ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

MICHEL BRION

Invariants d'un sous-groupe unipotent maximal d'un groupe semi-simple

Annales de l'institut Fourier, tome 33, nº 1 (1983), p. 1-27

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1983__33_1_1_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
33, 1 (1983), 1-27

INVARIANTS D'UN SOUS-GROUPE UNIPOTENT MAXIMAL D'UN GROUPE SEMI-SIMPLE

par Michel BRION

I. INTRODUCTION

Soient G un groupe semi-simple simplement connexe sur $\mathbf{C}$, et U un sous-groupe unipotent maximal de G. Si V est un G-module (i.e. l'espace d'une G-représentation) rationnel de dimension finie, notons $\mathbf{C}[V]^U$ l'algèbre des fonctions polynômiales U-invariantes sur V. Soit T un tore maximal de G normalisant U. Alors T opère sur $\mathbf{C}[V]^U$, et la T-algèbre $\mathbf{C}[V]^U$ décrit la structure de G-module de $\mathbf{C}[V]$. D'autre part, $\mathbf{C}[V]^U$ est une $\mathbf{C}$-algèbre de type fini, et même de Gorenstein [1].

Soit R le système de racines de (G, T) avec une base $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\}$ correspondant à $B = TU$. On note P^{++} l'ensemble des poids dominants (pour ce choix de T et $\mathcal{B}$) et $\varpi_1, \ldots, \varpi_\ell$ les poids fondamentaux. Si $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_s$ est la décomposition du G-module V en sous-modules simples, alors $\mathbf{C}[V]^U$ est $\mathbf{N}^s \times P^{++}$-graduée (par les degrés partiels par rapport aux V_i, et le poids par rapport à T), et $\mathbf{C}[V]^U_0 = \mathbf{C}$. Soit F la série de Poincaré de $\mathbf{C}[V]^U$ pour cette graduation. Identifions P^{++} grâce à $(\varpi_1, \ldots, \varpi_\ell)$. On a :

$$F(z_1, \ldots, z_s, t_1, \ldots, t_\ell) = \sum_{n_i, m_j \geq 0} z_1^{n_1} \ldots z_s^{n_s} t_1^{m_1} \ldots t_\ell^{m_\ell} \times \dim \mathbf{C}[V]^U_{n_1, \ldots, n_s, m_1\varpi_1 + \cdots + m_\ell\varpi_\ell}$$

pour $\max(|z_i|, |t_j|) < 1$; F est une fraction rationnelle, qui permet de calculer la structure de G-module de $\mathbf{C}[V]$. On montre, dans la deuxième partie de cet article, que F s'exprime par une intégrale sur un sous-tore compact maximal T_c de T ; le calcul de F peut donc se faire (au moins théoriquement) par la méthode des résidus. De plus, comme $\mathbf{C}[V]^U$ est de Gorenstein, il existe des entiers a_i, b_j tels qu'on ait l'identité :

$$F(z_1^{-1}, \ldots, z_s^{-1}, t_1^{-1}, \ldots, t_\ell^{-1}) \\ = (-1)^m z_1^{a_1} \ldots z_s^{a_s} t_1^{b_1} \ldots t_\ell^{b_\ell} F(z_1, \ldots, z_s, t_1, \ldots, t_\ell)$$

où m est la dimension de Krull de $\mathbf{C}[V]^U$ (cf. [2], théorème 6.1). On montre que pour la plupart des G-modules V, on a : $a_i = \dim V_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant s$, et $b_j = 2$ pour $1 \leqslant j \leqslant \ell$.

A l'aide de ce dernier résultat, on classe, dans la troisième partie, les G-modules simples V (où G est un groupe simple) tels que $\mathbf{C}[V]^U$ soit engendrée par des éléments algébriquement indépendants $P_1, \ldots, P_m$. Les poids dominants de ces G-modules, ainsi que les degrés et poids des P_i, sont rassemblés dans une table. On montre de plus que dans ces G-modules toute adhérence d'une G-orbite est normale, et à singularités rationnelles.

Enfin, dans la quatrième partie, on démontre un analogue du critère de Hilbert-Mumford pour les U-invariants ; si V est un G-module, on peut ainsi étudier le nilcône $N_U(V) = \{x \in V \mid P(x) = P(0)$ pour tout $P \in \mathbf{C}[V]^U\}$ sans calculer aucun U-invariant. Une partie des résultats de cet article a été annoncée dans [3] et [4].

Je tiens à remercier J. Dixmier pour l'aide qu'il m'a apportée et le temps qu'il a bien voulu me consacrer.

II. LA SERIE DE POINCARE DE L'ALGEBRE DES U-INVARIANTS

II.1. Expression intégrale de la série de Poincaré.

On conserve les notations de l'introduction. Soit G_c un sous-groupe compact maximal du groupe de Lie semi-simple G, avec un tore maximal $T_c \subset T$. Soit μ (resp. $\bar{\mu}$) la mesure de Haar normalisée sur le groupe compact T_c (resp. G_c). Soit $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_s$ comme dans l'introduction.

THEOREME 1. – *La série de Poincaré de l'algèbre* $\mathbf{N}^{s+1}$*-graduée* $\mathbf{C}[V]^U$ *est donnée par :*

$$F(z_1, \ldots, z_s, t_1, \ldots, t_\ell) = \int_{T_c} \frac{\prod_{\alpha \in R^+} (1 - e^\alpha)}{\prod_{1 \leq i \leq \ell} (1 - t_i e^{\varpi_i})}(g) \frac{d\mu(g)}{\prod_{1 \leq j \leq s} \det_{V_j}(1 - z_j g)}$$

pour $z_i, t_j \in C$ *et* $\max(|z_i|, |t_j|) < 1$.

Démonstration. – La fonction

$$g \longrightarrow \frac{\prod_{\alpha \in R^+} (1 - e^\alpha)}{\prod_{1 \leq i \leq \ell} (1 - t_i e^{\varpi_i})}(g) \frac{1}{\prod_{1 \leq j \leq s} \det_{V_j}(1 - z_j g)} = \varphi(g)$$

est continue sur T_c ; comme on a

$$\frac{1}{\prod_{1 \leq j \leq s} \det_{V_j}(1 - z_j g)} = \sum_{n \in \mathbf{N}^s} z^n \operatorname{Tr}_{\mathbf{C}[V]_n}(g^{-1})$$

pour $\max(|z_j|) < 1$, on obtient

$$\int \varphi(g)\, d\mu(g) = \sum_{n \in \mathbf{N}^s ; m_1, \ldots, m_\ell \geq 0} z^n t_1^{m_1} \ldots t_\ell^{m_\ell}$$
$$\times \int_{T_c} \prod_{\alpha \in R^+} (1 - e^\alpha)\; e^{m_1 \varpi_\ell + \cdots + m_\ell \varpi_\ell}(g) \operatorname{Tr}_{\mathbf{C}[V]_n}(g^{-1})\, d\mu(g).$$

Le théorème 1 résulte alors du lemme suivant :

LEMME 1. – *Si* M *est un* G*-module rationnel de dimension finie, et si* $\omega \in P^{++}$, *alors*

$$\int_{T_c} \prod_{\alpha \in R^+} (1 - e^\alpha)(g)\, e^\omega(g) \operatorname{Tr}_M(g^{-1})\, d\mu(g) = \dim M^U_\omega .$$

Démonstration du lemme 1. – Soit $E(\omega)$ un G-module simple de plus grand poids ω. La dimension de M^U_ω est la multiplicité de $E(\omega)$ dans M, donc d'après les relations d'orthogonalité des caractères, on a : $\dim M^U_\omega = \int_{\mathfrak{G}_c} \operatorname{Tr}_{E(\omega)}(g) \operatorname{Tr}_M(g^{-1})\, d\bar{\mu}(g)$.

En appliquant le théorème 37.2 de [5], on en déduit que

$$\dim M^U_\omega = |W|^{-1} \int_{T_c} \Big(\prod_{\alpha \in R} (1 - e^\alpha)\Big). d^{-1} . \sum_{w \in W} \epsilon(w)\, w(e^{\rho + \omega})(g) \times \operatorname{Tr}_M(g^{-1})\, d\mu(g)$$

où W est le groupe de Weyl de (G, T) ; ρ est la demi-somme des racines positives, et $d = e^\rho . \prod_{\alpha \in R^+} (1 - e^{-\alpha})$. Or $w(d) = \epsilon(w) d$, et la fonction $g \longrightarrow \prod_{\alpha \in R} (1 - e^{\alpha})(g)\, \mathrm{Tr}_M(g^{-1})$ est W-invariante, ainsi que $d\mu$, donc

$$\int_{T_c} \Big(\prod_{\alpha \in R} (1 - e^{\alpha}) \,.\, d^{-1} \,.\, \epsilon(w)\, w(e^{\rho + \omega})\Big)(g)\, \mathrm{Tr}_M(g^{-1})\, d\mu(g)$$

ne dépend pas de $w \in W$. On en déduit que

$$\dim M^U_{\omega} = \int_{T_c} \Big(\prod_{\alpha \in R} (1 - e^{\alpha})\, d^{-1}\, e^{\rho + \omega}\Big)(g)\, \mathrm{Tr}_M(g^{-1})\, d\mu(g)$$

$$= \int_{T_c} \Big(\prod_{\alpha \in R^+} (1 - e^{\alpha})\, e^{\omega}\Big)(g)\, \mathrm{Tr}_M(g^{-1})\; d\mu(g).$$

COROLLAIRE. – *La série de Poincaré de l'algèbre* $\mathbf{N}^s$*-graduée* $\mathbf{C}[V]^G$ *est*

$$f(z_1, \dots z_s) = |W|^{-1} \int_{T_c} \prod_{\alpha \in R} (1 - e^{\alpha})(g)\, \frac{d\mu(g)}{\prod_{1 \leq j \leq s} \mathrm{d\acute{e}t}_{V_j}(1 - z_j g)}.$$

Démonstration. – On a $\mathbf{C}[V]^G_{n_1, \dots, n_s} = \mathbf{C}[V]^U_{n_1, \dots, n_s, 0, \dots, 0}$ donc

$$f(z_1, \dots, z_s) = F(z_1, \dots, z_s, 0, \dots, 0)$$

$$= \int_{T_c} \prod_{\alpha \in R^+} (1 - e^{\alpha})(g)\, \frac{d\mu(g)}{\prod_{1 \leq j \leq s} \mathrm{d\acute{e}t}_{V_j}(1 - z_j g)}$$

donc d'après la démonstration du lemme 1, on a :

$$f(z_1, \dots, z_s)$$

$$= \int_{T_c} |W|^{-1} \sum_{w \in W} w\Big(\prod_{\alpha \in R^+} (1 - e^{\alpha})\Big)(g)\, \frac{d\mu(g)}{\prod_{1 \leq j \leq s} \mathrm{d\acute{e}t}_{V_j}(1 - z_j g)}.$$

Or on a :

$$\sum_{w \in W} w\Big(\prod_{\alpha \in R^+} (1 - e^{\alpha})\Big) = \sum_{w \in W} w(e^{-\rho} d) = d \,.\, \sum_{w \in W} \epsilon(w)\, w(e^{-\rho})$$

$$= \prod_{\alpha \in R} (1 - e^{\alpha}).$$

Remarque. – La formule du corollaire est bien connue ; on la trouve par exemple dans [6].

