\partial t\,\partial x_i} + \sum_{i,j} \beta_{ij}\,\frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_j},$$

et le champ X s'écrit, en coordonnées locales,

$$\mathrm{X} = -2g\,\frac{\partial}{\partial t} + 2\sum_i \alpha_i\,\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Par construction, les courbes intégrales de X sont des courbes $x = \text{cte}$, donc $\alpha_i \equiv 0$; enfin $g \neq 0$, car $\mathrm{X} \neq 0$ partout.

2.3. Forme simplifiée de l'opérateur; quelques notations.

D'après 2.1., nous pouvons toujours supposer que $g \equiv 1$, en sorte que l'on est amené à prouver les théorèmes pour un opérateur P de la forme

$$(2.3.1.) \quad \mathrm{P}(x,t,\mathrm{D}_x,\mathrm{D}_t) = \mathrm{D}_t^2 + \mathrm{Q}(t,x,\mathrm{D}_x) + \tilde{\mathrm{Q}}_1(t,x,\mathrm{D}_x) + c\mathrm{D}_t + d,$$

où c et d sont des fonctions complexes; $\tilde{\mathrm{Q}}_1$ est homogène de degré 1, de symbole $\tilde{q}_1$; Q est d'ordre 2, de symbole de Weyl $q(t,x,\xi)$, réel et homogène de degré 2 (sur le calcul de Weyl, on pourra consulter [9]).

Le symbole principal p de P est alors $p = \tau^2 + q(t,x,\xi)$, tandis que $c\tau + \tilde{q}_1 = p_1^s$ par construction de Q. On a $\{p,\varphi\} = 2\tau$, $\{p,\{p,\varphi\}\} = -2q'_t$, $\{\{p,\varphi\},\varphi\} = 2$, en sorte que la variété Λ est définie par $(\tau=0, q=q'_t=0)$. On notera $\Lambda^0 = \{(t,x,\xi), q(t,x,\xi)=q'_t(t,x,\xi)=0\}$, et $\Lambda_t^0 = \{(x,\xi), (t,x,\xi) \in \Lambda^0\}$.

3. INÉGALITÉ DE CARLEMAN DANS LE CAS RÉGULIER

Soit $\mathrm{L} = \mathrm{D}_t^2 + \mathrm{Q} + \mathrm{Q}_1$, où Q_1 est de symbole $q_1 = \mathrm{Re}\,\tilde{q}_1$. Nous allons établir une inégalité L^2 *a priori* pour L, dans l'ouvert $\omega_1 \times]-\varepsilon,\varepsilon[$, valable pour des fonctions à support dans le compact $\mathrm{M} = \bar{\omega} \times \left[0,\frac{\varepsilon}{2}\right]$ (où $\omega = h(\mathrm{V}\cap\mathrm{S})$, cf. 2.2.); la norme et le produit scalaire seront notés $\|\ \|$ et $(\,,)$.

3.1. Une inégalité.

Avec γ un grand paramètre réel et $h(t) \in \mathrm{C}^\infty$ une fonction croissante à déterminer, on a

$$e^{-\gamma h}\mathrm{L}e^{\gamma h} = \mathrm{D}_t^2 + \mathrm{Q} + \mathrm{Q}_1 - \gamma^2 h'^2 - \gamma h'' - 2\gamma h' \frac{\partial}{\partial t}.$$

Pour une fonction v à support dans M, on écrit

$$\|e^{-\gamma h}Le^{\gamma h}v\|^2 = \|Av\|^2 + 4\gamma^2\|h'v_t\|^2 - 4\gamma \operatorname{Re}(Av,h'v_t),$$

où $A = D_t^2 + Q + Q_1 - \gamma^2 h'^2 - \gamma h''$. En intégrant par parties, on peut simplifier les différents termes de $\operatorname{Re}(Av,h'v_t)$:

- $2\operatorname{Re}(v_{tt}, h'v_t) = -(v_t, h''v_t)$
- $2\operatorname{Re}(Qv, h'v_t) = (-h''Qv,v) - (Q_tv, h'v)$,

car Q est formellement auto-adjoint par définition.

