ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

ADOLPH HILDEBRAND

Sur les moments d'une fonction additive

Annales de l'institut Fourier, tome 33, nº 3 (1983), p. 1-22

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1983__33_3_1_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
33, 3 (1983), 1-22

SUR LES MOMENTS D'UNE FONCTION ADDITIVE

par Adolf HILDEBRAND

1. Introduction.

Une fonction arithmétique $f : \mathbf{N}^* \longrightarrow \mathbf{R}$ [1] est dite additive si $f(mn) = f(m) + f(n)$ toutes les fois que $(m,n) = 1$.

Un outil fondamental dans l'étude du comportement de fonctions additives est l'inégalité de Turán et Kubilius. Elle affirme que pour toute fonction additive f et tout $x \geqslant 1$

$$\frac{1}{x} \sum_{n \leqslant x} (f(n) - \mathrm{A}_0(f,x))^2 \leqslant c_1 \mathrm{B}^2(f,x) \tag{1}$$

où

$$\mathrm{A}_0(f,x) = \sum_{p^m \leqslant x} \frac{f(p^m)}{p^m}, \quad \mathrm{B}(f,x) = \mathrm{B}_2(f,x) = \Big(\sum_{p^m \leqslant x} \frac{f^2(p^m)}{p^m}\Big)^{1/2}$$

et c_1 est une constante absolue (voir par exemple Elliott [2], chapitre 4).

Il est facile de voir que $\mathrm{A}_0(f,x)$ est une bonne approximation de la moyenne arithmétique $\frac{1}{[x]} \sum_{n \leqslant x} f(n)$, l'erreur étant de l'ordre $\mathcal{O}(\mathrm{B}(f,x))$. Ainsi l'inégalité (1) peut être interprétée comme une estimation de la variance de f par rapport à la mesure ν_x sur $\mathbf{N}^*$ définie par

$$\nu_x(\{n\}) = \begin{cases} \dfrac{1}{[x]} & \text{si} \quad n \leqslant x, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad (n \in \mathbf{N}^*).$$

(1) Nous ne considérons que des fonctions arithmétiques à valeurs réelles.

Elliott a généralisé cette estimation à des moments d'ordre $\beta > 0$ en démontrant le théorème suivant (Elliott [1], théorème 1) :

Soit $\beta > 0$. *Alors il existe une constante* $c_2(\beta)$ *telle que pour toute fonction additive* f *et tout* $x \geqslant 1$

$$\frac{1}{x} \sum_{n \leqslant x} |f(n) - A_0(f,x)|^\beta \leqslant \begin{cases} c_2(\beta)\Big(B^\beta(f,x) + \sum\limits_{p^m \leqslant x} \dfrac{|f(p^m)|^\beta}{p^m}\Big) & (\text{si } \beta > 2), \\ c_2(\beta)\, B^\beta(f,x) \quad (\text{si } 0 < \beta \leqslant 2). \end{cases} \tag{2}$$

Une autre démonstration de ce théorème a été donnée par Ruzsa [7].

On peut se demander si les inégalités (1) et (2) sont, aux constantes près, les meilleures possibles. D'après un résultat de Wolke ([8], théorème 3), l'inégalité (1) est en effet « optimale » pour une large classe de fonctions additives f. Cependant, pour la fonction $f = \log$, l'estimation (1) est très mauvaise : un calcul simple montre que dans ce cas le membre de gauche dans (1) reste borné quand $x \longrightarrow \infty$, tandis que le membre de droite est $\sim \frac{1}{2} c_1 \log^2 x$.

Or, Ruzsa [6] a récemment établi l'inégalité suivante qui donne l'ordre correct de la quantité estimée par (1) et qui montre que le logarithme et ses multiples sont, dans un sens, les seules fonctions «exceptionnelles» :

Pour toute fonction additive f *et tout* $x \geqslant 1$, *on a*

$$\frac{1}{x} \sum_{n \leqslant x} (f(n) - A_0(f,x))^2 \asymp \min_{\lambda \in \mathbf{R}} (\lambda^2 + B^2(f_\lambda, x)) \tag{3}$$

où $f_\lambda = f - \lambda \log$ *et* $\asymp$ *signifie qu'on a en même temps* $\ll$ *et* $\gg$, *les constantes impliquées étant absolues.*

L'objet de cet article est de généraliser (3) à des moments d'ordre $\beta > 0$ [2], améliorant ainsi l'inégalité (2) d'Elliott. Nous utiliserons pour cela des idées de Ruzsa [5,6] ainsi que d'Elliott [1].

2. Notations.

x désigne un nombre réel $\geqslant 1$.

---

[2] D'après une communication orale de Ruzsa, le cas $\beta \geqslant 2$ (qui est plus facile) a été également traité par Manstavicius.

p désigne un nombre premier.

$p^m \| n$ signifie « $p^m \mid n$ et $p^{m+1} \nmid n$ ».

Pour tout $t > 0$, $[t]$ désigne le plus grand entier $\leqslant t$.

f désigne toujours une fonction additive, f_λ la fonction additive $f - \lambda \log$, et pour tout $c \geqslant 0$, $f'_{\lambda,c}$ et $f''_{\lambda,c}$ sont des fonctions additives « tronquées » définies par

$$f'_{\lambda,c}(p^m) = \begin{cases} f_\lambda(p^m) & \text{si} \quad |f_\lambda(p^m)| \leqslant c\,, \\ 0 & \text{si} \quad |f_\lambda(p^m)| > c \end{cases}$$

et

$$f''_{\lambda,c}(p^m) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad |f_\lambda(p^m)| \leqslant c\,, \\ f_\lambda(p^m) & \text{si} \quad |f_\lambda(p^m)| > c \end{cases}$$

pour toute puissance d'un premier p^m.

On a donc pour chaque couple $(\lambda, c) \in \mathbf{R} \times [0, \infty[$ la décomposition $f = \lambda \log + f'_{\lambda,c} + f''_{\lambda,c}$.

Pour faciliter l'écriture, nous introduisons en outre les abréviations suivantes où f est une fonction additive, $x \geqslant 1$, $\beta > 0$, $\mathrm{A} \in \mathbf{R}$, $\lambda \in \mathbf{R}$ et $c \geqslant 0$:

$$\mathrm{B}_\beta(f, x) = \Big(\sum_{p^m \leqslant x} \frac{|f(p^m)|^\beta}{p^m} \Big)^{1/\beta},$$

$$\mathrm{D}_\beta(f, x\,; \mathrm{A}) = \Big(\frac{1}{x} \sum_{n \leqslant x} |f(n) - \mathrm{A}|^\beta \Big)^{1/\beta},$$

$$\mathrm{A}_0(f, x) = \sum_{p^m \leqslant x} \frac{f(p^m)}{p^m},$$

$$\mathrm{A}_1(f, x\,; \lambda, c) = \lambda \log x + \sum_{\substack{p^m \leqslant x \\ |f_\lambda(p^m)| \leqslant c}} \frac{f_\lambda(p^m)}{p^m} = \lambda \log x + \mathrm{A}_0(f'_{\lambda,c}, x)\,.$$

(Une somme vide sera considérée comme 0 ; on pose $0^\beta = 0$).

$\asymp$ signifie « $\ll$ et $\gg$ ». Il est entendu que les constantes impliquées dans $\ll$, $\gg$ et $\asymp$ sont absolues. Une dépendance de certains paramètres sera toujours indiquée par $\ll_\beta$, $\ll_{\mathrm{K}}$ etc.

Pour désigner des estimations non nécessairement uniformes nous utiliserons le symbole $\mathcal{O}$.

3. Résultats.

Nous énonçons notre théorème principal en deux versions légèrement différentes.

THEOREME 1. — *Soit* f *une fonction additive et* $x \geqslant 1$. *Alors il existe des constantes* $\lambda_0 = \lambda_0(f, x) \in \mathbf{R}$ *et* $c_0 = c_0(f, x) \geqslant 0$ *telles que pour tout* $\beta > 0$ *et tout* $A \in \mathbf{R}$ *on a*

$$D_\beta(f, x ; A) \asymp_\beta |\lambda_0| + |A - A_1(f, x ; \lambda_0, c_0)| + B_2(f'_{\lambda_0, c_0}, x) + B_\beta(f''_{\lambda_0, c_0}, x), \quad (4)$$

où les constantes impliquées dans $\asymp_\beta$ *ne dépendent que de* β.