II.2. Symétrie de la série de Poincaré.

Soient V et F comme précédemment. Il existe alors

$$(a_1, \dots, a_s, b_1, \dots, b_\ell) \in \mathbf{N}^{s+\ell}$$

tel que

$$F(z_1^{-1},\ldots,z_s^{-1},t_1^{-1},\ldots,t_\ell^{-1}) = (-1)^m z_1^{a_1}\ldots z_s^{a_s} t_1^{b_1}\ldots t_\ell^{b_\ell} F(z_1,\ldots,z_s,t_1,\ldots,t_\ell)$$

où m est la dimension de Krull de $\mathbf{C}[V]^U$.

THEOREME 2. – i) $b_i \in \{0,1,2\}$ *pour* $1 \leqslant i \leqslant \ell$, *et s'il existe* $v \in V$ *tel que le stabilisateur* $\mathrm{Stab}_U(v)$ *de* v *dans* U *soit réduit à* $\{1\}$, *alors* $b_i \in \{1,2\}$ *pour* $1 \leqslant i \leqslant \ell$.

ii) $a_j \leqslant \dim V_j$ *pour* $1 \leqslant j \leqslant s$.

iii) *S'il existe* $v \in V$ *tel que* $\mathrm{Stab}_G(v)$ *soit fini, alors* $a_j = \dim V_j$ *pour* $1 \leqslant j \leqslant s$, *et* $b_i = 2$ *pour* $1 \leqslant i \leqslant \ell$.

Démonstration. – i) Posons $f(z,t) = F(\underbrace{z,\ldots,z}_{s},t,\underbrace{1,\ldots,1}_{\ell-1})$.

Soient P le sous-groupe parabolique minimal de G contenant B et correspondant à la racine simple α_1, et U_P le radical unipotent de P. On a $P = U_P . L$ pour un groupe réductif L dont le sous-groupe dérivé DL est simple de type A_1. Soit $T' = T \cap DL$, tore maximal de DL pour L bien choisi. Si DL est identifié à $SL_2(\mathbf{C})$, on peut identifier T' au tore maximal $\left\{\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1}\end{pmatrix}\right\}$. Posons $\varphi(z,t) = \dfrac{1}{t-t^{-1}}\,(tf(z,t) - t^{-1} f(z,t^{-1}))$; on a $\varphi \in \mathbf{Q}(z,t)$.
Pour $|z| < 1$, $|t| < 1$, on a :

$$f(z,t) = \sum_{n,m_1,\ldots,m_\ell} z^n t^{m_1} \dim \mathbf{C}[V]^U_{n,m_1\varpi_1+\cdots+m_\ell\varpi_\ell}.$$

Si E est un G-module simple de plus haut poids λ, alors $E^{U_P} = F$ est un DL-module simple (car $\dim E^U = 1$), de plus haut poids $\langle\lambda,\alpha_1^\vee\rangle\varpi_1 \mid T'$ par rapport à T' tore maximal de DL, donc pour g image de $\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1}\end{pmatrix}$ dans T', on a :

$$\mathrm{Tr}_F(g) = t^{\langle\lambda,\alpha_1^\vee\rangle} + t^{\langle\lambda,\alpha_1^\vee\rangle-2} + \cdots + t^{-\langle\lambda,\alpha_1^\vee\rangle}.$$

On en déduit que

$$\sum_{n\in\mathbf{N}} z^n \mathrm{Tr}_{\mathbf{C}[V]^{U_P}}(g) = \sum_{n,m_1,\ldots,m_\ell} z^n(t^{m_1} + t^{m_1-2} + \ldots + t^{-m_1}) \times \dim \mathbf{C}[V]^U_{n,m_1\varpi_1+\ldots+m_\ell\varpi_\ell}.$$

Comme $t^m + t^{m-2} + \ldots + t^{-m} = \dfrac{t^{m+1} - t^{-m-1}}{t - t^{-1}}$, on a finalement :
$\varphi(z, t) = \sum_{n\in\mathbf{N}} z^n \mathrm{Tr}_{\mathbf{C}[V]_n^{U_P}}(g)$ pour $|z| < 1$, et g image de $\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1}\end{pmatrix}$ dans T'.

En particulier, $\varphi(z, 1)$ est la série de Poincaré de l'algèbre $\mathbf{C}[V]^{U_P}$ graduée par le degré total par rapport à V. Comme cette algèbre est de Gorenstein (cf. [1]), il existe $a' \in \mathbf{Z}$ tel que

$$\varphi(z^{-1}, 1) = (-1)^{m'} z^{a'} \varphi(z, 1)$$

où m' est la dimension de Krull de $\mathbf{C}[V]^{U_P}$. Posons $a = a_1 + \ldots + a_s$: alors $f(z^{-1}, t^{-1}) = (-1)^m z^a t^{b_1} f(z, t)$, donc

$$\begin{aligned}\varphi(z^{-1}, t^{-1}) &= \frac{1}{t^{-1} - t}\,(t^{-1} f(z^{-1}, t^{-1}) - t f(z^{-1}, t)) \\ &= (-1)^{m+1} z^a \frac{1}{t - t^{-1}}\,(t^{b_1 - 1} f(z, t) - t^{1-b_1} f(z, t^{-1})).\end{aligned}$$

Posons $t = 1 + \epsilon$. On obtient

$$\begin{aligned}\varphi\Big(z^{-1}, \frac{1}{1+\epsilon}\Big) &\underset{\epsilon\to 0}{\sim} (-1)^{m+1} z^a \frac{1}{2\epsilon}\,((1 + (b_1 - 1)\epsilon) f(z, 1+\epsilon) \\ &\qquad - (1 + (1 - b_1)\epsilon) f(z, 1-\epsilon))) \\ &\underset{\epsilon\to 0}{\sim} (-1)^{m+1} z^a \Big(\frac{\partial f}{\partial t}(z, 1) + (b_1 - 1) f(z, 1)\Big)\end{aligned}$$

donc $$\varphi(z^{-1}, 1) = (-1)^{m+1} z^a \Big(\frac{\partial f}{\partial t}(z, 1) + (b_1 - 1) f(z, 1)\Big)$$

et $$\begin{aligned}\varphi(z, 1) &= (-1)^{m'} z^{-a'} \varphi(z^{-1}, 1) \\ &= (-1)^{m+m'+1} z^{a-a'} \Big(\frac{\partial f}{\partial t}(z, 1) + (b_1 - 1) f(z, 1)\Big).\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}\varphi(z, 1) &= \lim_{t\to 1} \frac{1}{t - t^{-1}}\,(t f(z, t) - t^{-1} f(z, t^{-1})) \\ &= \frac{\partial f}{\partial t}(z, 1) + f(z, 1).\end{aligned}$$

Donc $$\begin{aligned}&\frac{\partial f}{\partial t}(z, 1) + f(z, 1) \\ &\quad = (-1)^{m+m'+1} z^{a-a'} \Big(\frac{\partial f}{\partial t}(z, 1) + (b_1 - 1) f(z, 1)\Big).\end{aligned}$$

Or $f(0,t) = F(0,\ldots,0,t,1,\ldots,1) = 1$ pour tout t, donc $f(0,1) = 1$ et $\dfrac{\partial f}{\partial t}(0,1) = 0$. On a donc, si $b_1 \neq 1$:

$$1 \underset{z\to 0}{\sim} (-1)^{m+m'+1} z^{a-a'}(b_1 - 1).$$

Si $b_1 \neq 1$, les seules possibilités sont donc :

- $a = a'$, $m + m' + 1$ est impair, et $b_1 = 0$.
- $a = a'$, $m + m' + 1$ est pair, et $b_1 = 2$.

S'il existe $v \in V$ tel que $\mathrm{Stab}_U(v) = 1$, alors $\mathrm{Stab}_{U_P}(v) = 1$ et l'on a : $m = \dim V - \dim U$ et $m' = \dim V - \dim U_P$ (cf. [7]). Or $\dim U_P = \dim U - 1$, donc $m + m' + 1$ est pair, et $b_1 = 1$ ou 2.

(ii) Montrons d'abord le lemme suivant :

LEMME 2. – *Si $g \in T$, on a (avec les notations de la démonstration du théorème 1) :*

$$\prod_{1\leqslant i\leqslant s} \frac{1}{\mathrm{d\acute{e}t}_{V_i}(1 - z_i g^{-1})} \tag{1}$$
$$= \frac{1}{d(g)} \sum_{w\in W} \epsilon(w)\, w(e^{\rho}\, F(z_1,\ldots,z_s, e^{\varpi_1},\ldots,e^{\varpi_\ell}))\,(g).$$

Démonstration du lemme. – Pour $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant s} |z_i| < 1$, on a :

$$\prod_{1\leqslant i\leqslant s} \frac{1}{\mathrm{d\acute{e}t}_{V_i}(1 - z_i g^{-1})} = \sum_{n\in \mathbf{N}^s} z^n \,\mathrm{Tr}_{\mathbf{C}[V]_n}(g)$$

et

$$F(z_1,\ldots,z_s, e^{\varpi_1},\ldots,e^{\varpi_\ell}) = \sum_{n\in\mathbf{N}^s} z^n \sum_{\omega\in P^{++}} \dim \mathbf{C}[V]^U_{n,\omega}\, e^{\omega}$$

par définition ; de plus, pour $n \in \mathbf{N}^s$, on a :

$$\mathrm{Tr}_{\mathbf{C}[V]_n}(g) = \sum_{\omega\in P^{++}} \dim \mathbf{C}[V]^U_{n,\omega}\, \mathrm{Tr}_{E(\omega)}(g)$$
$$= \sum_{\omega\in P^{++}} \dim \mathbf{C}[V]^U_{n,\omega} \cdot \frac{1}{d(g)} \sum_{w\in W} \epsilon(w)\, w(e^{\rho+\omega})\,(g)$$

d'après la formule des caractères de Weyl. On en déduit que (1) est vraie pour $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant s} |z_i| < 1$. Les deux membres de (1) étant des fractions rationnelles en $z_1,\ldots,z_s$, (1) est vraie pour tous $z_1,\ldots,z_s$.