- $2\operatorname{Re}(gv, h'v_t) = -((gh')_tv,v)$, où $g = \gamma^2 h'^2 + \gamma h''$.

D'autre part, pour une fonction a' régulière à choisir, on a :

$$(a'Qv,h'v) = (a'v_{tt}, h'v) + (a'Av,h'v) - (a'Q_1v,h'v) + (gh'v,a'v),$$

et

$$2\operatorname{Re}(a'v_{tt}, h'v) = (v,(a'h')_{tt}v) - 2\operatorname{Re}(v_t,(a'h')v_t).$$

Pour traiter le terme $\operatorname{Re}(Q_1v,h'v_t)$, on écrit $q_1 = \alpha + \beta$ (fonctions réelles homogènes de degré 1 qui seront choisies ultérieurement), et l'on intègre par parties

$$2\operatorname{Re}(\tilde{\beta}v,h'v_t) = -\left(\left(\tilde{\beta}_t + \frac{h''}{h'}\tilde{\beta}\right)v,h'v\right) - (v_t,(\tilde{\beta}^* - \tilde{\beta})h'v);$$

on a noté $\tilde{\alpha}$ et $\tilde{\beta}$ des opérateurs de symboles principaux α et β, $\tilde{\alpha} + \tilde{\beta} = Q_1$.

Ajoutons et retranchons aux termes de $\|e^{-\gamma h}Le^{\gamma h}v\|^2$ la quantité $2\gamma\operatorname{Re}(a'Qv,h'v) + 2\gamma\operatorname{Re}(a'\tilde{\beta}v,h'v)$; en collectant les termes et en notant $a = a' + \dfrac{h''}{h'}$, il vient

$$\begin{aligned}(3.1.1.)\quad \|e^{-\gamma h}Le^{\gamma h}v\|^2 = {} & 2\gamma\operatorname{Re}((Q_t + aQ + \tilde{\beta}_t + a\tilde{\beta})v,h'v)\\ & + 4\gamma^2\|h'v_t\|^2 + 2\gamma\operatorname{Re}(v_t,(a'h' - h'')v_t) + \|Av\|^2\\ & - 2\gamma\operatorname{Re}(a'Av,h'v) + 2\gamma(Bv,v) + 2\gamma\operatorname{Re}(v_t,(\tilde{\beta}^* - \tilde{\beta})h'v)\\ & - 4\gamma\operatorname{Re}(\tilde{\alpha}v,h'v_t),\end{aligned}$$

où l'on a noté

$$B = \gamma^2(-3h'^2h''-h'^3)+\gamma(-h''^2-h''h') - \frac{(a'h')_{tt}}{2} + h'^2(-3h''-h').$$

Choisissons maintenant $h(t) = t - \mu\frac{t^2}{2}$, $\mu > 0$; le terme dominant dans B est $\gamma^2 h'^2(-3h''-h')$, en sorte que pour $\mu = 1$, ε et $\frac{1}{\gamma}$ assez petits, nous avons $B \geqslant \gamma^2$.

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux termes $\mathrm{Re}(a'Av,h'v)$, $\mathrm{Re}(v_t,(\tilde\beta^*-\beta)h'v)$, $\mathrm{Re}(\tilde\alpha v,h'v_t)$ de (3.1.1.), on trouve, pour certaines constantes $C_1 \geqslant 0$, $C_2 > 0$, et $\gamma \geqslant \gamma_0$, l'inégalité

$$\text{(3.1.2.)} \quad C_2\|e^{-\gamma h}Le^{\gamma h}v\|^2 \geqslant \gamma^3\|v\|^2 + \gamma^2\|v_t\|^2 + \gamma\,\mathrm{Re}\left((Q_t+aQ+\tilde\beta_t+a\tilde\beta - \frac{C_1}{\gamma}\tilde\alpha^*\tilde\alpha)v,h'v\right).$$

