ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

PHILIPPE CHARPENTIER

Caractérisations des zéros des fonctions de certaines classes de type Nevanlinna dans le bidisque

Annales de l'institut Fourier, tome 34, nº 1 (1984), p. 57-98

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1984__34_1_57_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
34, 1 (1984), 57-98

CARACTÉRISATIONS DES ZÉROS DES FONCTIONS DE CERTAINES CLASSES DE TYPE NEVANLINNA DANS LE BIDISQUE

par Philippe CHARPENTIER

I. ENONCE DES RESULTATS

Dans les domaines strictement pseudoconvexes et dans certains domaines faiblement pseudoconvexes de $\mathbf{C}^n$, on sait qu'une condition de croissance sur l'aire d'un sous-ensemble analytique du type $\int_{\mathcal{D}} \delta_{\partial\mathcal{D}}(z)^\alpha \, d\sigma(z) < +\infty$, $\alpha \geqslant 1$, où $\delta_{\partial\mathcal{D}}(z)$ est la distance de z au bord de $\mathcal{D}$ et $d\sigma$ la mesure d'aire sur l'ensemble analytique permet de caractériser les zéros des fonctions de certaines classes définies par une condition de croissance sur le logarithme du module des fonctions (cf. H. Skoda [7], G.M. Henkin [5], G.M. Henkin et S.V. Dautov [4], A. Bonami et Ph. Charpentier [1]).

Dans ce travail nous considérons ce problème dans le cas du bidisque D^2 : si X est un sous-ensemble analytique de dimension pure 1 de D^2 et si $d\sigma_X$ est la mesure d'aire sur X, nous considérons des conditions de croissance sur X de la forme $A(X, \alpha) = \int_{D^2} \delta^\alpha_{\partial D^2}(z) \, d\sigma_X(z) < +\infty$, où $\delta_{\partial D^2}(z)$ est la distance de z au bord de D^2 et où $\alpha > 0$.

D'autre part, nous introduisons une famille de classes de fonctions holomorphes dans D^2 définies par des conditions de croissance du logarithme du module des fonctions.

Pour tout $\mu > -1$, soit

$N_\mu(D^2) =$
$$\left\{ f \text{ holomorphes dans } D^2 \text{ t.q. } \int_{D^2} \delta^{\mu}_{\partial D^2}(z)\, \mathrm{Log}^+ |f(z)|\, d\lambda(z) < +\infty \right\}.$$

La classe limite lorsque $\mu = -1$ est la classe de Nevanlinna du bord de D^2 :

$N(\partial D^2) =$
$$\left\{ f \text{ holomorphes dans } D^2 \text{ t.q. } \sup_{r<1} \int_{\partial D^2} \mathrm{Log}^+ |f(rz)|\, d\sigma(z) < +\infty \right\}.$$

En considérant l'ensemble $\Delta = \{(z_1, z_2) \in D^2 \text{ t.q. } |z_1| = |z_2|\}$ nous définissons une autre famille de classes en posant pour tout $\nu > -1$,

$N_\nu(\Delta) =$
$$\left\{ f \text{ holomorphes dans } D^2 \text{ t.q.} \int_{\Delta} \delta^{\nu}_{T^2}(z)\, \mathrm{Log}^+ |f(z)|\, d\sigma(z) < +\infty \right\},$$

où $\delta_{T^2}(z)$ désigne la distance de z au tore T^2. La classe limite de cette famille lorsque $\nu = -1$ est naturellement la classe de Nevanlinna usuelle du bidisque.

Les résultats sur les zéros des fonctions de ces différentes classes que nous obtenons dans cet article sont les suivants.

THEOREME. – *Soit* $\alpha > -1$. *Un sous-ensemble analytique* X *de* D^2 *est l'ensemble des zéros d'une fonction de la classe* $N_\alpha(D^2)$ *si et seulement si* $A(X, \alpha + 2) < +\infty$.

La condition nécessaire de ce théorème est une conséquence immédiate d'un résultat de [2] (prop. 3, p. 41) où il est dit que les zéros des fonctions de la classe $N(\partial D^2)$ vérifient la condition de Blaschke, c'est-à-dire $A(X, 1) < +\infty$.

La condition suffisante pour être un zéro d'une fonction de $N(\partial D^2)$ que nous obtenons ici est malheureusement strictement plus forte que la condition de Blaschke.

PROPOSITION 1. – *Soit* X *un sous-ensemble analytique de* D^2. *Si il existe* $\beta < 1$ *tel que* $A(X, \beta) < +\infty$ *alors* X *est l'ensemble des zéros d'une fonction de* $N(\partial D^2)$.

Remarque. – On démontre en fait un résultat un peu plus fin : soit
$$\theta = i \sum_{i,j} \theta_{ij}\, dz_i \times d\bar{z}_j$$

le courant d'intégration sur X. Si les deux conditions suivantes sont satisfaites,

$$A(X, 1) < +\infty, \text{ et, } \int_{D^2} \delta_{T^2}(z)\,(|\theta_{21}(z)| + |\theta_{12}(z)|) < +\infty,$$

alors X est l'ensemble des zéros d'une fonction de $N(\partial D^2)$. L'existence d'un $\beta < 1$ tel que $A(X, \beta) < \infty$ entraîne les deux conditions de ci-dessus, la réciproque étant naturellement fausse.

Le principal résultat de [2] montre que si X est l'ensemble des zéros d'une fonction de $N_\alpha(\Delta)$, et si $\theta = i\,\Sigma\,\theta_{ij}\,dz_i \times d\bar{z}_j$ est le courant d'intégration sur X, alors on a

$$\int_{\{|z_1|<|z_2|\}} (1 - |z_2|^2)^{\alpha+1}\, d\theta_{11}(z) < +\infty$$
$$\text{et } \int_{\{|z_2|<|z_1|\}} (1 - |z_1|^2)^{\alpha+1}\, d\theta_{22}(z) < +\infty.$$

Les conditions suffisantes pour être un zéro d'une fonction de $N_\alpha(\Delta)$ que nous obtenons dans cet article sont strictement plus fortes que la condition nécessaire ci-dessus.

PROPOSITION 2. – *Soit* $\alpha \in]-1,0]$. *Un sous-ensemble analytique* X *de* D^2 *est un zéro d'une fonction de* $N_\alpha(\Delta)$ *s'il vérifie la condition* $A(X, \alpha + 1) < +\infty$.

Pour la classe de Nevanlinna usuelle du bidisque, c'est-à-dire $N(T^2) =$

$$\left\{ f, \text{ holomorphes dans } D^2 \text{ t.q. } \sup_{r<1} \int_{T^2} \mathrm{Log}^+ |f(rz)|\, d\sigma(z) < +\infty \right\},$$

avec les notations précédentes, la condition nécessaire donnée dans [2] pour que X soit l'ensemble des zéros d'une fonction de $N(T^2)$ est

$$\int_{\{|z_1|<|z_2|\}} d\theta_{11}(z) < +\infty \quad \text{et} \quad \int_{\{|z_2|<|z_1|\}} d\theta_{22}(z) < +\infty.$$

La condition suffisante que nous obtenons ici est encore une fois strictement plus forte.

PROPOSITION 3. – *Soit* X *un sous-ensemble analytique de* D^2 *de dimension pure* 1, *et soit* $d\sigma_X$ *la mesure d'aire sur* X. *Alors* X *est l'ensemble des zéros d'une fonction de* $N(T^2)$ *s'il est d'aire finie, c'est-à-dire si* $\int_{D^2} d\sigma_X(z) < +\infty$.

Dans ce travail, nous démontrons donc les conditions suffisantes du théorème et des Propositions 1, 2 et 3. Nous utilisons pour cela la méthode utilisée par les auteurs précédemment cités, c'est-à-dire la méthode de P. Lelong de résolution de l'équation $i\partial\bar\partial$ (cf. [6]) : si θ est le courant d'intégration sur l'ensemble analytique X, toute solution u de l'équation $i\partial\bar\partial u = \theta$ est de la forme $u = \operatorname{Log}|f|$ où f est holomorphe dans D^2. Le problème se ramène donc à résoudre l'équation $i\partial\bar\partial u = \theta$ avec des estimation convenables.

Pour cela, on résout tout d'abord l'équation $idw = \theta$ puis on résout l'équation $\bar\partial U = w_{0,1}$ et on remarque que, du fait que θ est réel, $u = 2\operatorname{Re}U$ vérifie $i\partial\bar\partial u = \theta$.

Pour résoudre l'équation $\bar\partial$ nous utilisons les noyaux minimaux donnés dans [3] : si $f(\zeta) = f_1(\zeta)\,d\bar\zeta_1 + f_2(\zeta)\,d\bar\zeta_2$ est une (0,1)-forme de classe C^1 dans $\bar D^2$, $\bar\partial$-fermée, pour $k = (k_1, k_2) \in (\mathbf{R}_+^*)^2$, la fonction

$$
\begin{aligned}
U_k(z_1, z_2) = \frac{1}{2i\pi}\Bigg\{ & \int_D f_1(\zeta_1, z_2)\,\frac{(1-|\zeta_1|^2)^{k_1}}{(1-\bar\zeta_1 z_1)^{k_1}(z_1-\zeta_1)}\,d\bar\zeta_1\wedge d\zeta_1 \\
& + \int_D f_2(z_1, \zeta_2)\,\frac{(1-|\zeta_2|^2)^{k_2}}{(1-\bar\zeta_2 z_2)^{k_2}(z_2-\zeta_2)}\,d\bar\zeta_2\wedge d\zeta_2\Bigg\} \\
& + \frac{1}{4\pi^2}\int_{D^2} f(\zeta)\wedge\left(\frac{1-|\zeta_1|^2}{1-\bar\zeta_1 z_1}\right)^{k_1}\left(\frac{1-|\zeta_2|^2}{1-\bar\zeta_2 z_2}\right)^{k_2}\frac{(\bar\zeta_1-\bar z_1)d\bar\zeta_2-(\bar\zeta_2-\bar z_2)d\bar\zeta_1}{|\zeta-z|^4} \\
& \qquad\wedge d\zeta_1\wedge d\zeta_2 \\
& + \frac{1}{4\pi^2}\int_{D^2} f(\zeta)\wedge\Bigg\{k_2\,\frac{(1-|\zeta_1|^2)^{k_1}}{(1-\zeta_1 z_1)^{k_1}(z_1-\zeta_1)}\,\frac{(1-|\zeta_2|^2)^{k_2-1}|\zeta_2-z_2|^2}{(1-\bar\zeta_2 z_2)^{k_2+1}|\zeta-z|^2}\,d\bar\zeta_2 \\
& - k_1\,\frac{(1-|\zeta_2|^2)^{k_2}}{(1-\bar\zeta_2 z_2)^{k_2}(z_2-\zeta_2)}\,\frac{(1-|\zeta_1|^2)^{k_1-1}|\zeta_1-z_1|^2}{(1-\bar\zeta_1 z_1)^{k_1+1}|\zeta-z|^2}\,d\bar\zeta_1\Bigg\}\wedge d\zeta_1\wedge d\zeta_2,
\end{aligned}
$$

est la solution de l'équation $\partial U_k = f$ qui est orthogonale aux fonctions holomorphes dans

$$L^2((1-|z_1|^2)^{k_1-1}(1-|z_2|^2)^{k_2-1}\,d\lambda(z_1, z_2)).$$

Le plan de l'article est le suivant : dans un premier paragraphe, on donne diverses estimations des noyaux apparaissant dans l'expression de la solution minimale de l'équation $\bar{\partial}$. Dans le deuxième paragraphe, nous donnons des estimations des cœfficients d'un courant d'intégration vérifiant une condition du type de celles considérées dans le théorème et la proposition 1. Le troisième paragraphe est consacré aux démonstrations du théorème et de la proposition 1. Enfin, la proposition 2 est démontrée au quatrième paragraphe, et la proposition 3 au cinquième.

Notations. – Dans toute la suite, nous utilisons les notations suivantes :

$D = \{z \in \mathbf{C} \text{ t.q. } |z| < 1\}$.

$\mathbf{T} = \{z \in \mathbf{C} \text{ t.q. } |z| = 1\} = \partial D$.

$D^2 = \{z = (z_1, z_2) \in \mathbf{C}^2 \text{ t.q. } |z_1| < 1 \text{ et } |z_2| < 1\} = D \times D$.

$\partial D^2 = D \times \mathbf{T} \cup \mathbf{T} \times D$.

$\Delta = \{z = (z_1, z_2) \in D^2 \text{ t.q. } |z_1| = |z_2|\}$.

$\delta_{\partial D^2}(z) = \min(1 - |z_1|^2, 1 - |z_2|^2), z = (z_1, z_2) \in D^2$.

$\delta_{\mathbf{T}^2}(z) = \max(1 - |z_1|^2, 1 - |z_2|^2), z = (z_1, z_2) \in D^2$.

$\mathbf{T}_t = \{z \in \mathbf{C} \text{ t.q. } |z| = t\}$.

$D_t = \{z \in \mathbf{C} \text{ t.q. } |z| < t\}$.

Je remercie le referee de m'avoir signalé que les calculs de la fin du Lemme 15 que je donnais dans le manuscrit original n'étaient pas optimum, ce qui a permis d'améliorer la proposition 3.

II. DEMONSTRATION DES RESULTATS

1. Estimations des noyaux du $\bar{\partial}$.

Pour simplifier les notations, posons :

$$H_i(\zeta, z) = H_i(\zeta_i, z_i) = \frac{(1 - |\zeta_i|^2)^{k_i}}{(1 - \bar{\zeta}_i z_i)^{k_i} (z_i - \zeta_i)} d\zeta_i, i = 1, 2;$$

$$K(\zeta, z) = \left(\frac{1 - |\zeta_1|^2}{1 - \bar{\zeta}_1 z_1}\right)^{k_1} \left(\frac{1 - |\zeta_2|^2}{1 - \bar{\zeta}_2 z_2}\right)^{k_2} \frac{(\bar{\zeta}_1 - \bar{z}_1)\, d\bar{\zeta}_2 - (\bar{\zeta}_2 - \bar{z}_2)\, d\bar{\zeta}_1}{|\zeta - z|^4} \wedge d\zeta_1 \wedge d\zeta_2 \, ;$$

$$L_i(\zeta, z) = \frac{(1 - |\zeta_i|^2)^{k_i}}{(1 - \bar{\zeta}_i z_i)^{k_i} (z_i - \zeta_i)} \frac{(1 - |\zeta_j|^2)^{k_j - 1}}{(1 - \bar{\zeta}_j z_j)^{k_j + 1}} \frac{|\zeta_j - z_j|^2}{|\zeta - z|^2} d\bar{\zeta}_j \wedge d\zeta_1 \wedge d\zeta_2 \, ,$$
$$i, j = 1, 2, \; i \neq j .$$

Dans les diverses majorations d'intégrales que nous aurons à faire tout au long de cet article, nous utiliserons constamment le changement de variables suivant : si $(\eta, \xi) \in D^2$, posons $u = 1 - |\xi|^2$, $v = 1 - |\eta|^2$, $\theta = \frac{1}{\pi} |\mathrm{Arg}\, \frac{\eta}{\xi}| \in [0, 1]$. Alors, si $d\lambda$ est la mesure de Lebesgue dans D, on a $d\lambda(\eta) = \frac{\pi}{2} dv\, d\theta$, et, pour $|\eta| + |\xi| > \delta > 0$, à des constantes multiplicatives près (dépendant de δ), on a $|1 - \bar{\xi}\eta| \simeq u + v + \theta$ et $|\eta - \xi| \simeq |u - v| + \theta$.