On déduit du lemme 2 que

$$\prod_{1 \leq i \leq s} \frac{1}{\det_{V_i}(1 - z_i^{-1} g^{-1})}$$
$$= \frac{1}{d(g)} \sum_{w \in W} \epsilon(w)\, w(e^{\rho}\, F(z_1^{-1}, \ldots, z_s^{-1}, e^{\varpi_1}, \ldots, e^{\varpi_\ell})).$$

Or on a :

$$\prod_{1 \leq i \leq s} \frac{1}{\det_{V_i}(1 - z_i^{-1} g^{-1})} = \prod_{1 \leq i \leq s} \frac{(-z_i)^{\dim V_i}}{\det_{V_i}(1 - z_i g)}$$

d'où

$$(-1)^{\dim V} \prod_{1 \leq i \leq s} z_i^{\dim V_i} \cdot \frac{1}{d(g^{-1})}$$
$$\cdot \sum_{w \in W} \epsilon(w)\, w(e^{-\rho}\, F(z_1, \ldots, z_s, e^{-\varpi_1}, \ldots, e^{-\varpi_\ell}))\,(g)$$
$$= \prod_{1 \leq i \leq s} \frac{(-z_i)^{\dim V_i}}{\det_{V_i}(1 - z_i g)} \qquad \text{(Lemme 2)}$$
$$= \frac{1}{d(g)} \sum_{w \in W} \epsilon(w)\, w(e^{\rho}\, F(z_1^{-1}, \ldots, z_s^{-1}, e^{\varpi_1}, \ldots, e^{\varpi_\ell}))\,(g).$$

Comme

$$F(z_1^{-1}, \ldots, z_s^{-1}, t_1^{-1}, \ldots, t_1^{-1})$$
$$= (-1)^m z_1^{a_1} \ldots z_s^{a_s}\, t_1^{b_1} \ldots t_\ell^{b_\ell}\, F(z_1, \ldots, z_s)$$

et $d(g^{-1}) = (-1)^{|R^+|} d(g)$ où $|R^+|$ = (nombre de racines positives) = dim U, on obtient :

$$(-1)^{\dim V - \dim U} \cdot \prod_{1 \leq i \leq s} z_i^{\dim V_i}$$
$$\cdot \sum_{w \in W} \epsilon(w)\, w(e^{-\rho}\, F(z_1, \ldots, z_s, e^{-\varpi_1}, \ldots, e^{-\varpi_\ell})) = (-1)^m z_1^{a_1} \ldots z_1^{a_s}$$
$$\cdot \sum_{w \in W} \epsilon(w)\, w(e^{\rho - b_1 \varpi_1 - \ldots - b_\ell \varpi_\ell}\, F(z_1, \ldots, z_s, e^{-\varpi_1}, \ldots, e^{-\varpi_\ell}))$$

d'où, en posant $n = \dim V - \dim U - m$, et $c_i = \dim V_i - a_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant s$:

$$\sum_{w \in W} \epsilon(w)\, w(e^{-\rho + b_1 \varpi_1 + \ldots + b_\ell \omega_\ell}\, F(z_1, \ldots, z_s, e^{\varpi_1}, \ldots, e^{\varpi_\ell})) \qquad (2)$$
$$= (-1)^n z_1^{c_1} \ldots z_s^{c_s} \cdot \sum_{w \in W} \epsilon(w)\, w(e^{\rho}\, F(z_1, \ldots, z_s, e^{\varpi_1}, \ldots, e^{\varpi_\ell})).$$

Le premier membre de (2) est une fraction rationnelle en $(z_1, \ldots, z_s)$ définie en $(0, \ldots, 0)$, et le second membre est équivalent en $(0, \ldots, 0)$

à $(-1)^{m'} z_1^{c_1} \dots z_s^{c_s} . \sum_{w \in W} \epsilon(w)\, w(e^\rho)$, car $\sum_{w \in W} \epsilon(w)\, w(e^\rho) \neq 0$.
Donc $c_1 \geqslant 0, \dots, c_s \geqslant 0$, i.e. $a_i \leqslant \dim V_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant s$.

(iii) Soit $v \in V$ tel que $\mathrm{Stab}_G(v)$ soit fini : alors $\mathrm{Stab}_U(v) = \{1\}$ donc d'après (ii), on a $b_i = 1$ ou 2 pour $1 \leqslant i \leqslant \ell$; de plus, $n = \dim V - \dim U - m = 0$. Soit $C = \left\{ \sum_{1 \leqslant i \leqslant \ell} \lambda_i \varpi_i , \lambda_i \text{ tous } > 0 \right\}$ la chambre fondamentale. Posons $c = c_1 + \dots + c_s$, et

$$\nu = -\rho + b_1 \varpi_1 + \dots + b_\ell \varpi_\ell = \sum_{1 \leqslant i \leqslant \ell} (b_i - 1)\, \varpi_i :$$

alors $\nu \in \overline{C}$. Faisons $z_1 = \dots = z_s = z$ dans (2) et regardons dans l'identité obtenue les termes du coefficient de z^{n+c} $(n \in \mathbf{N})$ qui sont des exponentielles d'éléments de C. On a :

$$\sum_{w \in W} \epsilon(w)\, w \Big(\sum_{\omega \in P^{++}} \dim \mathbf{C}[V]^U_{n+c,\omega}\, e^{\nu+\omega} \Big) = \sum_{w \in W} \epsilon(w)\, w \Big(\sum_{\omega \in P^{++}} \dim \mathbf{C}[V]^U_{n,\omega}\, e^{\rho+\omega} \Big)$$

et pour $\omega \in P^{++}$, on a : $\nu + \omega \in \overline{C}$ et $\omega + \rho \in C$, donc

$$\sum_{\omega \in P^{++}, \nu+\omega \in C} e^{\nu+\omega} \dim \mathbf{C}[V]^U_{n+c,\omega} = \sum_{\omega \in P^{++}} e^{\rho+\omega} \dim \mathbf{C}[V]^U_{n,\omega} .$$

De même, pour $0 \leqslant n < c$, on obtient :

$$\sum_{\omega \in P^{++}, \nu+\omega \in C} e^{\nu+\omega} \dim \mathbf{C}[V]^U_{n,\omega} = 0 .$$ Donc pour $|z| < 1$, on a

$$\begin{aligned} z^c e^{\rho-\nu} F(z, \dots, z, e^{\varpi_1}, \dots, e^{\varpi_\ell}) &= e^{-\nu} \sum_{n \in \mathbf{N}} z^{n+c} \sum_{\omega \in P^{++}} e^{\rho+\omega} \dim \mathbf{C}[V]^U_{n,\omega} \\ &= \sum_{n \in \mathbf{N}} z^{n+c} \sum_{\omega \in P^{++}, \nu+\omega \in C} e^{\omega} \dim \mathbf{C}[V]^U_{n+c,\omega} \\ &= \sum_{n \in \mathbf{N}} z^{n} \sum_{\omega \in P^{++}, \nu+\omega \in C} e^{\omega} \dim \mathbf{C}[V]^U_{n,\omega} . \end{aligned}$$

D'où

$$z^c e^{\rho-\nu} F(z, \dots, z, e^{\varpi_1}, \dots, e^{\varpi_\ell}) = \sum_{n \in \mathbf{N}, \omega \in P^{++}} z^n e^{\omega} \dim \mathbf{C}[V]^U_{n,\omega} - \sum_{n \in \mathbf{N}, \omega \in P^{++}, \omega+\nu \notin C} z^n e^{\omega} \dim \mathbf{C}[V]^U_{n,\omega}$$

et $(1 - e^{\rho-\nu} z^{c})\, F(z, \ldots, z, e^{\varpi_1}, \ldots, e^{\varpi_\ell})$

$$= \sum_{n \in \mathbf{N},\, \omega \in P^{++},\, \omega+\nu \notin C} z^n e^{\omega} \dim \mathbf{C}[V]^{U}_{n,\omega}\,.$$

Soit $I = \{i \in [1, \ell] \mid 1 \leqslant i \leqslant \ell \text{ et } b_i = 1\}$. Alors $\nu = \sum_{i \notin I} \varpi_i$ et pour $\omega \in P^{++}$, on a : $\omega + \nu \notin C \Longleftrightarrow$ il existe $i \in I$ tel que $(\omega \mid \alpha_i) = 0$. Donc

$$(1 - e^{\rho-\nu} z^{c})\, F(z, \ldots, z, e^{\varpi_1}, \ldots, e^{\varpi_\ell}) = \sum_{n \in \mathbf{N},\, (\omega \mid \alpha_i)=0 \text{ pour un } i \in I} z^n e^{\omega} \dim \mathbf{C}[V]^{U}_{n,\omega}\,. \tag{3}$$

Soit $i \in [1, \ell]$: posons, pour $|z| < 1$,

$$f_i(z) = \sum_{n \in \mathbf{N},\, (\omega \mid \alpha_i)=0} z^n \dim \mathbf{C}[V]^{U}_{n}\,.$$

Soit H_i le sous-groupe de G engendré par U et $U_{-\alpha_i}$. Si E est un G-module simple de plus haut poids λ, alors $E^{H_i} = E^{U}$ si $(\lambda \mid \alpha_i) = 0$, et $E^{H_i} = 0$ sinon. On en déduit que $f_i(z)$ est la série de Poincaré de $\mathbf{C}[V]^{H_i}$ (gradué par le degré par rapport à V).

LEMME 3. — *$\mathbf{C}[V]^{H_i}$ est une algèbre de type fini, de dimension de Krull $m - 2$.*

Démonstration du lemme. — Soit $P = T.H_i$; alors P est un sous-groupe parabolique de G. Il existe une décomposition de Levi $P = U_P.L$ de P, avec $U_P.DL = H_i$ (où DL est le sous-groupe dérivé de L). Alors DL normalise U_P, et $\mathbf{C}[V]^{H_i} = (\mathbf{C}[V]^{U_P})^{DL}$, avec $\mathbf{C}[V]^{U_P}$ de type fini et DL réductif, donc $\mathbf{C}[V]^{H_i}$ est de type fini. De plus H_i n'a pas d'homomorphisme non trivial à valeurs dans $\mathbf{C}^*$ et $\mathrm{Stab}_{H_i}(v) = \{1\}$ donc $\dim \mathbf{C}[V]^{H_i} = \dim V - \dim H_i$ et $\dim H_i = \dim U + 2$, avec $m = \dim V - \dim U$; d'où le lemme.