Si $R(t,x,D_x)$ est un opérateur pseudo-différentiel tangentiel d'ordre 1 dont le symbole de Weyl r est homogène de degré 1 et nul sur Λ^0 (cf. 2.3.), on obtient (avec $C_3 > 0$ à choisir plus tard)

$$\text{(3.1.3.)} \quad C_2\|e^{-\gamma h}Le^{\gamma h}v\|^2 - C_3\gamma\|Rv\|^2 \geqslant \gamma^3\|v\|^2 + \gamma^2\|v_t\|^2 + \gamma\,\mathrm{Re}\,(Kv,h'v),$$

où K est l'opérateur tangentiel du second ordre

$$\text{(3.1.4.)} \quad K = Q_t + aQ + \tilde\beta_t + a\tilde\beta - C_3R^*R - \frac{C_1}{\gamma}\tilde\alpha^*\tilde\alpha.$$

Il nous reste à analyser la positivité de K.

3.2. Analyse microlocale de K.

Le choix des fonctions a, α, β dépend du point au voisinage duquel on travaille. Plus précisément, si $m_0 = (t_0,x_0,\xi_0)$ est donné, on va montrer qu'il existe un choix de a, α, β et un voisinage (conique en ξ) V_{m_0} de m_0 tels que pour un certain opérateur $\tilde K$ positif (en un sens que nous précisérons), $\tilde{K} - K$ ait un symbole nul dans V_{m_0}. Pour tout opérateur $\chi(t,x,D_x)$ convenablement supporté dont le symbole $\chi(t,x,\xi)$, homogène de degré zéro, est nul hors de V_{m_0}, on aura alors une inégalité du type

$$\text{(3.2.1.)} \qquad \operatorname{Re}(K\chi w, h'\chi w) \geqslant -\,\mathrm{cte}\|w\|^2 .$$

Quatre cas se présentent :

i) $q(m_0) \neq 0$: on choisit alors la fonction a assez grande en module et du signe de $q(m_0)$, pour que le symbole principal k de K soit positif en m_0, c'est-à-dire

$$\exists C > 0, \quad \forall\gamma \geqslant \gamma_0, \quad k(t_0,x_0,\xi_0) \geqslant C|\xi_0|^2 .$$

On prend $\alpha \equiv 0$, $\beta = q_1$, $\tilde{\alpha} = 0$, $\tilde{\beta} = Q_1$.

ii) $q(m_0) = 0$, $q'_t(m_0) > 0$: on choisit $a = 0$, $\alpha = 0$, $\beta = q_1$, $\tilde{\alpha} = 0$, $\tilde{\beta} = Q_1$, C_3 et $\frac{1}{\gamma}$ assez petits pour que k soit positif, comme au cas i).

Dans ces deux cas, V_{m_0} est tel que $k \geqslant C|\xi|^2$ dans V_{m_0}, et le symbole principal $\tilde{k}$ de $\tilde{K}$ est choisi positif partout, prolongeant k hors de V_{m_0} (il s'agit ici, bien entendu, des cas traités par Hörmander [8]). La positivité de $\tilde{K}$ découle de l'inégalité de Gårding classique.

iii) $q(m_0) = q'_t(m_0) = 0$, et l'on est dans l'un des cas 7) i) ou 7) iii). On choisit pour a la fonction donnée en (1.1.1.). Pour β, on prend un symbole satisfaisant partout l'équation $\beta_t + a\beta = 0$, avec de plus $\beta = q_1$ au voisinage de m_0 sur Λ^0 (dans le cas iii) on pourra prendre $\beta \equiv 0$). L'opérateur $\tilde{\alpha}$ est l'opérateur du premier ordre dont le symbole de Weyl est $\alpha = q_1 - \beta$, en sorte que le symbole sous-principal de $\tilde{\alpha}^*\tilde{\alpha}$ est identiquement nul.

On a alors $k = q_t + aq - C_3 r^2 - \frac{C_1}{\gamma}\alpha^2$, tandis que $e = q_t + aq + a\tau^2 + 4C\tau^2$. Comme e est transversalement elliptique à Λ près de $(t_0,x_0,0,\xi_0)$, $q_t + aq$ est transversalement elliptique à Λ^0 près de m_0, et donc aussi k, si C_3 et $\frac{1}{\gamma}$ sont assez petits.

