ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

FRIEDRICH-WILHELM BAUER

Tangentialstrukturen

Annales de l'institut Fourier, tome 9 (1959), p. 111-146
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1959__9__111_0>

TANGENTIALSTRUKTUREN

von Friedrich-Wilhelm BAUER.

EINLEITUNG

In [1], [2] haben wir Fortsetzungstheorie von Homologiestrukturen behandelt und sind dabei von dem folgenden Problem ausgegangen:

(1) Sei A eine V-Kategorie (¹) (z.B. alle polyedralen Teilmengen des R^n) und $\mathfrak{v}$ eine Homologiestruktur (z.B. die simpliziale). Ist $B \supset A$ eine andere V-Kategorie, (z.B. alle Teilmengen des R^n), gibt es eine Homologiestruktur $\mathfrak{w}$, die auf B erklärt ist und auf A mit $\mathfrak{v}$ zusammenfällt und wie viele gibt es?

In [1] wurde diese Frage unter der Einschränkung gelöst, daß die zur Konkurrenz zugelassenen Homologiestrukturen « atomar » sind, d.h. daß es gewisse kleinste Elemente (i.polyedralen Falle sind es die Zyklen) gibt, die ganze $\mathfrak{v}$ erzeugen. In [1] wurde das Problem (1) in dem Sinne gelöst, daß es ein maximales, d.h. projektives $\mathfrak{v}^*$ in B gibt.

Eng verbunden mit (1) ist das folgende Problem:

(2) Sind $\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{v}_2$ in A isomorph, kann man dann $\mathfrak{w}_1$, $\mathfrak{w}_2$ so bestimmen, daß sie auch in B isomorph sind und auf wieviele Arten kann das geschehen?

Man kann z.B. den Alexander-Pontrjaginschen Dualitätssatz für beliebige Teilmengen des R^n, wie er von K. Sitnikow

(¹) Bezüglich der Bezeichnungen s. [1], [2].

gefunden wurde, als Fortsetzung einer solchen Isomorphie auffassen.

Etwas allgemeiner kann man unseren Gedankengang, der uns bei unserer Untersuchung der Fragen (1) und (2) leitete, auch so beschreiben:

Wir gehen aus von einer einfachen Homologiestruktur, die sich, wie etwa die simpliziale, leicht übersehen läßt, und geben ein rein algebraisches Verfahren an, wie man aus ihr neue, kompliziertere herstellen und deren Eigenschaften untersuchen kann.

In dieser Arbeit sollen Strukturen untersucht werden, die die Homologiestrukturen unmittelbar verallgemeinern. Wir nannten sie « Tangentialstrukturen » aus dem Grunde, weil ein Spezialfall durch die differenzierbar in den R^n eingebetteten Mannigfaltigkeiten gegeben wird. Zur Überleitung auf die Tangentialstrukturen sei folgendes bemerkt:

Wir erinnern uns daran, daß man eine atomare Homologiestruktur $\mathfrak{v}$ als eine teilweise geordnete Menge $\mathfrak{v}(A)$ beschreiben kann, die einen gewissen Verband (nämlich gerade die V-Kategorie A) als Normbereich hat. Ist $X \in A$, so ist das Urbild von X unter dieser Normabbildung gerade $H_q(X)$, die Homologiegruppe von X in einer festen Dimension q. Bei der Behandlung von Homologiestrukturen werden wir darauf noch kurz eingehen. Jetzt verallgemeinern wir in konsequenter Weise:

Definition 0.1. — *Sei* P *eine teilweise geordnete Menge mit Nullelement,* $N(P) = N \subset P$ *eine Teilmenge von* P, A *ein Verband mit Nullelement und* $|*| : P \to A$ *eine Abbildung von* P *nach* A, *so daß die folgenden Axiome gelten:*

(1) *Ist* $a \leqslant b$ *in* P, *so ist* $|a| \leqslant |b|$.

(2) *Ist* $a \leqslant b$ *in* P, $|a| = |b|$, *so ist* $a = b$.

(3) *Ist* $z \in N$, $a \neq 0$ *in* P, $a \leqslant z$, *so ist* $a = z$.

(4a) *Ist* $a \in P$, $a \neq 0$, *so gibt es ein* $z \leqslant a$, $z \in N$.

(4b) *Ist* $z \in N$, *so gibt es ein* $a \in P' = P - N(P) - \{0\}$ *mit* $z < a$.

(5a) *Ist* $a \leqslant b_1, b_2$, $|b_1| = |b_2|$, *so ist* $b_1 = b_2$.

(5b) *Ist* $a \in P' = P - N(P) - \{0\}$, $X \geqslant |a|$, $X \in A$, *so gibt es ein (und wegen* (5a) *nur ein)* $b \in P'$, *mit* $a \leqslant b$, $|b| = X$.

Unter diesen Umständen sprechen wir von einer Tangentialstruktur P mit Normbereich A und Atombereich $N = N(P)$.

Wir rechnen die Null nicht mit zu den Atomen dazu. Es besteht unsere Tangentialstruktur P also aus drei verschiedenen Elementeklassen : $P' = P - N(P) - \{0\}$, den eigentlichen Elementen, N(P), den Atomen und aus dem Nullelement 0. Das Axiom (5*b*) zeichnet die Elemente von P' vor allen anderen aus. Es ermöglicht uns eine Art Inklusionsabbildung

$$i^{\mathrm{Y}}_{\mathrm{X}} : \{a \mid |a| = \mathrm{Y}\} \to \{b \mid |b| = \mathrm{X}\}$$

für $\mathrm{Y} \leqslant \mathrm{X}$ in A zu definieren. Zu jedem $a \in P'$, $|a| = \mathrm{Y}$ gibt es wegen (5*b*) ein und wegen (5*a*) nur ein $b \in P'$ mit $|b| = \mathrm{X}$, also setzen wir $i^{\mathrm{Y}}_{\mathrm{X}} a = b$ für die Atome oder gar für die Null gibt es so etwas nicht mehr.

Wir sind hier nicht so sehr an einer rein algebraischen, verbandstheoretischen Theorie der Tangentialstrukturen interessiert, sondern wir haben konkrete geometrische Beispiele vor Augen. Unsere Axiome sind im Hinblick auf die Beispiele aufgestellt worden. Sie sind widerspruchsfrei, wie aus kommenden Beispielen zu ersehen ist, aber nicht unabhängig: z.B. folgt (2) aus (5*a*).