D'après (3), on a pour $z \in \mathbf{R}$, $0 \leqslant z < 1$:

$$(1 - z^{c})\, F(z, \ldots, z, 1, \ldots, 1) \leqslant \sum_{1 \leqslant i \leqslant \ell} f_i(z)\,.$$

Or d'après le lemme 3, il existe $K_1, \ldots, K_\ell$ constantes > 0 telles que $f_i(z) \underset{z \to 1}{\sim} \dfrac{K_i}{(1 - z)^{m-2}}$ pour $1 \leqslant i \leqslant \ell$. De même, comme $F(z, \ldots, z, 1, \ldots, 1)$ est la série de Poincaré de $\mathbf{C}[V]^{U}$ graduée par le degré total par rapport à V, il existe une constante $K > 0$ telle que $F(z, \dots, z, 1, \dots, 1) \underset{z \to 1}{\sim} \dfrac{K}{(1-z)^m}$. Si $c \neq 0$, on obtient donc : $(1-z)^{-m} = 0((1-z)^{-m+1})$ quand $z \longrightarrow 1$, ce qui est absurde. Donc $c = 0$; comme $c = c_1 + \dots + c_s$ avec des $c_i \in \mathbf{N}$, on a : $c_1 = \dots = c_s = 0$, i.e. $a_i = \dim V_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant \ell$. De plus, d'après (3) :

$$(1 - e^{\rho - \nu}) F(z, \dots, z, e^{\varpi_1}, \dots, e^{\varpi_\ell}) = \sum_{n \in \mathbf{N}, (\omega | \alpha_i) = 0 \text{ pour un } i \in I} z^n e^\omega \dim \mathbf{C}[V]^U_{n,\omega}.$$

Si $I \neq \emptyset$, alors en faisant $z = 0$, on obtient $1 - e^{\rho - \nu} = 1$, ce qui est absurde. Donc $I = \emptyset$, i.e. $b_i = 2$ pour $1 \leqslant i \leqslant \ell$.

COROLLAIRES. –

1) *Sous les hypothèses du théorème 2 (ii), soient* $P_1, \dots, P_m$ *un système de paramètres homogènes de* $\mathbf{C}[V]^U$, *et* $(Q_1, \dots, Q_r)$ *une base homogène du* $\mathbf{C}[P_1, \dots, P_m]$*-module libre gradué* $\mathbf{C}[V]^U$. *Posons* $d_i = \deg P_i$ *pour* $1 \leqslant i \leqslant m$, *et* $e = \max_{1 \leqslant i \leqslant r} (\deg Q_i)$. *Alors* $e \geqslant \dim V - 2 \dim U - s$ *(donc si la dimension de* V *est grande, il n'y a aucune chance pour que* $\mathbf{C}[V]^U$ *soit une algèbre de polynômes).*

2) *Sous les mêmes hypothèses, s'il existe des entiers positifs* $d_1, \dots, d_m$ *tels que* $F(z, \dots, z, 1, \dots, 1) = \prod_{1 \leqslant i \leqslant m} (1 - z^{d_i})^{-1}$, *alors* $d_1 + \dots + d_m \leqslant \dim V \leqslant s + 2 \dim U$.

Démonstration. – 1) On a

$$F(z, \dots, z, 1, \dots, 1) = \frac{\sum_{1 \leqslant j \leqslant r} z^{\deg Q_j}}{\prod_{1 \leqslant i \leqslant m} (1 - z^{d_i})}$$

d'où $a_1 + \dots + a_s = -e + \sum_{1 \leqslant i \leqslant m} d_i$. D'autre part, le nombre de d_i égaux à 1 est au plus égal à $\dim V^U = s$, donc

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant m} d_i \geqslant s + 2(m - s).$$

Or $m \geqslant \dim V - \dim U$, et $a_1 + \dots + a_s \leqslant \dim V$, d'où l'inégalité cherchée.

Le corollaire 2 sera appliqué dans la partie suivante à la détermination des représentations irréductibles V du groupe simple G telles que $\mathbf{C}[V]^U$ soit une algèbre de polynômes, en suivant une idée de T.A. Springer (cf. [8]).

III. REPRESENTATIONS IRREDUCTIBLES DES GROUPES ALGEBRIQUES SIMPLES DONT L'ALGEBRE DE U-INVARIANTS EST REGULIERE

Dans cette partie, on prend pour G un groupe simple. Soit V un G-module irréductible de plus grand poids ω.

THEOREME 3. – *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\mathbf{C}[V]^U$ *est une algèbre de polynômes.*

(ii) *La série de Poincaré de l'algèbre* $\mathbf{N}^{\ell+1}$*-graduée* $\mathbf{C}[V]^U$ *s'écrit* $F(z, t_1, \ldots, t_\ell) = \prod_{1 \leqslant i \leqslant m} (1 - z^{d_i} t^{n_i})^{-1}$ *où* $t = (t_1, \ldots, t_\ell)$, *les* d_i *sont des entiers* > 0, *et les* n_i *appartiennent à* $\mathbf{N}^\ell$.

(iii) *A automorphisme du diagramme de Dynkin près,* (G, V) *figure dans la Table.*

Il est clair que (i) $\Longrightarrow$ (ii) ; on démontrera que (ii) $\Longrightarrow$ (iii), puis que (iii) $\Longrightarrow$ (i).

III.1. Démonstration de (ii) $\Longrightarrow$ (iii).

Soit V vérifiant (ii) ; alors m est la dimension de Krull de $\mathbf{C}[V]^U$. On supposera que $d_1 \leqslant d_2 \leqslant \ldots \leqslant d_m$.

LEMME 4. – *A automorphisme du diagramme de Dynkin près,* (G, ω) *fait partie de la liste suivante (où les poids fondamentaux sont numérotés comme dans* [9]) :

$A_\ell : \varpi_1, \varpi_2, 2\varpi_1$ et (A_5, ϖ_3) ; (A_6, ϖ_3) ; (A_7, ϖ_3).

$B_\ell : \varpi_1$ et (B_3, ϖ_3) ; (B_4, ϖ_4) ; (B_5, ϖ_5) ; (B_6, ϖ_6).

Table

Représentations irréductibles V *du groupe simple* G
telles que $\mathbf{C}[V]^U$ *soit une algèbre de polynômes.*

Type de G	Plus haut poids de V	Degrés et poids de générateurs $\mathbf{N}\times P^{++}$ homogènes, algébriquement indépendants, de $\mathbf{C}[V]^U$
A_ℓ, $\ell \geqslant 1$	ϖ_ℓ	$(1,\varpi_1)$
	$2\varpi_\ell$	$(1,2\varpi_1)$; $(2,2\varpi_2),\ldots,(\ell,2\varpi_\ell)$; $(\ell+1,0)$.
	$\varpi_{\ell-1}$, $\ell \geqslant 2$	$(1,\varpi_2)$; $(2,\varpi_4)$; $(3,\varpi_6),\ldots,(k,\varpi_{2k})$ si $\ell = 2k$ (k,ϖ_{2k}) ; $(k+1,0)$ si $\ell = 2k+1$
A_5	ϖ_3	$(1,\varpi_3)$; $(2,\varpi_1+\varpi_5)$; $(3,\varpi_3)$; $(4,\varpi_2+\varpi_4)$; $(4,0)$
B_ℓ, $\ell \geqslant 2$	ϖ_1	$(1,\varpi_1)$; $(2,0)$
B_2	ϖ_2	$(1,\varpi_2)$
B_3	ϖ_3	$(1,\varpi_3)$; $(2,0)$
B_4	ϖ_4	$(1,\varpi_4)$; $(2,\varpi_1)$; $(2,0)$
B_5	ϖ_5	$(1,\varpi_5)$; $(2,\varpi_1)$; $(2,\varpi_2)$; $(3,\varpi_5)$, $(4,\varpi_3)$; $(4,\varpi_4)$; $(4,0)$
C_ℓ, $\ell \geqslant 3$	ϖ_1	$(1,\varpi_1)$
C_3	ϖ_2	$(1,\varpi_2)$; $(2,\varpi_2)$; $(2,0)$; $(3,\varpi_1+\varpi_3)$; $(3,0)$
C_3	ϖ_3	$(1,\varpi_3)$; $(2,2\varpi_1)$; $(3,\varpi_3)$; $(4,2\varpi_2)$; $(4,0)$
D_ℓ, $\ell \geqslant 4$	ϖ_1	$(1,\varpi_1)$; $(2,0)$
D_5	ϖ_5	$(1,\varpi_4)$; $(2,\varpi_1)$
D_6	ϖ_6	$(1,\varpi_6)$; $(2,\varpi_2)$; $(3,\varpi_6)$; $(4,\varpi_4)$; $(4,0)$
G_2	ϖ_1	$(1,\varpi_1)$; $(2,0)$
F_4	ϖ_4	$(1,\varpi_4)$; $(2,\varpi_4)$; $(2,0)$; $(3,\varpi_3)$; $(3,0)$
E_6	ϖ_6	$(1,\varpi_1)$; $(2,\varpi_6)$; $(3,0)$
E_7	ϖ_7	$(1,\varpi_7)$; $(2,\varpi_2)$; $(3,\varpi_7)$; $(4,\varpi_6)$; $(4,0)$

(Il faut rajouter à cette table les représentations qui s'en déduisent par automorphismes du diagramme de Dynkin).

$C_\ell : \varpi_1 , \varpi_2$ et (C_3 , ϖ_3).

$D_\ell : \varpi_1$ et (D_5 , ϖ_5) ; (D_6 , ϖ_6) ; (D_7 , ϖ_7).

(G_2 , ϖ_1) ; (F_4 , ϖ_4) ; (E_6 , ϖ_6) ; (E_7 , ϖ_7).

Démonstration. – D'après le corollaire 2 du théorème 2, on a : $\dim V \leqslant 1 + 2 \dim U$. Par suite, si le rang de G est au moins 2, on a : $\dim V < \dim G$ et on utilise alors la classification de [10]. Si le rang de G est 1, alors $G \simeq SL_2(\mathbf{C})$ et $\dim V \leqslant 3$ donc V est isomorphe à $E(\varpi_1)$ ou $E(2\varpi_1)$.

Pour obtenir les résultats de la Table, il reste à éliminer :

(A_6 , ϖ_3) ; (A_7 , ϖ_3) ; (B_6 , ϖ_6) ; (C_ℓ , ϖ_2) pour $\ell \geqslant 4$; (D_7 , ϖ_7).

Pour cela, on utilisera le lemme évident suivant :

LEMME 5. –

(i) *Si* $t = \dim \mathbf{C}[V]_2^U$, *alors* $d_1 = 1$ *et* $d_2 = \ldots = d_t = 2$.

(ii) *La série de Poincaré de l'algèbre* $\mathbf{N}$*-graduée* $\mathbf{C}[V]^G$ *s'écrit* $g(z) = \prod_{1 \leqslant i \leqslant n} (1 - z^{e_i})^{-1}$ *où* $(e_1 , \ldots , e_n)$ *est une sous-suite de* $(d_1 , \ldots , d_m)$.

Cas de (A_6 , ϖ_3) :

Avec les notations du lemme 5, on a $t = 2$ car

$$\mathbf{C}[V]_2 \simeq E(2\varpi_3) + E(\varpi_1 + \varpi_5)$$

(cf. [11], Table 2b). Donc $d_1 = 1$; $d_2 = 2$; $d_i \geqslant 3$ pour $i \geqslant 3$. D'autre part, $m \geqslant \dim V - \dim U = \binom{7}{3} - \frac{7 \times 6}{2} = 14$, donc $d_1 + \ldots + d_m \geqslant 39 > 35 = \dim V$, ce qui contredit le corollaire 2 du théorème 2.