D'autre part, le symbole sous-principal de aQ est imaginaire pur, donc aussi celui de K.

Si $\tilde{K}$ a son symbole principal $\tilde{k} \geqslant 0$ partout, prolongeant k hors d'un voisinage de m_0, et son symbole sous-principal imaginaire pur partout prolongeant celui de K, il satisfait à l'inégalité $\operatorname{Re}(\tilde{K}v,h'v) \geqslant -\operatorname{cte}\|v\|^2$, d'après le résultat de Fefferman et Phong [7].

iv) $q(m_0) = q_t'(m_0) = 0$, $\frac{\partial}{\partial t}$ tangent à Λ près de $(t_0,x_0,0,\xi_0)$, et (1.1.2.). On choisit pour a la fonction donnée en (1.1.1.), et $\tilde{\beta} = Q_1$. L'hypothèse sur $\frac{\partial}{\partial t}$ implique que $\Lambda_{t_0}^0$ est une variété (car $t=t_0$ est transverse à Λ^0), et la forme symplectique σ restreinte à $\tau = 0$, $t = t_0$ est simplement $\sum_i dx_i \wedge d\xi_i$. D'autre part $\frac{\partial}{\partial t}$ est dans le noyau de $\sigma|_\Lambda$ (puisque $\tau=0$ sur Λ), et le noyau de $\sigma|_\Lambda$ est la somme directe, en chaque point, du noyau de $\sigma|_{\Lambda_{t_0}^0}$ et de $\frac{\partial}{\partial t}$: le rang de σ restreinte à $\Lambda_{t_0}^0$ est donc constant.

Grâce au fait que $\frac{\partial}{\partial t}$ est tangent à Λ, la distance d'un point $(t_0,x_0,0,\xi_0)$ à $\Lambda_{t_0}^0$ est aussi celle de ce point à Λ^0; d'après (1.1.1.), $q_t + aq$, qui est transversalement elliptique à Λ^0, est donc aussi transversalement elliptique à $\Lambda_{t_0}^0$, lorsqu'elle est considérée comme une fonction de (x,ξ), à t_0 fixé.

En vue d'appliquer à l'opérateur K l'inégalité de Hörmander-Melin ([10], § 3), nous devons analyser $\operatorname{tr}^+ k$ sur $\Lambda_{t_0}^0$.

- Si $\operatorname{tr}(q_t+aq) > 0$ en (t_0,x_0,ξ_0), en choisissant C_3 assez petits, on aura k transversalement elliptique et $\operatorname{tr}^+ k \geqslant (1-\varepsilon)\operatorname{tr}^+(q_t+aq)$. Donc, sur $\Lambda_{t_0}^0$, $\operatorname{tr}^+ k + \operatorname{Re} K_1^s = \operatorname{tr}^+ k + q_{1t} + aq_1 \geqslant 0$ d'après (1.1.2.), car $p_1^s = q_1$ sur Λ.

- Si $\operatorname{tr}^+(q_t+aq) = 0$ en (t_0,x_0,ξ_0), cela signifie que $\Lambda_{t_0}^0$ est involutive en (x_0,ξ_0) (i.e. $\sigma=0$), et par l'hypothèse de rang constant, $\Lambda_{t_0}^0$ est involutive partout, et $\operatorname{tr}^+(q_t+aq) = 0$ partout.

Comme C_3 est choisie assez petite pour que k soit transversalement elliptique, on a alors $\operatorname{tr}^+ k = 0$ sur Λ^0 (cf. [10]). L'hypothèse (1.1.2.) signifie alors $aq_1 + q_{1t} \geqslant 0$ sur Λ^0.

Dans les deux cas, la condition de Melin est satisfaite. Si $\tilde{k}$ prolonge k et est positif hors d'un voisinage de Λ^0, on obtient $\mathrm{Re}\,(\tilde{K}v,h'v) \geqslant -\,\mathrm{cte}\|v\|^2$, d'après le résultat de Hörmander-Melin [10].