LEMME 1. a) *Pour* $0 < \alpha < k_i$, *on a*

$$\int_D (1 - |z_i|^2)^{\alpha - 1} |H_i(\zeta_i, z_i)| \, d\lambda(z) \leqslant C(1 - |\zeta_i|^2)^\alpha ,$$

où C *ne dépend que de* α *et* k_i.

b) $\int_T |H_i(\zeta_i, z_i)| \, d\sigma(z_i) \leqslant C$, C *ne dépendant que de* k_i.

c) *Pour* $k_i > 1$, *et* $r > 1$, *on a*

$$\int_{\{|z_i| < r\}} |H_i(\zeta_i, z_i)| \, d\lambda(z_i) \leqslant C \frac{(1 - |\zeta_i|^2)^{k_i}}{(1 - |\zeta_i|^2 + 1 - r^2)^{k_i - 1}}$$

où C *ne dépend que de* k_i.

d) *Pour* $0 < \alpha < k_i$, *et* $r < 1$, *on a*

$$\int_{\{|z_i| > r\}} (1 - |z_i|^2)^{\alpha - 1} |H_i(\zeta_i, z_i)| \, d\lambda(z_i)$$
$$\leqslant C \min((1 - |\zeta_i|^2)^\alpha, (1 - r^2)^\alpha),$$

C *ne dépendant que de* α *et* k_i.

Les estimations a) et b) de ce lemme sont classiques.

Démontrons c). On peut naturellement supposer que r est voisin de 1, et par suite, il suffit d'intégrer sur l'ensemble

$\{0 < \delta < |z_i| < r\}$. En posant alors $u = 1 - |\zeta_i|^2$, $v = 1 - |z_i|^2$ et $\theta = \frac{1}{\pi} \operatorname{Arg} \frac{z_i}{\zeta_i}$, on est ramené à montrer la majoration suivante

$$\int_{\substack{\theta \in [0,1] \\ v \in [1-r^2, 1]}} \frac{u^{k_i}\, dv\, d\theta}{(u + v + \theta)^{k_i} (|u - v| + \theta)} \leqslant C \frac{u^{k_i}}{(u + 1 - r^2)^{k_i - 1}}.$$

En posant $v = ux$, $\theta = uy$, cette majoration se ramène à

$$I = \int_{\substack{y \in \left[0, \frac{1}{u}\right] \\ x \in \left[\frac{1-r^2}{u}, \frac{1}{u}\right]}} \frac{u\, dx\, dy}{(1 + x + y)^{k_i} (|1 - x| + y)} \leqslant C \frac{u^{k_i}}{(u + 1 - r^2)^{k_i - 1}}.$$

Si $\frac{1 - r^2}{u} \leqslant 2$ on majore en intégrant sur $[0, \infty[^2$ ce qui donne $I \leqslant Cu \leqslant C\, 3^{k_i} \frac{u^{k^i}}{(u + 1 - r^2)^{k_i - 1}}$. Si $\frac{1 - r^2}{u} > 2$, on majore I par

$$I \leqslant C \int_{\substack{y \in [0, +\infty[\\ x \in \left[\frac{1-r^2}{u}, +\infty\right]}} \frac{u\, dx\, dy}{(1 + x + y)^{k_i + 1}} \leqslant C \frac{u^{k_i}}{(u + 1 - r^2)^{k_i - 1}}.$$

Pour montrer d), on remarque que, si r est petit, la majoration résulte du a), et, si $r > \delta > 0$, le changement de variables précédent nous ramène à voir que :

$$J = u^\alpha \int_{\substack{x \in \left[0, \frac{1-r^2}{u}\right] \\ y \in [0, +\infty[}} \frac{x^{\alpha - 1}\, dx\, dy}{(1 + x + y)^{k_i} (|1 - x| + y)} \leqslant C \min(u^\alpha, (1 - r^2)^\alpha).$$

Si $\frac{1 - r^2}{u} \geqslant \frac{1}{2}$ on majore par Cu^α en intégrant sur $[0, +\infty[^2$, et si $\frac{1 - r^2}{u} < \frac{1}{2}$ on majore par

$$J \leqslant Cu^\alpha \int_{\substack{y \in [0, +\infty[\\ x \in \left[0, \frac{1-r^2}{u}\right]}} \frac{x^{\alpha - 1}\, dx\, dy}{(1 + y)^{k_i + 1}} \leqslant C(1 - r^2)^\alpha.$$

LEMME 2. – a) *Pour* $0 < \alpha < \min(k_1, k_2)$, *on a :*

$$\int_{D^2} \delta_{\partial D^2}(z)^{\alpha-1}\, |K(\zeta, z)|\, d\lambda(z) \leqslant C\, \delta_{\partial D^2}(\zeta)^\alpha ,$$

où $|K(\zeta, z)|$ *désigne le module de l'une quelconque des composantes de* K *et* C *ne dépend que de* α, k_1 *et* k_2.

b) $\int_{\partial D^2} |K(\zeta, z)|\, d\sigma(z) \leqslant C$, C *ne dépendant que de* k_1 *et* k_2.

Pour démontrer le a), il suffit de voir que

$$I(\zeta) = \int_{D^2} \delta_{\partial D^2}(z)^{\alpha-1} \frac{(1-|\zeta_2|^2)^{k_1}(1-|\zeta_2|^2)^{k_2}}{|1-\bar{\zeta}_1 z_1|^{k_1}\, |1-\bar{\zeta}_2 z_2|^{k_2}\, |\zeta - z|^3} \leqslant C\, \delta_{\partial D^2}(\zeta)^\alpha .$$

Pour cela nous coupons cette intégrale en trois morceaux $I(\zeta) \leqslant I_1 + I_2 + I_3$: I_i, $i = 1, 2$ correspond à l'intégration réduite à $D^2 \cap \{|z_i| \leqslant \delta\}$ ($\delta > 0$ petit) et I_3 à l'intégration réduite à $D^2 \cap \{|z_1| > \delta\} \cap \{|z_2| > \delta\}$. Les majorations de I_1 et I_2 sont très simples : δ étant fixé > 0, pour $j \neq i$, on a, $i = 1, 2$,

$$I_i \leqslant C(1-|\zeta_i|^2)^{k_i} \int_{D^2 \cap \{|z_i| \leqslant \delta\}} \frac{(1-|z_j|^2)^{\alpha-1}(1-|\zeta_j|^2)^{k_j}}{|1-\bar{\zeta}_j z_j|^{k_j}\, |\zeta - z|^3}\, d\lambda(z)$$

$$\leqslant C(1-|\zeta_i|^2)^{k_i} \int_D d\lambda(z_j) \int_0^1 \frac{(1-|z_j|^2)^{\alpha-1}(1-|\zeta_j|^2)^{k_j}\, dr}{|1-\bar{\zeta}_j z_j|^{k_j}\, (r + |\zeta_j - z_j|)^2} ,$$

et, en utilisant le Lemme 1, a), il vient,

$$I_i \leqslant C(1-|\zeta_i|^2)^{k_i}(1-|\zeta_j|^2)^\alpha \leqslant C\, \delta_{\partial D^2}(\zeta)^\alpha .$$

Majorons maintenant la dernière intégrale

$$I_3 = \int_{D^2 \cap \{|z_1| > \delta\} \cap \{|z_2| > \delta\}} \frac{\delta_{\partial D^2}(z)^{\alpha-1}(1-|\zeta_1|^2)^{k_1}(1-|\zeta_2|^2)^{k_2}}{|1-\bar{\zeta}_1 z_1|^{k_1}\, |1-\bar{\zeta}_2 z_2|^{k_2}\, |\zeta - z|^3}\, d\lambda(z) .$$

Compte-tenu du domaine d'intégration de I_3, si on pose $u_i = 1 - |\zeta_i|^2$, $v_i = 1 - |z_i|^2$, $\theta_i = \frac{1}{\pi}\left|\operatorname{Arg} \frac{z_i}{\zeta_i}\right|$, la majoration cherchée est équivalente à la majoration suivante :

$$I'_3 = \int_{[0,1]^4} \frac{[\min(v_1, v_2)]^{\alpha-1} u_1^{k_1} u_2^{k_2} \, dv_1 \, d\theta_1 \, dv_2 \, d\theta_2}{(u_1 + v_1 + \theta_1)^{k_1} (u_2 + v_2 + \theta_2)^{k_2} [|u_1 - v_1| + \theta_1 + |u_2 - v_2| + \theta_2]^3}$$
$$\leqslant C \min(u_1^\alpha, u_2^\alpha) .$$

Compte-tenu de la symétrie, il suffit de considérer le cas $u_1 \leqslant u_2$: posons alors $v_i = u_i x_i$, $\theta_i = u_i y_i$, $i = 1, 2$; il vient

$$I'_3 \leqslant \int_{[0,+\infty[^4} \frac{[\min(u_1 x_1, u_2 x_2)]^{\alpha-1} u_1^2 u_2^2 \, dx_1 \, dy_1 \, dx_2 \, dy_2}{(1 + x_1 + y_1)^{k_1} (1 + x_2 + y_2)^{k_2} [u_1(|1 - x_1| + y_1) + u_2(|1 - x_2| + y_2)]^3}$$

$$= u_1^{\alpha+1} u_2^2 \int_{\{x_1 < \frac{u_2}{u_1} x_2\}} \frac{x_1^{\alpha-1} \, dx_1 \, dy_1 \, dx_2 \, dy_2}{(1 + x_1 + y_1)^{k_1} (1 + x_2 + y_2)^{k_2} \left[\sum_{i=1}^{2} u_i(|1 - x_i| + y_i)\right]^3}$$

$$+ u_2^{\alpha+1} u_1^2 \int_{\{x_2 < \frac{u_1}{u_2} x_1\}} \frac{x_2^{\alpha-1} \, dx_1 \, dy_1 \, dx_2 \, dy_2}{(1 + x_1 + y_1)^{k_1} (1 + x_2 + y_2)^{k_2} \left[\sum_{i=1}^{2} u_i(|1 - x_i| + y_i)\right]^3}$$

$$= J_1 + J_2 .$$

Majorons séparément J_1 et J_2 :

$$J_1 \leqslant u_1^\alpha \frac{u_1}{u_2} \int_{[0,+\infty[^3} \frac{x_1^{\alpha-1} \, dx_1 \, dy_1 \, dx_2}{(1 + x_1 + y_1)^{k_1} (1 + x_2)^{k_2} \left[\frac{u_1}{u_2}(|1 - x_1| + y_1) + |1 - x_2|\right]^2}$$

$$\leqslant u_1^\alpha \int_{[0,+\infty[^2} \frac{x_1^{\alpha-1} \, dx_1 \, dy_1}{(1 + x_1 + y_1)^{k_1} (|1 - x_1| + y_1)}$$

$$+ C u_1^\alpha \int_{\{x_2 > 2\}} \frac{x_1^{\alpha-1} \, dx_1 \, dy_1 \, dx_2}{(1 + x_1 + y_1)^{k_1} (1 + x_2)^{k_2} x_2 (|1 - x_1| + y_1)}$$

$\leqslant C u_1^\alpha$, pour $k_2 > 0 , 0 < \alpha < k_1$.

Majorons maintenant J_2 : en posant $x_2 = \dfrac{u_1}{u_2} x_1 t$, il vient, avec $D = u_1(|1 - x_1| + y_1) + u_2 \left(\left|1 - \dfrac{u_1}{u_2} x_1 t\right| + y_2\right)$,

$$J_2 \leqslant \int_{\substack{(x_1, y_1, y_2) \in [0,+\infty[^3 \\ t \in [0,1]}} \frac{u_1^{\alpha+2} u_2 x_1^\alpha t^{\alpha-1} \, dx_1 \, dy_1 \, dt \, dy_2}{(1 + x_1 + y_1)^{k_1} D^3}$$

$$= u_1^\alpha \left(\frac{u_1}{u_2}\right)^2$$

$$\int_{\substack{(x_1,y_1)\in[0,+\infty[^2 \\ t\in[0,1]}} \frac{x_1^\alpha\, t^{\alpha-1}\, dx_1\, dy_1\, dt}{(1+x_1+y_1)^{k_1}\left[\frac{u_1}{u_2}(|1-x_1|+y_1)+|1-\frac{u_1}{u_2}\,x_1 t|\right]^2}$$

$$\leqslant C\, u_1^\alpha \int_{\substack{x_1\in[2,+\infty[\\ y_1\in[0,+\infty[}} \frac{x_1^\alpha\, dx_1\, dy_1}{(1+x_1+y_1)^{k_1}\,(|1-x_1|+y_1)^2}$$

$$+ u_1^\alpha \int_{\substack{t\in[0,1/4] \\ x_1\in[0,2] \\ y_1\in[0,+\infty[}} \frac{x_1^\alpha\, t^{\alpha-1}\, dx_1\, dy_1\, dt}{(1+x_1+y_1)^{k_1}\left(|1-x_1|+y_1+\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$+ C\, u_1^\alpha\, \frac{u_1}{u_2} \int_{\substack{s\in[-1,1] \\ x_1\in[0,2] \\ y\in[0,+\infty[}} \frac{x_1^{\alpha-1}\, dx_1\, dy_1\, ds}{(1+x_1+y_1)^{k_1}\left[\frac{u_1}{u_2}(|1-x_1|+y_1)+|s|\right]^2}$$

$\leqslant C\, u_1^\alpha$, pour $0 < \alpha < k_1$.

Montrons maintenant la seconde partie du lemme 2. Il faut voir que

$$\int_{D\times T} \frac{(1-|\zeta_1|^2)^{k_1}\,(1-|\zeta_2|^2)^{k_2}}{|1-\bar\zeta_1 z_1|^{k_1}\,|1-\bar\zeta_2 z_2|^{k_2}\,|\zeta-z|^3}\, d\sigma(z) \leqslant C.$$

On peut restreindre le domaine d'intégration à

$$D\times \mathbf{T} \cap \{|z_1|>\delta\},$$

l'intégration sur $D\times\mathbf{T}\cap\{|z_1|\leqslant\delta\}$ étant majorée grâce au Lemme 1, b). Avec les notations précédentes, on se ramène à voir que :

$$\int_{[0,1]^3} \frac{u_1^{k_1}\, u_2^{k_2}\, dv_1\, d\theta_1\, d\theta_2}{(u_1+v_1+\theta_1)^{k_1}\,(u_2+\theta_2)^{k_2}\,[(|u_1-v_1|+\theta_1)+(u_2+\theta_2)]^3} \leqslant C.$$

Le même changement de variable que précédemment nous amène à montrer la majoration suivante :

$$\frac{u_2}{u_1} \int_{[0,+\infty[^3} \frac{dx_1\, dy_1\, dy_2}{(1+x_1+y_1)^{k_1}\,(1+y_2)^{k_2}\, D^3} \leqslant C,$$

où $D = \left(|1-x_1|+y_1+\frac{u_2}{u_1}(1+y_2)\right)$, ce qui s'obtient immédiatement en intégrant d'abord par rapport à x_1 et y_1.

LEMME 3. – a) *Pour* $0 < \alpha < \min(k_1, k_2) - 1$, *et pour* $i = 1, 2$, *on a :*

$$\int_{D^2} \delta_{\partial D^2}(z)^{\alpha-1} |L_i(\zeta, z)| \, d\lambda(z) \leqslant C \, \delta_{\partial D^2}(\zeta)^{\alpha},$$

où C *ne dépend que de* α, k_1 *et* k_2.

b) $\int_{\partial D^2} |L_i(\zeta, z)| \, d\sigma(z) \leqslant C$, C *ne dépendant que de* $k_1 > 1$ *et* $k_2 > 1$.

c) *Pour* $0 < \alpha < \min(k_1, k_2)$ *et pour* $i = 1, 2$, *on a*

$$\int_{\Delta} \delta_{T^2}(z)^{\alpha-1} |L_i(\zeta, z)| \leqslant C \, \delta_{\partial D^2}(\zeta)^{\alpha-1},$$

où $\Delta = \{(z_1, z_2) \in D^2$ t.q. $|z_1| = |z_2|\}$ *et* C *ne dépend que de* k_1, k_2 *et* α.