Cas de (D_7 , ϖ_7) :

D'après [11], Table 3b, on a : $\mathbf{C}[V]_2 \simeq E(2\varpi_6) + E(\varpi_3)$, donc $t = 2$. D'autre part, $m \geqslant \dim V - \dim U = 2^6 - 7 \times 6 = 22$, et $\mathbf{C}[V]^G$ est engendré par un élément non nul de degré 8 (cf. [20], Table 3a), donc

$$d_1 + \ldots + d_m \geqslant 1 + 2 + 8 + 3(22 - 3) = 68 > 64 = \dim V,$$

contradiction.

Les autres cas à éliminer se traitent de façon analogue.

III.2. Démonstration de (iii) $\Longrightarrow$ (i).

Montrons d'abord le

LEMME 6. – *Soient* Z *le groupe des homothéties de* V ; $\overline{G} = G.Z$; $\overline{B} = B.Z$; $\overline{T} = T.Z$. *Si* $\overline{B}$ *opère sur* V *avec une orbite ouverte, alors* $\mathbf{C}[V]^U$ *est une algèbre de polynômes.*

Démonstration du lemme. – Soit $(n, \omega) \in \mathbf{N} \times P^{++}$: si φ, ψ sont dans $\mathbf{C}[V]^U_n$, alors $\varphi/\psi \in \mathbf{C}(V)^{\overline{B}}$. Comme $\overline{B}$ opère sur V avec une orbite ouverte, on a $\mathbf{C}(V)^{\overline{B}} = \mathbf{C}$, donc $\dim \mathbf{C}[V]^U_{n,\omega} \leqslant 1$. D'autre part, $\mathbf{C}[V]^U$ est une algèbre factorielle dont les unités sont les constantes (cf. [7]). On conclut en appliquant ([12], Lemma 4.2), avec $A = \mathbf{C}[V]^U$ et $\mathfrak{H}$ algèbre de Lie de $\overline{T}$.

Les représentations vérifiant la condition du lemme 6 ont été classées par Kac ([13], Theorem 3). On en déduit que les représentations suivantes ont une algèbre des U-invariants régulière :

$A_\ell : \varpi_1, \varpi_2, 2\varpi_1$. $\quad B_\ell : \varpi_1$ et $(B_3, \varpi_3), (B_4, \varpi_4)$.

$C_\ell : \varpi_1$. $\quad D_\ell : \varpi_1$ et (D_5, ϖ_5). $\quad G_2 : \varpi_1$. $\quad E_6 : \varpi_1$.

Il reste donc à examiner les représentations suivantes : (A_5, ϖ_3) ; (B_5, ϖ_5) ; (C_3, ϖ_2) ; (C_3, ϖ_3) ; (D_6, ϖ_6) ; (F_4, ϖ_4) ; (E_7, ϖ_7). Pour cela, on utilisera le

LEMME 7 (formulé incorrectement dans [4]). – *Soient* V *une des représentations à examiner, et* S *une sous-algèbre* $(\mathbf{N} \times P^{++})$*-graduée de* $\mathbf{C}[V]^U$, *telle que l'application canonique* $\mathbf{C}[V]^G \otimes S \longrightarrow \mathbf{C}[V]^G.S$ *soit injective. Soit* $f(x, y)$ *la série de Poincaré de l'algèbre* $\mathbf{N}^2$*-graduée* $\mathbf{C}[V \times V^*]^G$. *Si pour tout* $p \in \mathbf{N}$, *on a :* $\dim S_p =$ *coefficient de* $x^p y^p$ *dans le développement en série de* $\dfrac{f(x, y)}{f(x, 0)\, f(0, y)}$, *alors* $\mathbf{C}[V]^U = \mathbf{C}[V]^G.S$.

Démonstration du lemme. – On vérifie (par exemple sur les tables de [14]) que V est « colibre », i.e. que $\mathbf{C}[V]$ est un $\mathbf{C}[V]^G$-module libre. Soit H un sous-espace $\mathbf{N}$-gradué et G-stable de $\mathbf{C}[V]$ tel que $\mathbf{C}[V] \simeq \mathbf{C}[V]^G \otimes_{\mathbf{C}} H$ (pour l'existence de H, cf. [15], Proposition 1 et Lemma 1). Si $(p, q) \in \mathbf{N}^2$, on a :

$$\begin{aligned}\mathbf{C}[V \times V^*]^G_{p,q} &= (\mathbf{C}[V]_p \otimes \mathbf{C}[V^*]_q)^G \\ &\simeq \bigoplus_{p_1+p_2=p;\, q_1+q_2=q} \mathbf{C}[V]^G_{p_1} \otimes \mathbf{C}[V^*]^G_q \otimes (H_{p_2} \otimes H^*_{q_2})\end{aligned}$$

d'où

$$f(x\,,y) = (\Sigma\, x^{p_1} \dim \mathbf{C}[V]^G_{p_1})\, (\Sigma\, y^{q_1} \dim \mathbf{C}[V^*]^G_{q_1})$$
$$(\Sigma\, x^{p_2} y^{q_2} \dim(H_{p_2} \otimes H^*_{q_2})^G)\,.$$

Le coefficient $a_{p,q}$ de $x^p y^p$ dans $\dfrac{f(x\,,y)}{f(x\,,0)\,f(0\,,y)}$ est donc égal à $\dim(H_p \otimes H_p^*)^G = \dim \mathrm{End}_G(H_p) \geqslant \dim H_p^U$.

L'algèbre $\mathbf{N}$-graduée $\mathbf{C}[V]^U$ est le produit tensoriel des deux sous-espaces vectoriels gradués $\mathbf{C}[V]^G$ et H^U, donc la série de Poincaré F de $\mathbf{C}[V]^U$ est $F(z) = f(z\,,0)\,.\, \sum_{p \in \mathbf{N}} \dim H_p^U z^p$.

La série de Poincaré de l'algèbre $\mathbf{N}$-graduée $\mathbf{C}[V]^G.S$ est de même $f(z\,,0)\,.\left(\sum_{p\in\mathbf{N}} a_{p,p} z^p\right)$. Or $\mathbf{C}[V]^G.S \subset \mathbf{C}[V]^U$ et $a_{p,p} \geqslant \dim H_p^U$ pour tout $p \in \mathbf{N}$, donc $\mathbf{C}[V]^G.S = \mathbf{C}[V]^U$.

Cas de $(A_5\,, \varpi_3)$.

Alors $V \simeq V^*$. D'après les décompositions de $S^2(V)$, $S^3(V)$, $S^4(V)$ données dans [11], Table 2b, il existe des U-invariants non nuls P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 de degrés et poids respectifs :

$$(1\,, \varpi_3),\ (2\,, \varpi_1 + \varpi_5),\ (3\,, \varpi_3),\ (4\,, \varpi_2 + \varpi_4),\ (4, 0).$$

De plus, $\mathbf{C}[V]^G = \mathbf{C}[P_5]$. Si l'on sait que $P_1, \ldots, P_5$ sont algébriquement indépendants sur $\mathbf{C}$, posons $S = \mathbf{C}[P_1, P_2, P_3, P_4]$. Alors S est une sous-algèbre $(\mathbf{N} \times P^{++})$-graduée de $\mathbf{C}[V]^U$; l'application canonique $\mathbf{C}[V]^G \otimes S \longrightarrow \mathbf{C}[V]$ est injective, d'après l'indépendance algébriquement des P_i, et $\dim S_p$ est le nombre de solutions en entiers $\geqslant 0$ de : $a + 2b + 3c + 4d = p$. D'autre part, d'après [11], Table 2a, $\mathbf{C}[V \times V^*]^G$ est engendrée par des éléments bihomogènes, algébriquement indépendants, de bidegrés (4, 0), (3, 1), (1, 3), (0, 4), (1, 1), (2, 2), (3, 3). Donc avec les notations du lemme 7, on a :

$$\frac{f(x\,,y)}{f(x,0)\,f(0,y)} = \frac{1}{(1-x^3y)\,(1-xy^3)\,(1-xy)\,(1-x^2y^2)\,(1-x^3y^3)}$$
$$= \sum_{a,a',b,c,d \geqslant 0} (x^3y)^a\,(xy^3)^{a'}\,(xy)^b\,(x^2y^2)^c\,(x^3y^3)^d$$

et le coefficient de $x^p y^p$ dans cette fraction rationnelle est le nombre de solutions en entiers $\geqslant 0$ de : $4a + b + 2c + 3d = p$. On conclut alors à l'aide du lemme 7.

Montrons maintenant que $P_1, \ldots, P_5$ sont algébriquement indépendants sur $\mathbf{C}$. Soit Q polynôme tel que $Q(P_1, \ldots, P_5) = 0$. On peut supposer Q irréductible et isobare par rapport à T (car les P_i sont des vecteurs propres pour T). Ecrivons

$$Q(X_1, \ldots, X_5) = \Sigma\ a_{i_1}, \ldots, a_{i_5}\ X_1^{i_1}, \ldots, X_5^{i_5}.$$

Le poids de Q par rapport à T est alors :

$$i_1 \varpi_3 + i_2(\varpi_1 + \varpi_5) + i_3 \varpi_3 + i_4(\varpi_2 + \varpi_4).$$

Donc (i_2, i_4) est indépendant de $(i_1, \ldots, i_5)$ tel que $a_{i_1}, \ldots, i_5 \neq 0$. On en déduit que $Q(X_1, \ldots, X_5)$ est indépendant de (X_2, X_4). Soit V' l'hyperplan T-stable $P_1 = 0$. Si $Q \neq 0$, alors $P_3 | V'$, $P_5 | V'$ sont algébriquement dépendants sur $\mathbf{C}$; or $P_3 | V'$ est de poids ϖ_3, et $P_5 | V'$ de poids 0. On en déduit comme précédemment que $P_3 | V' = 0$ ou $P_5 | V' = 0$, i.e. que P_1 divise P_3 ou P_5. Si P_1 divise P_3, alors P_3/P_1 est un polynôme U-invariant de poids 0, donc un G-invariant de degré 2, absurde. Si P_1 divise P_5, alors P_5 n'est pas irréductible, ce qui contredit le fait que $\mathbf{C}[V]^G = \mathbf{C}[P_5]$. Donc $Q = 0$.

N.B. : Le calcul de $\mathbf{C}[V]^U$ a aussi été fait dans ce cas par A. Lacoux.