THEOREME 1*. — *Soit* $\beta > 0$. *Alors on a uniformément pour toute fonction additive* f, *tout* $x \geqslant 1$ *et tout* $A \in \mathbf{R}$

$$D_\beta(f, x ; A) \asymp_\beta \min_{\lambda \in \mathbf{R}} (|\lambda| + |A - A_1(f, x ; \lambda, c)| + B_2(f'_{\lambda,c}, x) + B_\beta(f''_{\lambda,c}, x)), \quad (5)$$

où

$$c = D_\beta(f, x ; A).$$

De plus, si $\beta \geqslant 2$, *on a*

$$D_\beta(f, x ; A) \asymp_\beta \min_{\lambda \in \mathbf{R}} (|\lambda| + |A - A_0(f, x)| + B_2(f_\lambda, x) + B_\beta(f_\lambda, x)). \quad (6)$$

La première version est du point de vue théorique plus intéressante car ici la décomposition $f = \lambda_0 \log + f'_{\lambda_0, c_0} + f''_{\lambda_0, c_0}$ ne dépend que de f et x et pas de β. Il est probable que cette version se généralise à des estimations pour $\frac{1}{x} \sum_{n \leqslant x} F(|f(n) - A|)$ où $F(t)$ est une fonction monotone satisfaisant à certaines conditions de croissance.

Les nombres $\lambda_0(f, x)$ et $c_0(f, x)$ du théorème 1 seront déterminés par la minimisation d'une certaine expression, mais malheureusement nous ne pouvons pas donner une formule explicite pour λ_0 et c_0.

La deuxième version (théorème 1*) est plus facile à appliquer. Elle est une généralisation directe du résultat (3) de Ruzsa que l'on obtient en prenant $\beta = 2$ et $A = A_0(f, x)$ dans (6).

Comme application « concrète » du théorème 1* nous montrerons les théorèmes suivants :

THEOREME 2. – *Soit* $\beta > 0$, f *une fonction additive,* $\alpha(x)$ *une fonction réelle et* $\beta(x)$ *une fonction positive. Alors on a*

$$\overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{1}{x} \sum_{n\leq x} \left| \frac{f(n) - \alpha(x)}{\beta(x)} \right|^{\beta} < \infty \tag{7}$$

si et seulement s'il existe une fonction réelle $\lambda(x)$ *telle que pour* $x \longrightarrow \infty$ *les estimations suivantes ont lieu :*

$$\begin{cases} \lambda(x) = \mathcal{O}(\beta(x))\,, \\ \alpha(x) = \lambda(x)\log x + \displaystyle\sum_{\substack{p\leq x \\ |f_{\lambda(x)}(p)|\leq \beta(x)}} \frac{f_{\lambda(x)}(p)}{p} + \mathcal{O}(\beta(x))\,, \\ \displaystyle\sum_{\substack{p\leq x \\ |f_{\lambda(x)}(p)|\leq \beta(x)}} \frac{|f_{\lambda(x)}(p)|^2}{p} = \mathcal{O}(\beta(x)^2)\,, \\ \displaystyle\sum_{\substack{p^m\leq x \\ |f_{\lambda(x)}(p^m)|>\beta(x)}} \frac{|f_{\lambda(x)}(p^m)|^{\beta}}{p^m} = \mathcal{O}(\beta(x)^{\beta}). \end{cases} \tag{8}$$

THEOREME 3. – *Soit* $\beta > 0$, f *une fonction additive et* $\alpha(x)$ *une fonction réelle. Alors on a*

$$\overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{1}{x} \sum_{n\leq x} |f(n) - \alpha(x)|^{\beta} < \infty$$

si et seulement s'il existe un $\lambda \in \mathbf{R}$ *tel que*

$$\alpha(x) = \lambda \log x + \sum_{\substack{p\leq x \\ |f_{\lambda}(p)|\leq 1}} \frac{f_{\lambda}(p)}{p} + \mathcal{O}(1) \tag{9}$$

et

$$\sum_{\substack{p \\ |f_{\lambda}(p)|\leq 1}} \frac{|f_{\lambda}(p)|^2}{p} < \infty\,, \qquad \sum_{\substack{p,m \\ |f_{\lambda}(p^m)|>1}} \frac{|f_{\lambda}(p^m)|^{\beta}}{p^m} < \infty\,. \tag{10}$$

De plus, si f *n'est pas identiquement nulle, on a*

$$\underline{\lim_{x\to\infty}} \frac{1}{x} \sum_{n\leq x} |f(n) - \alpha(x)|^{\beta} > 0\,.$$

En prenant $\alpha(x) \equiv 0$ dans le théorème 3 et en remarquant que dans ce cas (9) entraîne $\lambda = 0$, on obtient le corollaire suivant :

COROLLAIRE. – *Soit* $\beta > 0$ *et* f *une fonction additive. Alors on a*

$$\overline{\lim}\ \frac{1}{x} \sum_{n \leqslant x} |f(n)|^\beta < \infty$$

si et seulement si

$$\overline{\lim_{x \to \infty}} \left| \sum_{\substack{p \leqslant x \\ |f(p)| \leqslant 1}} \frac{f(p)}{p} \right| < \infty$$

et

$$\sum_{\substack{p \\ |f(p)| \leqslant 1}} \frac{|f(p)|^2}{p} < \infty, \qquad \sum_{\substack{p,m \\ |f(p^m)| > 1}} \frac{|f(p^m)|^\beta}{p^m} < \infty .$$

Ce dernier résultat avait été annoncé par Indlekofer au Colloque d'Oberwolfach 1980 sur la théorie analytique des nombres et généralise des résultats antérieurs obtenus par Elliott ([1], théorème 4) et Spilker et l'auteur ([4], théorème 2) dans les cas $\beta > 1$ respectivement $\beta \geqslant 1$.

4. Remarques préliminaires et lemmes.

4.1. Rappelons tout d'abord quelques inégalités élémentaires que nous utiliserons fréquemment dans la suite et qui se démontrent facilement à l'aide de l'inégalité de Hölder :

f et g étant des fonctions additives, $\beta > 0$, $x \leqslant 1$, $A \in \mathbf{R}$ et $A' \in \mathbf{R}$, on a

$$D_\beta(f + g, x ; A + A') \ll_\beta D_\beta(f, x ; A) + D_\beta(g, x ; A')$$

et

$$B_\beta(f + g, x) \leqslant \Big(\sum_{p^m \leqslant x} \frac{(|f(p^m)| + |g(p^m)|)^\beta}{p^m} \Big)^{1/\beta} \asymp_\beta B_\beta(f, x) + B_\beta(g, x) .$$

En particulier, on a pour tout couple $(\lambda, c) \in \mathbf{R} \times [0, \infty[$

$$B_\beta(f_\lambda, x) \asymp_\beta B_\beta(f'_{\lambda,c}, x) + B_\beta(f''_{\lambda,c}, x) .$$

Notons enfin que $D_\beta(f, x ; A)$ est une fonction non décroissante de $\beta \in]0, \infty[$.