Montrons le a) pour $i = 1$:

$$I(\zeta) = \int_{D^2} \delta_{\partial D^2}(z)^{\alpha-1} \frac{(1-|\zeta_1|^2)^{k_1}(1-|\zeta_2|^2)^{k_2-1}|\zeta_2 - z_2|^2}{|1-\bar{\zeta}_1 z_1|^{k_1} |z_1 - \zeta_1| \, |1-\bar{\zeta}_2 z_2)^{k_2+1} |\zeta - z|^2} d\lambda(z) \leqslant C \, \delta_{\partial D^2}(\zeta)^{\alpha}.$$

Comme dans le lemme précédent, on découpe le domaine d'intégration en trois morceaux, $D_2 \cap \{|z_1| \leqslant \delta\}$, $D_2 \cap \{|z_2| \leqslant \delta\}$ et $D_2 \cap \{|z_1| > \delta\} \cap \{|z_2| > \delta\}$, où δ est fixé assez petit. Les intégrales sur les deux premiers domaines se majorent facilement (Lemme 1, a)). Considérons donc l'intégrale sur le troisième domaine. Avec les mêmes notations que dans la démonstration du lemme précédent, il suffit de montrer la majoration suivante :

$$I' = \int_{[0,1]^4} \frac{[\min(v_1, v_2)]^{\alpha-1} u_1^{k_1} u_2^{k_2-1} (|u_2 - v_2| + \theta_2)^2 \, dv_1 \, d\theta_1 \, dv_2 \, d\theta_2}{(u_1 + v_1 + \theta_1)^{k_1} (|u_1 - v_1| + \theta_1)(u_2 + v_2 + \theta_2)^{k_2+1} \sum_{i=1}^{2} (|u_i - v_i| + \theta_i)^2} \leqslant C \min(u_1^{\alpha}, u_2^{\alpha}).$$

En posant $v_i = u_i x_i$ et $\theta_i = u_i y_i$, $i = 1, 2$, il vient :

$$I' \leqslant \int_{[0,+\infty[^4} \frac{[\min(u_1 x_1, u_2 x_2)]^{\alpha-1} u_1 u_2^2 (|1 - x_2| + y_2)^2 \, dx_1 \, dy_1 \, dx_2 \, dy_2}{(1 + x_1 + y_1)^{k_1} (|1 - x_1| + y_1)(1 + x_2 + y_2)^{k_2+1} \sum_{i=1}^{2} u_i^2 (|1 - x_i| + y_i)^2}$$

$$= u_1^\alpha \int_{\{x_1 < \frac{u_2}{u_1} x_2\}} \frac{x_1^{\alpha-1} (|1-x_2|+y_2)^2\, dx_1 dy_1 dx_2 dy_2}{(1+x_1+y_1)^{k_1} (|1-x_1|+y_1)(1+x_2+y_2)^{k_2+1}\, \mathrm{D}}$$

$$+ u_2^\alpha \frac{u_1}{u_2} \int_{\{x_2 < \frac{u_1}{u_2} x_1\}} \frac{x_2^{\alpha-1} (|1-x_2|+y_2)^2\, dx_1 dy_1 dx_2 dy_2}{(1+x_1+y_1)^{k_1} (|1-x_1|+y_1)(1+x_2+y_2)^{k_2+1}\, \mathrm{D}}$$

$$= \mathrm{J}_1 + \mathrm{J}_2\,, \text{ où } \mathrm{D} = \left(\frac{u_1}{u_2}\right)^2 (|1-x_1|+y_1)^2 + (|1-x_2|+y_2)^2 .$$

Supposons tout d'abord $u_1 \leqslant u_2$: on a immédiatement

$$\mathrm{J}_1 \leqslant u_1^\alpha \int_{[0,+\infty[^4} \frac{x_1^{\alpha-1}\, dx_1\, dy_1\, dx_2\, dy_2}{(1+x_1+y_1)^{k_1} (|1-x_1|+y_1)(1+x_2+y_2)^{k_2+1}}$$

$$\leqslant \mathrm{C}\, u_1^\alpha\,,$$

pour $0 < \alpha < \min(k_1, k_2) - 1$; d'autre part, en faisant le changement de variable $x_2 = \frac{u_1}{u_2} x_1 t$ il vient

$$\mathrm{J}_2 \leqslant u_1^\alpha \frac{u_1}{u_2} \int_{[0,+\infty[^3} \frac{x_1^\alpha\, dx_1\, dy_1\, dy_2}{(1+x_1+y_1)^{k_1} (|1-x_1|+y_1)(1+y_2)^{k_2+1}}$$

$$\leqslant \mathrm{C}\, u_1^\alpha\,,$$

pour $0 < \alpha < \min(k_1, k_2) - 1$.

Supposons maintenant $u_2 \leqslant u_1$: en posant $x_1 = \frac{u_2}{u_1} x_2 t$, il vient :

$$\mathrm{J}_1 \leqslant u_2^\alpha \int_{\substack{(y_1, x_2, y_2) \in [0,+\infty[^3 \\ t \in [0,1]}} \frac{x_2^\alpha\, t^{\alpha-1}\, dt\, dy_1 dx_2 dy_2}{\left(1 + \frac{u_2}{u_1} x_2 t + y_1\right)^{k_1} \left(\left|1 - \frac{u_2}{u_1} x_2 t\right| + y_1\right)(1+x_2+y_2)^{k_2+1}}$$

$$\leqslant u_2^\alpha \int_{\{y_1 > 1\}} \frac{x_2^\alpha\, t^{\alpha-1}\, dt\, dy_1\, dx_2\, dy_2}{y_1^{k_1+1} (1+x_2+y_2)^{k_2+1}}$$

$$+ u_2^\alpha \int_{\{y_1 \leqslant 1\}} \frac{x_2^\alpha\, t^{\alpha-1}\, dt\, dx_2\, dy_2\, dy_1}{\left(\left|1 - \frac{u_2}{u_1} x_2 t\right| + y_1\right)(1+x_2+y_2)^{k_2+1}}$$

$$\leqslant C\, u_2^\alpha + u_2^\alpha \int_{\{\frac{u_2}{u_1}x_2<2\}} \frac{x_2^\alpha\, t^{\alpha-1}\, \mathrm{Log}\left|1-\frac{u_2}{u_1}x_2 t\right|^{-1} dt\, dx_2\, dy_2}{(1+x_2+y_2)^{k_2+1}}$$

$$+ u_2^\alpha \int_{\{\frac{u_2}{u_1}x_2\geqslant 2\}} \frac{x_2^\alpha\, t^{\alpha-1} \left|\mathrm{Log}\left|1-\frac{u_2}{u_1}x_2 t\right|\right| dt\, dx_2\, dy_2}{(1+x_2+y_2)^{k_2+1}}$$

$$\leqslant C\, u_2^\alpha + C\, u_2^\alpha \int_{\{x_2>2\}} \frac{x_2^\alpha (\mathrm{Log}\, x_2)^2\, dx_2\, dy_2}{(1+x_2+y_2)^{k_2+1}} \leqslant C\, u_2^\alpha\,,$$

pour $0<\alpha<\min(k_1,k_2)-1$.

Enfin, si $D=(|1-x_1|+y_1)^2+\left(\frac{u_2}{u_1}\right)^2(|1-x_2|+y_2)^2$

$$J_2 = u_2^\alpha \frac{u_2}{u_1}\int_{[0,+\infty[^4} \frac{x_2^{\alpha-1}(|1-x_2|+y_2)^2\, dx_1\, dy_1\, dx_2\, dy_2}{(1+x_1+y_1)^{k_1}(|1-x_1|+y_1)(1+x_2+y_2)^{k_2+1}\, D}$$

$$\leqslant C\, u_2^\alpha \frac{u_2}{u_1}\int_{[0,+\infty[^3} \frac{x_2^{\alpha-1}(|1-x_2|+y_2)^2\, dx_2\, dy_2\, dr}{(1+x_2+y_2)^{k_2+1}\left[r^2+\left(\frac{u_2}{u_1}\right)^2(|1-x_2|+y_2)^2\right]}$$

$$\leqslant C\, u_2^\alpha \int_{[0,+\infty[^2} \frac{x_2^{\alpha-1}(|1-x_2|+y_2)\, dx_2\, dy_2}{(1+x_2+y_2)^{k_2+1}} \leqslant C\, u_2^\alpha\,,$$

pour $0<\alpha<\min(k_1,k_2)-1$.

Démontrons maintenant le b) pour $i=1$:

$$\int_{D\times T} |L_1(\zeta,z)|\, d\sigma(z) = I_1 \leqslant C\,, \quad \text{et} \int_{T\times D} |L_1(\zeta,z)|\, d\sigma(z) = I_2 \leqslant C.$$

On a

$$I_1 = \int_{D\times T} \frac{(1-|\zeta_1|^2)^{k_1}(1-|\zeta_2|^2)^{k_2-1}\, d\sigma(z)}{|1-\bar\zeta_1 z_1|^{k_1}\,|\zeta_1-z_1|\,|1-\bar\zeta_2 z_2|^{k_2-1}\,|\zeta-z|^2}\;;$$

l'intégrale restreinte au domaine $D\times T\cap\{|z_1|\leqslant\delta\}$ se majore aisément (Lemme 1, b), il suffit donc de considérer l'intégrale réduite à $D\times T\cap\{|z_1|>\delta\}$. En faisant les deux changements de variables déjà utilisés dans les calculs précédents, on se ramène à montrer que

$$\mathrm{I}'_1 = \frac{u_2}{u_1} \int_{[0,+\infty[^3} \frac{dx_1\, dy_1\, dy_2}{(1+x_1+y_1)^{k_1} (|1-x_1|+y_1)(1+y_2)^{k_2-1}\,\mathrm{D}} \leqslant \mathrm{C}$$

où $\mathrm{D} = (|1-x_1| + y_1)^2 + \left(\frac{u_2}{u_1}\right)^2 (1+y_2)^2$.

Or,

$$\mathrm{I}'_1 \leqslant \frac{u_2}{u_1} \int_{[0,+\infty[^2} \frac{dr\, dy_2}{(1+y_2)^{k_2-1}\left[r^2 + \left(\frac{u_2}{u_1}\right)^2 (1+y_2)^2\right]}$$

$$+\,\mathrm{C} \int_{\{|(x_1,y_1)-(1,0)|>1\}} \frac{dx_1\, dy_1}{(1+x_1+y_1)^{k_1} (|1-x_1|+y_1)^2} \leqslant \mathrm{C},$$

pour $\min(k_1, k_2) > 1$.

D'autre part,

$$\mathrm{I}_2 = \int_{\mathrm{T}\times\mathrm{D}} \frac{(1-|\zeta_1|^2)^{k_1} (1-|\zeta_2|^2)^{k_2-1} |\zeta_2 - z_2|^2}{|1-\bar{\zeta}_1 z_1|^{k_1+1} |1-\bar{\zeta}_2 z_2|^{k_2+1} |\zeta - z|^2}\, d\sigma(z),$$

donc,

$$\mathrm{I}_2 \leqslant \int_{\mathrm{T}\times\mathrm{D}} \frac{(1-|\zeta_1|^2)^{k_1} (1-|\zeta_2|^2)^{k_2-1}}{|1-\bar{\zeta}_1 z_1|^{k_1+1} |1-\bar{\zeta}_2 z_2|^{k_2+1}}\, d\sigma(z),$$

et un calcul très simple donne aussitôt $\mathrm{I}_2 \leqslant \mathrm{C}$ pour $\min(k_1, k_2) > 1$.

Démontrons enfin le c) pour $i = 1$:

$$\mathrm{I} = \int_{\Delta} \frac{(1-|z_1|^2)^{\alpha-1} (1-|\zeta_1|^2)^{k_1} (1-|\zeta_2|^2)^{k_2-1} |\zeta_2 - z_2|^2}{|1-\bar{\zeta}_1 z_1|^{k_1} |z_1 - \zeta_1| |1-\bar{\zeta}_2 z_2)^{k_2+1} |\zeta - z|^2}\, d\sigma(z)$$
$$\leqslant \mathrm{C}\, \delta_{\partial \mathrm{D}^2}(z)^{\alpha-1}.$$

Comme dans les calculs précédents, nous coupons le domaine d'intégration en deux, $\mathrm{I} \leqslant \mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2$, en intégrant tout d'abord sur $\Delta \cap \{|z_1| = |z_2| \leqslant \delta\}$ puis sur $\Delta \cap \{|z_1| = |z_2| > \delta\}$. La première intégrale se majore aisément

$$\mathrm{I}_1 \leqslant \mathrm{C}(1-|\zeta_1|^2)^{k_1} (1-|\zeta_2|^2)^{k_2-1} \int_{\mathrm{D}\cap\{|z_1|<\delta\}} \frac{(1-|z_1|^2)^{\alpha-1}}{|z_1 - \zeta_1|}\, d\sigma(z)$$

$$\leqslant \mathrm{C}(1-|\zeta_1|^2)^{k_1} (1-|\zeta_2|^2)^{k_2-1}$$

$$\leqslant \mathrm{C}\, \delta_{\partial\mathrm{D}^2}(\zeta)^{\alpha-1}, \qquad \text{pour } 0 < \alpha < \min(k_1, k_2).$$

Majorons enfin I_2 : en utilisant les mêmes changements de variables qu'auparavant on se ramène à voir la majoration suivante :

$$I'_2 = \int_{[0,1]^3} \frac{v^{\alpha-1} u_1^{k_1} u_2^{k_2-1} (|u_2 - v| + \theta_2)^2 \, dv \, d\theta_1 \, d\theta_2}{(u_1, v + \theta_1)^{k_1} (|u_1 - v| + \theta_1)(u_2 + v + \theta_2)^{k_2+1} \sum_{i=1}^{2} (|u_i - v| + \theta_i)^2} \leqslant C(\min(u_1, u_2))^{\alpha-1} .$$

Supposons tout d'abord $u_1 \leqslant u_2$; en faisant le changement de variables $v = u_1 x$, $\theta_i = u_1 y_i$, $i = 1, 2$, il vient :

$$I'_2 \leqslant u_1^{\alpha-1} \left(\frac{u_2}{u_1}\right)^{k_2-1} \int_{[0,+\infty[^2} \frac{x^{\alpha-1} \, dx \, dy_1}{(1 + x + y_1)^{k_1} (|1 - x| + y_1)\left(\frac{u_2}{u_1} + x\right)^{k_2}}$$

$$\leqslant u_1^{\alpha-1} \int_{[0,+\infty[^2} \frac{x^{\alpha-1} \, dx \, dy_1}{(1 + x + y_1)^{k_1} (|1 - x| + y_1)} \leqslant C \, u_1^{\alpha-1}$$

pour $0 < \alpha < \min(k_1, k_2)$.

Supposons maintenant $u_2 \leqslant u_1$: en posant $v = u_2 x$, $\theta_i = u_2 y_i$, il vient, avec $D = \left(\left|\frac{u_1}{u_2} - x\right| + y_1\right)^2 + (|1 - x| + y_2)^2$,

$$I'_2 = u_2^{\alpha-1} \left(\frac{u_1}{u_2}\right)^{k_1} \int_{[0,+\infty[^3} \frac{x^{\alpha-1} (|1 - x| + y_2)^2 \, dx \, dy_1 \, dy_2}{\left(\frac{u_1}{u_2} + x + y_1\right)^{k_1} \left(\left|\frac{u_1}{u_2} - x\right| + y_1\right)(1 + x + y_2)^{k_2+1} \, D}$$

$$\leqslant C \, u_2^{\alpha-1} \int_{\{\left|\frac{u_1}{u_2} - x\right| + y_1 < 1/2\}} \frac{x^{\alpha-1} \, dx \, dy_1}{\left(\left|\frac{u_1}{u_2} - x\right| + y_1\right) (1 + x)^{k_2}}$$

$$+ u_2^{\alpha-1} \int_{\{\left|\frac{u_1}{u_2} - x\right| + y_1 > 1/2\}} \frac{x^{\alpha-1} (|1 - x| + y_2)}{\left(\left|\frac{u_1}{u_2} - x\right| + y_1\right)^2 (1 + x + y_2)^{k_2+1}} \, dx \, dy_1 \, dy_2$$

$$\leqslant C \, u_2^{\alpha-1} \int_{\{\left|\frac{u_1}{u_2} - x\right| + y_1 < 1/2\}} \frac{dx \, dy_1}{\left|\frac{u_1}{u_2} - x\right| + y_1}$$

$$+ 4 u_2^{\alpha-1} \int_{[0,+\infty[^3} \frac{x^{\alpha-1} (|1 - x| + y_2) \, dx \, dy_1 \, dy_2}{\left(\frac{1}{2} + y_1\right)^2 (1 + x + y_2)^{k_2+1}}$$

$\leqslant C u_2^{\alpha-1}$, pour $0 < \alpha < \min(k_1, k_2)$.