Wir wollen gleich hier ein Wort zum Unterschied zwischen einer allgemeinen Tangentialstruktur P und einer Homologiestruktur sagen: Es ist $|\mathrm{X}|^{-1} = \{a \mid a \in P', |a| = \mathrm{X}\}$ keine Gruppe mehr.

Jetzt kommen wir zu den wichtigsten Beispielen:

1. P_r. — Wir betrachten alle Polyeder a, die geradlinig in den R^n eingebettet sind und die eine Dimension $\geqslant r$ haben, und alle Teilmengen des R^n, die solche Polyeder enthalten. Das ist unser Bereich P'_r. Es ist $a_1 \leqslant a_2$ in P_r, wenn mengentheoretisch $a_1 \subseteq a_2$ ist. Der Normbereich A ist der Verband aller Teilmengen des R^n, den wir, ebenso wie P'_r mit einem zusätzlichen Nullelement versehen.

Die Normbildung in P'_r ist insofern trivial, als wir dem Element $a \in P'_r$ an die Seite stellen die Punktmenge $|a| \subseteq R^n$. Zu $\mathrm{X} \subset R^n$ gibt es also höchstens ein $a \in P'_r$ mit $|a| = \mathrm{X}$. Jetzt kommen wir zu den Atomen:

Sei $x \in R^n$ ein Punkt und I ein Ideal ([2]) in P'_r mit den folgenden Eigenschaften:

(1) Es ist $x = \bigcap_{a \in I} |a|$.

(2a) Zu jedem $\varepsilon > 0$ und zu jedem $a \in P'_r$ ist $U(x, \varepsilon) \cap |a| \in |P'_r|$.

(2b) Es sollen alle hinreichend kleinen $a \in I$ in einem Simplex σ^r liegen.

(3) Es ist I maximal mit Eigenschaft (1), (2).

Ein solches Ideal I nennen wir ein Atom $z \in N(P_r)$. Es ist $|z| = x$ und es wird $z < a \in P'_r$ gesetzt, wenn a in dem entsprechenden Ideal I liegt, welches wir im Folgenden immer mit (z) bezeichnen werden.

Auf $N(P_r)$ ist die Normbildung nicht mehr trivial: Sind $a_1, a_2 \in P'_r$ so beschaffen, daß dim $a_1 \cap a_2 < r$, daß es aber in $a_1 \cap a_2$ einen Punkt x gibt, der Atomträger sowohl in a_1 als auch in a_2 ist, so gibt es zwei Atome $z_1 \neq z_2$ mit $z_i < a_i$ und $|z_1| = |z_2| = x$.

Der Nachweis der Axiome von Definition 0.1 ist hier trivial.

Wir wollen auch allgemein mit (z) die Menge $\{a | a > z, a \in P'\}$ bezeichnen, selbst wenn (z) kein Ideal ist. Ist (z) ein Ideal und erfüllt es (1), (3) in einer sinngemäßen Abwandlung, so werden wir im ersten Abschnitt von einer normalisierten Tangentialstruktur sprechen (Definition 1.2).

2. D_r. — Hier ist D'_r die Gesamtheit aller Teilmengen X des R^n mit dim $X \geqslant r$. Wir können irgend einen der üblichen Dimensionsbegriffe zugrunde legen, da diese nach [3] alle isomorph sind. Sonst verlaufen unsere Konstruktionen wie im ersten Fall, aber ohne (2b). Wir haben sonst einfach P'_r durch D'_r zu ersetzen.

Wir bemerken:

Ist $z \in N(D_r)$ ein Atom, $z \in N(P_r)$, dann gibt es kein Atom $z_1 \in N(P_r)$ mit $(z_1) \subseteq (z)$. Der Beweis ist eine einfache Folgerung aus der Tatsache, daß jede r-dimensionale Teilmenge X eines r-dimensionalen Würfels I^r eine offene Menge enthält.

Daraus folgt auch:

Es ist $P_r \subset D_r$.

([2]) Bezüglich des Idealbegriffes s. Abschnitt 1, Definition 1. 1.

Zunächst ist $P_r \subset D_r$. Wegen obiger Betrachtung ist aber auch $N(P_r) \subset N(D_r)$.

3. M_r. — Die Elemente von M_r' sind alle Teilmengen des R^r, die eine r-dimensionale, stetig differenzierbare Mannigfaltigkeit mit stückweise differenzierbarem Rand enthalten. In (2b) wird « Simplex σ^r » durch « differenzierbare Mannigfaltigkeit V^r » ersetzt. Sonst verlaufen unsere Konstruktionen ebenso wie im Falle von P_r. Auch hier ist $P_r \subset M_r$.

Man kann den folgenden Epimorphismus $\varphi : N(M_r) \to N(P_r)$ konstruieren. Sei V^r eine differenzierbare Mannifgaltigkeit der Dimension r und $x \in V^r$. Zu x gibt es eine Tangentialebene E^r an V^r. Wir können in E^r einen Würfel I^r mit Zentrum x finden und von V^r voraussetzen, daß es eine topologische Parallelprojektion p von V^r auf I^r gibt. Dadurch wird eine Abbildung von allen hinreichend kleinen Elementen von (z) für ein $z \in N(M_r)$ mit $|z| = x$ auf ein $z_1 \in N(P_r)$, $|z_1| = x$ vermittelt. Wir setzen $\varphi(z) = z_1$. Diese Abbildung ist natürlich nicht eineindeutig, denn es kann noch andere Mannigfaltigkeiten W mit Tangentialebene E^r im Punkte x geben. Diese Abbildung wird noch eine wichtige Rolle spielen. Ist I^r wie eben gegeben und bilden wir für ein z_1 mit $|z_1| = x$

$$\bigcap_{\varphi(z)=z_1} (z) = \mathrm{I},$$

so ist das ein Teilideal in (z_1) aber es bestimmt z_1, denn aus $z_2 \in N(P_r)$, $(z_2) \supset \mathrm{I}$ folgt $z_2 = z_1$.