Les autres cas à examiner sont similaires ; de plus, la méthode de démonstration, indiquée dans l'exemple précédent, fournit les degrés et poids d'un système de générateurs $\mathbf{N} \times P^{++}$-homogènes de $\mathbf{C}[V]^U$ pour les cas de (A_5, ϖ_3) ; (B_5, ϖ_5) ; (C_3, ϖ_2) ; (C_3, ϖ_3) ; (D_6, ϖ_6) ; (F_4, ϖ_4) ; (E_7, ϖ_7). Pour trouver ces degrés et poids dans les autres cas, on peut aussi utiliser le lemme 7 ; dans chaque cas, on vérifie que $\mathbf{C}[V \times V^*]^G$ est une algèbre de polynômes, dont on calcule la série de Poincaré à l'aide des tables de [11].

Remarque. –

1) Avec les notations du théorème 2, les b_i peuvent prendre les valeurs 0, 1 et 2 ; et on peut avoir $a < \dim V$. Par exemple, dans le cas de (D_6, ϖ_6), on a : $b_1 = b_3 = b_5 = 0$; $b_2 = b_4 = 1$; $b_6 = 2$ et $a = 14$ alors que $\dim V = 32$; on a donc

$$F(z^{-1}, t_1^{-1}, \ldots, t_6^{-1}) = -\, t_2 t_4 t_6^2 z^{14} F(z, t_1, \ldots, t_6).$$

Par contre, même si le G-stabilisateur de tout point de V est infini, on peut avoir $b_1 = \ldots = b_1 = 2$, et $a = \dim V$. Cela se produit par exemple dans le cas de $(A_n, 2\varpi_1)$.

2) Soient $G = SL_n(\mathbf{C})$ et U le sous-groupe des matrices uni-

potentes supérieures. Soit V l'espace des formes quadratiques à n variables, identifié aux matrices symétriques $(a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Alors V est un G-module simple de plus grand poids $2\varpi_{n-1}$ et si

$$\mathrm{P}_\ell((a_{ij})) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\ell} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{\ell 1} & \dots & a_{\ell\ell} \end{pmatrix}$$

pour $1 \leqslant \ell \leqslant n$, alors $\mathbf{C}[\mathrm{V}]^{\mathrm{U}}$ est engendrée par les éléments algébriquement indépendants $\mathrm{P}_1, \dots, \mathrm{P}_n$ (car P_ℓ est un U-invariant non nul de degré ℓ et de poids $2\varpi_\ell$ pour $\ell \neq n$, de poids 0 pour $\ell = n$; on utilise alors la Table).

De même, si V' est l'espace des formes bilinéaires alternées à n variables, identifié aux matrices antisymétriques $(a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, alors V' est un G-module simple de plus grand poids ϖ_{n-2}. Pour $1 \leqslant 2\ell \leqslant n$, soit $\mathrm{Q}_\ell((a_{ij}))$ le pfaffien de

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,2\ell} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{2\ell,1} & \dots & a_{2\ell,2\ell} \end{pmatrix}$$

Alors les Q_ℓ sont algébriquement indépendants sur $\mathbf{C}$, et engendrent l'algèbre $\mathbf{C}[\mathrm{V}]^{\mathrm{U}}$. Ces deux résultats sont connus sous des formes diverses (cf. par exemple [16], proposition 1 et 2, ou [11], proposition 2.4).

THEOREME 4. – *Soit* (G, V) *figurant dans la Table. Soit* $\mathcal{N}(\mathrm{V})$ *le nilcône, c'est-à-dire l'ensemble des* $v \in \mathrm{V}$ *annulés par tout polynôme* G-*invariant sans terme constant sur* V. *Alors*

(i) *tout fermé* G-*stable équidimensionnel de* $\mathcal{N}(\mathrm{V})$ *est un cône irréductible normal, à singularité rationnelles ;*

(ii) *l'adhérence de toute* G-*orbite dans* V *est une variété normale, à singularités rationnelles.*

Démonstration. – Supposons d'abord (i) vraie ; soit $x \in \mathrm{V}$ avec $\mathrm{X} = \overline{\mathrm{G}.x}$ adhérence de l'orbite de x. Soit $\mathcal{K}\mathrm{X}$ le cône associé à X (pour la définition, cf. [17]). Alors $\mathcal{K}\mathrm{X}$ est un sous-cône fermé G-stable équidimensionnel de $\mathcal{N}(\mathrm{V})$ donc $\mathcal{K}\mathrm{X}$ est normal, à singularités rationnelles. Comme X est une déformation de $\mathcal{K}\mathrm{X}$, (ii) résulte du théorème 4 de [18].

Pour montrer (i), introduisons d'abord quelques notations et résultats préliminaires.

Soient E un G-module simple de dimension finie, de plus grand poids λ, et P (resp. Q) un polynôme U-invariant sur E, de poids μ (resp. ν). Si $E(\mu)$ est un G-module simple de plus grand poids μ, il existe une G-application linéaire $\widetilde{P} : E(\mu) \longrightarrow \mathbf{C}[E]$ envoyant un vecteur primitif de $E(\mu)$ sur P, et $\widetilde{P}$ est définie à un scalaire près. Définissons de même $\widetilde{Q} : E(\nu) \longrightarrow \mathbf{C}[E]$. Le produit de $\mathbf{C}[E]$ définit alors une G-application linéaire $\widetilde{P} \otimes \widetilde{Q} : E(\mu) \otimes E(\nu) \longrightarrow \mathbf{C}[E]$. Soit $R \in \mathbf{C}[E]^U$: on note $R \prec (P, Q)$ si R est l'image par $\widetilde{P} \otimes \widetilde{Q}$ d'un élément de $(E(\mu) \otimes E(\nu))^U$. Remarquons que $R \prec (P, Q) \Longleftrightarrow$ il existe des $a_i \in \mathbf{C}$ et des $g_i, h_i \in G$ tels que $R = \Sigma\, a_i(g_i P)(h_i Q)$.

PROPOSITION 1. – *Soit* P_1 *une forme linéaire non nulle et U-invariante sur* E. *L'application*

$$\begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & I(F) = \{P \in \mathbf{C}[E]^U \mid P|F = 0\} \\ \left\{\begin{array}{l} \textit{fermés irréductibles} \\ G\textit{-stables de } E \end{array}\right\} & \longrightarrow & \left\{\begin{array}{l} \textit{idéaux premiers } I \textit{ de } \mathbf{C}[E]^U, T\textit{-stables} \\ \textit{et tels que } P \in I,\ Q \prec (P, P_1) \Longrightarrow Q \in I \end{array}\right\} \end{array}$$

est une bijection décroissante.

Démonstration. –

a) Soit F un fermé irréductible G-stable de E. Alors I(F) est un idéal T-stable de $\mathbf{C}[E]^U$, et I(F) est premier car $\mathbf{C}[E]^U/I(F) \simeq \mathbf{C}[F]^U$. Soient $\omega \in P^{++}$ et $P \in I(F)_\omega$. Si $Q \prec (P, P_1)$, alors il existe des $a_i \in \mathbf{C}$ et des $g_i, h_i \in G$ tels que $Q = \Sigma\, a_i(g_i P)(h_i P_1)$ donc $Q|F = 0$ et $Q \in I(F)$. De plus, l'application $F \longrightarrow I(F)$ est décroissante.

b) Soit I un idéal premier de $\mathbf{C}[E]^U$, T-stable et tel que $P \in I$ et $Q \prec (P, P_1) \Longrightarrow Q \in I$. Soit $\overline{I}$ le sous-G-module de $\mathbf{C}[E]$-engendré par I. Soient $P \in I$ et $g \in G$. Alors $P.\,gP_1$ est dans l'image de $E(\omega) \otimes E(\lambda)^* \longrightarrow \mathbf{C}[E]$ (si P correspond à un morphisme $E(\omega) \longrightarrow \mathbf{C}[E]$) donc $P.\,gP_1$ est une combinaison linéaire d'images par G d'éléments Q tels que $Q \prec (P, P_1)$. Par suite $P.\,gP_1 \in \overline{I}$. On en déduit que $\forall Q \in I$, $\forall \ell \in V^*$, $Q\ell \in \overline{I}$ puis que $\overline{I}.V^* \subset \overline{I}$. Donc $\overline{I}$ est un idéal de $\mathbf{C}[E]$. Comme $\overline{I}^U = I$, on a $(\mathbf{C}[E]/\overline{I})^U \simeq \mathbf{C}[E]^U/I$ donc $\overline{I}$ est premier : il lui correspond un fermé irréductible G-stable F_I. Il est immédiat que $I(F_I) = I$ et que

$$F_I = \{x \in E \mid \forall P \in I,\ \forall g \in G,\ P(gx) = 0\},$$

d'où la proposition 1.

PROPOSITION 2. – *Soient* $P \in \mathbf{C}[E]^U_\mu$ *et* $Q \in \mathbf{C}[E]^U_\nu$. *Soit* α *racine simple telle que* $(\mu|\alpha) \neq 0 \neq (\nu|\alpha)$. *Posons*

$$(P, Q)_\alpha = (\mu|\alpha)\, P(X_{-\alpha}Q) - (\nu|\alpha)\, Q(X_{-\alpha}P)$$

(*avec les notations de* [19]). *Alors* $(P, Q)_\alpha \in \mathbf{C}[E]_{\mu+\nu-\alpha}$ *et* $(P, Q)_\alpha \prec (P, Q)$. *De plus* $(P, Q)_\alpha \neq 0$ *si* P *et* Q *sont premiers entre eux.*

Démonstration. – D'après ([20], Theorem 3.1) on a :

$$(P, Q)_\alpha \in \mathbf{C}[E]^U_{\mu+\nu-\alpha}$$

et si P correspond à $\widetilde{P}: E(\mu) \hookrightarrow \mathbf{C}[E]$ et Q à $\widetilde{Q}: E(\nu) \hookrightarrow \mathbf{C}[E]$, alors $(P, Q)_\alpha$ correspond à $E(\mu+\nu-\alpha) \hookrightarrow E(\mu) \otimes E(\nu) \longrightarrow \mathbf{C}[E]$. Donc $(P, Q)_\alpha \prec (P, Q)$. Si de plus P et Q sont premiers entre eux, et si $(P, Q)_\alpha = 0$, alors P divise $X_{-\alpha}P$. Comme $\deg P \geqslant \deg X_{-\alpha}P$, P et $X_{-\alpha}P$ sont proportionnels, ce qui est absurde car P est de poids μ, et $X_{-\alpha}P$ de poids $\mu - \alpha$.

On peut maintenant montrer le

LEMME 8. – *Si* (G, V) *figure dans la Table, et si* $(G, \omega) \neq (B_5, \varpi_5)$, *alors*

1) *l'ensemble des parties fermées* G-*stables de* $\mathfrak{N}(V)$ *est totalement ordonné par inclusion ;*

2) *tout sous-ensemble fermé* G-*stable de* $\mathfrak{N}(V)$ *est un cône irréductible.*

Démonstration. – C'est clair pour $A_n: \varpi_1$, $2\varpi_1$, ϖ_2 et $B_n, C_n, D_n: \varpi_1$. Dans l'un des autres cas, soit F un fermé G-stable de $\mathfrak{N}(V)$, et soit I l'idéal correspondant de $\mathbf{C}[V]^U$ (proposition 1). Alors I contient l'idéal engendré par les polynômes G-invariants sans terme constant.