Nous aurons encore besoin d'une autre estimation de ces noyaux.

LEMME 1. – *Soit* f *une fonction continue dans* $\bar{D}^2$. *Alors les intégrales* $\int_D f(\zeta) H_i(\zeta_i, z_i)\, d\lambda(\zeta_i)$, $\int_{D^2} f(\zeta) K_i(\zeta, z)\, d\lambda(\zeta)$, *et* $\int_{D^2} f(\zeta) L_i(\zeta, z)\, d\lambda(\zeta)$, *où* K_i *est la i-ème composante de* K, $i = 1, 2$, *sont des fonctions continues dans* $\bar{D}^2$.

En effet, montrons par exemple ce lemme pour les noyaux $A(\zeta, z) = K_i(\zeta, z)$ ou $L_i(\zeta, z)$. En tout point $z_0 \in \bar{D}^2$, $A(\zeta, z)$ est continu en z pour presque tout $\zeta \in D^2$. Alors, d'après le théorème de Vitali (cf. J. Neveu, Théorie des probabilités, Prop. II.5.4), il suffit de vérifier que la famille de fonctions $\zeta \longrightarrow A(\zeta, z)$, $z \in \bar{D}^2$, est équi-intégrable sur D^2 c'est-à-dire que

$$\lim_{\epsilon \to 0} \sup_{z \in D^2} \int_{D^2 \cap \{|A(\zeta,z)| > 1/\epsilon\}} |A(\zeta, z)|\, d\lambda(\zeta) = 0.$$

Mais ceci est évident car

$$|K_i(\zeta, z)| \leqslant \frac{C}{|\zeta - z|^3} \quad \text{et} \quad |L_i(\zeta, z)| \leqslant \frac{C}{|z_i - \zeta_i|\, |\zeta - z|^2}.$$

Remarque. – Des calculs plus précis montrent facilement que les noyaux K_i et L_i envoient $L^\infty(D^2)$ dans l'espace de Lipschitz $H_\alpha(D^2)$ pour $\alpha < 1$. Naturellement une telle estimation n'est pas valable pour les noyaux H_i. En fait si f est une $(0, 1)$-forme $\bar{\partial}$-fermée dans D^2 qui n'est pas continue dans $\bar{D}^2$, il n'y a pas nécessairement de solution de l'équation $\bar{\partial} u = f$ qui est continue dans $\bar{D}^2$. Considérons par exemple la forme $f(\zeta) = h(\zeta_2)\, d\bar{\zeta}_1$ où $h(\zeta_2)$ est holomorphe dans D. On a bien $\bar{\partial} f = 0$ dans D^2. Supposons qu'il existe u continue dans $\bar{D}^2$ solution de l'équation $\bar{\partial} u = f$. Comme $\bar{\zeta}_1 h(\zeta_2)$ est aussi une solution de cette équation, on peut appliquer la formule de Cauchy en ζ_1 à la fonction holomorphe $\zeta_1 \longrightarrow u(\zeta_1, \zeta_2) - \bar{\zeta}_1 h(\zeta_2)$, ce qui donne pour $\zeta_2 \in D$, $\frac{1}{2i\pi} \int_T u(\zeta_1, \zeta_2)\, d\zeta_1 = h(\zeta_2)$. Il en résulte que h, doit être continue dans $\bar{D}$, c'est-à-dire que f doit être continue dans $\bar{D}^2$.

2. Estimations des coefficients d'un courant d'intégration vérifiant une condition de croissance.

Soit :

$\theta = i\,[\theta_{11}\, dz_1 \wedge d\overline{z_1} + \theta_{21}\, dz_2 \wedge d\overline{z_1} + \theta_{12}\, dz_1 \wedge d\overline{z_2} + \theta_{22}\, dz_2 \wedge d\overline{z_2}]$
un courant positif fermé de bidegré $(1, 1)$ dans D^2. Pour tout $\alpha > 0$, posons $A(\theta, \alpha) = \int_{D^2} \delta_{\partial D^2}(z)^\alpha\, (\theta_{11}(z) + \theta_{22}(z)) \leqslant +\infty$.

LEMME 5. – *Soit θ le courant d'intégration sur un sous-ensemble analytique de dimension pure 1 de D^2.*

a) *Soit $\alpha > 1$. Il existe $C > 0$ ne dépendant que de α, telle que :*

$$\int_{\{|z_1|<|z_2|\}} (1-|z_2|^2)^{\alpha-1}\,(1-|z_1|^2)\,(\theta_{11}(z) + |\theta_{21}(z)|) \leqslant C\, A\,(\theta, \alpha),$$

$$\int_{\{|z_2|<|z_1|\}} (1-|z_1|^2)^{\alpha-1}\,(1-|z_2|^2)\,(\theta_{22}(z) + |\theta_{12}(z)|) \leqslant C\, A\,(\theta, \alpha).$$

b) *Il existe une constante absolue $C > 0$ telle que :*

$$\int_{\{|z_1|<|z_2|\}} (1-|z_1|^2)\theta_{11}(z) + \int_{\{|z_2|<|z_1|\}} (1-|z_2|^2)\theta_{22}(z) \leqslant C\, A\,(\theta, 1).$$

c) *Soit $\beta \in]0,1[$. Il existe $C > 0$ ne dépendant que de β, telle que :*

$$\int_{\{|z_1|<|z_2|\}} (1-|z_1|^2)\,|\theta_{21}(z)| + \int_{\{|z_2|<|z_1|\}} (1-|z_2|^2)|\theta_{12}(z)| \leqslant C\, A\,(\theta, \beta).$$

En effet, régularisons tout d'abord θ en posant

$$\theta^\epsilon(z) = (\theta * \chi_\epsilon)\,((1-\epsilon)\, z),$$

où $\chi_\epsilon(z) = \epsilon^{-4}\, \chi\left(\frac{z}{\epsilon}\right)$, χ étant une fonction radiale positive de classe C^∞, d'intégrale 1 et à support dans $\{|z| < 1/2\}$. Un calcul fait dans [1] montre que pour $\mu > 0$ on a

$$\sup_{\epsilon>0} \int_{D^2} \delta_{\partial D^2}(z)^\mu\, (\theta_{11}^\epsilon(z) + \theta_{22}^\epsilon(z))\, d\lambda(z) \leqslant C\, A\,(\theta, \mu),$$

C étant une constante indépendante de ϵ. Soit φ_ϵ une fonction plurisousharmonique C^∞ dans $\overline{D}^2$ solution de l'équation $i\partial\bar\partial\varphi_\epsilon = \theta^\epsilon$.

On remarque tout d'abord que, d'après les résultats de [2], la finitude de $A(\theta_\epsilon, 1)$ équivaut à l'existence d'un majorant pour les intégrales $\int_{\partial D_r^2} \varphi_\epsilon(z)\, d\lambda(z)$, $r < 1$. Plus précisément, dans [2] (p. 40 et lemme 2) on montre les formules suivantes (pour $1/2 \leqslant r \leqslant 1$):

$$\int_{\partial D_r^2} \varphi_\epsilon(z)\, d\sigma(z) = 2\int_{1/2}^{r} t\, dt \left(\int_{T_t^2} \varphi_\epsilon(z)\, d\sigma(z)\right) + \int_{\partial D_{1/2}^2} \varphi_\epsilon(z)\, d\sigma(z)$$
$$+ 4\int_{1/2}^{r} \frac{dt}{t}\left(\int_{D_t^2} (\theta_{11}^\epsilon(z) + \theta_{22}^\epsilon(z))\, d\lambda(z)\right), \qquad (1)$$

$$\int_{1/2}^{r} t\, dt \left(\int_{T_t^2} \varphi_\epsilon(z)\, d\sigma(z)\right) = \left(\frac{r^2}{2} - \frac{1}{8}\right)\int_{T_{1/2}^2} \varphi_\epsilon(z)\, d\sigma(z)$$
$$+ 8\int_{1/2}^{r} t\, dt \int_{1/2}^{t} \frac{du}{u}\left(\int_{D_u \times T_u} \theta_{11}^\epsilon(z)\, d\sigma(z) + \int_{T_u \times D_u} \theta_{22}^\epsilon(z)\, d\sigma(z)\right). \qquad (2)$$

Appliquons maintenant la formule de Jensen en une variable tout d'abord par rapport à z_1 puis par rapport à z_2 ; il vient pour

$$\frac{1}{2} \leqslant r \leqslant 1:$$

$$\int_{(D_r \setminus D_{1/2}) \times T_r} \varphi_\epsilon(z)\, d\sigma(z) + \int_{T_r \times D_r} \varphi_\epsilon(z)\, d\sigma(z)$$
$$= \left(\frac{r^2}{2} - \frac{1}{8}\right)\int_{T_{1/2} \times T_r} \varphi_\epsilon(z)\, d\sigma(z) + \int_{T_{1/2} \times D_r} \varphi_\epsilon(z)\, d\sigma(z)$$
$$+ \int_{T_r} d\sigma(z_2) \int_{1/2}^{r} t\, dt \int_{1/2}^{t} \frac{du}{u} \int_{D_u} \theta_{11}^\epsilon(z)\, d\lambda(z_1)$$
$$+ \int_{D_r} d\lambda(z_2) \int_{1/2}^{r} \frac{du}{u} \int_{D_u} \theta_{11}^\epsilon(z)\, d\lambda(z_1),$$

$$\int_{D_r\times T_r} \varphi_\epsilon(z)\, d\sigma(z) + \int_{T_r\times(D_r\setminus D_{1/2})} \varphi_\epsilon(z)\, d\sigma(z)$$

$$= \int_{D_r\times T_{1/2}} \varphi_\epsilon(z)\, d\sigma(z) + \left(\frac{r^2}{2} - \frac{1}{8}\right) \int_{T_r\times T_{1/2}} \varphi_\epsilon(z)\, d\sigma(z)$$

$$+ \int_{D_r} d\lambda(z_1) \int_{1/2}^{r} \frac{du}{u} \int_{D_u} \theta_{22}^\epsilon(z)\, d\lambda(z_2)$$

$$+ \int_{T_r} d\sigma(z_1) \int_{1/2}^{r} t\, dt \int_{1/2}^{t} \frac{du}{u} \int_{D_u} \theta_{22}^\epsilon(z)\, d\lambda(z_2)\,.$$

Quitte à rajouter une constante à φ_ϵ, on peut supposer que $\int_{T_{1/2}^2} \varphi_\epsilon(z)\, d\sigma(z) = 0$. Alors les égalités ci-dessus, (1), (2) et la plurisousharmonicité de φ_ϵ entraînent qu'il existe une constante absolue C telle que pour $\frac{3}{4} \leqslant r \leqslant 1$, on a

$$\int_{D_r\times T_r} (r - |z_1|)^2\, \theta_{11}^\epsilon(z)\, d\sigma(z) + \int_{D_r^2} (r - |z_1|)\, \theta_{11}^\epsilon(z)\, d\lambda(z)$$

$$+ \int_{T_r\times D_r} (r - |z_2|)^2\, \theta_{22}^\epsilon(z)\, d\sigma(z) + \int_{D_r^2} (r - |z_2|)\, \theta_{22}^\epsilon(z)\, d\lambda(z)$$

$$\leqslant C \int_{1/2}^{r} dt \left(\int_{D_t^2} (\theta_{11}^\epsilon(z) + \theta_{22}^\epsilon(z))\, d\lambda(z)\right). \qquad (3)$$

Le b) du lemme 5 se déduit aussitôt de cette inégalité en faisant $r = 1$ puis en faisant tendre ϵ vers zéro.

D'autre part, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne $(|z_1| < |z_2|)$

$$(|z_2| - |z_1|)\, |\theta_{21}^\epsilon(z)| \leqslant \frac{(|z_2| - |z_1|)^2}{(1 - |z_2|)^\beta}\, \theta_{11}^\epsilon(z) + (1 - |z_2|)^\beta\, \theta_{22}^\epsilon(z)\,,$$

il vient donc

$$\int_{\{|z_1|<|z_2|\}\cap\{\frac{3}{4}\leqslant|z_2|\leqslant 1\}} (|z_2| - |z_1|)\, |\theta_{21}^\epsilon(z)|\, d\lambda(z)$$

$$\leqslant \int_{3/4}^{1} \frac{dr}{(1-r)^\beta} \int_{D_r\times T_r} (r - |z_1|)^2\, \theta_{11}^\epsilon(z)\, d\sigma(z) \qquad (4)$$

$$+ \int_{\{|z_1|<|z_2|\}} (1 - |z_2|)^\beta\, \theta_{22}^\epsilon(z)\, d\lambda(z)\,.$$

En remarquant que $|\theta^\epsilon_{21}(z)| \leqslant \frac{1}{2}(\theta^\epsilon_{11}(z) + \theta^\epsilon_{22}(z))$ implique

$$\int_{\{|z_1|<|z_2|\}} (1 - |z_2|)\, |\theta^\epsilon_{21}(z)|\, d\lambda(z) \leqslant \frac{1}{2}\int_{D^2} \delta_{\partial D^2}(z)\, (\theta^\epsilon_{11}(z) + \theta^\epsilon_{22}(z))\, d\lambda(z),$$

on voit que le c) du lemme 5 résulte aussitôt de (3) et (4) en faisant un passage à la limite lorsque $\epsilon \longrightarrow 0$.

Montrons enfin la première inégalité de a) du lemme 5 : en multipliant les deux membres de (3) par $(1-r)^{\alpha-2}$ et en intégrant par rapport à r entre $3/4$ et 1, il vient

$$\int_{\{|z_1|<|z_2|\}\cap\{\frac{3}{4}\leqslant|z_2|\leqslant 1\}} (1 - |z_2|)^{\alpha-2}\, (|z_2| - |z_1|)^2\, \theta^\epsilon_{11}(z)\, d\lambda(z) + \int_{\{|z_1|<|z_2|\}} (1 - |z_2|)^{\alpha-1}\, (|z_2| - |z_1|)\, \theta^\epsilon_{11}(z)\, d\lambda(z) \leqslant C\, A(\theta^\epsilon, \alpha) \leqslant C\, A(\theta, \alpha),$$

d'où on déduit :

$$\int_{\{|z_1|<|z_2|\}} (1 - |z_2|)^{\alpha-2}\, (1 - |z_1|)^2\, \theta^\epsilon_{11}(z)\, d\lambda(z) + \int_{\{|z_1|<|z_2|\}} (1 - |z_2|)^{\alpha-1}\, (1 - |z_1|)\, \theta^\epsilon_{11}(z)\, d\lambda(z) \leqslant C\, A(\theta, \alpha). \tag{5}$$

De plus l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$(1 - |z_2|)^{\alpha-1}\, (1 - |z_1|)\, |\theta^\epsilon_{21}(z)| \leqslant (1 - |z_2|)^{\alpha-2}\, (1 - |z_1|)^2\, \theta^\epsilon_{11}(z) + (1 - |z_2|)^{\alpha}\, \theta^\epsilon_{22}(z),$$

d'où on déduit :

$$\int_{\{|z_1|<|z_2|\}} (1 - |z_2|)^{\alpha-1}\, (1 - |z_1|)\, |\theta^\epsilon_{21}(z)|\, d\lambda(z) \leqslant C\, A(\theta, \alpha). \tag{6}$$

Un passage à la limite lorsque $\epsilon \longrightarrow 0$ donne l'inégalité cherchée, la seconde inégalité du a) se montre de la même manière en échangeant z_1 et z_2.

3. Démonstrations du théorème et de la proposition 1.

La démonstration des conditions suffisantes du théorème et de la proposition 1 suit pas à pas celle donnée dans [1].