4. **Homologiestrukturen** (s. [1], [2]). — Sei A eine V-Kategorie und $\mathfrak{v}$ eine lokal atomare Homologiestruktur über A_p, dem Bereich aller Paare (X, Y), (X $\geqslant$ Y) in A. Die Elemente von $\mathfrak{v}$ sind die $\zeta^\varphi \in H_q(\varphi)$ für ein Paar $\varphi = (X, Y) \in A_p$ und feste Dimension q. Es ist $\zeta^{\varphi_1} \leqslant \zeta^{\varphi_2}$, wenn $\varphi_1 \leqslant \varphi_2$ und $i_*{}^{\varphi_1}_{\varphi_2}\zeta^{\varphi_1} = \zeta^{\varphi_2}$ ist. Hierbei ist i_* der durch $i : \varphi_1 \subseteq \varphi_2$ induzierte Inklusionshomomorphismus. Die Atome von $\mathfrak{v}$ sind gerade die Atome im Sinne von Definition 0.1. Ist $\mathfrak{v}$ sogar atomar (z.B. die simpliziale Theorie), so heißt das, daß Axiom (5b) sogar für alle $a \in \mathfrak{v}$ nicht nur für alle $a \in \mathfrak{v}'$ gilt.

Damit haben wir die Homologiestrukturen als Spezialfall der Tangentialstrukturen erkannt.

Von besonderer Bedeutung sind für uns alle diejenigen Fragestellungen, in denen wir keine Homologiestrukturen mehr vor uns haben, die sich also nicht mehr den mit in [1] und [2] angegebenen Mitteln lösen lassen. In dieser Arbeit wird für Tangentialstrukturen eine Dualitäts- und eine Fortsetzungstheorie angegeben. In ersterer wird zu jedem P ein duales $\tilde{\mathrm{P}}$ so konstruiert, daß

$$\tilde{\tilde{\mathrm{P}}} = \mathrm{P} \tag{1}$$

ist.

In der Fortsetzungstheorie geben wir zu jedem P zwei Fortsetzungstypen P^i, die injektive und P^p, die projektive Fortsetzung an, so daß:

$$\mathrm{P}^i_r = \mathrm{D}_r \tag{2}$$

$$\mathrm{P}^p_r = \mathrm{M}_r \tag{3}$$

ist. Das entscheidende Stück dieser Arbeit beschäftigt sich mit der Verbindung von Dualitäts- und Fortsetzungstheorie, die sich folgendermaßen in Formeln ausdrücken läßt:

$$(\tilde{\mathrm{P}})^p = \widetilde{\mathrm{P}^i} \tag{4}$$

$$(\tilde{\mathrm{P}})^i = \widetilde{\mathrm{P}^p}. \tag{5}$$

Durch Anwendung von (1) kommt man zu:

$$\widetilde{(\tilde{\mathrm{P}})^p} = \mathrm{P}^i \tag{6}$$

$$\widetilde{(\tilde{\mathrm{P}})^i} = \mathrm{P}^p. \tag{7}$$

Dadurch wird ein Zusammenhang zwischen den differenzierbaren Mannigfaltigkeiten und der Dimensionstheorie hergestellt, der seinen intuitiven Ausdruck in den folgenden Definitionen findet:

α) Ein Raum $\mathrm{X} \subset \mathrm{R}^n$ heißt $\geqslant r$-dimensional, wenn es eine epimorphe Abbildung $f\colon \mathrm{X} \to \mathrm{I}^r$ ($= r$-dim. Würfel) gibt, die in mindestens einem Punkte wesentlich ist.

Eine Abbildung heißt nach [3] wesentlich an der Stelle $x \in \mathrm{I}^r$, wenn es kein $g\colon \mathrm{X} \to \mathrm{I}^r$, $\delta(f, g) < \varepsilon$ für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ gibt mit $g(\mathrm{X}) \subset \mathrm{I}^r - x$.

β) Ein topologischer Raum V^r ist eine r-dimensionale, differenzierbare Mannigfaltigkeit im R^n, wenn es zu jedem $x \in \mathrm{V}^r$ eine monomorphe Abbildung $f\colon \mathrm{I}^r \to \mathrm{V}^r$ gibt, so daß f I^r

eine Umgebung von x ist und wenn es zu jedem x eine eindeutig bestimmte Tangentialebene E^r gibt, die stetig mit x variiert.

Es ist seit längerer Zeit aus der homologischen Algebra bekannt, daß sich Epimorphismen und Monomorphismen in dualer Weise entsprechen. Hier ist einmal noch davon die Rede, daß die Abbildung in (α) wesentlich und in (β), daß sie sogar differenzierbar ist. Wir werden im folgenden auch diese beiden Punkte in Beziehung zu setzen versuchen.

Es empfiehlt sich, im folgenden A als vollständig vorauszusetzen.

Zunächst gehen wir auf die Erklärung der Dualität ein: Eine Wurzel w in einer Tangentialstruktur P ist eine Teilmenge von P′. welche den folgenden beiden Forderungen genügt:

(1) Es ist $w = \cap (z)$ für eine gewisse Menge von Atomen.

(2) Es ist kein $a \in P'$, $a < b$ für alle $b \in w$ vorhanden.

Wir setzen $|w|_A = \bigvee |z|$, im Gegensatz zu $|w| = \{|a| \mid a \in w\}$. Zu den Wurzeln gehören die Atome und die sogenannten offenen Atome. Eine Wurzel w_X heißt offen, wenn $w_X = \bigcap\limits_{|w| = X} w$ ist. Eine offene Wurzel ist ein offenes Atom, wenn

$$|w_X|_A = X \in |N(P)|$$

ist. Nicht zu den Wurzeln gehören i.A. maximale Ideale m in P′, denn es ist $|m|_A = \emptyset \in A$.

Wir können in P den Atombereich abändern und z.B. N(P) als die Menge aller der Wurzeln W setzen, die rel. zu ihrem Träger $|w|_A$ maximal sind. Der neue Wurzelbereich ist gleich dem alten. Es kann jetzt allerdings passieren, daß für zwei neue Atome w_1, w_2 gilt $|w_1|_A \subseteq |w_2|_A$ oder daß sogar $w_1 \supseteq w_2$ ist. Solche Inklusionen lassen wir aber nicht als Inklusionen in P gelten. Den Bereich der offenen Wurzeln nennen wir OW(P). Die Dualitätskonstruktion besteht nun darin, daß man P′ und OW(P) miteinander vertauscht. In OW(P) nehmen wir als Elementebereich von $\tilde{P}'$ die durch die Wurzeln implizierte Anordnung.