4.2. LEMME 1 (Ruzsa [5]). – *Soit* f *une fonction additive et* $x \geqslant 1$. *Si* $\operatorname{card}\{n \leqslant x : f(n) \in [a, a+h[\} \geqslant qx$ *pour un intervalle* $[a, a+h[\subset \mathbf{R}$ $(h > 0)$ *et un* $q > 0$, *alors il existe un* $\lambda \in \mathbf{R}$ *tel que* $\lambda^2 + \sum_{p \leqslant x} \frac{\min(h^2, f_\lambda^2(p))}{p} \leqslant K_0 \frac{h^2}{q^2}$, *où* K_0 *est une constante absolue.*

4.3. LEMME 2 (Erdös et Ruzsa [3], Corollaire au Théorème 3). – *Pour tout* $K > 0$ *il existe une constante* $c(K) > 0$ *telle que pour tout ensemble* $\mathcal{P}$ *de nombres premiers vérifiant* $\sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{p} \leqslant K$ *et pour tout* $x \geqslant 1$ *on a*

$$\operatorname{card}\{n \leqslant x : \mu^2(n) = 1 \ \textit{et}\ (p, n) = 1 \ \textit{pour tout}\ p \in \mathcal{P}\} \geqslant c(K)\, x .$$

Nous utiliserons ce lemme pour établir le résultat suivant :

LEMME 3. – *Soit* $x \geqslant 1$ *et* f *une fonction additive vérifiant* $\sum_{\substack{p \leqslant x \\ f(p) \neq 0}} \frac{1}{p} \leqslant K$ *pour un* $K > 0$. *Alors on a pour tout* $\beta > 0$ *et tout* $A \in \mathbf{R}$

$$D_\beta(f, x; A) \gg_{\beta, K} |A| + B_\beta(f, x) .$$

Preuve. – Dans [6] Ruzsa a implicitement établi ce résultat pour $\beta = 2$ et sa démonstration se généralise immédiatement au cas général. Comme ce travail n'est pas encore paru, nous avons préféré donner les détails de la démonstration.

Soit $\mathcal{P} = \{p \leqslant x : f(p) \neq 0\}$

et $$Q = \mathcal{P} \cup \{p^m \leqslant x : p \text{ premier}, m \geqslant 2\} .$$

Posons $T = \{n \in \mathbf{N}^* : \mu^2(n) = 1$ et $(n, p) = 1$ pour tout $p \in \mathcal{P}\}$ et pour chaque nombre premier p $T_p = \{n \in T : (n, p) = 1\}$. Alors les ensembles T et $p^m T_p = \{p^m n : n \in T_p\}$, $p^m \in Q$, sont deux à deux disjoints et l'on a $f(n) = 0$ si $n \in T$ et $f(n) = f(p^m)$ si $n \in p^m T_p$, $p^m \in Q$.

Par conséquent,

$$D_\beta^\beta(f, x; A) \geqslant \frac{1}{x} \sum_{\substack{n \leqslant x \\ n \in T}} |f(n) - A|^\beta + \sum_{p^m \in Q} \frac{1}{x} \sum_{\substack{n \leqslant x \\ n \in p^m T_p}} |f(n) - A|^\beta$$

$$= |A|^\beta \frac{1}{x} \sum_{\substack{n \leqslant x \\ n \in T}} 1 + \sum_{p^m \in Q} \frac{|f(p^m) - A|^\beta}{p^m} \frac{p^m}{x} \sum_{\substack{n \leqslant \frac{x}{p^m} \\ n \in T_p}} 1$$

$$\geqslant c\left(K + \frac{1}{2}\right)\left(|A|^\beta + \sum_{p^m \in Q} \frac{|f(p^m) - A|^\beta}{p^m}\right),$$

où dans la dernière inégalité on a utilisé le lemme 2 avec les ensembles $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P} \cup \{p\}$, $p \leqslant x$.

Ceci entraîne d'abord $|A| \ll_{\beta,K} D_\beta(f, x ; A)$ et ensuite

$$B_\beta(f,x) \leqslant 2\Big(\sum_{p^m \in Q} \frac{|f(p^m) - A|^\beta}{p^m}\Big)^{1/\beta} + 2\Big(\sum_{p^m \in Q} \frac{|A|^\beta}{p^m}\Big)^{1/\beta} \ll_{\beta,K} D_\beta(f, x ; A),$$

ce qui prouve le résultat.

4.4. Lemme 4. – *Pour tout* $x \geqslant 1$ *et tout* $\beta > 0$, *on a*

$$(D_k(\log, x ; \log x) =) \Big(\frac{1}{x} \sum_{n \leqslant x} (\log x - \log n)^\beta\Big)^{1/\beta} \ll_\beta 1.$$

Preuve. – Posons

$$S(k) = \sum_{n \leqslant x} (\log x - \log n)^k \quad (k \in \mathbf{N}).$$

Une sommation par parties donne pour $k \geqslant 1$

$$S(k) = \int_1^x \Big(\sum_{n \leqslant t} 1\Big)\Big(k(\log x - \log t)^{k-1} \frac{1}{t}\Big)\,dt$$

$$\leqslant k \int_1^x (\log x - \log t)^{k-1}\,dt \leqslant kS(k-1).$$

Puisque $S(0) = [x]$, on obtient par récurrence $S(k) \leqslant k!\,x$ et donc $D_k(\log, x ; \log x) \leqslant k!^{1/k}$ pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, ce qui prouve le lemme compte tenu de la monotonie en β de $D_\beta(\log, x ; \log x)$.

4.5. Lemme 5 (Elliott [1], lemme 5). – *Soit* $\mathcal{P}$ *un ensemble de nombres premiers et* $\omega_{\mathcal{P}}$ *la fonction additive définie par*

$$\omega_{\mathcal{P}}(n) = \sum_{\substack{p \| n \\ p \in \mathcal{P}}} 1 + \sum_{\substack{p^m \| n \\ m \geqslant 2}} 1 \quad (n \in \mathbf{N}^*).$$

Alors on a pour tout $x \geqslant 1$ *et tout* $\beta > 0$

$$\frac{1}{x} \sum_{n \leqslant x} \omega_{\mathfrak{P}}(n)^{\beta} \ll_{\beta} \Big(1 + \sum_{\substack{p \leqslant x \\ p \in \mathfrak{P}}} \frac{1}{p}\Big)^{\beta} .$$

LEMME 6. – *Soit* $\beta > 0$, $x \geqslant 1$ *et* f *une fonction additive. Alors on a*

$$(\mathrm{D}_{\beta}(f, x\,; 0) =) \Big(\frac{1}{x} \sum_{n \leqslant x} |f(n)|^{\beta}\Big)^{1/\beta} \ll_{\beta} \Big(1 + \sum_{\substack{p \leqslant x \\ f(p) \neq 0}} \frac{1}{p}\Big) \mathrm{B}_{\beta}(f, x) .$$

Preuve. – Nous allons appliquer le lemme précédent avec

$$\mathfrak{P} = \{p : f(p) \neq 0\} .$$

En utilisant l'inégalité

$$|f(n)|^{\beta} \leqslant \omega_{\mathfrak{P}}(n)^{\beta} \sum_{p^m \| n} |f(p^m)|^{\beta} \quad (n \in \mathbf{N}^*) ,$$

on voit que

$$\frac{1}{x} \sum_{n \leqslant x} |f(n)|^{\beta} \leqslant \sum_{p^m \leqslant x} |f(p^m)|^{\beta} \frac{1}{x} \sum_{\substack{n \leqslant x \\ p^m \| n}} \omega_{\mathfrak{P}}(n)^{\beta} .$$

Or, pour tout $p^m \leqslant x$, la somme intérieure du membre de droite s'estime, grâce au lemme 5, par

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x} \sum_{\substack{n \leqslant x \\ p^m \| n}} \omega_{\mathfrak{P}}(n)^{\beta} &\leqslant 2^{\beta}\Big(\frac{1}{x} \sum_{\substack{n \leqslant x \\ p^m \| n}} 1 + \frac{1}{x} \sum_{n \leqslant \frac{x}{p^m}} \omega_{\mathfrak{P}}(n)^{\beta}\Big) \\
&\ll_{\beta} \frac{1}{p^m} \Big(1 + \Big(1 + \sum_{\substack{p' \leqslant x \\ p' \in \mathfrak{P}}} \frac{1}{p'}\Big)^{\beta}\Big) \\
&\leqslant \frac{2}{p^m} \Big(1 + \sum_{\substack{p' \leqslant x \\ p' \in \mathfrak{P}}} \frac{1}{p'}\Big)^{\beta} ,
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

5. Démonstration des théorèmes 1 et 1*.

Le plan de la démonstration est le suivant :

Dans 5.1 et 5.2, nous établirons l'estimation inférieure du théorème 1 et dans 5.3 celle de la première formule (5) du théorème 1*.