Soit $\theta = i \sum_{i,j=1}^{2} \theta_{ij}\, dz_i \wedge d\bar{z}_j$ le courant d'intégration sur un sous-ensemble analytique de D^2, et, comme dans le paragraphe précédent, pour $\alpha > 0$, posons

$$A(\theta, \alpha) = \int_{D^2} \delta_{\partial D^2}(z)^\alpha \, (\theta_{11}(z) + \theta_{22}(z)).$$

Il s'agit de démontrer le lemme suivant.

LEMME 6. – a) *Soit* $\alpha > 1$. *Si* $A(\theta, \alpha) < +\infty$, *il existe une fonction plurisousharmonique* u *dans* D^2, *solution de l'équation* $i\partial\bar{\partial} u = \theta$, *telle que* $\int_{D^2} \delta_{\partial D^2}(z)^{\alpha-2}\, |u(z)|\, d\lambda(z) < \infty$.

b) *Supposons qu'il existe* $\beta \in]0, 1[$ *tel que* $A(\theta, \beta) < +\infty$. *Alors il existe une fonction plurisousharmonique* u *dans* D^2 *solution de l'équation* $i\partial\bar{\partial} u = \theta$, *telle que*

$$\sup_{r<1} \int_{\partial D^2} |u(rz)|\, d\sigma(z) < +\infty.$$

Commençons tout d'abord par régulariser le courant θ par convolution en posant $\theta^\epsilon = (\theta * \chi_\epsilon)((1-\epsilon)z)$, où

$$\chi_\epsilon(z) = \epsilon^{-1}\, \chi\left(\frac{z}{\epsilon}\right),$$

χ étant une fonction radiale de classe C^∞, d'intégrale 1 et à support dans la boule $\{|z| < 1/2\}$. Alors $\theta^\epsilon \in C^\infty(\overline{D^2})$, et un calcul fait dans [1] montre que θ^ϵ satisfait aux mêmes estimations que θ :

$$\sup_{\epsilon>0} \int_{D^2} \delta_{\partial D^2}(z)^\alpha \, (\theta_{11}^\epsilon(z) + \theta_{22}^\epsilon(z))\, d\lambda(z) \leq C\, A(\theta, \alpha),$$

pour $\alpha > 0$, C étant une constante indépendante de ϵ.

Le lemme 5 entraîne donc les estimations suivantes pour θ^ϵ :

$$(7)\quad \begin{cases} \text{Si } A(\theta\,,\alpha) < +\infty \text{ avec } \alpha > 1\,, \text{ on a :} \\ \sup\limits_{\epsilon>0} A(\theta^\epsilon\,,\alpha) < +\infty\,, \\ \sup\limits_{\epsilon>0} \displaystyle\int_{\{|z_1|<|z_2|\}} (1-|z_2|^2)^{\alpha-1}(1-|z_1|^2)\,(\theta^\epsilon_{11}(z) \\ \qquad\qquad + |\theta^\epsilon_{21}(z)|)\,d\lambda(z) < +\infty\,, \\ \sup\limits_{\epsilon>0} \displaystyle\int_{\{|z_1|<|z_2|\}} (1-|z_1|^2)^{\alpha-1}(1-|z_2|^2)\,(\theta^\epsilon_{22}(z) \\ \qquad\qquad + |\theta^\epsilon_{12}(z)|)\,d\lambda(z) < +\infty\,. \end{cases}$$

$$(8)\quad \begin{cases} \text{Si } \exists\, \beta \in]0\,,1[\text{ tel que } A(\theta\,,\beta) < +\infty\,, \text{ on a} \\ \sup\limits_{\epsilon>0} A(\theta^\epsilon\,,1) < +\infty\,, \\ \sup\limits_{\epsilon>0} \displaystyle\int_{\{|z_1|<|z_2|\}} (1-|z_1|^2)\,(\theta^\epsilon_{11}(z) \\ \qquad\qquad + |\theta^\epsilon_{21}(z)|)\,d\lambda(z) < +\infty\,, \\ \sup\limits_{\epsilon>0} \displaystyle\int_{\{|z_2|<|z_1|\}} (1-|z_2|^2)\,(\theta^\epsilon_{22}(z) \\ \qquad\qquad + |\theta^\epsilon_{12}(z)|)\,d\lambda(z) < +\infty\,. \end{cases}$$

Ensuite nous tronquons θ^ϵ au voisinage de l'origine : si u est une solution de $i\partial\bar\partial u = \theta^\epsilon$ dans $B = \{|z| < 1/2\}$ et si φ est une fonction C^∞ à support compact dans B et valant 1 au voisinage de l'origine, nous posons $u_1^\epsilon = \varphi u$, et $\theta^{\epsilon 2} = \theta^\epsilon - i\partial\bar\partial u_1^\epsilon$. Il est évident que $\theta^{\epsilon 2}$ vérifie les mêmes estimations (7) et (8) que θ^ϵ.

On résout maintenant l'équation $i\partial\bar\partial u_2^\epsilon = \theta^{\epsilon 2}$ de la manière habituelle ([1], [7]). On résout tout d'abord $idw^{\epsilon 2} = \theta^{\epsilon 2}$ par homotopie, puis, du fait que $\theta^{\epsilon 2}$ est réel, on remarque que $w^{\epsilon 2} = w^{\epsilon 2}_{0,1} - \overline{w^{\epsilon 2}_{0,1}}$, on résout ensuite $\bar\partial U_2^\epsilon = w^{\epsilon 2}_{0,1}$, et on a $u_2^\epsilon = 2\,\mathrm{Re}\, U_2^\epsilon$.

Puisque $\theta^{\epsilon 2}$ est nul au voisinage de l'origine, pour résoudre $idw^{\epsilon 2} = \theta^{\epsilon 2}$ on peut prendre l'homotopie classique de Poincaré (cf. [1], [7]). Alors $w^{\epsilon 2}_{0,1}$ est continue dans $\overline{D^2}$ et vérifie les estimations suivantes :

$$(9)\quad \begin{cases} \text{Si } A(\theta, \alpha) < +\infty \text{ avec } \alpha > 1, \text{ on a :} \\ \sup\limits_{\epsilon>0} \displaystyle\int_{D^2} \delta_{\partial D^2}(z)^{\alpha-1} (|(w^{\epsilon 2}_{0,1})_1| + |(w^{\epsilon 2}_{0,1})_2|)\, d\lambda(z) < +\infty, \\ \sup\limits_{\epsilon>0} \displaystyle\int_{\{|z_1|<|z_2|\}} (1-|z_2|^2)^{\alpha-2}(1-|z_1|^2) \\ \qquad\qquad |(w^{\epsilon 1}_{0,1})_1|\, d\lambda(z) < +\infty, \\ \sup\limits_{\epsilon>0} \displaystyle\int_{\{|z_2|<|z_1|\}} (1-|z_1|^2)^{\alpha-2}(1-|z_2|^2) \\ \qquad\qquad |(w^{\epsilon 2}_{0,1})_2|\, d\lambda(z) < +\infty. \end{cases}$$

$$(10)\quad \begin{cases} \text{Si } \exists\, \beta \in]0,1[\text{ tel que } A(\theta, \beta) < +\infty, \text{ on a} \\ \sup\limits_{\epsilon>0} \displaystyle\int_{D^2} |(w^{\epsilon 2}_{0,1})_1| + |(w^{\epsilon 2}_{0,1})_2|\, d\lambda(z) < +\infty, \\ \sup\limits_{\epsilon>0} \displaystyle\int_{D\times T} (1-|z_1|^2)\, |(w^{\epsilon 2}_{0,1})_1|\, d\lambda(z) < +\infty, \\ \sup\limits_{\epsilon>0} \displaystyle\int_{T\times D} (1-|z_2|^2)\, |(w^{\epsilon 2}_{0,1})_2|\, d\lambda(z) < +\infty. \end{cases}$$

Ces estimations s'obtiennent très facilement par un calcul analogue à celui fait par H. Skoda dans le lemme 3.1 du chapitre II de [7].

On résout ensuite l'équation $\bar\partial U^\epsilon_2 = w^{\epsilon 2}_{0,1}$ en utilisant les noyaux donnant les solutions minimales et que nous avons rappelés dans l'introduction

$$\begin{aligned} U^\epsilon_2(z) &= \frac{1}{2i\pi}\int_D (w^{\epsilon 2}_{0,1})_1 (\zeta_1, z_2)\, H_1(\zeta_1, z_1)\, d\overline{\zeta_1} \wedge d\zeta_1 \\ &+ \frac{1}{2i\pi}\int_D (w^{\epsilon 2}_{0,1})_2 (z_1, \zeta_2)\, H_2(\zeta_2, z_2)\, d\overline{\zeta_2} \wedge d\zeta_2 \\ &+ \frac{1}{4\pi^2}\int_{D^2} w^{\epsilon 2}_{0,1}(\zeta) \wedge K(\zeta, z) \\ &+ \frac{1}{4\pi^2}\int_{D^2} w^{\epsilon 2}_{0,1}(\zeta) \wedge (L_1(\zeta, z) - L_2(\zeta, z)) \\ &= I_1 + I_2 + I_3 + I_4 . \end{aligned}$$

Alors U^ϵ_2 est continue dans $\overline{D^2}$ (Lemme 4), et de plus, pour k_1 et k_2 assez grands :

Si $A(\theta, \alpha) < +\infty$ avec $\alpha > 1$,

$$\sup_{\epsilon > 0} \int_{D^2} \delta_{\partial D^2}^{\alpha - 2}(z)\, |U_2^\epsilon(z)|\, d\lambda(z) < +\infty, \tag{11}$$

Si $\exists\, \beta \in]0, 1[$ tel que $A(\theta, \beta) < +\infty$,

$$\sup_{\epsilon > 0} \int_{\partial D^2} |U_2^\epsilon(z)|\, d\lambda(z) < +\infty. \tag{12}$$

En effet, les majorations des intégrales I_3 et I_4 résultent aussitôt des hypothèses (9) et (10) et des lemmes 2 et 3. Les majorations de I_1 et I_2 se déduisent du lemme 1 : lorsque $\alpha > 1$, on a :

$$\int_{D^2} \delta_{\partial D^2}^{\alpha-2}(z)\, |I_1(z)|\, d\lambda(z) \leqslant \int_{\{|z_1| < |z_2|\}} (1 - |z_2|^2)^{\alpha - 2}\, |I_1(z)|$$
$$+ \int_{\{|z_1| < |z_1|\}} (1 - |z_1|^2)^{\alpha - 2}\, |I_1(z)| = I_1^1 + I_1^2.$$

$$I_1^1 \leqslant \int_D (1 - |z_2|^2)^{\alpha - 2}\, d\lambda(z_2)$$
$$\left\{ \int_D |(w_{0,1}^{\epsilon 2})_1\, (\zeta_1, z_2)|\, d\lambda(\zeta_1) \left[\int_{\{|z_1| < |z_2|\}} |H_1(\zeta_1, z_1)|\, d\lambda(z_1) \right] \right\}$$
$$\leqslant C \int_{D^2} (1 - |z_2|^2)^{\alpha - 2}\, \frac{(1 - |\zeta_1|^2)^{k_1}}{(1 - |\zeta_1|^2 + 1 - |z_2|^2)^{k_1 - 1}}\, |(w_{0,1}^{\epsilon 2})_1\, |\zeta_1, z_2)|$$
$$d\lambda(\zeta_1)\, d\lambda(z_2)$$
$$\leqslant C \int_{\{|\zeta_1| < |z_2|\}} (1 - |z_2|^2)^{\alpha - 2}\, (1 - |\zeta_1|^2)\, |(w_{0,1}^{\epsilon 2})_1\, (\zeta_1, z_2)|\, d\lambda(\zeta_1)\, d\lambda(\zeta_2)$$
$$+ C \int_{\{|z_2| < |z_1|\}} \left(\frac{1 - |z_2|^2}{1 - |\zeta_1|^2 + 1 - |z_2|^2} \right)^{\alpha - 2} \left(\frac{1 - |\zeta_1|^2}{1 - |\zeta_1|^2 + 1 - |z_2|^2} \right)^{k_1 - \alpha + 1}$$
$$(1 - |\zeta_1|^2)^{\alpha - 1}\, |(w_{0,1}^{\epsilon 2})_1\, (\zeta_1, z_2)|\, d\lambda(\zeta_1)\, d\lambda(z_2).$$

Ce qui, d'après (9) donne la majoration cherchée puisque dans $\{|z_2| < |\zeta_1|\}$ on a $\dfrac{1}{2} < \dfrac{1 - |z_2|^2}{1 - |\zeta_1|^2 + 1 - |z_2|^2} \leqslant 1$ et $\dfrac{1 - |\zeta_1|^2}{1 - |\zeta_1|^2 + 1 - |z_2|^2} < 1$. D'autre part,

$$I_1^2 \leqslant \int_D d\lambda(z_2)$$
$$\left\{ \int_D |(w_{0,1}^{\epsilon 2})_1\, (\zeta_1, z_2)|\, d\lambda(\zeta_1) \left[\int_{\{|z_1| > |z_2|\}} (1 - |z_1|^2)^{\alpha - 2} |H_1(\zeta_1, z_1)|\, d\lambda(z_1) \right] \right\}$$
$$\leqslant C \int_{D^2} \delta_{\partial D^2}(\zeta_1, z_2)^{\alpha - 1}\, |(w_{0,1}^{\epsilon 2})_1\, (\zeta_1, z_2)|\, d\lambda(\zeta_1)\, d\lambda(z_2),$$

ce qui donne finalement la majoration pour I_1 lorsque $\alpha > 1$.

L'estimation de (12) est immédiate pour I_1 ; d'après le lemme 1, on a :

$$\int_{D\times T} |I_1(z)|\, d\sigma(z) \leqslant C \int_{D\times T} (1-|\zeta_1|^2)\,|(w_{0,1}^{\epsilon 2})_1\,(\zeta_1, z_2)|\, d\sigma(z_2)\, d\lambda(\zeta_1),$$

$$\int_{T\times D} |I_1(z)|\, d\sigma(z) \leqslant C \int_{D^2} |(w_{0,1}^{\epsilon 2})_1\,(\zeta_1, z_2)|\, d\lambda(\zeta_1)\, d\lambda(z_2);$$

ce qui d'après (10) donne le résultat.

Les majorations de I_2 se font naturellement de manière identique.

Finalement $u_\epsilon = u_1^\epsilon + u_2^\epsilon$ est une fonction plurisousharmonique dans D^2 solution de $i\partial\bar{\partial} u_\epsilon = \theta^\epsilon$ telle que :

Si $A(\theta, \alpha) < +\infty$ avec $\alpha > 1$,

$$\sup_{\epsilon>0} \int_{D^2} \delta_{\partial D^2}^{\alpha-2}(z)\, |u_\epsilon(z)|\, d\lambda(z) < +\infty .$$

Si $\beta \in]0, 1[$ tel que $A(\theta, \beta) < +\infty$,

$$\operatorname*{Sup}_{\epsilon>0} \sup_{r<1} \int_{\partial D^2} |u_\epsilon(rz)|\, d\sigma(z) < +\infty .$$

On en déduit le lemme 6 par un argument classique de familles normales (cf. [7], p. 286) en faisant tendre ϵ vers zéro.

Remarque. – La démonstration de la proposition 1 que nous venons de donner montre qu'un sous-ensemble analytique de D^2, de courant d'intégration θ, est l'ensemble des zéros d'une fonction de la classe $N(\partial D^2)$ s'il vérifie les trois conditions suivantes :

$$A(\theta, 1) < +\infty, \quad \int_{\{|z_1|<|z_2|\}} (1-|z_1|^2)\,(\theta_{11}(z) + |\theta_{21}(z)|) < +\infty,$$

et,

$$\int_{\{|z_2|<|z_1|\}} (1-|z_2|^2)\,(\theta_{22}(z) + |\theta_{12}(z)|) < +\infty .$$

En utilisant le b) du Lemme 5 et en remarquant que $\theta_{21} = \bar{\theta}_{12}$, on voit que ces conditions sont équivalentes aux deux suivantes :

(i) $A(\theta, 1) < +\infty$

(ii) $\int_{D^2} \delta_{T^2}(z)\,(|\theta_{21}(z)| + |\theta_{12}(z)|) < +\infty$.