Im zweiten Abschnitt wird diese Dualität ausführlich beschrieben werden. Zu ihr gehört noch ein Verfahren, P zu normalisieren, welches wir N_A nennen und ein anderes N_A^{-1}, diese Normalisierung wieder aufzuheben und P in eine offene Struktur zu verwandeln. Dabei verstehen wir unter einer offenen eine solche, bei der es (Def. 1.5) zu jedem $x \in |N(P)|$ nur ein Atom z mit $|z| = x$ gibt. Wenn wir die oben beschriebene Vertauschung von P' und OW(P) D nennen, so sieht die Dualitätskonstruktion so aus:

$$\tilde{P} = N_A D N_A^{-1} P. \tag{8}$$

Die Elemente von P sind die offenen Wurzeln OW(P). Den Wurzeln W(P) entsprechen die sogenannten Kowurzeln K(P). Das sind Ideale im Bereich OW(P) mit Anordnung: $w_1 \leqslant w_2$, wenn $w_1 \subseteq w_2$. Für die Träger gilt dann $|w_1|_A \geqslant |w_2|_A$. Der Träger einer Kowurzel ist ein $X \in |P'|$. Wir machen uns noch klar, daß es zu einem festen $X \in |P'_r|$ mehrere Kowurzeln K geben kann mit $|K|_A = X$: Wir nehmen zwei Wurzeln w_1, w_2 $|w_1|_A < X$, $|w_1|_A \cup |w_2|_A = X$. Es können diese beiden Wurzeln nicht in der gleichen Kowurzel k liegen, da $w_1 \cap w_2$ keine Kowurzel mehr ist.

Jetzt gehen wir zur Beschreibung der Fortsetzungstheorie über:

Die Bedingung (α) ersetzen wir durch die folgende:

α') Es gibt einen Epimorphismus

$$f : W(X) \to W(I^r)$$

und zu jedem $z_0^1 \in OW(I^r)$ ein offenes Atom $z_0 \in OW(X)$ sowie einen Monomorphismus $\varphi : \hat{z}_0^1 \to \hat{}_0(\hat{z}_0 = \{w | w \in OW(X),\ w \subseteq z_0\}$, entsprechend für z_0^1), so daß $z_0 \in \varphi \hat{z}_0^1$ und $f\varphi =$ Identität ist.

Aus der obigen Abbildung f in (α) ist der Epimorphismus f geworden. Man kann zeigen, daß offene Wurzeln in offene Wurzeln übergehen und daß umgekehrt das vollständige Urbild $f^{-1}w_0$ einer offenen Wurzel $w_0 \in OW(I^r)$ eine offene Wurzel ist. Ersteres beweist, daß f wesentlich, letzteres, daß es stetig ist.

Die Bedingung (β) wird durch eine nunmehr vollkommen duale Bedingung ersetzt:

β') Ist $w_0 \in OW(M_r)$, $w_1 \in OW(P_r)$, so gibt es einen Epimorphismus

$$f : K(w_0) \to K(w_1)$$

und zu jedem $a \in w_0$ ein $a' \geqslant a$ sowie einen Monomorphismus

$$\varphi : \hat{b} \to \hat{a}' \quad (\hat{b} = \{c | c \leqslant b\}, \text{ entspr. für } a')$$

so daß $f\varphi =$ Identität und $a' \in \varphi \hat{b}$ ist. Hierbei wird unter $K(w_0)$

der Bereich aller der Kowurzeln k mit $w \in k$ verstanden (entsprechend $K(w_1)$.)

Die Wurzeln in (α) werden in (β) zu Kowurzeln. Aus dem Element $X \in D'_r$ in (α) wird in (β) eine Wurzel w_0 ganz so, wie es der Dualität entspricht.

Im Ganzen gesehen ist (α) einfach eine duale Umformung von (β).

Durch die Monomorphismen in (β) wird eine Abbildung von I^r in die Mannigfaltigkeit V^r vermittelt. Die Tangentialebene von V^r im Punkte $|w_0|_A$ ist I^r. Auf diese Weise kann man nachweisen, daß $P_r^p = M_r$ ist.

Zu der hier dargelegten Theorie gibt es eine Menge von Anwendungen, die in einer besonderen Arbeit besprochen werden sollen. So z.B. die Anwendungen auf die Dimensionstheorie und auf die differenzierbaren Mannigfaltigkeiten.

Am Schluß dieser Einleitung geben wir noch eine kurze Übersicht über die Gliederung der nachfolgenden Abschnitte an:

Im ersten Abschnitt werden noch einige allgemeine Fakten über Tangentialstrukturen bewiesen. Der zweite Abschnitt ist der Dualitätstheorie gewidmet. Im dritten Abschnitt werden die projektive und die injektive Fortsetzung definiert und zwei Sätze bewiesen, die die Existenz diezer Fortsetzungen sicherstellen. Im vierten Abschnitt werden die Formeln (4) (5) bewiesen. Der fünfte und sechste Abschnitt gehört den Anwendungen. In ersterem finden wir den Beweis von (2), im letzteren den von (3).

Ich verdanke P. S. Alexandroff und meinem Lehrer W. Franz für das Zustandekommen dieser Arbeit mehr, als ich hier ausdrücken kann.

1. Tangentialstrukturen. — Während wir in der Einleitung die Tangentialstrukturen definiert haben, wollen wir hier etwas mehr auf ihre algebraische Theorie eingehen. Unter anderem soll eine Topologie in der Menge $|N|$ der Atomträger definiert werden. Zu Beginn stellen wir einige Bezeichnungen zusammen, die wir teilweise schon in der Einleitung benutzt haben:

$$\bar{a} = \{z | z \leqslant a\}, \qquad |\bar{a}| = \{|z| \, | z \in \bar{a}|\}, \qquad \hat{a} = \{b | b \leqslant a, \; b \in P\},$$

letzteres ist für $a \in \mathrm{P}'$ eine Tangentialstruktur, die in P enthalten ist.