3.3. Fin de la preuve.

• Soit $\Sigma\chi_i = 1$ une partition de l'unité subordonnée à un recouvrement fini de $M \times S^{n-1}$ par des ouverts choisis comme il est expliqué en 3.2. On a obtenu, pour chaque i, l'inégalité

$$\gamma^3\|\chi_i w\|^2 + \gamma^2\|(\chi_i w)_t\|^2 + C_3\gamma\|R\chi_i w\|^2 \leqslant C_2(\|e^{-\gamma h}Le^{\gamma h}\chi_i w\|^2 + \gamma\|w\|^2).$$

En notant $N(f,\gamma) = \int e^{-2\gamma h}|f|^2\,dx\,dt$, et en prenant $w = e^{-\gamma h}u$, il vient, avec d'autres constantes,

$$\begin{aligned}(3.3.1.)\quad \gamma^3N(\chi_i u,\gamma) + \gamma^2N(\chi_i u_t,\gamma) + C_3\gamma N(R\chi_i u,\gamma)&\\ \leqslant C_2[N(L\chi_i u,\gamma) + \gamma N(\chi_i u,\gamma) + \gamma N(u,\gamma)]&;\end{aligned}$$

en additionnant sur i, il vient, avec $C > 0$,

$$\begin{aligned}(3.3.2.)\quad \gamma^3N(u,\gamma) + \gamma^2N(u_t,\gamma) + \gamma N(Ru,\gamma)&\\ < C\Big[\sum_i N(L\chi_i u,\gamma) + \gamma N(u,\gamma)\Big]&.\end{aligned}$$

• On a d'autre part

$L\chi_i = \chi_i L + [L,\chi_i]$, et $[L,\chi_i]$ est un opérateur du 1[er] ordre de symbole principal $\frac{1}{i}\{p,\chi_i\}$, qui s'annule sur Λ par l'hypothèse 5). On a donc

$$N([L,\chi_i]u,\gamma) \leqslant C[N(u_t,\gamma) + N(\tilde{R}u,\gamma) + N(u,\gamma)],$$

pour un certain opérateur $\tilde{R}$ tangentiel du 1[er] ordre, dont le symbole principal s'annule sur Λ^0.

En choisissant $R = \tilde{R}$ et $\gamma \geqslant \gamma_0$, on déduit de (3.3.2.) l'inégalité de Carleman

$$(3.3.3.)\quad \gamma^3N(u,\gamma) + \gamma^2N(u_t,\gamma) + \gamma N(Ru,\gamma) \leqslant CN(Lu,\gamma).$$

• On a en fait $P = L + \tilde{Q}_1 - Q_1 + cD_t + d$. La différence $P - L$ est donc un opérateur du 1er ordre dont le symbole principal $i \operatorname{Im} \tilde{q}_1 + c\tau = i \operatorname{Im} p_1^s + \tau \operatorname{Re} c$ s'annule sur Λ d'après l'hypothèse 6). Comme précédemment, on déduit de (3.3.3.) l'inégalité finale

$$\text{(3.3.4.)} \quad \gamma^3 N(u,\gamma) + \gamma^2 N(u_t,\gamma) + \gamma N(Ru,\gamma) \leqslant CN(Pu,\gamma).$$

La conclusion du théorème s'obtient alors de façon standard, en appliquant (3.3.4.) à une troncature convenable de u.

4. INÉGALITÉ DE CARLEMAN DANS LE CAS SINGULIER

4.1. Une inégalité.

Soit $L = D_t^2 + Q$. Comme en 3., nous allons établir une inégalité pour des fonctions à support dans M.

Avec γ un grand paramètre réel, on a

$$t^{-\gamma} L t^{\gamma} = D_t^2 + Q - \frac{\gamma(\gamma-1)}{t^2} - \frac{2\gamma}{t}\frac{\partial}{\partial t},$$

et

$$\|t^{-\gamma} L t^{\gamma} v\|^2 = \|Av\|^2 + 4\gamma^2 \left\|\frac{v_t}{t}\right\|^2 - 4\gamma \operatorname{Re}\left(Av, \frac{v_t}{t}\right),$$

où $A = D_t^2 + Q - \dfrac{\gamma(\gamma-1)}{t^2}\cdot$ En intégrant par parties, il vient