Nous avons vu que s'il existe $\beta \in]0, 1[$ tel que $A(\theta, \beta) < +\infty$, alors ces deux conditions sont satisfaites. En général la finitude d'un $A(\theta, \beta)$ n'est pas nécessaire pour avoir (i) et (ii). Par exemple si l'ensemble analytique ne dépend que d'une variable (i.e. $\theta = \theta_{11}\, dz_1 \wedge d\bar{z}_1$ ou $\theta = \theta_{22}\, dz_2 \wedge d\bar{z}_2$), la condition (ii) est trivialement satisfaite. Un exemple différent est fourni par une variété symétrique en z_1 et z_2 : si on prend pour ensemble analytique $X = \bigcup_1^\infty X_i$ où

$$X_i = \{(z_1, z_2) \in D^2 \text{ t.q. } z_1 + z_2 = 2a_i\},$$

avec $a_i \in D$ et $\lim_{i \to \infty} |a_i| = 1$, on voit aisément que $A(\theta, 1) < \infty$ équivaut à $\int_{D^2} \delta_{T^2}(z)\,(\theta_{11}(z) + \theta_{22}(z)) < +\infty$ et par suite la condition (ii) est une conséquence de la condition (i).

4. Démonstration de la proposition 2.

Le principe de la démonstration de la proposition 2 est le même que celui des démonstrations du théorème et de la proposition 1, mais la technique est un peu plus compliquée car les noyaux du $\bar{\partial}$ ne peuvent pas se majorer directement.

Avec les notations introduites précédemment, et notamment $A(\theta, \alpha)$, nous allons donc montrer le lemme suivant.

LEMME 7. – *Soit* $\alpha \in]0,1]$. $\theta = i \sum_{i,j=1}^{2} \theta_{ij}\, dz_i \wedge d\bar{z}_j$ *étant le courant d'intégration sur un sous-ensemble analytique complexe de* D^2, *si* $A(\theta, \alpha) < +\infty$, *il existe une fonction plurisousharmonique* u *dans* D^2, *solution de l'équation* $i\partial\bar{\partial}u = \theta$ *telle que*

$$\int_\Delta \delta_{T^2}^{\alpha-1}(z)\, |u(z)|\, d\sigma(z) < +\infty,$$

où $\Delta = \{(z_1, z_2) \in D^2 \text{ t.q. } |z_1| = |z_2|\}$.

Comme dans le paragraphe précédent, nous régularisons le courant θ par convolution, ce qui nous donne des courants positifs $\theta^\epsilon \in C^\infty(\overline{D}^2)$ tels que

$$\sup_{\epsilon>0} \int_{D^2} \delta^{\alpha}_{\partial D^2}(z)\,(\theta^\epsilon_{11}(z) + \theta^\epsilon_{22}(z))\,d\lambda(z) \leqslant C\,A(\theta,\alpha) < +\infty. \quad (13)$$

Nous résolvons ensuite l'équation $idw = \theta^\epsilon$ dans la boule $B = \left\{ |z| < \frac{1}{2} \right\}$, puis, φ étant une fonction C^∞ à support compact dans B et valant 1 au voisinage de l'origine nous posons $w^{1\epsilon} = \varphi w$. Posons $\theta^{2\epsilon} = \theta^\epsilon - idw^{1\epsilon}$. $\theta^{2\epsilon}$ est fermé, nul au voisinage de l'origine et vérifie l'estimation (13) satisfaite par θ^ϵ. Nous résolvons alors l'équation $idw^{2\epsilon} = \theta^{2\epsilon}$ en utilisant l'homotopie de Poincaré. Alors, si on pose $w^\epsilon = w^{1\epsilon} + w^{2\epsilon}$, on a $idw^\epsilon = \theta^\epsilon$ et de plus on a l'estimation suivante

$$\sup_{\epsilon>0} \int_{D^2} \delta^{\alpha-1}_{\partial D^2}(z)\,|w^\epsilon(z)|\,d\lambda(z) < +\infty, \quad (14)$$

où $|w^\epsilon(z)|$ désigne le module de l'une quelconque des composantes de w^ϵ.

Comme précédemment, w^ϵ s'écrit $w^\epsilon = w^\epsilon_{0,1} - \overline{w^\epsilon_{0,1}}$; $w^\epsilon_{0,1}$ est $\overline{\partial}$-fermée et si $\overline{\partial} U^\epsilon = w^\epsilon_{0,1}$, alors $u_\epsilon = 2\,\mathrm{Re}\,U^\epsilon$ est une solution de $i\partial\overline{\partial} u_\epsilon = \theta^\epsilon$. Nous résolvons donc l'équation $\overline{\partial}$ à l'aide des noyaux minimaux, c'est-à-dire que nous posons

$$\begin{aligned} U^\epsilon(z) &= \frac{1}{2i\pi}\int_D (w^\epsilon_{0,1})_1\,(\zeta_1, z_2)\,H_1(\zeta_1, z_1)\,\overline{d\zeta_1} \wedge d\zeta_1 \\ &+ \frac{1}{2i\pi}\int_D (w^\epsilon_{0,1})_2\,(z_1, \zeta_2)\,H_2(\zeta_2, z_2)\,\overline{d\zeta_2} \wedge d\zeta_2 \\ &+ \frac{1}{4\pi^2}\int_{D^2} w^\epsilon_{0,1}(\zeta) \wedge K(\zeta, z) \\ &+ \frac{1}{4\pi^2}\int_{D^2} w^\epsilon_{0,1}(\zeta) \wedge (L_1(\zeta, z) - L_2(\zeta, z)). \end{aligned} \quad (15)$$

L'essentiel de la démonstration du lemme 7 va consister à établir la majoration suivante.

LEMME 8. – *Sous les hypothèses du lemme 7, et avec les notations précédentes, en posant* $u_\epsilon = \mathrm{U}^\epsilon + \overline{\mathrm{U}^\epsilon} = 2\,\mathrm{Re}\,\mathrm{U}^\epsilon$, u_ϵ *est une fonction plurisousharmonique dans* D^2 *solution de* $i\partial\bar\partial u_\epsilon = \theta^\epsilon$, *et qui vérifie l'estimation suivante :*

$$\sup_{\epsilon>0} \int_{\Delta=\{|z_1|=|z_2|\}} \delta_{\mathrm{T}^2}^{\alpha-1}(z)\,|u_\epsilon(z)|\,d\sigma(z) < +\infty .$$

Posons $\mathrm{U}^\epsilon(z) = \mathrm{U}_1^\epsilon(z) + \mathrm{U}_2^\epsilon(z) + \mathrm{U}_3^\epsilon(z) + \mathrm{U}_4^\epsilon(z)$, où les $\mathrm{U}_i^\epsilon(z)$ représentent les quatre intégrales apparaissant dans l'expression (15) de $\mathrm{U}^\epsilon(z)$.

Remarquons tout de suite que, d'après (14), le lemme 3 c) donne aussitôt la majoration souhaitée pour U_4^ϵ :

$$\sup_{\epsilon>0} \int_\Delta \delta_{\mathrm{T}^2}^{\alpha-1}(z)\,|\mathrm{U}_4^\epsilon(z)|\,d\sigma(z) < +\infty . \tag{16}$$

Majorons maintenant $u_\epsilon^1(z) = 2\,\mathrm{Re}\,\mathrm{U}_1^\epsilon(z)$: puisque le noyau H_1 résout l'équation $\bar\partial$ dans le disque unité du plan complexe, on a $\dfrac{\partial \mathrm{U}_1^\epsilon}{\partial \bar z_1} = (w_{0,1}^\epsilon)_1$; or, de l'équation $id(w_{0,1}^\epsilon - \overline{w_{0,1}^\epsilon}) = \theta^\epsilon$ on tire $\theta_{11}^\epsilon = 2\,\mathrm{Re}\,\dfrac{\partial}{\partial \bar z_1}(w_{0,1}^\epsilon)_1$, par conséquent, on a $\dfrac{\partial^2 u_\epsilon^1}{\partial z_1\,\partial \bar z_1} = \theta_{11}^\epsilon$, ce qui montre que u_ϵ^1 et par suite $u_\epsilon^{1+} = \sup(u_\epsilon^1, 0)$ sont des fonctions continues dans $\overline{\mathrm{D}}^2$ et sous-harmoniques en z_1. Alors

$$\begin{aligned}
&\int_\Delta \delta_{\mathrm{T}^2}^{\alpha-1}(z)\,u_\epsilon^{1+}(z)\,d\sigma(z)\\
&\leqslant \mathrm{C}\int_0^1 (1-r^2)^{\alpha-1} r\,dr \int_{[0,2\pi]^2} u_\epsilon^{1+}(re^{i\theta_1}, re^{i\theta_2})\,d\theta_1\,d\theta_2\\
&\leqslant \mathrm{C}\int_0^1 (1-r^2)^{\alpha-1} r\,dr \int_{[0,2\pi]^2} u_\epsilon^{1+}(e^{i\theta_1}, re^{i\theta_2})\,d\theta_1\,d\theta_2\\
&\leqslant \mathrm{C}\int_0^1 (1-r^2)^{\alpha-1} r\,dr \int_{[0,2\pi]^2} |\mathrm{U}_1^\epsilon(e^{i\theta_1}, re^{i\theta_2})|\,d\theta_1\,d\theta_2\\
&\leqslant \mathrm{C}\int_{\mathrm{D}^2} (1-|z_2|^2)^{\alpha-1}\,|w_{0,1}^\epsilon(z)|\,d\lambda(z),
\end{aligned}$$

la dernière inégalité résultant du b) du lemme 1. En remarquant que

$\alpha - 1 \in]-1,0]$ entraîne $(1 - |z_2|^2)^{\alpha-1} \leqslant \delta_{\partial D^2}^{\alpha-1}(z)$, pour $z \in D^2$, d'après (14), on a

$$\sup_{\epsilon>0} \int_\Delta \delta_{T^2}^{\alpha-1}(z)\, u_\epsilon^{1\,+}(z)\, d\sigma(z) < +\infty. \tag{17}$$

De la même manière, on montre que

$$\sup_{\epsilon>0} \int_\Delta \delta_{T^2}^{\alpha-1}(z)\, u_\epsilon^{2\,+}(z)\, d\sigma(z) < +\infty, \tag{18}$$

où $u_\epsilon^{2+} = (2\,\mathrm{Re}\, U_2^\epsilon)^+$.

Nous allons maintenant estimer $u_\epsilon^3(z) = 2\,\mathrm{Re}\, U_3^\epsilon(z)$: on a

$$U_3^\epsilon(z) = \int_{D^2} w_{0,1}^\epsilon(\zeta) \wedge \left(\frac{1-|\zeta_1|^2}{1-\bar{\zeta}_1 z_1}\right)^{k_1} \left(\frac{1-|\zeta_2|^2}{1-\bar{\zeta}_2 z_2}\right)^{k_2} \frac{(\bar{\zeta}_1 - \bar{z}_1)\, d\bar{\zeta}_2 - (\bar{\zeta}_2 - \bar{z}_2)\, d\bar{\zeta}_1}{|\zeta - z|^4} \wedge d\zeta_1 \wedge d\zeta_2$$

$$= \int_{D^2} w_{0,1}^\epsilon(\zeta) \wedge \left[\left(\frac{1-|\zeta_1|^2}{1-\bar{\zeta}_1 z_1}\right)^{k_1} \left(\frac{1-|\zeta_2|^2}{1-\bar{\zeta}_2 z_2}\right)^{k_2} - \left|\frac{1-|\zeta_1|^2}{1-\bar{\zeta}_1 z_1}\right|^{k_1} \left|\frac{1-|\zeta_2|^2}{1-\bar{\zeta}_2 z_2}\right|^{k_2}\right] \frac{(\bar{\zeta}_1 - \bar{z}_1)\, d\bar{\zeta}_2 - (\bar{\zeta}_2 - \bar{z}_2)\, d\bar{\zeta}_1}{|\zeta - z|^4} \wedge d\zeta_1 \wedge d\zeta_2$$

$$+ \int_{D^2} w_{0,1}^\epsilon(\zeta) \wedge \left|\frac{1-|\zeta_1|^2}{1-\bar{\zeta}_1 z_1}\right|^{k_1} \left|\frac{1-|\zeta_2|^2}{1-\bar{\zeta}_2 z_2}\right|^{k_2} \frac{(\bar{\zeta}_1 - \bar{z}_1)\, d\bar{\zeta}_2 - (\bar{\zeta}_2 - \bar{z}_2)\, d\bar{\zeta}_1}{|\zeta - z|^4} \wedge d\zeta_1 \wedge d\zeta_2$$

$$= \int_{D^2} w_{0,1}^\epsilon(\zeta) \wedge K_1(\zeta, z) + \int_{D^2} w_{0,1}^\epsilon(\zeta) \wedge K_2(\zeta, z) = U_{31}^\epsilon(z) + U_{32}^\epsilon(z),$$

où on a posé

$$K_1(\zeta, z) = \left[\left(\frac{1-|\zeta_1|^2}{1-\bar{\zeta}_1 z_1}\right)^{k_1} \left(\frac{1-|\zeta_2|^2}{1-\bar{\zeta}_2 z_2}\right)^{k_2} - \left|\frac{1-|\zeta_1|^2}{1-\bar{\zeta}_1 z_1}\right|^{k_1} \left|\frac{1-|\zeta_2|^2}{1-\bar{\zeta}_2 z_2}\right|^{k_2}\right] \frac{(\bar{\zeta}_1 - \bar{z}_1)\, d\bar{\zeta}_2 - (\bar{\zeta}_2 - \bar{z}_2)\, d\bar{\zeta}_1}{|\zeta - z|^4} \wedge d\zeta_1 \wedge d\zeta_2,$$

et

$$K_2(\zeta, z) = \left|\frac{1-|\zeta_1|^2}{1-\bar{\zeta}_1 z_1}\right|^{k_1} \left|\frac{1-|\zeta_2|^2}{1-\bar{\zeta}_2 z_2}\right|^{k_2} \frac{(\bar{\zeta}_1 - \bar{z}_1)\, d\bar{\zeta}_2 - (\bar{\zeta}_2 - \bar{z}_2)\, d\bar{\zeta}_1}{|\zeta - z|^4} \wedge d\zeta_1 \wedge d\zeta_2.$$

$U^{\epsilon}_{31}(z)$ se majore facilement.

LEMME 9. – *Soit* $0 < \alpha < \min(k_1, k_2) - 1$, $\alpha \in]0, 1]$. *Alors on a*

$$\int_\Delta \delta_{T^2}^{\alpha-1}(z)\, |K_1(\zeta, z)|\, d\sigma(z) \leqslant C\, \delta_{\partial D^2}^{\alpha-1}(\zeta),$$

où C *ne dépend que de* α, k_1 *et* k_2, *et* $|K_1(\zeta, z)|$ *désigne le module de l'une quelconque des composantes de* K_1.

En effet, on a

$$\begin{aligned}|K_1(\zeta, z)| &\leqslant C \frac{(1-|\zeta_1|^2)^{k_1}(1-|\zeta_2|^2)^{k_2}}{|1-\bar{\zeta}_1 z_1|^{k_1+1}\, |1-\bar{\zeta}_2 z_2|^{k_2}\, |\zeta - z|^2} \\ &+ C \frac{(1-|\zeta_1|^2)^{k_1}(1-|\zeta_2|^2)^{k_2}}{|1-\bar{\zeta}_1 z_1|^{k_1}\, |1-\bar{\zeta}_2 z_2|^{k_2+1}\, |\zeta - z|^2} \\ &= C\, K_1^1(\zeta, z) + C\, K_1^2(\zeta, z).\end{aligned}$$

Majorons par exemple l'intégrale

$$I = \int_\Delta \delta_{T^2}(z)^{\alpha-1}\, K_1^1(\zeta, z)\, d\sigma(z).$$

Comme dans les majorations du paragraphe 2, on découpe le domaine d'intégration en deux morceaux : $\Delta \cap \{|z_1| \leqslant \delta\}$, $\Delta \cap \{|z_1| > \delta\}$.