Von ganz besonderer Bedeutung ist für unsere Untersuchungen der Begriff des Ideals. Da P kein Verband ist, können wir den idealtheoretischen Verbandsbegriff nicht wörtlich übertragen, sondern müssen wir wie folgt definieren:

DEFINITION 1.1. — *Ein Ideal in* P *ist eine Teilmenge* $\mathrm{I} \subset \mathrm{P}'$, *so daß gilt:*

(I 1) *mit* $a \in \mathrm{I}$, $b \in \mathrm{P}'$, $b \geqslant a$ *ist* $b \in \mathrm{I}$,

(I 2) *zu* $a_1, a_2 \in \mathrm{I}$ *existiert ein* $a \leqslant a_1, a_2$ $a \in \mathrm{I}$, $|a| = |a_1| \wedge |a_2|$,

(I 3) *ist* $a_1, a_2 \in \mathrm{I}$, $|a_1| = |a_2|$, *so ist* $a_1 = a_2$.

Diese Bedingungen sind nicht voneinander unabhängig, es folgt (I 3) *aus den übrigen: Ist* $|a_1| = |a_2|$, *so gibt es wegen* (I 2) *ein* $a \in \mathrm{I}$ *mit* $a \leqslant a_1, a_2$, $|a| = |a_1| = |a_2|$.

Wegen (2) Definition 0.1 heißt es aber $a_1 = a_2$.

Für ein Ideal haben wir zwei Möglichkeiten, die Norm zu bilden: Es ist

$$|\mathrm{I}| = \{|a| \,|\, a \in \mathrm{I}\} \quad \text{ein Ideal in A,}$$

wohingegen

$$|\mathrm{I}|_{\mathrm{A}} = \bigcap_{a \in \mathrm{I}} |a| \quad \text{ein Element in A ist.}$$

Bei der Definition der Atome herrscht insofern eine gewisse Willkür, als man bei festem P' auf viele Arten in P Atome einführen kann. Wir schränken diese Willkür durch die folgenden Definition etwas ein:

DEFINITION 1.2. — *Eine Tangentialstruktur* P *heißt normalisiert, wenn für jedes Atom* $z \in \mathrm{N(P)}$ *die Menge* $(z) = \{a | a > z\}$ *ein Ideal ist, so daß gilt: Ist* $\langle x \rangle = \{a | a > z, |z| = x\} = \cup\,(z)$, *so ist* $\{(z) | |z| = x\}$ *gerade die Menge aller in* $\langle x \rangle$ *maximalen Ideale.*

Diese normalisierten Strukturen werden für uns von besonderem Interesse sein. Wir werden, mit Ausnahme des nächsten Abschnittes, P immer als normalisiert voraussetzen.

Die Tangentialstrukturen bilden natürlich auch eine Kategorie bei der Definition gewisser Abbildungen:

DEFINITION 1.3. — *Sind* P, Q *zwei Tangentialstrukturen und*

$$f\colon\ \mathrm{P} \to \mathrm{Q}$$
$$|f|\colon\ |\mathrm{P}| \to |\mathrm{Q}|$$

zwei Abbildungen, von denen die erste anordnungserhaltend und die zweite ein Verbandshomomorphismus ist, so daß

$$|f||a| = |fa|$$

für alle $a \in \mathrm{P}$ *ist, so nennen wir* f *einen Homomorphismus von* P *in* Q. *Ist* f *so beschaffen, daß* $f\mathrm{N}(\mathrm{P}) \subset \mathrm{N}(\mathrm{Q})$, *so nennen wir* f *atomar.*

Man prüft leicht nach, daß die Menge $\mathfrak{p}$ aller Tangentialstrukturen unter diesen Abbildungen eine Kategorie bildet.

Wir werden etwas weiter unten noch die offenen Tangentialstrukturen definieren. Dieser Begriff der Offenheit, der die ganze Arbeit durchzieht, gibt aber sogar Anlaß zu einer Topologie:

Definition 1.4. — *Ist* P *eine Tangentialstruktur und* $|\mathrm{N}|$ *die Menge der Atomträger, so führen wir in* $|\mathrm{N}|$ *eine Topologie durch folgende Erklärung der offenen Menge ein:*

Eine Menge $0 \subset |\mathrm{N}|$ *heißt offen, wenn es zu jedem Atom* z, $|z| \in 0$ *ein* $a \in \mathrm{P}'$ *mit* $z < a$, $|\bar{a}| \subset 0$ *gibt. Ausserdem soll die leere Menge offen sein.*

Wir können beweisen:

Satz 1.1. — *Durch Definition 1.4 wird in* $|\mathrm{N}|$ *eine Topologie* $\mathfrak{t}_p$ *eingeführt, Ist* $|\mathrm{N}|$ *in der Menge der Atome von* A *enthalten und ist für jedes Atom* z: $|z| = |(z)|_{\mathrm{A}}$ *so ist jeder Punkt von* $|\mathrm{N}|$ *abgeschlossen.*

Beweis. — Wir zeigen für $\mathfrak{t}_p$:

(α) Sind O_1, O_2 offen in $\mathfrak{t}_p$, so ist $\mathrm{O}_1 \cap \mathrm{O}_2$ offen in $\mathfrak{t}_p$.

(β) Ist $\mathrm{K} = \cup\, \mathrm{O}$ Vereinigung von beliebig vielen offenen Mengen, so ist K offen.

(γ) Ist $|\mathrm{N}(\mathrm{P})| \subset \mathrm{N}(\mathrm{A})$ (= Menge der Atome von A), und ist für jedes Atom z: $|z| = |(z)|_{\mathrm{A}}$, so ist jedes $x \in |\mathrm{N}(\mathrm{P})|$ abgeschlossen.

Zu (α): Ist $\mathrm{O}_1 \cap \mathrm{O}_2$ leer, so ist wegen Definition 1.4 nichts mehr zu beweisen. Sei also $x \in \mathrm{O}_1 \cap \mathrm{O}_2$ und $z \in \mathrm{N}(\mathrm{P})$, $|z| = x$. Es gibt ein Paar $a_i \in \mathrm{P}'$, $z < a_i$ mit $|a_i| < \mathrm{O}_i$. Da (z) ein Ideal ist, gibt es ein $a \subseteq a_1$, a_2 $a \in \mathrm{P}'$, $z \subset a$. Da $|\bar{a}| \subset |\bar{a}_1| \cap |\bar{a}_2|$ ist, ist auch $\mathrm{O}_1 \cap \mathrm{O}_2$ offen.