Ceci sera la partie la plus délicate de la démonstration. Dans 5.4, nous démontrerons les estimations supérieures dans (4) et (5). Enfin, dans 5.5, nous en déduirons pour le cas $\beta \geqslant 2$ l'estimation (6).

Nous fixons f, x, A et β pendant toute la démonstration. Pour faciliter l'écriture nous supprimons l'argument x dans les quantités $D_\beta(f, x; A)$, $B_\beta(f_{\lambda,c}, x)$ etc. et nous posons $A_1(\lambda, c) = A_1(f, x; \lambda, c)$.

5.1. Commençons par établir l'existence de nombres réels $\lambda_0 = \lambda_0(f, x)$ et $c_0 = c_0(f, x)$ tels que

$$|\lambda_0| \ll_\beta D_\beta(f, A), \quad B_2(f'_{\lambda_0, c_0}) \ll_\beta D_\beta(f, A) \tag{11}$$

et

$$\sum_{\substack{p \leqslant x \\ |f_{\lambda_0}(p)| > c_0}} \frac{1}{p} \ll 1, \tag{12}$$

démontrant ainsi une partie de l'estimation inférieure du théorème 1.

Si $\sum_{\substack{p \leqslant x \\ f(p) \neq 0}} \frac{1}{p} \leqslant K'_0$, où $K'_0 = 4K_0$ (K_0 étant la constante du lemme 1), nous posons $\lambda_0 = c_0 = 0$. Dans ce cas, on a $f'_{\lambda_0, c_0} \equiv 0$ et (11) et (12) sont trivialement satisfaits.

Pour le reste de ce paragraphe, nous pouvons donc supposer

$$\sum_{\substack{p \leqslant x \\ f(p) \neq 0}} \frac{1}{p} > K'_0. \tag{13}$$

Pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$ et tout $c > 0$, posons

$$U(\lambda, c) = \lambda^2 + \sum_{p \leqslant x} \frac{\min(c^2, f_\lambda^2(p))}{p}.$$

La fonction $U(\lambda, c)$ étant une fonction continue et non négative du couple $(\lambda, c) \in \mathbf{R} \times]0, \infty[$, qui tend vers l'infini uniformément en c lorsque $|\lambda| \longrightarrow \infty$, le minimum $U(c) = \min_{\lambda \in \mathbf{R}} U(\lambda, c)$ existe et $U(c)$ est une fonction continue de $c > 0$.

Considérons la fonction $\dfrac{U(c)}{c^2}$. Elle est continue sur $]0, \infty[$ et vérifie $\lim_{c \to \infty} \dfrac{U(c)}{c^2} = 0$. De plus, en remarquant que, d'une part, pour tout $c > 0$ et $|\lambda| \geqslant \sqrt{2K'_0}\, c$, on a $U(\lambda, c) \geqslant \lambda^2 \geqslant 2\, K'_0 c^2$, et que, d'autre part, pour tout $c > 0$ suffisamment petit et $|\lambda| < \sqrt{2K'_0}\,c$, on a, grâce à (13),

$$U(\lambda, c) \geqslant \sum_{p \leqslant x} \frac{\min(c^2, f_\lambda^2(p))}{p} = \sum_{\substack{p \leqslant x \\ f(p) \neq 0}} \frac{c^2}{p} > K'_0 c^2 ,$$

on voit que $\varliminf_{c \to 0+} \frac{U(c)}{c^2} > K'_0$. Donc le minimum

$$c_0 = \min \{c > 0 : U(c) \leqslant K'_0 c^2\} \ (> 0)$$

existe et l'on a $U(\lambda_0, c_0) = U(c_0) \leqslant K'_0 c_0^2$ pour (au moins) un $\lambda_0 \in \mathbf{R}$. Nous fixons un tel couple (c_0, λ_0) (qui ne dépend que de f et x) pour le reste de la démonstration.

Par la définition de $U(\lambda_0, c_0)$ on a d'abord

$$\sum_{\substack{p \leqslant x \\ |f_{\lambda_0}(p)| > c_0}} \frac{1}{p} \leqslant \frac{U(\lambda_0, c_0)}{c_0^2} \leqslant K'_0 ,$$

c'est-à-dire (12), et puis $\lambda_0^2 \leqslant U(\lambda_0, c_0) \leqslant K'_0 c_0^2$,

$$B_2^2(f'_{\lambda_0, c_0}) \leqslant \left(U(\lambda_0, c_0) + \sum_{p, m \geqslant 2} \frac{c_0^2}{p^m}\right) \leqslant \left(K'_0 + \sum_{p, m \geqslant 2} \frac{1}{p^m}\right) c_0^2 .$$

Pour obtenir (11), il suffit alors de démontrer

$$c_0 \ll_\beta D_\beta(f, A) . \tag{14}$$

Cette estimation, qui est le point crucial dans l'estimation inférieure du théorème 1, se déduit facilement du lemme 1. En effet : de l'inégalité [3]

$$\frac{1}{x} \sum_{\substack{n \leqslant x \\ |f(n) - A| \geqslant 2^{1/\beta} D_\beta(f, A)}} 1 \leqslant \frac{1}{x} \sum_{n \leqslant x} \left(\frac{|f(n) - A|}{2^{1/\beta} D_\beta(f, A)}\right)^\beta = \frac{1}{2}$$

on déduit

$$\operatorname{card} \{n \leqslant x : f(n) \in [A - 2^{1/\beta} D_\beta(f, A),\ A + 2^{1/\beta} D_\beta(f, A)[\} \geqslant \frac{1}{2} \cdot$$

Le lemme 1 $\left(\text{avec } h = 2^{1 + \frac{1}{\beta}} D_\beta(f, A) \text{ et } q = \frac{1}{2}\right)$ donne alors

$$U\left(2^{1 + \frac{1}{\beta}} D_\beta(f, A)\right) \leqslant K'_0 \left(2^{1 + \frac{1}{\beta}} D_\beta(f, A)\right)^2 ,$$

---

(3) On a $D_\beta(f, A) > 0$ grâce à (13).

ce qui implique $c_0 \leqslant 2^{1+\frac{1}{\beta}} D_\beta(f, A)$ et donc (14) et (11) par la définition de c_0.

Remarquons encore que si (13) n'est pas satisfait, on a par définition $c_0 = 0$ et (14) reste valable.

5.2. Démontrons maintenant

$$B_\beta(f''_{\lambda_0,c_0}) + |A - A_1(\lambda_0, c_0)| \ll_\beta D_\beta(f, A), \qquad (15)$$

ce qui avec (11) prouve l'estimation inférieure du théorème 1.

Tenant compte de (12), une application du lemme 3 donne

$$B_\beta(f''_{\lambda_0,c_0}) + |A - A_1(\lambda_0, c_0)| \ll_\beta D_\beta(f''_{\lambda_0,c_0}, A - A_1(\lambda_0, c_0)).$$

Comme pour tout $n \in \mathbf{N}^*$

$$\begin{aligned} |f''_{\lambda_0,c_0}(n) - (A - A_1(\lambda_0, c_0))| &= |(f(n) - A) - \lambda_0(\log n - \log x) \\ &\qquad - (f'_{\lambda_0,c_0}(n) - A_0(f'_{\lambda_0,c_0})| \\ &\leqslant |f(n) - A| + |\lambda_0| \,.\, |\log n - \log x| + |f'_{\lambda_0,c_0}(n) - A_0(f'_{\lambda_0,c_0})), \end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned} D_\beta(f'_{\lambda_0,c_0}, A - A_1(\lambda_0, c_0)) \ll_\beta D_\beta(f, A) &+ |\lambda_0| D_\beta(\log, \log x) \\ &+ D_\beta(f'_{\lambda_0,c_0}, A_0(f'_{\lambda_0,c_0})). \end{aligned}$$

Pour démontrer (15), il suffit alors de majorer les deux derniers termes du membre de droite par $D_\beta(f, A)$.