• $2 \operatorname{Re}\left(v_{tt}, \dfrac{v_t}{t}\right) = \left\|\dfrac{v_t}{t}\right\|^2$

• $2 \operatorname{Re}\left(Qv, \dfrac{v_t}{t}\right) = -\left((tQ_t - Q)v, \dfrac{v}{t^2}\right)$

• $2 \operatorname{Re}\left(\dfrac{v}{t^2}, \dfrac{v_t}{t}\right) = 3\left\|\dfrac{v}{t^2}\right\|^2.$

D'autre part, pour une fonction a' régulière à choisir, on a

$$\left(a'Qv, \frac{v}{t^2}\right) = \left(a'v_{tt}, \frac{v}{t^2}\right) + \left(a'Av, \frac{v}{t^2}\right) + \gamma(\gamma-1)\left(\frac{a'v}{t^2}, \frac{v}{t^2}\right)$$

et

$$\left(a'v_{tt}, \frac{v}{t^2}\right) = -\left(v_t, \frac{a'}{t^2}\, v_t\right) + \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left(v, \left(\frac{a'}{t^2}\right)_{tt} v\right).$$

En ajoutant et en retranchant aux termes de $\|t^{-\gamma}Lt^{\gamma}v\|^2$ la quantité $2\gamma\,\mathrm{Re}\left(a'Qv, \frac{v}{t^2}\right)$, il vient

$$(4.1.1.)\quad \|t^{-\gamma}Lt^{\gamma}v\|^2 = 2\gamma\,\mathrm{Re}\left((tQ_t + aQ)v, \frac{v}{t^2}\right)$$
$$+ (4\gamma^2+2\gamma)\left\|\frac{v_t}{t}\right\|^2 + \|Av\|^2 + 6\gamma^2(\gamma-1)\left\|\frac{v}{t^2}\right\|^2$$
$$- 2\gamma^2(\gamma-1)\,\mathrm{Re}\left(\frac{a'v}{t^2}, \frac{v}{t^2}\right) + 2\gamma\left(v_t, \frac{a'}{t^2}\, v_t\right) - \gamma\,\mathrm{Re}\left(v, \left(\frac{a'}{t^2}\right)_{tt} v\right)$$
$$- 2\gamma\,\mathrm{Re}\left(a'Av, \frac{v}{t^2}\right), \quad \text{avec } a = a' - 1.$$

Avec R et C_3 choisis comme en 3.1., il convient d'analyser maintenant la positivité de l'opérateur $K = tQ_t + aQ - C_3t^2R^*R$.

4.2. Analyse microlocale de K.

On procède comme en 3.2. Quitte à restreindre le compact M au compact $\bar{\omega} \times [0,\varepsilon']$ pour un $\varepsilon' > 0$ petit, on limitera l'analyse aux points $m_0 = (t_0,x_0,\xi_0)$ pour lesquels $t_0 = 0$.

Trois cas se présentent alors :

i) $q(m_0) \neq 0$: on choisit $a = \pm 1$, du signe de $q(m_0)$, et C_3 assez petit pour que k soit positif dans un voisinage de m_0. Le prolongement positif $\tilde{K}$ est obtenu alors comme en 3.2., cas i).

ii) $q(m_0) = 0$, et $(0,x_0,0,\xi_0) \notin \Lambda_s$. On choisit pour a la fonction donnée en (1.1.3.). On obtient alors

$$(tq_t + aq)(t,x,\xi) \geqslant t^2b(t,x,0,\xi) \quad (\text{pour } t \geqslant 0),$$

et comme $b(0,x_0,0,\xi_0) > 0$ par hypothèse, on peut choisir $C_3 > 0$ assez petit pour que $k \geqslant 0$.

iii) $q(m_0) = 0$, et $(0,x_0,0,\xi_0) \in \Lambda_s$. Comme $b(t,x,0,\xi)$ est transversalement elliptique sur Λ_s^0, et que $r = 0$ sur Λ_s^0, on peut choisir $C_3 > 0$ assez petit pour que $k \geqslant 0$.