Zu (β): Ist $x \in \mathrm{K}$, $|z| = x$, so gibt es in jedem O ein $a \in \mathrm{P}'$ $|\bar{a}| \subset 0$, $z \subset a$. Also ist K offen, da $\mathrm{O} \subset \mathrm{K}$.

Z_u (γ) : Sind $x_1 \neq x_2$ in $|N(P)|$, so ist nach Voraussetzung $x_1 \cap x_2 = \emptyset$. Es gibt zu $z \in N$, $|z| = x_1$ ein $a \in P'$, $a > z$, $|\bar{a}| \subset |N| - x_2$. Anderenfalls wäre $x_2 \in \bigcap_{a \in (z)} |a|$, was unserer Voraussetzung widerspricht.

Damit ist Satz 1.1 bewiesen.

Wir haben im Beweis von Satz 1.1 die Normalisiertheit von P benutzt. Sie stellte ein wichtiges Hilfsmittel dar.

Von besonderer Bedeutung sind für uns noch die offenen Tangentialstrukturen :

Definition 1.5. — *Eine Tangentialstruktur (nicht notwendig normalisiert) ist offen, wenn es zu jedem $x \in |N|$ genau ein $z \in N$ mit $|z| = x$ gibt.*

Nehmen wir z.B. die Gesamtheit aller offenen Teilmengen des R^n, als H'_n und die maximalen Ideale mit Punktträger als Atome, so ist H_n offen und normalisiert. Führen wir in einem beliebigen (normalisierten) P neue Atome dadurch ein, daß $(z) = \langle x \rangle$ für ein $x \in |N|$ ist, d.h., daß es in dem neuen P zu einem x nur ein z mit $|z| = x$ gibt, dann ist dieses P offen, aber nicht normalisiert. In einer offenen Struktur ist diese Topologie aus Satz 1.1 besonders einfach.

Wir setzen noch die folgende Sprechweise fest : Wir sagen : « $z \in N$ erzeugt in einem offenen $O \in |N|$ », wenn wir meinen : « es gibt ein $a \in P'$, $|\bar{a}| \subset O$, $z < a$ ». Wir sagen : « es ist a offen rel. $b (a \leqslant b,\ a,\ b \in P')$ », wenn wir meinen : « es ist $|\bar{a}|$ offen rel. $|\bar{b}|$ ».

Jetzt untersuchen wir die eben beschriebene Topologie $\mathfrak{t}$ im Falle unserer Beispiele :

Leider ist es so, daß wir nicht mehr in der Lage sind, nachzuweisen, daß $\mathfrak{t}_{P_r}$, $\mathfrak{t}_{M_r}$ oder $\mathfrak{t}_{D_r}$ gleich der euklidischen Topologie sind. Man kann sich selbst leicht Beispiele dafür konstruieren. Trotzdem stehen diese Topologien zur euklidischen Topologie in einem einfachen Zusammenhang. Wir haben in der euklidischen Topologie $\mathfrak{x}$ eine solche vor uns, die dem folgenden Trennungsaxiom genügt :

(T) Sind $x_1, x_2 \in R^n$, $x_1 \neq x_2$, so gibt es immer zwei Umgebungen $U_i(x_i)$, sodaß $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ ist.

In der Sprache der Atome von z.B. P_r lautet dieses Axiom :

(1.1) Sind x_1, $x_2 \in |N(P_r)|$, $x_1 \neq x_2$, so gibt es immer zwei

Umgebungen $U_i(x_i)$ in der Topologie $\mathfrak{t}_{P_r}$, sodaß $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ ist.

Beweis. — Alles was wir einsehen müssen, ist, daß $\mathfrak{t}_{P_r}$ feiner als $\mathfrak{r}$ ist. Das aber ist richtig, denn jedes $z \in N(P_r)$ erzeugt in einer rel. $\mathfrak{r}$ offenen Menge.

Wir können offenbar (1.1) ebenso für D_r und M_r formulieren.

Wenn schon $\mathfrak{t}_{P_r}$ nicht mit $\mathfrak{r}$ übereinstimmt, so ist doch $\mathfrak{r}$ die gröbste Topologie, die (T) erfüllt und gröber als $\mathfrak{t}_{P_r}$ ist. Das wollen wir jetzt beweisen:

(1.2) Es ist die euklidische Topologie $\mathfrak{r}$ die kleinste Topologie $\mathfrak{p}_{P_r} = \mathfrak{p}$ (d.h. die gröbste), die für P_r den folgenden. Axiomen genügt:

(α) Ist O in $\mathfrak{p}_{P_r}$ offen, so erzeugt jedes Atom $z \in N(P_r)$, $|z| \in O$ in O.

(β) Sind $x_1 \neq x_2 \in |N|$, so gibt es offene Umgebungen rel. $\mathfrak{p}_{P_r}$ $U_1(x_1)$, $U_2(x_2)$ mit $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

Beweis. — Es ist $\mathfrak{p} \leqslant \mathfrak{t}_{P_r}$ (d.h. $\mathfrak{p}$ gröber als $\mathfrak{t}_{P_r}$) und $\mathfrak{p} \leqslant \mathfrak{r}$ denn $\mathfrak{r}$ erfüllt (α), (β). Sei $O_\mathfrak{r}$ offen rel. $\mathfrak{r}$, $x \in O_\mathfrak{r}$, und $F_x = \{O_\mathfrak{r} | x \in O_\mathfrak{p},\ O_\mathfrak{p} \text{ offen rel. } \mathfrak{p}\}$. Entweder es ist ein $Q \in F_x$ vorhanden, sodaß $O_\mathfrak{p} \subseteq O_\mathfrak{r}$ für alle $O_\mathfrak{p} \in F_x$, $O_\mathfrak{p} \subseteq Q$. Gilt das für jedes $x \in O_\mathfrak{r}$, so ist $O_\mathfrak{r}$ offen in $\mathfrak{p}$. Im entgegengesetzten Falle ist ein $y \in R^n - O_\mathfrak{r}$ vorhanden, $y \in \bigcap_{O_\mathfrak{p} \in F_r} (\overline{O_\mathfrak{p} - O_\mathfrak{r}})$. Das besagt aber, daß x und y nicht im Sinne von (β) getrennt werden können was auf $x = y$ führt, was aber unmöglich ist.

Man kann ebenso wie in (1.2) zeigen:

(1.3) Es ist $\mathfrak{p}_{\Gamma_r} = \mathfrak{r}$.