D'après le lemme 4 et (11) on a d'abord

$$|\lambda_0| D_\beta(\log, \log x) \ll_\beta |\lambda_0| \ll_\beta D_\beta(f, A).$$

De plus, si $\beta \leqslant 2$, il résulte de (2) et de (11) que

$$D_\beta(f'_{\lambda_0,c_0}, A_0(f'_{\lambda_0,c_0})) \ll_\beta B_2(f'_{\lambda_0,c_0}) \ll_\beta D_\beta(f, A).$$

Si $\beta > 2$, (2) entraîne

$$D_\beta(f'_{\lambda_0,c_0}, A_0(f'_{\lambda_0,c_0})) \ll_\beta B_2(f'_{\lambda_0,c_0}) + B_\beta(f'_{\lambda_0,c_0})$$

et on aboutit à la même estimation par $D_\beta(f, A)$ en remarquant que, grâce à (11) et (14),

$$B_\beta(f'_{\lambda_0,c_0}) \leqslant c_0^{\beta-2} B_2^2(f'_{\lambda_0,c_0}) \ll_\beta D_\beta(f, A).$$

(15) est ainsi prouvé.

5.3. Pour obtenir l'estimation inférieure dans (5), nous démontrerons plus généralement qu'on a pour tout $K > 0$ et uniformément pour tout $c \geqslant \frac{1}{K} D_\beta(f, A)$

$$|\lambda_0| + |A - A_1(\lambda_0, c)| + B_2(f'_{\lambda_0, c}) + B_\beta(f''_{\lambda_0, c}) \ll_{\beta, K} c . \tag{16}$$

Il est clair que (en prenant $K = 1$ et $c = D_\beta(f, A)$) ceci entraîne l'estimation inférieure dans (5). Dans sa forme générale, (16) sera utilisé une deuxième fois au cours de la démonstration du théorème 2.

Pour démontrer (16), nous pouvons supposer $c > 0$, car si $c = 0$, on a $D_\beta(f, A) = 0$, $\lambda_0 = 0$ et tous les termes du membre de gauche de (16) sont nuls, ce qui rend (16) trivialement valable.

Nous allons prouver (16) en majorant chacun des termes du membre de gauche séparément par c.

D'après (11) et (12) on a $|\lambda_0| \ll_\beta D_\beta(f, A) \leqslant Kc$ et

$$\begin{aligned} B_2(f'_{\lambda_0, c}) &\ll B_2(f'_{\lambda_0, c_0}) + \Bigg(\sum_{\substack{p^m \leqslant x \\ c_0 < |f_{\lambda_0}(p^m)| \leqslant c}} \frac{|f_{\lambda_0}(p^m)|^2}{p^m} \Bigg)^{1/2} \\ &\leqslant B_2(f'_{\lambda_0, c_0}) + c \Bigg(\sum_{\substack{p^m \leqslant x \\ |f_{\lambda_0}(p^m)| > c_0}} \frac{1}{p^m} \Bigg)^{1/2} \\ &\ll_\beta D_\beta(f, A) + c \leqslant (K + 1) c . \end{aligned}$$

(Si $c \leqslant c_0$, la somme portant sur $p^m \leqslant x$, $c_0 < |f_{\lambda_0}(p^m)| \leqslant c$, sera considérée comme étant nulle).

De (15), (11) et (14) il résulte que

$$\begin{aligned} B_\beta(f''_{\lambda_0, c}) &\ll_\beta B_\beta(f''_{\lambda_0, c_0}) + \Bigg(\sum_{\substack{p^m \leqslant x \\ c < |f_{\lambda_0}(p^m)| \leqslant c_0}} \frac{|f_{\lambda_0}(p^m)|^\beta}{p^m} \Bigg)^{1/\beta} \\ &\leqslant B_\beta(f''_{\lambda_0, c_0}) + c_0 \Bigg(\frac{1}{c^2} \sum_{\substack{p^m \leqslant x \\ c < |f_{\lambda_0}(p^m)| \leqslant c_0}} \frac{|f_{\lambda_0}(p^m)|^2}{p^m} \Bigg)^{1/\beta} \\ &\leqslant B_\beta(f''_{\lambda_0, c_0}) + \frac{c_0}{c^{2/\beta}} (B_2(f'_{\lambda_0, c_0}))^{2/\beta} \\ &\ll_\beta D_\beta(f, A) + \frac{c_0}{c^{2/\beta}} D_\beta(f, A)^{2/\beta} \ll_{\beta, K} c . \end{aligned}$$

Enfin, on a

$$|\mathrm{A}-\mathrm{A}_1(\lambda_0\,,c)| \leqslant |\mathrm{A}-\mathrm{A}_1(\lambda_0\,,c_0)| + \left| \sum_{\substack{p^m \leqslant x \\ c_0<|f_{\lambda_0}(p^m)|\leqslant c}} \frac{f_{\lambda_0}(p^m)}{p^m} \right|$$

$$+ \left| \sum_{\substack{p^m \leqslant x \\ c<|f_{\lambda_0}(p^m)|\leqslant c_0}} \frac{f_{\lambda_0}(p^m)}{p^m} \right|$$

$$\leqslant |\mathrm{A}-\mathrm{A}_1(\lambda_0\,,c_0)| + c \sum_{\substack{p^m \leqslant x \\ |f_{\lambda_0}(p^m)|>c_0}} \frac{1}{p^m}$$

$$+ \frac{1}{c}\,\mathrm{B}_2^2(f'_{\lambda_0\,,c_0})$$

$$\ll_\beta \mathrm{D}_\beta(f,\mathrm{A}) + c + \frac{1}{c}\,\mathrm{D}_\beta^2(f,\mathrm{A}) \ll_{\beta,\mathrm{K}} c\,,$$

grâce à (15), (12) et (11).

Rassemblant ces estimations, on obtient (16).

5.4. Montrons maintenant que pour $(c\,,\lambda) = (c_0\,,\lambda_0)$ ou $c = \mathrm{D}_\beta(f,\mathrm{A})$ et $\lambda \in \mathbf{R}$ arbitraire on a

$$\mathrm{D}_\beta(f,\mathrm{A}) \ll_\beta |\lambda| + |\mathrm{A}-\mathrm{A}_1(\lambda\,,c)| + \mathrm{B}_2(f'_{\lambda,c}) + \mathrm{B}_\beta(f''_{\lambda,c})\,, \tag{17}$$

ce qui prouve les estimations supérieures dans (4) et (5).

Nous pouvons supposer $\mathrm{D}_\beta(f,\mathrm{A}) > 0$.

Soit $(c\,,\lambda)$ un des couples $(c_0\,,\lambda_0)$ ou $(\mathrm{D}_\beta(f,\mathrm{A}),\lambda)$, λ arbitraire.

En écrivant pour $n \in \mathbf{N}^*$

$$f(n) - \mathrm{A} = \lambda(\log n - \log x) + (\mathrm{A}_1(\lambda\,,c) - \mathrm{A})$$

$$+ (f'_{\lambda,c}(n) - \mathrm{A}_0(f'_{\lambda\,,c})) + f''_{\lambda\,,c}(n),$$

on voit que

$$\mathrm{D}_\beta(f,\mathrm{A}) \ll_\beta |\lambda|\,\mathrm{D}_\beta(\log,\log x) + |\mathrm{A}-\mathrm{A}_1(\lambda\,,c)|$$

$$+ \mathrm{D}_\beta(f'_{\lambda\,,c}\,,\mathrm{A}_0(f'_{\lambda\,,c})) + \mathrm{D}_\beta(f''_{\lambda\,,c}\,,0).$$

Appliquant les lemmes 4 et 6 et l'inégalité (2), il vient

$$\mathrm{D}_\beta(f,\mathrm{A}) \ll_\beta |\lambda| + |\mathrm{A}-\mathrm{A}_1(\lambda\,,c)| + \mathrm{B}_2(f'_{\lambda\,,c}) + \delta(\beta)\,\mathrm{B}_\beta(f'_{\lambda\,,c})$$

$$+ \left(1 + \sum_{\substack{p \leqslant x \\ |f_\lambda(p)|>c}} \frac{1}{p}\right) \mathrm{B}_\beta(f''_{\lambda\,,c})\,,$$

où l'on a posé

$$\delta(\beta) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \beta > 2, \\ 0 & \text{si} \quad 0 < \beta \leqslant 2. \end{cases}$$

Cette estimation s'écrit encore $D_\beta(f, A) \ll_\beta S + R_1 + R_2$, où S est le membre de droite dans (17) et

$$R_1 = \delta(\beta)\, B_\beta(f'_{\lambda,c}), \qquad R_2 = \Bigg(\sum_{\substack{p \leqslant x \\ |f_\lambda(p)| > c}} \frac{1}{p} \Bigg) B_\beta(f''_{\lambda,c}).$$

En posant $M = \max(S, R_1, R_2)$, on a donc $D_\beta(f, A) \ll_\beta M$ et il nous faut démontrer $D_\beta(f, A) \ll_\beta S$.