L'intégration sur le premier morceau se majore immédiatement, considérons simplement l'intégration sur le second morceau de la même manière que dans le paragraphe 2, en posant $v = 1 - |z_1|^2 = 1 - |z_2|^2$, $\theta_1 = \frac{1}{\pi}\left|\operatorname{Arg} \frac{z_1}{\zeta_1}\right|$, $\theta_2 = \frac{1}{\pi}\left|\operatorname{Arg} \frac{z_2}{\zeta_2}\right|$, $u_i = 1 - |\zeta_i|^2$, $i = 1, 2$, la majoration cherchée pour I se ramène à la majoration suivante :

$$J = \int_{[0,1]^3} \frac{v^{\alpha-1}\, u_1^{k_1}\, u_2^{k_2}\, dv\, d\theta_i\, d\theta_2}{(u_1 + v + \theta_1)^{k_1+1}(u_2 + v + \theta_2)^{k_2}(|u_1 - v| + \theta_1 + |u_2 - v| + \theta_2)^2}$$
$$\leqslant C \max(u_1^{\alpha-1}, u_2^{\alpha-1}).$$

En posant $v = u_1 x$, $\theta_i = u_1 y_i$, il vient,

avec $D = |1 - x| + y_1 + \left|\frac{u_2}{u_1} - x\right| + y_2$,

$$J = u_1^{\alpha-1}\left(\frac{u_2}{u_1}\right)^{k_2}\int_{[0,+\infty[^3}\frac{x^{\alpha-1}\,dx\,dy_1\,dy_2}{(1+x+y_1)^{k_1+1}\left(\frac{u_2}{u_1}+x+y_2\right)^{k_2}\,D^2}$$

$$\leqslant u_1^{\alpha-1}\int_{[0,+\infty[^2}\frac{x^{\alpha-1}\,dx\,dy_1}{(1+x+y_1)^{k_1+1}\,(|1-x|+y_1)} \leqslant C\,u_1^{\alpha-1}.$$

Le lemme 9 et (14) montrent que, sous les hypothèses du lemme 8, on a

$$\sup_{\epsilon>0}\int_\Delta \delta_{T^2}^{\alpha-1}(z)\,|U_{31}^\epsilon(z)|\,d\sigma(z) < +\infty, \tag{19}$$

k_1 et k_2 étant assez grands.

Majorons maintenant $\operatorname{Re} U_{32}^\epsilon(z)$: remarquons tout d'abord que si on pose

$$\omega(\zeta,z) = w_{0,1}^\epsilon(\zeta)\wedge\left|\frac{1-|\zeta_1|^2}{1-\bar\zeta_1 z_1}\right|^{k_1}\left|\frac{1-|\zeta_2|^2}{1-\bar\zeta_2 z_2}\right|^{k_2}\frac{d\bar\zeta_1\wedge d\zeta_1+d\bar\zeta_2\wedge d\zeta_2}{|\zeta-z|^2},$$

la formule de Stokes appliquée à $\omega(\zeta,z)$ dans D^2 donne immédiatement :

$$U_{32}^\epsilon(z) = \int_{D^2}\partial w_{0,1}^\epsilon(\zeta)\wedge\left|\frac{1-|\zeta_1|^2}{1-\bar\zeta_1 z_1}\right|^{k_1}\left|\frac{1-|\zeta_2|^2}{1-\bar\zeta_2 z_2}\right|^{k_2}\frac{d\zeta_1\wedge d\bar\zeta_1+d\zeta_2\wedge d\bar\zeta_2}{|\zeta-z|^2}$$

$$+\int_{D^2} w_{0,1}^\epsilon(\zeta)\wedge\partial_\zeta\left[\left|\frac{1-|\zeta_1|^2}{1-\bar\zeta_1 z_1}\right|^{k_1}\left|\frac{1-|\zeta_2|^2}{1-\bar\zeta_2 z_2}\right|^{k_2}\right]\wedge\frac{d\zeta_1\wedge d\bar\zeta_1+d\zeta_2\wedge d\bar\zeta_2}{|\zeta-z|^2}.$$

En notant alors que $2\operatorname{Re}(i\,\partial w_{0,1}^\epsilon) = \theta^\epsilon$, et que le noyau

$$i\left|\frac{1-|\zeta_1|^2}{1-\bar\zeta_1 z_1}\right|^{k_1}\left|\frac{1-|\zeta_2|^2}{1-\bar\zeta_2 z_2}\right|^{k_2}\frac{d\zeta_1\wedge d\bar\zeta_1+d\zeta_2\wedge d\bar\zeta_2}{|\zeta-z|^2}$$

est positif (donc réel), il vient

$|u_\epsilon^{32}(z)| = |\,2\operatorname{Re} U_{32}^\epsilon(z)|$

$$\leqslant\int_{D^2}|\theta^\epsilon(\zeta)|\left|\frac{1-|\zeta_1|^2}{1-\bar\zeta_1 z_1}\right|^{k_1}\left|\frac{1-|\zeta_2|^2}{1-\bar\zeta_2 z_2}\right|^{k_2}\frac{d\lambda(\zeta)}{|\zeta-z|^2} \tag{20}$$

$$+2\int_{D^2}|w_{0,1}^\epsilon(\zeta)|\left|\partial_\zeta\left[\left|\frac{1-|\zeta_1|^2}{1-\bar\zeta_1 z_1}\right|^{k_1}\left|\frac{1-|\zeta_2|^2}{1-\bar\zeta_2 z_2}\right|^{k_2}\right]\right|\frac{d\lambda(\zeta)}{|\zeta-z|^2},$$

où, lorsque η est une forme, $|\eta|$ désigne le module de l'une quelconque de ses composantes.

Posons

$$K_2^1(\zeta, z) = \left|\frac{1-|\zeta_1|^2}{1-\bar{\zeta}_1 z_1}\right|^{k_1} \left|\frac{1-|\zeta_2|^2}{1-\bar{\zeta}_2 z_2}\right|^{k_2} \frac{1}{|\zeta - z|^2},$$

et

$$K_2^2(\zeta, z) = \left|\partial_\zeta \left[\left|\frac{1-|\zeta_1|^2}{1-\bar{\zeta}_1 z_1}\right|^{k_1} \left|\frac{1-|\zeta_2|^2}{1-\bar{\zeta}_2 z_2}\right|^{k_2}\right]\right| \frac{1}{|\zeta - z|^2}.$$

Alors

LEMME 10. – *Soit* $0 < \alpha < \min(k_1, k_2) - 1$, $\alpha \in]0,1]$. *Alors,*

a) $\displaystyle\int_\Delta \delta_{T^2}^{\alpha-1}(z)\, K_2^1(\zeta, z)\, d\sigma(z) \leqslant C\, \delta_{\partial D^2}^{\alpha}(\zeta)$,

b) $\displaystyle\int_\Delta \delta_{T^2}^{\alpha-1}(z)\, K_2^2(\zeta, z)\, d\sigma(z) \leqslant C\, \delta_{\partial D^2}^{\alpha-1}(\zeta)$,

où C *est une constante qui ne dépend que de* α, k_1 *et* k_2.

Montrons tout d'abord le a) : comme dans le lemme 9, on découpe le domaine d'intégration en deux morceaux ; l'intégration sur le premier morceau se majore sans difficultés (en utilisant par exemple lemme 1, a)), et, en utilisant les changements de variables habituels pour l'intégrale sur le dernier morceau, on se ramène à montrer la majoration suivante :

$$I = \int_{[0,1]^3} \frac{v^{\alpha-1} u_1^{k_1} u_2^{k_2}\, dv\, d\theta_1\, d\theta_2}{(u_1+v+\theta_1)^{k_1}(u_2+v+\theta_2)^{k_2}(|u_1-v|+\theta_1+|u_2-v|+\theta_2)^2} \leqslant C \min(u_1^\alpha, u_2^\alpha).$$

Compte-tenu de la symétrie, il nous suffit de considérer le cas $u_1 \leqslant u_2$: en posant alors $v = u_1 x$, $\theta_i = u_1 y_i$, $i = 1, 2$, il vient

$$I \leqslant u_1^\alpha \left(\frac{u_2}{u_1}\right)^{k_2}$$

$$\int_{[0,+\infty[^3} \frac{x^{\alpha-1}\, dx\, dy_1\, dy_2}{(1+x+y_1)^{k_1}\left(\frac{u_2}{u_1}+x+y_2\right)^{k_2}\left(|1-x|+y_1+\left|\frac{u_2}{u_1}-x\right|+y_2\right)^2}$$

$$\leqslant u_1^\alpha \int_{[0,+\infty[^2} \frac{x^{\alpha-1}\, dx\, dy_1}{(1+x+y_1)^{k_1}(|1-x|+y_1)} \leqslant C\, u_1^\alpha .$$

Montrons enfin le b) du lemme 10, on a

$$K_2^2(\zeta, z) \leqslant C\left[\frac{(1-|\zeta_1|^2)^{k_1-1}(1-|\zeta_2|^2)^{k_2}}{|1-\bar{\zeta}_1 z_1|^{k_1}\ |1-\bar{\zeta}_2 z_2|^{k_2}\ |\zeta - z|^2} + \frac{(1-|\zeta_1|^2)^{k_1}(1-|\zeta_2|^2)^{k_2-1}}{|1-\bar{\zeta}_1 z_1|^{k_1}\ |1-\bar{\zeta}_2 z_2|^{k_2}\ |\zeta - z|^2}\right],$$

et vérifions par exemple que

$$J = \int_\Delta \delta_{\mathbf{T}^2}^{\alpha-1}(z)\,\frac{(1-|\zeta_1|^2)^{k_1-1}(1-|\zeta_2|^2)^{k_2}}{|1-\bar{\zeta}_1 z_1|^{k_1}\ |1-\bar{\zeta}_2 z_2|^{k_2}\ |\zeta - z|^2}\,d\sigma(z) \leqslant C\ \delta_{\partial D^2}^{\alpha-\frac{1}{2}}(\zeta).$$

Comme dans tous les calculs précédents, la majoration la moins évidente se situe lorsque l'on intégre sur $\Delta \cap \{|z_1| > \delta\}$, et dans ce cas, le même changement de variable que précédemment nous ramène à voir que

$$J_1 = \int_{[0,1]^3} \frac{v^{\alpha-1} u_1^{k_1-1}\, u_2^{k_2}\, dv\, d\theta_1\, d\theta_2}{(u_1+v+\theta_1)^{k_1}\,(u_2+v+\theta_2)^{k_2}\,(|u_1-v|+\theta_1+|u_2-v|+\theta_2)^2} \leqslant C\max(u_1^{\alpha-1}, u_2^{\alpha-1}).$$

Or, en posant $v = u_1 x$, $\theta_i = u_1 y_i$, $i = 1, 2$, il vient,

avec $D = |1-x| + y_1 + |\frac{u_2}{u_1} - x| + y_2$

$$J_1 \leqslant u_1^{\alpha-1}\left(\frac{u_2}{u_1}\right)^{k_2}\int_{[0,+\infty[^3}\frac{x^{\alpha-1}\,dx\,dy_1\,dy_2}{(1+x+y_1)^{k_1}\left(\frac{u_2}{u_1}+x+y_2\right)^{k_2} D^2}$$

$$\leqslant u_1^{\alpha-1}\int_{[0,+\infty[^2}\frac{x^{\alpha-1}\,dx\,dy_1}{(1+x+y_1)^{k_1}\,(|1-x|+y_1)} \leqslant C\,u_1^{\alpha-1}.$$

Ainsi, sous les hypothèses du lemme 8, (14), (20) et le lemme 10 montrent que

$$\sup_{\epsilon>0}\int_\Delta \delta_{\mathbf{T}^2}^{\alpha-1}(z)\,|u_\epsilon^{32}(z)|\,d\sigma(z) < +\infty. \tag{21}$$

Alors, (16), (17), (18), (19) et (21) donnent

$$\sup_{\epsilon>0}\int_\Delta \delta_{\mathbf{T}^2}^{\alpha-1}(z)\ u_\epsilon^+(z)\,d\sigma(z) < +\infty,$$

où $u_\epsilon^+ = \max(u_\epsilon, 0)$. Compte-tenu de la plurisousharmonicité de u_ϵ ceci achève de démontrer le lemme 8.

Pour achever la démonstration du lemme 7, et donc de la proposition 2 il n'y a plus qu'à faire un passage à la limite faible lorsque $\epsilon \longrightarrow 0$ ce qui ne présente aucune difficulté.

5. Démonstration de la proposition 3.

La démonstration est, dans son principe général, la même que pour les résultats précédents, mais ici la difficulté n'est pas dans la majoration des noyaux du $\bar\partial$ mais dans l'obtention d'une estimation pour la résolution du d. Pour lever cette difficulté on reprend une idée de N. Varopoulos [8].

Il s'agit de démontrer le lemme suivant.

LEMME 11. – *Soit* $\theta = i \sum_{i,j=1}^{2} \theta_{ij}\, dz_i \wedge d\bar z_j$ *le courant d'intégration sur un sous-ensemble analytique complexe de* D^2. *Si*

$$\int_{D^2} (\theta_{11}(z) + \theta_{22}(z)) < +\infty,$$

alors il existe une fonction plurisousharmonique u *dans* D^2 *solution de l'équation* $i\partial\bar\partial u = \theta$ *telle que*

$$\sup_{0<r<1} \int_{T^2} |u(rz)|\, d\sigma(z) < +\infty.$$

Les estimations des noyaux du $\bar\partial$ dont nous allons avoir besoin sont faciles à obtenir.

LEMME 12. – *Supposons* $\min(k_1, k_2) \geqslant 1$. *Avec les notations du début du paragraphe 1, si* $A(\zeta, z)$ *désigne le module de l'une quelconque des composantes des noyaux* $K(\zeta, z)$, $L_1(\zeta, z)$ *et* $L_2(\zeta, z)$, *on a*

$$\int_{T^2} A(\zeta, z)\, d\sigma(z) \leqslant \frac{C}{\delta_{T^2}(\zeta)},$$

où C *est une constante qui ne dépend que de* k_1 *et* k_2.

En effet, supposons tout d'abord $A(\zeta, z) = |L_1(\zeta, z)|$.

En reprenant les notations que nous avons constamment utilisées dans ce type de calculs, on est ramené à voir la majoration suivante :

$$\int_{[0,1]^2} \frac{u_1^{k_1} u_2^{k_2-1}\, d\theta_1\, d\theta_2}{(u_1+\theta_1)^{k_1+1}(u_2+\theta_2)^{k_2-1}(u_1+\theta_1+u_2+\theta_2)^2} \leqslant \frac{C}{\max(u_1, u_2)},$$

ce qui ramène à

$$I = u_2 \int_{[0,+\infty[^2} \frac{dy_1\, dy_2}{(1+y_1)^{k_1+1}(1+y_2)^{k_2-1}(u_1(1+y_1)+u_2(1+y_2))^2} \leqslant \frac{C}{\max(u_1, u_2)}.$$

Ce qui est immédiat, car

$$I = \int_{[0,+\infty[} \frac{dy_1}{(1+y_1)^{k_1+1}(u_1(1+y_1)+u_2)} \leqslant \frac{C}{u_1+u_2}.$$

Si $A(\zeta, z) = |L_2(\zeta, z)|$, le calcul est naturellement le même ; enfin, si $A(\zeta, z)$ est le module de l'une des composantes de $K(\zeta, z)$, on a

$$A(\zeta, z) \leqslant \frac{(1-|\zeta_1|^2)^{k_1}(1-|\zeta_2|^2)^{k_2}}{|1-\bar{\zeta}_1 z_1|^{k_1}\, |1-\bar{\zeta}_2 z_2|^{k_2}\, |\zeta - z|^3},$$

et, en raisonnant comme précédemment, on est ramené à voir que

$$J = \int_{[0,1]^2} \frac{u_1^{k_1} u_2^{k_2}\, d\theta_1\, d\theta_2}{(u_1+\theta_1)^{k_1}(u_2+\theta_2)^{k_2}(u_1+\theta_1+u_2+\theta_2)^3} \leqslant \frac{C}{\max(u_1, u_2)},$$

ce qui est encore immédiat :

$$J \leqslant \int_{[0,+\infty[^2} \frac{d\theta_1\, d\theta_2}{(u_1+\theta_1+u_2+\theta_2)^3} = \frac{1}{2(u_1+u_2)}.$$

Pour démontrer le lemme 11, nous reprenons maintenant le début de la démonstration du lemme 6 : on considère les régularisées θ^ϵ de θ, puis, par un calcul semblable à celui fait dans [1], on voit que

$$\sup_{\epsilon>0} \int_{D^2} \theta^\epsilon(z)\, d\lambda(z) < +\infty .$$

Ensuite, comme au paragraphe 3, on écrit $\theta^\epsilon = \theta^{\epsilon 2} + i\partial\bar{\partial} u_1^\epsilon$ où u_1^ϵ est à support compact dans la boule $\left\{ |z| < \frac{1}{2} \right\}$ et $\theta^{\epsilon 2}$ est réel, d-fermé, C^∞ dans $\overline{D^2}$ et nul dans un voisinage de l'origine. Pour fixer les idées, nous supposons u_1^ϵ choisi de sorte que $\theta^{\epsilon 2}$ soit nul dans la boule $B = \left\{ z \in D^2 \text{ t.q. } |z| < \frac{1}{4} \right\}$.