(1.4) Es ist $\mathfrak{p}_{M_r} = \mathfrak{r}$.

Die Tangentialstrukturen aus Definition 0.1 sind uns noch etwas zu allgemein. Wir schränken sie durch folgende Definition ein:

Definition 1.6. — *Eine Tangentialstruktur* P *heißt einfach, wenn die Angabe von* $|(z)|$, $z \in N(P)$ *und einem* $a \in P'$, $|a| \in |(z)|$ *bereits z eindeutig bestimmt.*

Wenn nicht ausdrücklich etwas anderes gesagt wird, nehmen wir alle Strukturen P (ausser im 2. Abschnitt) als einfach an.

(1.5) Ist in P ein maximales Element E vorhanden mit der

Eigenschaft $E \geqslant a$ für alle $a \in P$ und ist P einfach, so gibt es zu einem $X \in |P'|$ nur ein $a \in P'$ mit $X = |a|$.

Beweis. — Ist $z \in N$, dann liegt E in (z), also ist z durch $|(z)|$ eindeutig bestimmt. Sei $a_1, a_2 \in P'$, $|a_1| = |a_2|$. Es gibt ein $z < a_1$. Durch das Paar (z, a_1) wird (z) und damit $|(z)|$ bestimmt. Da nun auch $|a_2| \in |(z)|$ ist, gibt es ein $z_1 \in N$, $|(z_1)| = |(z)|$, $z_1 < a_2$. Durch $|(z)|$ wird aber z bestimmt, also ist $z_1 = z$ und $a_1 = a_2$.

Die Strukturen P_r, D_r, M_r sind einfach. Im Folgenden wollen wir auch immer annehmen, daß ein maximales Element in P vorhanden ist, so daß (1.5) anwendbar ist. Wir wollen im Folgenden unter einer einfachen Struktur eine solche verstehen, bei der es zu jedem $|a| \in |P'|$ nur ein $a \in P'$ mit diesem Träger gibt. Homologiestrukturen sind i.A. nicht einfach: Sei $\mathfrak{v}$ eine atomare Homologiestruktur über dem ganzzahligen Bereich Z und $\lambda \in Z$, $\lambda \neq 1$. Ist $z \in N\ (\mathfrak{v})$, so ist i.A. d.h. für $z \neq 0$:

$$\lambda z \neq z,$$

aber

$$|(\lambda z)| = |(z)|.$$

Ist $O_X \in H(X)$ ein Element einer Homologiegruppe von X und ist $z < O_X$, $z > 0$ in X, so ist auch $\lambda z \leqslant O_X$. Selbst wenn in $\mathfrak{v}$ kein maximales Element vorhanden ist, ist also $\mathfrak{v}$ nicht einfach, da O_X und $|(z)|$ nicht z eindeutig bestimmen.

Man kann jede Struktur P in einfache Strukturen zerlegen: Ist $z \in N$, so ist (z) eine einfache Teilstruktur und es ist

$$P = \bigcup_{z \in N} (z).$$

Wir schließen diesen Abschnitt mit der Bemerkung, daß P′, $|N(P)|$ und die Tatsache, daß P normalisiert ist, noch nicht N(P) bestimmen. Bereits in der Einleitung haben wir gesehen, daß man auch den Bereich aller rel. $|w|_A$ maximalen Wurzeln als Atome nehmen kann. War P normalisiert, so ist es auch nach dieser Abänderung normalisiert.

2. Dualität in Tangentialstrukturen. — In diesem Abschnitt wird zu jeder Tangentialstruktur P eine duale $\tilde{P}$ derart konstruiert, daß Satz 2.2 gilt. Die Konstruktion ist einfach, stellt aber doch einen wichtigen Schritt in unseren Untersuchungen dar:

Wir lassen in diesem Abschnitt neben normalisierten auch beliebige, nicht normalisierte Strukturen zu, um besser operieren zu können. Am Anfang führen wir eine Reihe von Operatoren N_A, N_A^{-1}, D an, die, jede für sich einen elementaren Schritt zwischen P und $\tilde{P}$ darstellen und die alle zusammen den Dualitätsoperator liefern. Durch den Operator N_A wird eine nicht normalisierte Struktur unter Festhaltung von P' und W(P) in eine normalisierte Struktur übergeführt. Der Operator N_A^{-1} macht aus P eine offene Struktur und fällt mit der Konstruktion zusammen, die wir schon anlässlich der Einführung der offenen Strukturen in Definition 1.5 angedeutet haben.

Der Operator D schließlich ist der Dualitätsoperator für offene Strukturen, wo er eine besonders einfache Form annimmt; er ist nämlich nichts anderes als die Vertauschung von P' und W(P) (welches jetzt gleich OW(P) ist). Der Dualitätsoperator ist dann einfach $N_A D N_A^{-1}$. Er führt normalisierte in normalisierte Strukturen über, und wir können auf diesem Standpunkt wieder dazu übergehen, grundsätzlich nur normalisierte Strukturen zu betrachten.

N_A. — Sei P eine offene Tangentialstruktur, so teilen wir die Atome $\mathfrak{z} \in N(P)$ in Klassen von Idealen (z) auf, so daß es zu einem (z) kein Ideal I gibt, welches größer als (z) und in $(\mathfrak{z})$ enthalten ist.

Die Struktur $N_A P$ hat diese Ideale zu Atomen. Es ist $(N_A P)' = P'$ und $|W(P)|_A = |W(N_A P)|_A$.

(2.1) Es ist $N_A P$ eine normalisierte, einfache Tangentialstruktur. Dadurch, daß wir jedem Ideal (z) wieder das $\mathfrak{z}$ mit $(\mathfrak{z}) \supset (z)$ zuordnen und $(N_A P)'$ fest lassen, finden wir einen Epimorphismus

$$f\colon N_A P \to P$$

der atomar und auf $(N_A P)'$ ein Isomorphismus ist.

Beweis. — Wir haben die Axiome aus Definition 0.1 nachzuweisen. Es zerfällt ganz $(\mathfrak{z})$ in die Vereinigung von im Sinne der Definition von N_A maximalen Idealen (z), also hat man tatsächlich genügend Atome $N_A P$. Der Nachweis der Axiome ist jetzt vollständig trivial. Die Menge (z) ist ein Ideal. Wegen der Definition von N_A ist auch Definition 1.2 erfüllt, also ist $N_A P$ normalisiert. War P einfach, so ist auch $N_A P$ einfach, da es immer noch zu jedem $X \in |P|'$ nur ein $a \in P'$ mit $X = |a|$ gibt. Trivialerweise ist f ein atomarer Epimorphismus.