Cas de (E_7, ϖ_7) : d'après la Table, l'algèbre $\mathbf{C}[V]^U$ est engendrée par

P_1 homogène de degré 1, de poids ϖ_7,
P_2 homogène de degré 2, de poids ϖ_2,
P_3 homogène de degré 3, de poids ϖ_7,
P_4 homogène de degré 4, de poids ϖ_6,
P_5 homogène de degré 4, de poids 0 .

On sait que $P_5 \in I$. De plus, comme I est T-stable, si $I \neq (P_5)$, alors I contient $P_2^a P_4^b\, Q(P_1, P_3)$ où $(a, b) \in \mathbf{N}^2$ et où Q est un polynôme, $Q(P_1, P_3)$ est de poids $m\varpi_7$. Comme I est premier, on a : $P_2 \in I$, ou $P_4 \in I$, ou $Q(P_1, P_3) \in I$. Dans ce dernier cas, si $m \geqslant 1$ et X ne divise pas $Q(X, Y)$, alors $R = (Q(P_1, P_3), P_1)_{\alpha_7} \in I$ et R est de poids $(m+1)\varpi_7 - \alpha_7 = (m-1)\varpi_7 + \dots$. On voit ainsi que I contient P_1, P_2, P_3 ou P_4. D'autre part, il est clair que $P_2 \prec (P_1, P_1)$ et que $P_4 \prec (P_1, P_3)$ (car P_4 engendre l'espace vectoriel $\mathbf{C}[V]^U_{4,\varpi_6}$ et $(P_1, P_3)_{\alpha_7}$ est de degré 4, de poids $2\varpi_7 - \alpha_7 = \varpi_6$). Montrons que $P_3 \prec (P_1, P_2)$.

Sinon, comme $\mathbf{C}[V]^U_2 \simeq E(2\varpi_7) + E(\varpi_2)$, on a : $P_3 \prec (P_1, P_1^2)$ donc P_3 correspond à un G-morphisme non trivial

$$\varphi : E(\varpi_7) \otimes E(2\varpi_7) \longrightarrow E(\varpi_7).$$

Soient x non nul de poids λ dans $E(\varpi_7)$, et y non nul de poids $2\varpi_7$ dans $E(2\varpi_7)$. Si $\varphi(x \otimes y)$ est non nul, alors il est de poids $2\varpi_7 + \lambda$. Comme ϖ_7 est minuscule, on a $\lambda = w(\varpi_7)$ et $2\varpi_7 + \lambda = w'(\varpi_7)$ pour des $w, w' \in W$. Donc $2\varpi_7 = w'(\varpi_7) - w(\varpi_7)$, d'où $w' = 1$ et $w = w_0$, i.e. $\lambda = -\varpi_7$. On a finalement :

$$\begin{aligned} \varphi(x \otimes y) &= 0 \text{ si } \lambda \neq -\varpi_7 \\ &= \text{un élément primitif de } E(\varpi_7) \text{ si } \lambda = -\varpi_7, \end{aligned}$$

et ces valeurs déterminent φ.

Soit $(\ ,\ )$ une forme alternée non nulle et G-invariante sur V. Alors φ est la restriction du G-morphisme $\overline{\varphi} : V \otimes V \otimes V \longrightarrow V$

$$x' \otimes y' \otimes z' \longrightarrow (x', z')\, y'$$

à $E(\varpi_7) \otimes E(2\varpi_7)$ (car φ et $\overline{\varphi}$ coïncident sur $E(\varpi_7) \otimes y$). Or $\overline{\varphi}$ induit l'application nulle

$$S^3(V) \longrightarrow V \ \left(\text{car} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(3)})\, x_{\sigma(2)} = 0\right)$$

ce qui est absurde. Donc $P_3 \prec (P_1, P_2)$.

Si I contient P_1, alors $\{\text{zéros de I}\} = \{0\}$.

Si I contient P_2, alors $P_3 \in I$ d'après ce qui précède; donc $P_4 \in I$ car $P_4 = (P_1, P_3)_{\alpha_7}$.

Si I contient P_3, alors $P_4 \in I$.

Les seules possibilités pour I sont donc :

$(P_1, P_2, P_3, P_4, P_5)$; (P_2, P_3, P_4, P_5) ; (P_3, P_4, P_5) ; (P_4, P_5).

Tous ces idéaux sont $\mathbf{N}$-homogènes ; d'où le lemme 8 dans ce cas.

La démonstration précédente s'applique sans changement aux cas de (A_5, ϖ_3) ; (C_3, ϖ_3) ; (D_6, ϖ_6). Les autres cas sont plus simples, sauf (B_5, ϖ_5).

Exemple : cas de (C_3, ϖ_2). $\mathbf{C}[V]^U$ est alors engendrée par

P_1	homogène de degré	1 et de poids	ϖ_2,
P_2		2	ϖ_2,
P_3		2	0
P_4		3	$\varpi_1 + \varpi_3$,
P_5		3	0.

I contient (P_3, P_5) et si $I \neq (P_3, P_5)$, alors on voit comme précédemment que I contient P_1, P_2 ou P_4. En outre, il est clair que $(P_1, P_2)_{\alpha_2} = P_3$ et que $P_2 \prec (P_1, P_1)$ donc I ne peut être que $(P_1, P_2, P_3, P_4, P_5)$, (P_2, P_3, P_4, P_5), (P_3, P_4, P_5), ou (P_3, P_5).

Fin de la démonstration du théorème 4. – Remarquons que si (G, V) figure dans la Table, alors il existe une sous-algèbre $\mathbf{N} \times P^{++}$-graduée S de $\mathbf{C}[V]^U$ telle que l'application $\mathbf{C}[V]^G \otimes S \longrightarrow \mathbf{C}[V]^U$ induite par le produit soit bijective et que l'on ait $\dim S_{n,\omega} \leqslant 1$ pour tout $(n, \omega) \in \mathbf{N} \times P^{++}$. Soit F un fermé G-stable équidimensionnel de $\mathfrak{N}(V)$. Alors F est irréductible (d'après le lemme 8 si $(G, \omega) \neq (B_5, \varpi_5)$; sinon, d'après [21], F ne contient qu'un nombre fini de G-orbites, donc F est réunion d'adhérences de G-orbites ; or toujours d'après [21], deux G-orbites distinctes dans $\mathfrak{N}(V)$ sont de dimensions différentes). Soit $\varphi : \mathbf{C}[V] \longrightarrow \mathbf{C}[F]$ la restriction. Alors φ induit une surjection $\mathbf{C}[V]^U \longrightarrow \mathbf{C}[F]^U$, d'où une surjection $S \longrightarrow \mathbf{C}[F]^U$, commutant à l'action de T. De plus, F est un cône (d'après le lemme 8 si $(G, \omega) \neq (B_5, \varpi_5)$; dans ce dernier cas, on vérifie de même que pour (E_7, ϖ_7) que $(\operatorname{Ker} \varphi)^U$ est engendré par certains P_i, où $P_1, \ldots, P_7$ est un système de générateurs comme dans la Table pour $\mathbf{C}[V]^U$). On en déduit que $\mathbf{C}[F]^U$ est $\mathbf{N} \times P^{++}$-graduée et que $\dim \mathbf{C}[F]^U_{n,\omega} \leqslant 1$ pour tout $(n, \omega) \in \mathbf{N} \times P^{++}$. Le lemme 4.2 de [12] s'applique alors : $\mathbf{C}[F]^U$ est une algèbre de polynômes. On conclut en appliquant le théorème suivant (cf. [1]) :

Soit Y une variété affine sur laquelle G opère rationnellement. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) Y est normale, à singularités rationnelles ;

(ii) Spec $\mathbf{C}[Y]^U$ est normal, à singularités rationnelles.

IV. NILCONE POUR LES U-INVARIANTS

Soit X une variété affine sur laquelle G opère rationnellement, avec un point fixe 0 de G dans X. Rappelons le

Critère de Hilbert-Mumford (cf. [22], Theorem 2.1) :

Pour $x \in X$, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) pour tout $P \in \mathbf{C}[X]^G$, on a $P(x) = P(0)$

(ii) il existe un morphisme $\lambda : \mathbf{C}^* \longrightarrow T$, et $g \in G$, tels que $\lambda(t).\, gx \xrightarrow[t \to 0]{} 0$.

On va établir un critère analogue pour les U-invariants. Notons $\mathcal{C}$ l'ensemble des sous-groupes à un paramètre $\lambda : \mathbf{C}^* \longrightarrow T$ tels que pour $1 \leqslant i \leqslant \ell$, on ait $(\varpi_i, \lambda) > 0$.

THEOREME 5. – *Pour* $x \in X$, *les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *pour tout* $P \in \mathbf{C}[X]^U$, *on a* $P(x) = P(0)$

(ii) *il existe* $\lambda \in \mathcal{C}$ *et* $u \in U$ *tels que* $\lambda(t)\, ux \xrightarrow[t \to 0]{} 0$.

IV.1. Démonstration de (i) $\Longrightarrow$ (ii).

Soit x vérifiant (i). Pour $1 \leqslant i \leqslant \ell$, soit E_i un G-module simple de plus grand poids ϖ_i, et soit $v_i \in E_i^U \setminus \{0\}$; posons $E = \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant \ell} E_i$ et $v = \sum_{1 \leqslant i \leqslant \ell} v_i \in E$. Soit enfin $Z = \overline{Gv}$ l'adhérence de l'orbite de v dans E. D'après les résultats de [23], en particulier le théorème 7.4 et sa démonstration, l'application $\Phi : \mathbf{C}[X \times Z]^G \longrightarrow \mathbf{C}[X]^U$ telle que $\Phi(f)(\xi) = f(\xi, v)$ pour $\xi \in X$, $f \in \mathbf{C}[X \times Z]^G$, est un isomorphisme d'algèbres. Par suite, pour tout $P \in \mathbf{C}[X \times Z]^G$, on a $P(x, v) = P(0, v)$. Or $0 \in \overline{Tv}$; donc, pour tout $P \in \mathbf{C}[X \times Z]^G$, on a $P(0, v) = P(0, 0)$ donc $P(x, v) = P(0, 0)$. On peut alors choisir $\lambda : \mathbf{C}^* \longrightarrow G$ tel que $\lambda(t)(x, v) \xrightarrow[t \to 0]{} (0, 0)$. Soit P_λ l'ensemble des $g \in G$ tels que $\lambda(t)\, g\lambda(t)^{-1}$ ait une limite quand $t \longrightarrow 0$. On sait que P_λ est un sous-groupe parabolique de G (cf. [22], Definition 2.3/Proposition 2.6) ; par suite, $B \cap P_\lambda$

contient un tore maximal T' de G. Soit T_λ un tore maximal de P_λ contenant l'image de λ ; alors T_λ et T' sont conjugués par un $g \in P$, en particulier $g\lambda g^{-1}$ est à valeurs dans T'. De plus, on a $g\lambda(t)\, g^{-1}(x, v) = g.\lambda(t)\, g^{-1}\lambda(t)^{-1} . \lambda(t)\,(x, v)$. La limite quand $t \longrightarrow 0$ de $\lambda(t)\, g^{-1}\lambda(t)^{-1}$ existe, donc $g\lambda(t)\, g^{-1}(x, v) \xrightarrow[t\to 0]{} (0,0)$. Quitte à remplacer λ par $g\lambda g^{-1}$, on peut donc supposer que λ est à valeurs dans $T' \subset B$. Alors $\lambda = u^{-1}\mu u$ où $u \in U$ et $\mu \in \mathrm{Hom}(\mathbf{C}^*, T)$. On a : $(u^{-1}\mu u)\,(x, v) \xrightarrow[t\to 0]{} (0,0)$ et $u.v = v$ donc

$$\mu(t)\,(ux, v) \xrightarrow[t\to 0]{} (0,0).$$

Or $\mu(t)v = \sum\limits_{1\leq i\leq \ell} t^{\langle \varpi_i, \mu\rangle} v_i$. La condition $\mu(t)v \xrightarrow[t\to 0]{} 0$ signifie donc que $\mu \in \mathcal{C}$.