Dans ces deux derniers cas, on observe que le symbole sous-principal de K est imaginaire pur, et l'on obtient comme en 3.2., cas iii), l'inégalité

$$\operatorname{Re}(K\chi w,\chi w) > -\operatorname{cte}\|w\|^2 .$$

4.3. Fin de la preuve.

Dans les trois cas analysés en 4.2., la fonction choisie a satisfait $a < 2$, par l'hypothèse 3), c'est-à-dire $a' < 3$. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz au dernier terme de (4.1.1.) et en choisissant $\gamma \geqslant \gamma_0$, on déduit de (4.1.1.) l'inégalité

$$(4.3.1.)\quad \gamma^3\left\|\chi\,\frac{w}{t^2}\right\|^2 + \gamma^2\left\|\chi\,\frac{w_t}{t}\right\|^2 + C_3\gamma\|R\chi w\|^2 < C_2\left(\|t^{-\gamma}Lt^{\gamma}\chi w\|^2 + \gamma\left\|\frac{w}{t}\right\|^2\right).$$

On procède alors au recollement des inégalités (4.3.1.) et à l'absorption des termes $[L,\chi_i]u$ exactement comme en 3.3.

La preuve s'achève comme en 3.3. en remarquant que $P - L = \tilde{Q}_1 + cD_t + d$ est un opérateur du 1er ordre dont le symbole principal est nul sur Λ_s, d'après 5).

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. Alinhac, Non-unicité du problème de Cauchy, *Annals of Mathematics*, 117 (1983), 77-108.

[2] S. Alinhac et C. Zuily, Unicité et non-unicité du problème de Cauchy pour des opérateurs hyperboliques à caractéristiques doubles, *Comm. in PDE*, 6 (7) (1981), 799-828.

[3] N. Aronszajn, A unique continuation theorem for solutions of elliptic partial differential equations or inequalities of second order, *J. Math. Pures Appl.*, 36 (1957), 235-249.

[4] H. BAHOURI, Unicité et non-unicité du problème de Cauchy pour des opérateurs à symbole principal réel, Thèse 3[e] cycle, Université Paris XI (Orsay), 1982.

[5] H. O. CORDES, Über die Bestimmtheit der Lösung elliptischer Differential gleichungen durch Anfangsvorgaben; *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math. Phys.*, Kl. II *a*, 11 (1956), 239-258.

[6] B. DEHMAN, Unicité et non-unicité pour une classe d'opérateurs différentiels quasi homogènes, Thèse de 3[e] cycle, Université Paris XI (Orsay), 1982.

[7] C. FEFFERMAN et D. PHONG, On positivity of pseudo-differential operators, *Proc. Natl. Acad. Sc. USA*, 75 (1978), 4673-4674.

[8] L. HÖRMANDER, *Linear partial differential operators*, Springer Verlag (1963).

[9] L. HÖRMANDER, The Weyl calculus of pseudo-differential operators, *Comm. Pure Appl. Math.*, 32 (1979), 359-443.

[10] L. HÖRMANDER, The Cauchy problem for differential equations with double characteristics, *Journal d'Analyse Math.*, 32 (1977), 110-196.

[11] R. LASCAR et C. ZUILY, Unicité et non-unicité du problème de Cauchy pour une classe d'opérateurs différentiels à caractéristiques doubles, *Duke Math. J.*, 49 (1) (1982), 137-162.

[12] N. LERNER, Unicité du problème de Cauchy pour des opérateurs elliptiques, A paraître.

[13] L. NIRENBERG, Uniqueness in the Cauchy problem for a degenerate elliptic second order equation, A paraître.

[14] X. SAINT-RAYMOND, L'unicité pour des problèmes de Cauchy caractéristiques en certains points, *Comm. in PDE*, 7 (5) (1982), 559-579.

[15] K. WATANABE, Sur l'unicité du prolongement des solutions des équations elliptiques dégénérées, *Tohoku Math. J.*, 34 (1982), 239-249.

Manuscrit reçu le 16 mars 1983.

Serge ALINHAC,
Université de Paris-Sud
Mathématiques
Bâtiment 425
91405 Orsay Cedex.