Si $M = S$, ceci est clair.

Si $M = R_1 > S$ (ce qui implique $\beta > 2$), on a pour $c = D_\beta(f, A)$ ou $c = c_0 (\ll_\beta D_\beta(f, A))$

$$D_\beta(f, A) \ll_\beta M = B_\beta(f'_{\lambda,c}) \leqslant (c^{\beta-2} B_2^2(f'_{\lambda,c}))^{1/\beta}$$
$$\ll_\beta (D_\beta(f, A))^{1-2/\beta} (B_2(f'_{\lambda,c}))^{2/\beta},$$

d'où
$$D_\beta(f, A) \ll_\beta B_2(f'_{\lambda,c}) \leqslant S.$$

Si $M = R_2$ et $(c, \lambda) = (c_0, \lambda_0)$, (12) implique $R_2 \ll B_\beta(f''_{\lambda_0, c_0})$

et donc

$$D_\beta(f, A) \ll_\beta M = R_2 \ll B_\beta(f''_{\lambda_0, c_0}) \leqslant S.$$

Enfin, dans le cas $M = R_2$, $c = D_\beta(f, A)$ (> 0) et λ arbitraire, l'inégalité

$$\sum_{\substack{p \leqslant x \\ |f_\lambda(p)| > c}} \frac{1}{p} \leqslant \frac{1}{c^\beta} B_\beta^\beta(f''_{\lambda,c}) = \frac{B_\beta^\beta(f''_{\lambda,c})}{D_\beta^\beta(f, A)}$$

entraîne
$$D_\beta(f, A) \ll_\beta M = R_2 \leqslant \frac{(B_\beta(f''_{\lambda,c}))^{\beta+1}}{(D_\beta(f, A))^\beta},$$

d'où
$$D_\beta(f, A) \ll_\beta B_\beta(f''_{\lambda,c}) \leqslant S.$$

Dans tous les cas, on obtient (17).

La démonstration des estimations (4) et (5) est donc complète.

5.5. Supposons maintenant $\beta \geqslant 2$ et démontrons (6).

Si $D_\beta(f, A) = 0$, on a nécessairement $A = 0$ et $f(p^m) = 0$ pour tout $p^m \leqslant x$ et (6) est trivialement satisfait. Nous pouvons donc supposer $D_\beta(f, A) > 0$.

L'estimation supérieure dans (6) se déduit facilement de celle dans (5) et de l'estimation

$$\begin{aligned}|A_1(\lambda, c) - A_0(f)| = \Bigg| \lambda\Big(\sum_{p^m \leqslant x} \frac{\log p^m}{p^m} - \log x\Big) \\ + \sum_{\substack{p^m \leqslant x \\ |f_\lambda(p^m)| > c}} \frac{f_\lambda(p^m)}{p^m}\Bigg| \ll |\lambda| + \frac{1}{c^{\beta-1}} B_\beta^\beta(f''_{\lambda,c}), \quad (18)\end{aligned}$$

valable pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$ et tout $c > 0$.

En effet : Si, pour $c = D_\beta(f, A)$ (> 0) et un $\lambda \in \mathbf{R}$,

$$D_\beta(f, A) \geqslant B_\beta(f''_{\lambda,c}),$$

alors on a $\frac{1}{c^{\beta-1}} B_\beta^\beta(f''_{\lambda,c}) \leqslant B_\beta(f''_{\lambda,c})$, et l'on obtient, grâce à (5) et (18),

$$\begin{aligned}D_\beta(f, A) &\ll_\beta |\lambda| + |A - A_1(\lambda, c)| + B_2(f'_{\lambda,c}) + B_\beta(f''_{\lambda,c}) \\ &\leqslant |A - A_0(f)| + |\lambda| + B_2(f'_{\lambda,c}) + B_\beta(f''_{\lambda,c}) \\ &\qquad + |A_1(\lambda, c) - A_0(f)| \\ &\ll |\lambda| + |A - A_0(f)| + B_2(f_\lambda) + B_\beta(f_\lambda).\end{aligned}$$

Si par contre $D_\beta(f, A) < B_\beta(f''_{\lambda,c})$ $(\leqslant B_\beta(f_\lambda))$, cette estimation est trivialement satisfaite. On a donc prouvé que

$$D_\beta(f, A) \ll_\beta \min_{\lambda \in \mathbf{R}} (|\lambda| + |A - A_0(f)| + B_2(f_\lambda) + B_\beta(f_\lambda)).$$

Pour obtenir l'estimation inférieure dans (6), on remarque que pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$ et tout $c > 0$ on a

$$B_2(f_\lambda) \ll B_2(f'_{\lambda,c}) + B_2(f''_{\lambda,c}) \leqslant B_2(f'_{\lambda,c}) + \Big(\frac{1}{c^{\beta-2}} B_\beta^\beta(f''_{\lambda,c})\Big)^{1/2}$$

et

$$B_\beta(f_\lambda) \ll_\beta B_\beta(f'_{\lambda,c}) + B_\beta(f''_{\lambda,c}) \leqslant (c^{\beta-2} B_2^2(f'_{\lambda,c}))^{1/\beta} + B_\beta(f''_{\lambda,c}).$$

En prenant $c = D_\beta(f, A)$ (> 0) et un $\lambda \in \mathbf{R}$ qui minimise le membre de droite dans (5), on voit d'abord que chacun des termes $|\lambda|$, $B_2(f_\lambda)$ et $B_\beta(f_\lambda)$ est $\ll_\beta D_\beta(f, A)$, et ensuite, en utilisant (18) et (5), que l'on a

$$|A - A_0(f)| \ll |A - A_1(\lambda, c)| + |\lambda| + \frac{1}{c^{\beta-1}} B_\beta^\beta(f''_{\lambda,c})$$
$$\ll_\beta D_\beta(f, A)\,.$$

Ceci montre que

$$D_\beta(f, A) \gg_\beta \min_{\lambda\in\mathbf{R}} (|A - A_0(f)| + |\lambda| + B_2(f_\lambda) + B_\beta(f_\lambda))$$

et la preuve de (6) est complète.

6. Démonstration du théorème 2.

Remarquons tout d'abord que (8) est équivalente à

$$\begin{cases} \lambda(x) = \mathcal{O}(\beta(x))\,, \\ \alpha(x) = A_1(f, x\,; \lambda(x), \beta(x)) + \mathcal{O}(\beta(x))\,, \\ B_2(f'_{\lambda(x),\beta(x)}, x) = \mathcal{O}(\beta(x)), \quad B_\beta(f''_{\lambda(x),\beta(x)}, x) = \mathcal{O}(\beta(x))\,. \end{cases} \tag{8$'$}$$

Ceci découle immédiatement des inégalités

$$\left| \sum_{\substack{p^m \leqslant x,\, m\geqslant 2 \\ |f_{\lambda(x)}(p^m)| \leqslant \beta(x)}} \frac{f_{\lambda(x)}(p^m)}{p^m} \right| \leqslant \Big(\sum_{p,m\geqslant 2} \frac{1}{p^m} \Big)\, \beta(x)$$

et

$$\sum_{\substack{p^m \leqslant x,\, m\geqslant 2 \\ |f_{\lambda(x)}(p^m)| \leqslant \beta(x)}} \frac{|f_{\lambda(x)}(p^m)|^2}{p^m} \leqslant \Big(\sum_{p,m\geqslant 2} \frac{1}{p^m} \Big)\, \beta(x)^2\,.$$

Il suffit donc d'établir l'équivalence (7) $\Longleftrightarrow$ (8)$'$.