Nous résolvons maintenant l'équation $idw^{\epsilon 2} = \theta^{\epsilon 2}$ avec l'estimation dont nous avons besoin.

LEMME 13. – *Pour tout* $\epsilon > 0$ $(\epsilon < \epsilon_0 , \epsilon_0 > 0)$ *il existe une solution* $w^{\epsilon 2}$ *de l'équation* $idw^{\epsilon 2} = \theta^\epsilon$ *qui est continue dans* D^2 *et qui vérifie les estimations suivantes :*

(i) $\displaystyle\sup_{\epsilon>0} \int_{\partial D^2} |w^{\epsilon 2}(z)|\, d\sigma(z) < +\infty$

(ii) $\displaystyle\sup_{\epsilon>0} \int_{D^2} \frac{|w^{\epsilon 2}(z)|}{\delta_{T^2}(z)}\, d\lambda(z) < +\infty.$

L'estimation (i) ne pose pas de difficultés : l'homotopie classique de Poincaré la fournit immédiatement. Par contre l'estimation (ii) ne peut pas s'obtenir simplement à l'aide de cette homotopie car le poids $\dfrac{1}{\delta_{T^2}(z)}$ n'est pas intégrable sur les rayons partant de T^2. La manière de contourner cette difficulté est empruntée à N. Varopoulos [8] : elle consiste à considérer plusieurs homotopies et à faire ensuite une moyenne des solutions données par ces homotopies.

Rappelons tout d'abord le lemme de Poincaré-Cartan dans le cas qui nous intéresse.

LEMME 14. – *Soit* F_t, $0 < t \leqslant 1$ *une famille de difféomorphismes de* $\mathbf{C}^2$, *vérifiant les conditions suivantes :*

a) $F_t(D^2) \subset D^2$,

b) $F_1 = \mathrm{id}$,

c) *pour* $t < \frac{1}{10}$, $F_t(D^2) \subset B = \left\{ z \in D^2 \text{ t.q. } |z| < \frac{1}{4} \right\}$.

Soit Z_t, $0 < t \leqslant 1$ *une famille de champs de vecteurs tels que* $\frac{d}{dt} F_t(z) = Z_t(F_t(z))$. *Alors la forme différentielle*

$$w^{\epsilon 2} = -i \int_{1/10}^{1} F_t^*(i_{z_t}\, \theta^{\epsilon 2})\, dt,$$

où $i_{Z_t}\theta$ *est défini par* $i_{Z_t}(dz_i \wedge d\bar{z}_j) = Z_t^i\, d\bar{z}_j - \bar{Z}_t^j\, dz_i$, *est une solution de l'équation* $idw^{\epsilon 2} = \theta^{\epsilon 2}$ *qui est continue dans* $\overline{D}^2$.

Choisissons maintenant les difféomorphismes et les champs de vecteurs : pour tout $r \in [0, 1]$, posons

$$F_t^r(z) = F_t^r(z_1, z_2) = (t^{1+r} z_1, t z_2),$$

$$Z_t^r(z) = Z_t^r(z_1, z_2) = \left(\frac{1}{1+r}\frac{z_1}{t}, \frac{z_2}{t}\right).$$

Il est clair que pour tout $r \in [0, 1]$, F_t^r et Z_t^r satisfont aux hypothèses du lemme 14, et par suite les formes

$$w_r^{\epsilon 2} = -i \int_{1/10}^{1} F_t^{r*}(i_{Z_t^r}\, \theta^{\epsilon 2})\, dt$$

sont les solutions continues dans $\overline{D^2}$ de $idw_r^{\epsilon 2} = \theta^{\epsilon 2}$. Alors la forme $w^{\epsilon 2} = \int_0^1 w_r^{\epsilon 2}\, dr$ est encore une solution de $idw^{\epsilon 2} = \theta^{\epsilon 2}$ continue dans $\overline{D^2}$.

Nous allons maintenant voir que $w^{\epsilon 2}$ vérifie les estimations (i) et (ii) du lemme 13.

LEMME 15. – *Soit* g *une fonction continue dans* D^2. *Pour* $r \in [0, 1]$, *posons*

$$h_r(z) = \int_{1/10}^{1} g(F_t^r(z))\, dt,$$

et $$h(z) = \int_0^1 h_r(z)\, dr.$$

Alors

1) *pour tout* r $\displaystyle\int_{\partial D^2} |h_r(z)|\, d\sigma(z) \leqslant C \int_{D^2} |g(z)|\, d\lambda(z)$;

2) $\displaystyle\int_{D^2} \frac{|h(z)|}{\delta_{T^2}(z)}\, d\lambda(z) \leqslant C \int_{D^2} |g(z)|\, d\lambda(z)$,

C *désignant une constante absolue.*

La première estimation est une conséquence immédiate du théorème de Fubini :

$$\int_{D\times\pi} |h_r(z)|\, d\sigma(z) + \int_{\pi\times D} |h_r(z)|\, d\sigma(z)$$

$$= \int_{1/10}^1 dt \int_{D\times\pi} |g(t^{1+r} z_1, tz_2)|\, d\sigma(z) + \int_{1/10}^1 dt \int_{\pi\times D} |g(t^{1+r} z_1, tz_2)|\, d\sigma(z)$$

$$= \int_{[0,2\pi]^2} d\theta_1\, d\theta_2 \left\{ \int_{1/10}^1 dt \int_0^1 |g(t^{1+r} u\, e^{i\theta_1}, te^{i\theta_2})|\, udu + \int_{1/10}^1 dt \int_0^1 |g(t^{1+r} e^{i\theta_1}, tu\, e^{i\theta_2})|\, udu \right\}$$

$$\leqslant 10^5 \int_{[0,2\pi]^2} d\theta_1\, d\theta_2 \left\{ \int_0^1 tdt \int_0^{t^{1+r}} |g(ve^{i\theta_1}, te^{i\theta_2})|\, vdv + 10^3 \int_0^1 udu \int_{u^{1+r}}^1 |g(ve^{i\theta_1}, ue^{i\theta_2})|\, vdv \right\}$$

$$\leqslant C \int_{D^2} |g(z)|\, d\lambda(z).$$

Montrons maintenant la seconde estimation du lemme 15 : d'après le théorème de Fubini, on a

$$\int_{D^2} \frac{|h_r(z)|}{\delta_{T^2}(z)}\, d\lambda(z) = \int_{1/10}^1 dt \int_{D^2} \frac{|g(F_t^r(z))|}{\delta_{T^2}(z)}\, d\lambda(z)$$

$$\leqslant 10^6 \int_{1/10}^1 dt \int_{F_t^r(D^2)} \frac{|g(\zeta)|}{\delta_{T^2}((F_t^r)^{-1}(\zeta))}\, d\lambda(z)$$

$$= 10^6 \int_{D^2} |g(\zeta)| \left\{ \int_{t_r(\zeta)}^1 \frac{dt}{\delta_{T^2}((F_t^r)^{-1}(\zeta))} \right\} d\lambda(\zeta),$$

où $t_r(\zeta) = \min\{t \geqslant 1/10 \text{ tels que } \zeta \in F_t^r(D^2)\}$.

Ainsi pour montrer l'estimation voulue, il faut vérifier que

$$I(\zeta) = \int_0^1 dr \int_{t_r(\zeta)}^1 \frac{dt}{\delta_{T^2}((F_t^r)^{-1}(\zeta))} \leqslant C.$$

Majorons tout d'abord les quantités

$$I_r(\zeta) = \int_{t_r(\zeta)}^1 \frac{dt}{\delta_{T^2}((F_t^r)^{-1}(\zeta))}.$$

Tout d'abord, on voit immédiatement que

$$|\zeta_1| \leqslant |\zeta_2|^{1+r} \Longrightarrow t_r(\zeta) = \max\left\{\frac{1}{10}, |\zeta_2|\right\},$$

$$|\zeta_1| \geqslant |\zeta_2|^{1+r} \Longrightarrow t_r(\zeta) = \max\left\{\frac{1}{10}, |\zeta_1|^{\frac{1}{1+r}}\right\}.$$

Comme $\delta_{T^2}((F_t^r)^{-1}(\zeta)) = \max\left(1 - \dfrac{|\zeta_1|}{t^{1+r}},\ 1 - \dfrac{|\zeta_2|}{t}\right)$ il vient, dans le cas $|\zeta_1| \geqslant |\zeta_2|^{1+r}$,

$$I_r(\zeta) \leqslant \int_{|\zeta_1|^{1/1+r}}^1 \frac{t\,dt}{t - |\zeta_2|} \leqslant 1 + |\zeta_2| \operatorname{Log} \frac{1 - |\zeta_2|}{|\zeta_1|^{1/1+r} - |\zeta_2|},$$

et, dans le cas $|\zeta_1| \leqslant |\zeta_2|^{1+r}$,

$$I_r(\zeta) \leqslant \int_{t_r(\zeta)}^1 \frac{t^{1+r}\,dt}{t^{1+r} - |\zeta_1|} \leqslant 1 + \frac{10}{1+r} |\zeta_1| \operatorname{Log} \frac{1 - |\zeta_1|}{|\zeta_2|^{1+r} - |\zeta_1|}.$$

Majorons maintenant $\mathrm{I}(\zeta)$: supposons tout d'abord $|\zeta_2| \leqslant |\zeta_1|$. On a donc pour tout $r \in [0,1]$, $|\zeta_2|^{1+r} \leqslant |\zeta_1|$ et par conséquent

$$\mathrm{I}(\zeta) \leqslant 1 + |\zeta_2| \int_0^1 \mathrm{Log}\, \frac{1-|\zeta_2|}{|\zeta_1|^{1/1+r} - |\zeta_2|}\, dr$$

$$\leqslant 1 + |\zeta_2|\ \mathrm{Log}\, \frac{1}{|\zeta_2|} + |\zeta_2| \int_0^1 \mathrm{Log}\, \frac{1-|\zeta_2|}{1-|\zeta_2|^{r/1+r}}\, dr$$

$$\leqslant 2 + \int_0^1 \mathrm{Log}\, 2\, \frac{1+r}{r}\, dr \leqslant \mathrm{C}.$$

Supposons maintenant $|\zeta_1| < |\zeta_2|^2$: on a donc, pour tout $r \in [0,1]$, $|\zeta_1| < |\zeta_2|^{1+r}$, et par suite

$$\mathrm{I}(\zeta) \leqslant 1 + 10\,|\zeta_1| \int_0^1 \mathrm{Log}\, \frac{1-|\zeta_1|}{|\zeta_2|^{1+r} - |\zeta_1|}\, dr$$

$$\leqslant 1 + 10\,|\zeta_2|^2 \int_0^1 \mathrm{Log}\, \frac{1-|\zeta_2|^2}{|\zeta_2|^{1+r} - |\zeta_2|^2}\, dr$$

$$\leqslant 11 + 10 \int_0^1 \mathrm{Log}\, \frac{2}{1-r}\, dr \leqslant \mathrm{C},$$

par un calcul similaire au cas précédent.

Enfin si $|\zeta_2|^2 < |\zeta_1| < |\zeta_2|$, les deux calculs précédents montrent que l'on a encore $\mathrm{I}(\zeta) \leqslant \mathrm{C}$, ce qui achève de montrer le lemme 15, et par la même occasion le lemme 13 qui est une conséquence des lemmes 14 et 15.

La fin de la démonstration du lemme 11 est maintenant standard. Nous résolvons l'équation $\bar{\partial} \mathrm{U}^{\epsilon 2} = w^{\epsilon 2}$ en utilisant les noyaux minimaux (avec k_1 et $k_2 \geqslant 2$), puis nous posons $u_\epsilon = 2\, \mathrm{Re}\, \mathrm{U}^{\epsilon 2} + u_1^\epsilon$. Alors u_ϵ est solution de $i\partial\bar{\partial} u_\epsilon = \theta^\epsilon$ et, d'après les lemmes 1b), 4, 12 et 13, et la sous-harmonicité de u_ϵ, on a

$$\operatorname*{Sup}_{\epsilon>0}\ \operatorname*{Sup}_{r<1} \int_{\mathrm{T}^2} |u_\epsilon(rz)|\, d\sigma(z) < +\infty.$$

Comme à la fin du § 3, on en déduit le lemme 11 par un argument de familles normales de fonctions harmoniques (cf. [7], p. 286) en faisant tendre ϵ vers zéro.

Exemple. – Reprenons l'exemple donné à la fin du § 3 : $X = \bigcup_1^\infty X_i$, avec $X_i = \{(z_1, z_2) \in D^2$ t.q. $z_1 + z_2 = 2a_i\}$, $a_i \in D$, $\lim_{i \to \infty} |a_i| = 1$.

On montre aisément que pour que X soit l'ensemble des zéros d'une fonction de $N(T^2)$ il faut et il suffit que

$$\sum_1^\infty (1 - |a_i|)^{3/2} < + \infty,$$

ce qui signifie exactement que X est d'aire finie.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. BONAMI et Ph. CHARPENTIER, Solutions de l'équation $\bar\partial$ et zéros de la classe de Nevanlinna dans certains domaines faiblement pseudoconvexes, *Ann. Inst. Fourier,* 32-4 (1982), 53-89.

[2] Ph. CHARPENTIER, Sur la formule de Jensen et les zéros des fonctions holomorphes dans le polydisque, *Math. Ann.*, 242 (1979), 27-46.

[3] Ph. CHARPENTIER, Formules explicites pour les solutions minimales de l'équation $\bar\partial u = f$ dans la boule et dans le polydisque de C^n, *Ann. Inst. Fourier*, 30-4 (1980), 121-154.

[4] S.V. DAUTOV and G.M. HENKIN, Zeros of holomorphic functions of finite order and weighted estimates for solutions of the $\bar\partial$-equation, *Mat. Sb.*, 107 (1979), 163-174.

[5] G.M. HENKIN, H. Lewy's equation and analysis on a pseudoconvex manifold, II, *Math. USSR Sb.*, 31 (1977), 63-94.

[6] P. LELONG, *Fonctionnelles analytiques et fonctions entières (n variables),* Montréal, Presses de l'Univ. Montréal (1968).

[7] H. Skoda, Valeurs au bord pour les solutions de l'équation $\bar{\partial}$ et caractérisation des zéros des fonctions de la classe de Nevanlinna, *Bull. Soc. Math. France*, (1976), 225-299.

[8] N. Varopoulos, BMO functions and the $\bar{\partial}$-equation, *Pacific J. Math.*, 71 (1977), 221-273.

Manuscrit reçu le 12 janvier 1983.

Philippe Charpentier,
Université de Paris-Sud
Equipe de Recherche associée au CNRS (296)
Analyse Harmonique
Mathématique (Bât. 425)
91405 Orsay Cedex.