IV.2. Démonstration de (ii) $\Longrightarrow$ (i).

Soient x vérifiant (ii) et $P \in \mathbf{C}[X]^U$. Soit $Q \in \mathbf{C}[X \times Z]^G$ tel que $\Phi(Q) = P$. Alors

$$P(x) = Q(x, v) = Q(\lambda(t)ux,\ \lambda(t)uv) = Q(\lambda(t)ux,\ \lambda(t)v).$$

Comme $\lambda \in \mathcal{C}$, on voit que $\lambda(t)v \xrightarrow[t\to 0]{} 0$. Donc

$$P(x) = Q(0,0) = Q(0,\ v) = P(0).$$

Soit maintenant V un G-module rationnel de dimension finie. Si $\omega \in \mathrm{Hom}(T, \mathbf{C}^*)$, notons V_ω l'ensemble des vecteurs de V, de poids ω. Si $\lambda \in \mathrm{Hom}(\mathbf{C}^*, T)$, notons $V_{(\lambda)}$ la somme (directe) des V_ω pour $(\omega, \lambda) > 0$. Alors $V_{(\lambda)} = \{x \in V \mid \lambda(t)x \xrightarrow[t\to 0]{} 0\}$. Définissons le *nilcône* $\mathcal{N}_U(V)$ (pour l'action de U) : $\mathcal{N}_U(v)$ est l'ensemble des $x \in V$ tels que pour tout $P \in \mathbf{C}[V]^U$, on ait $P(x) = P(0)$; c'est une sous-variété fermée de V. On définit de même $\mathcal{N}_G(V)$.

THEOREME 6. –

(i) *Il existe un sous-ensemble fini* $\mathcal{C}_V$ *de* $\mathcal{C}$ *tel que* $\mathcal{N}_U(V)$ *soit la réunion des* $U.V_{(\lambda)}$ *pour les* $\lambda \in \mathcal{C}_V$.

(ii) $\mathcal{N}_G(V) = G.\mathcal{N}_U(V)$.

Démonstration. –

(i) C'est immédiat.

(ii) Il est clair que $G.\mathcal{N}_U(V) \subset \mathcal{N}_G(V)$. Pour l'inclusion inverse, soit $x \in \mathcal{N}_G(V)$. Il existe alors $\lambda \in \mathrm{Hom}(\mathbf{C}^*, T)$ et $g \in G$ tels que $\lambda(t)\, gx \xrightarrow[t\to 0]{} 0$. En remplaçant x par gx, on peut donc supposer que $x \in V_{(\lambda)}$. Alors $x = \Sigma\, x_\omega$ où chaque x_ω est dans V_ω. Soit $I = \{\omega : T \longrightarrow \mathbf{C}^* \mid x_\omega \neq 0\}$: alors pour tout $\omega \in I$, on a $(\omega, \lambda) > 0$. L'ensemble des $\mu : \mathbf{C}^* \longrightarrow T$ tels que $\mu(t)x \xrightarrow[t\to 0]{} 0$ est donc l'intersection de $X = \mathrm{Hom}(\mathbf{C}^*, T)$ et d'un cône ouvert non vide de $\mathbf{R} \otimes_{\mathbf{Z}} X$, donc il contient un sous-groupe à un paramètre régulier μ_0. Quitte à remplacer μ_0 par $w\mu_0 w^{-1}$ et x par wx pour un $w \in W$, on peut supposer que $(\alpha_i, \mu_0) > 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant \ell$. Alors $(\varpi_j, \mu_0) > 0$ pour $1 \leqslant j \leqslant \ell$, i.e. $\mu_0 \in \mathcal{C}$.

Exemple : formes cubiques à trois variables

Soit $G = SL_3(\mathbf{C})$ opérant sur l'espace V des formes cubiques à trois variables x, y, z. Soient U le sous-groupe des matrices unipotentes supérieures dans la base duale de (x, y, z), et T le sous-groupe de G formé des matrices diagonales. On vérifie facilement que les $V_{(\lambda)}$ maximaux (pour $\lambda \in \mathcal{C}$) sont

$$V^1 = \langle xy^2, y^3, y^2z, yz^2, z^3\rangle ; \qquad V^2 = \langle xz^2, y^3, y^2z, yz^2, z^3\rangle ;$$
$$V^3 = \langle x^2z, xz^2, yz^2, z^3\rangle .$$

Posons de plus $V^4 = \langle xz^2, y^2z, yz^2, z^3\rangle$. Alors V^2 et V^4 sont U-stables, et $V^4 \subset V^2$. Soient X la réunion de $U.V^1$ et de V^2, et Y la réunion de $U.V^3$ et de V^4. On peut vérifier que X *et* Y *sont les deux composantes irréductibles de* $\mathcal{N}_U(V)$, et que $X \neq U.V^1$ et $Y \neq U.V^3$.

Si $F \in V$, alors F est l'équation d'une cubique C_F de $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$. Alors $F \in X \Longleftrightarrow C_F$ a un point de rebroussement en $(1,0,0)$ ou est formée de trois droites concourantes en $(1,0,0)$.
$F \in Y \Longleftrightarrow C_F$ est formée de la droite $z = 0$ et d'une conique tangente à cette droite.

D'autre part, $\mathcal{N}_G(V) = \{F \mid C_F$ a un point de rebroussement$\} = G.V^1 = G.X$ (cf. [24], § 18) et $\mathcal{N}_G(V)$ contient strictement $G.Y$.

Cet exemple montre que les énoncés suivants sont en général faux :

1) Toute composante irréductible de $\mathcal{N}_U(V)$ est réunion de certains $U.V_{(\lambda)}$ avec des $V_{(\lambda)}$ maximaux.

2) Si X est une composante irréductible de $\mathfrak{N}_U(V)$, alors G.X est une composante irréductible de $\mathfrak{N}_G(V)$.

La situation est donc plus compliquée que pour les G-invariants (pour l'étude de $\mathfrak{N}_G(V)$, cf. par exemple [25]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. KRAFT, Geometric methods in invariant theory (à paraître dans les *Springer Lecture Notes*).

[2] R.P. STANLEY, Hilbert functions of graded algebras, *Adv. in Maths.*, 28 (1978), 57-83.

[3] M. BRION, La série de Poincaré des U-invariants, *C.R.A.S.*, Paris, t. 293 (21 septembre 1981).

[4] M. BRION, Représentations irréductibles des groupes de Lie simples dont l'algèbre des U-invariants est régulière, *C.R.A.S.*, Paris, t. 293 (2 novembre 1981).

[5] H. FREUDENTHAL, H. de VRIES, Linear Lie groups, Academic Press, 1968.

[6] V.L. POPOV, Constructive invariant theory, *Astérique*, n° 87-88 (1981), 303-334.

[7] V.L. POPOV, Stability criteria for the action of a semisimple group on a factorial manifold, *Math. USSR Iszvestia*, 4 (1970), 527-535.

[8] T.A. SPRINGER, On the invariant theory of SU_2, *Proc. of the Koninkl. Akad. van Wetenschappen*, vol. 83 (3), 1980, 339-345.

[9] N. BOURBAKI, *Groupes et algèbres de Lie*, chapitres 4 à 6 (Hermann).

[10] A.G. ELASHVILI, Canonical form and stationary subalgebras of points of general position for simple linear Lie groups. *Funct. Anal.*, 6 (1972), 44-53.

[11] G.W. SCHWARZ, Representations of simple Lie groups with regular ring of invariants, *Invent. Math.*, 49 (1978), 167-191.

[12] V.G. KAC, Some remarks on nilpotent orbits, *J. of Alg.*, 64 (1980), 190-213.

[13] G.W. SCHWARZ, Representations of simple Lie groups with a free module of covariants, *Invent. Math.,* 50 (1978), 1-12.

[15] B. KOSTANT, Lie group representations on polynomial rings, *Amer. J. of Math.,* 85 (1963), 327-402.

[16] Th. VUST, Sur la théorie des invariants des groupes classiques, *Ann. Inst. Fourier,* 26, 1 (1976), 1-31.

[17] W. BORHO, H. KRAFT, Über Bahnen und deren Deformationen bei linearen Aktionen reduktiver Gruppen, *Comment. Math. Helv.,* 54 (1979), 61-104.

[18] R. ELKIK, Singularités rationnelles et déformations, *Inv. Math.,* 47 (1978), 139-147.

[19] N. BOURBAKI, Groupes et algèbres de Lie, chap. VII (Hermann).

[20] E.B. DYNKIN, Maximal subgroups of the classical groups, *A.M.S. Translations,* vol. 6 (1957), 245-378.

[21] J.I. IGUSA, A classification of spinors up to dimension twelve, *Amer. J. of Math.,* 92 (1970).

[22] D. MUMFORD, Geometric invariant theory, Springer Verlag, 1965.

[23] F. GROSSHANS, Observable subgroups and Hilbert's fourteenth problem, *Amer. J. of Math.,* 95 (1973), 229-253.

[24] D. HILBERT, Über die vollen Invariantensysteme, *Math. Annalen,* 42 (1893), 313-373.

[25] W. HESSELINK, Desingularizations of varieties of nullforms, *Inv. Math.,* 55 (1979), 141-163.

Manuscrit reçu le 15 mars 1982.

Michel BRION,
269, chaussée Saint-Job
1180 Bruxelles (Belgique).