Fixons f, $\alpha(x)$, $\beta(x)$ et β et supposons d'abord (7), c'est-à-dire $D_\beta(f, x\,; \alpha(x)) \leqslant K\,\beta(x)$ $(x \geqslant 1)$ avec une constante $K > 0$.

Alors l'estimation (16) du paragraphe 5.3 s'applique avec $c = \beta(x)$, $\lambda_0 = \lambda_0(f, x)$ et $A = \alpha(x)$ et l'on obtient toutes les estimations (8)$'$ avec $\lambda(x) = \lambda_0(f, x)$ [4].

Réciproquement, supposons qu'il existe une fonction $\lambda(x)$ telle que (8)$'$ est satisfait et démontrons $D_\beta(f, x\,; \alpha(x)) = \mathcal{O}(\beta(x))$. Fixons un $x \geqslant 1$ et supposons $D_\beta(f, x\,; \alpha(x)) > \beta(x)$ (> 0).

---

(4) On aurait pu déduire (8)$'$ directement du théorème 1*, mais ceci reviendrait essentiellement aux calculs effectués au cours de la démonstration de (16).

D'après (5) on a, en posant $c(x) = \mathrm{D}_\beta(f, x; \alpha(x))$ (> 0),

$$c(x) \ll_\beta |\lambda(x)| + |\alpha(x) - \mathrm{A}_1(f, x; \lambda(x), c(x))| + \mathrm{B}_2(f'_{\lambda(x), c(x)}, x) + \mathrm{B}_\beta(f''_{\lambda(x), c(x)}, x).$$

(8)$'$ entraîne d'abord $|\lambda(x)| = \mathcal{O}(\beta(x))$ et, grâce à notre hypothèse $c(x) > \beta(x)$, $\mathrm{B}_\beta(f''_{\lambda(x), c(x)}, x) \leqslant \mathrm{B}_\beta(f''_{\lambda(x), \beta(x)}, x) = \mathcal{O}(\beta(x))$.

Ensuite, on a

$$|\alpha(x) - \mathrm{A}_1(f, x; \lambda(x), c(x))| \leqslant |\alpha(x) - \mathrm{A}_1(f, x; \lambda(x), \beta(x))| + \sum_{\substack{p^m \leqslant x \\ \beta(x) < |f_{\lambda(x)}(p^m)| \leqslant c(x)}} \frac{|f_{\lambda(x)}(p^m)|}{p^m},$$

où le premier terme du membre de droite est, d'après (8)$'$, un $\mathcal{O}(\beta(x))$ et le deuxième s'estime par

$$\leqslant \begin{cases} \dfrac{1}{\beta(x)^{\beta-1}} \mathrm{B}_\beta^\beta(f''_{\lambda(x), \beta(x)}, x) = \mathcal{O}(\beta(x)) & \text{si} \quad \beta \geqslant 1, \\ c(x)^{1-\beta} \mathrm{B}_\beta^\beta(f''_{\lambda(x), \beta(x)}, x) = \mathcal{O}(c(x)^{1-\beta} \beta(x)^\beta) & \text{si} \quad 0 < \beta < 1. \end{cases}$$

De manière analogue, on obtient

$$\mathrm{B}_2(f'_{\lambda(x), c(x)}, x) \ll \mathrm{B}_2(f'_{\lambda(x), \beta(x)}, x) + \Bigg(\sum_{\substack{p^m \leqslant x \\ \beta(x) < |f_{\lambda(x)}(p^m)| \leqslant c(x)}} \frac{|f_{\lambda(x)}(p^m)|^2}{p^m} \Bigg)^{1/2}$$

$$\leqslant \begin{cases} \mathrm{B}_2(f'_{\lambda(x), \beta(x)}, x) + \left(\dfrac{1}{\beta(x)^{\beta-2}} \mathrm{B}_\beta^\beta(f''_{\lambda(x), \beta(x)}, x) \right)^{1/2} = \mathcal{O}(\beta(x)) \\ \qquad \text{si} \quad \beta \geqslant 2, \\ \mathrm{B}_2(f'_{\lambda(x), \beta(x)}, x) + (c(x)^{2-\beta} \mathrm{B}_\beta^\beta(f''_{\lambda(x), \beta(x)}, x))^{1/2} = \mathcal{O}(\beta(x)) \\ \qquad + \mathcal{O}(c(x)^{1-\beta/2} \beta(x)^{\beta/2}) \quad \text{si} \quad 0 < \beta < 2. \end{cases}$$

Rassemblant ces estimations en tenant compte de l'hypothèse $c(x) > \beta(x)$, on aboutit à

$$c(x) = \begin{cases} \mathcal{O}(\beta(x)) & \text{si} \quad \beta \geqslant 2, \\ \mathcal{O}(c(x)^{1-\beta/2} \beta(x)^{\beta/2}) & \text{si} \quad 0 < \beta < 2, \end{cases}$$

d'où $(\mathrm{D}_\beta(f, x, \alpha(x)) =)\ c(x) = \mathcal{O}(\beta(x))$, c'est-à-dire (7), dans tous les cas.

La démonstration du théorème 2 est donc complète.

7. Démonstration du théorème 3.

En prenant $\beta(x) \equiv 1$ dans le théorème 2, on voit que (10) et (9) entraînent

$$\overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{1}{x} \sum_{n \leqslant x} |f(n) - \alpha(x)|^{\beta} < \infty .$$

Pour obtenir l'implication inverse, il reste à démontrer que, dans le cas $\beta(x) \equiv 1$, (8) entraîne (9) et (10) avec un $\lambda \in \mathbf{R}$ convenable.

Supposons donc

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda(x) = \mathcal{O}(1)\,, \\ \alpha(x) = \lambda(x) \log x + \displaystyle\sum_{\substack{p \leqslant x \\ |f_{\lambda(x)}(p)| \leqslant 1}} \frac{f_{\lambda(x)}(p)}{p} + \mathcal{O}(1), \\ \displaystyle\sum_{\substack{p \leqslant x \\ |f_{\lambda(x)}(p)| \leqslant 1}} \frac{|f_{\lambda(x)}(p)|^2}{p} = \mathcal{O}(1), \qquad \sum_{\substack{p^m \leqslant x \\ |f_{\lambda(x)}(p^m)| > 1}} \frac{|f_{\lambda(x)}(p^m)|^{\beta}}{p^m} = \mathcal{O}(1)\,. \end{array}\right. \tag{19}$$

Nous allons démontrer d'abord que ceci implique

$$\lambda(x) = \lambda + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\log x}\right) \tag{20}$$

pour un $\lambda \in \mathbf{R}$ convenable.

Soient $x' \geqslant x \geqslant 1$ et posons $\Delta(x, x') = |\lambda(x') - \lambda(x)|$. Pour tout p premier on a

$$\Delta(x, x') \log p = |f_{\lambda(x)}(p) - f_{\lambda(x')}(p)|\,,$$

d'où

$$(\Delta(x, x') \log p)^{\beta} \leqslant 2^{\beta} (\max(|f_{\lambda(x)}(p)|\,,\ |f_{\lambda(x')}(p)|))^{\beta}\,.$$

En remarquant que $\Delta(x, x') \log p > 2$ entraîne

$$\max(|f_{\lambda(x)}(p)|\,,\ |f_{\lambda(x')}(p)|) > 1\,,$$

on obtient

$$\Delta(x,x')^\beta \sum_{\substack{p\leqslant x\\ \Delta(x,x')\log p>2}} \frac{(\log p)^\beta}{p} \leqslant 2^\beta\left(\sum_{\substack{p\leqslant x\\ |f_{\lambda(x)}(p)|>1}} \frac{|f_{\lambda(x)}(p)|^\beta}{p} + \sum_{\substack{p\leqslant x\\ |f_{\lambda(x')}(p)|>1}} \frac{|f_{\lambda(x')}(p)|^\beta}{p}\right).$$

D'après (19) le membre de droite est borné uniformément en x et $x' \geqslant x$. On a donc pour $\Delta(x) = \sup\limits_{x'\geqslant x} \Delta(x,x')$ l'estimation

$$\Delta(x)^\beta \sum_{\substack{p\leqslant x\\ \Delta(x)\log p>2}} \frac{(\log p)^\beta}{p} = \mathcal{O}(1).$$

Or, si $\Delta(x) \geqslant \dfrac{4}{\log x}$, l'estimation élémentaire (5)

$$\sum_{p\leqslant t} \frac{(\log p)^\beta}{p} \sim \frac{1}{\beta}(\log t)^\beta \quad (t \longrightarrow \infty) \tag{21}$$

entraîne

$$\sum_{\substack{p\leqslant x\\ \Delta(x)\log p>2}} \frac{(\log p)^\beta}{p} \geqslant \sum_{\sqrt{x}<p\leqslant x} \frac{(\log p)^\beta}{p} \gg_\beta (\log x)^\beta$$

et par suite
$$\Delta(x) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\log x}\right).$$

Si $\Delta(x) < \dfrac{4}{\log x}$, cette estimation est trivialement satisfaite. Par conséquent, la limite $\lambda = \lim\limits_{x\to\infty} \lambda(x)$ existe et vérifie (20).

Montrons maintenant (9) et (10).

De l'identité $f_\lambda(p^m) = (\lambda(x)-\lambda)\log p^m + f_{\lambda(x)}(p^m)$, on déduit d'abord, grâce à (19), (20) et (21),

$$\sum_{\substack{p\leqslant x\\ |f_\lambda(p)|\leqslant 1}} \frac{|f_\lambda(p)|^2}{p} \leqslant 2 \sum_{\substack{p\leqslant x\\ |f_{\lambda(x)}(p)|\leqslant 1}} \frac{|f_{\lambda(x)}(p)|^2}{p} + 2(\lambda-\lambda(x))^2 \sum_{p\leqslant x} \frac{(\log p)^2}{p} + \sum_{\substack{p\leqslant x\\ |f_{\lambda(x)}(p)|>1}} \frac{1}{p} = \mathcal{O}(1).$$

(5) Cette formule est bien connue dans le cas $\beta = 1$; le cas général s'en déduit facilement grâce à une sommation par parties.

Ensuite, en remarquant que $|f_\lambda(p^m)| > 1$ entraîne $|f_{\lambda(x)}(p^m)| > \frac{1}{2}$ ou $|f_\lambda(p^m)| \leqslant 2\,|\lambda - \lambda(x)| \log p^m$, on obtient

$$\sum_{\substack{p^m \leqslant x \\ |f_\lambda(p^m)|>1}} \frac{|f_\lambda(p^m)|^\beta}{p^m} \leqslant 2^\beta\,|\lambda - \lambda(x)|^\beta \sum_{p^m \leqslant x} \frac{(\log p^m)^\beta}{p^m}$$

$$+\, 2^\beta \sum_{\substack{p^m \leqslant x \\ |f_{\lambda(x)}(p^m)|>\frac{1}{2}}} \frac{|f_{\lambda(x)}(p^m)|^\beta}{p^m},$$

où le membre de droite s'estime par $\mathcal{O}(1)$, grâce à (19), (20), (21) et l'inégalité

$$\sum_{\substack{p^m \leqslant x \\ \frac{1}{2}<|f_{\lambda(x)}(p^m)|\leqslant 1}} \frac{|f_{\lambda(x)}(p^m)|^\beta}{p^m} \leqslant 4 \sum_{\substack{p^m \leqslant x \\ |f_{\lambda(x)}(p^m)|\leqslant 1}} \frac{|f_{\lambda(x)}(p^m)|^2}{p^m} = \mathcal{O}(1)\,.$$

Ceci montre la convergence des séries (10).

(9) découle de (19) et de l'estimation

$$\left| \sum_{\substack{p \leqslant x \\ |f_\lambda(p)|\leqslant 1}} \frac{f_\lambda(p)}{p} - \sum_{\substack{p \leqslant x \\ |f_{\lambda(x)}(p)|\leqslant 1}} \frac{f_{\lambda(x)}(p)}{p} \right| \leqslant |\lambda - \lambda(x)| \sum_{p \leqslant x} \frac{\log p}{p}$$

$$+ \sum_{\substack{p \leqslant x \\ |f_\lambda(p)|>1}} \frac{1}{p} + \sum_{\substack{p \leqslant x \\ |f_{\lambda(x)}(p)|>1}} \frac{1}{p} = \mathcal{O}(1)\,.$$

La première affirmation du théorème 3 est donc montrée.

Pour obtenir la deuxième, supposons que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \sum_{n \leqslant x} |f(n) - \alpha(x)|^\beta = 0\,.$$

Alors il existe une fonction $\beta(x) > 0$ telle que $\lim\limits_{x\to\infty} \beta(x) = 0$ et que la condition (7) est vérifiée. (On peut prendre par exemple $\beta(x) = \max\left(\frac{1}{x}, D_\beta(f, x\,; \alpha(x))\right)$. Par le théorème 2 il existe une fonction $\lambda(x)$ telle que (8) est satisfait. En particulier, si $(x_k)_{k\geqslant 1}$ est une suite de nombres réels $\geqslant 1$ convergeant vers l'infini telle que $\lim\limits_{k\to\infty} \beta(x_k) = 0$, on a $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda(x_k) = 0$.

Supposons maintenant que l'on ait $f(p^m) \neq 0$ pour un p^m. Alors on aurait pour tout k suffisamment grand

$$|f_{\lambda(x_k)}(p^m)| \geqslant \frac{1}{2} |f(p^m)| > 0 \quad \text{et} \quad |f_{\lambda(x_k)}(p^m)| > \beta(x_k)$$

et par suite

$$0 < \frac{|f(p^m)|^\beta}{2^\beta p^m} \leqslant \frac{|f_{\lambda(x_k)}(p^m)|^\beta}{p^m} \leqslant \sum_{\substack{p^m \leqslant x_k \\ |f_{\lambda(x_k)}(p^m)| > \beta(x_k)}} \frac{|f_{\lambda(x_k)}(p^m)|^\beta}{p^m},$$

ce qui est impossible puisque, d'après (8), le membre de droite est un $\mathcal{O}(\beta(x_k)^\beta)$ et donc tend vers 0 quand $k \longrightarrow \infty$.

Ceci montre que f est identiquement nulle et achève la démonstration du théorème 3.

BIBLIOGRAPHIE

[1] P.D.T.A. ELLIOTT, High power analogues of the Turán-Kubilius inequality and an application to number theory, *Can. J. Math.*, 32 (1980), 893-907.

[2] P.D.T.A. ELLIOTT, *Probabilistic number theory I*, Springer, New York – Heidelberg – Berlin, 1979.

[3] P. ERDÖS et I.Z. RUZSA, On the small sieve I, *J. Number Th.*, 12 (1980), 385-394.

[4] A. HILDEBRAND et J. SPILKER, Eine Charakterisierung der additiven, fastgeraden Funktionen, *Manuscripta Math.*, 32 (1980), 213-230.

[5] I.Z. RUZSA, On the concentration of additive functions, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, 36 (1980), 215-232.

[6] I.Z. RUZSA, On the variance of additive functions, Preprint.

[7] I.Z. RUZSA, Generalized moments of additive functions, Preprint.

[8] D. WOLKE, Das Selbergsche Sieb für Zahlenthetische Funktionen I, *Arch. Math.*, 24 (1973), 632-639.

Manuscrit reçu le 27 juillet 1982.

Adolf HILDEBRAND,
University of Illinois
Department of Mathematics
1409 West Green Street
Urbana, Illinois 61801 (USA).