N_A^{-1}. — Sei P eine normalisierte Tangentialstruktur. Wir bilden Äquivalenzklassen in N(P) und nennen $z_1 \sim z_2$, wenn $|z_1| = |z_2|$ ist. Die Atome von N_A^{-1} P sind diese Äquivalenzklassen. Es ist jetzt für $\mathfrak{z} \in N(N_A^{-1}P)$ $(\mathfrak{z}) = \{a | a > z, |z| = |\mathfrak{z}|\}$.
Wieder wird $P' = (N_A^{-1}P')$ gesetzt.

(2.2) Es ist $N_A^{-1}P$ eine offene, einfache Tangentialstruktur. Dadurch, daß wir jedem $z \in P(N)$ seine Äquivalenzklassen zuordnen und P′ fest lassen, erhalten wir einen Epimorphismus

$$f\colon P \to N_A^{-1}P.$$

Beweis. — Wieder sind die Axiome in Definition 0.1 trivial, da sie für P gelten. Wegen unserer Konstruktion ist $N_A^{-1}P$ offen (Definition 1.5). Der Beweis der Einfachheit verläuft wie bei N_A.

(2.3) Ist P normalisiert, so ist:

$$N_A N_A^{-1} P = P. \tag{1}$$

Ist P offen, so ist:

$$N_A^{-1} N_A P = P. \tag{2}$$

Beweis. — Ist P normalisiert, so kann man N_A^{-1} anwenden. Dieser Operator faßt nach Definition die Atome mit festem Träger zusammen. Der Operator N_A zerlegt die Mengen $(\mathfrak{z})$ wieder in (rel. $(\mathfrak{z})$) maximale Ideale. Wegen der Definition 1.2 waren diese Ideale (z), $z \in N(P)$ bereits maximal in der Menge aller a, $a > z_1$ für alle z_1 mit $|z_1| = |z|$, also in $(\mathfrak{z})$. Damit ist (1) bewiesen.

Ist P offen, so können wir N_A anwenden und erhalten eine normalisierte Struktur mit den gleichen Atomträgern. Nun fassen wir alle $z \in N(N_A P)$ mit dem gleichen Träger zu einem Atom zusammen und erhalten auf diese Weise $N(N_A^{-1} N_A P)$. Nun war das alte N(P) durch N_A in eine Menge von Idealen zerlegt worden, die den Eigenschaften in der Definition von

N_A genügen. Wenn wir also in der oben beschriebenen Weise diese Ideale wieder zusammenfassen, kommen wir auch zu N(P) zurück.

Wir kommen jetzt zur Definition von:

D. — Sei P eine offene, aber nicht notwendigeweise normalisierte Tangentialstruktur. Bereits mehrfach haben wir erwähnt (z.B. am Ende des ersten Abschnittes), daß man die Wurzeln W(P) selbst als Atombereich erklären kann. Wir setzen hier und im Folgenden voraus, daß P die folgende Eigenschaft hat: Zu jedem $a \in P'$, $z < a$ $z \in N$, erzeugt z auf $X = \bigcup_{z<a} |z_1|$ ein Element b, $|b| = X$. Offenbar ist für P_r, D_r und M_r diese Voraussetzung erfüllt. Die duale Forderung lautet:

Ist $w \in W(P)$, so gibt es ein $v \in W(P)$, $v \leqslant w$, $|v|_A = \bigcap_{a \in w} |a|$.

Diese beiden Eigenschaften wollen wir von nun an überall da, wo Fortsetzungs- und Dualitätstheorie getrieben wird, fordern. Ferner setzen wir voraus, dass es zu jedem $w \in W(P)$, $X \leqslant |w|_A$ $X \neq \emptyset$ ein $v \in W(P)$ mit $|v|_A = X$ gibt.

Da P offen ist, gibt es wegen Definition 1.5 nur ein $w \in W(P)$ mit dem Träger $|w|_A$. Es ist also $OW(P) = W(P)$. Wir kehren in P′ die Anordnung um und führen in W(P) die Anordnung ein, die durch die Inklusionen der w, aufgefaßt als Teilmengen von P′, gegeben werden. Jetzt setzen wir $N(DP) = P'$ mit dieser dualen Anordnung. Wir setzen $(DP)' = W(P)$. Es wird $w > a$, $w \in W(P)$ $a \in P'$ gesetzt, wenn $a \in w$ ist. Als Normbereich von DP erklären wir DA, den zu A dualen Verband, als N(DP) den Bereich W(DP), aber ohne Anordnung. Die Null $O \in P$ übernimmt hier die Rolle des maximalen Elementes E in DP und umgekehrt. Im Übrigen verweisen wir auf das, was wir bezüglich dieser beiden Elemente bereits gesagt haben.

(2.4) Es ist DP eine offene und einfache Tangentialstruktur.

Beweis. — Wir gehen die Axiome von Definition 0.1 durch:

Zu 1. — Ist $a \leqslant b$ in DP, so sind entweder a, $b \in W(P)$ und dann ist $|a|_A \geqslant |b|_A$, also $|a| \leqslant |b|$ in DA, oder es ist $a \in P'$ das aber heißt, daß $a \in b \in W(P)$ ist. Da $|b|_A \leqslant \bigcap_{c \in b} |c|$ ist, gilt auch hier $|a|_A \geqslant |b|_A$ und daher $|a| \leqslant |b|$ in DA.

Zu 2. — Da (2) aus (5 a) folgt, brauchen wir es nicht besonders zu beweisen.

Zu 3. — Ist $z \in N(DP)$, $a \in DP$, $z \geqslant a$, so ist $a \in P'$, aber da P' als Atombereich von DP nicht angeordnet war (in DP), ist $z = a$.

Zu 4*a*. — Ist $a \in DP$, $a \neq 0$, d.h. in P $a \neq E$, so ist entweder $a \in N(DP) = P'$ und es gibt ein Atom $z < a$, nämlich a selber, oder es ist $a \in (DP)' = W(P)$. Dann aber gibt es ein $b \in P'$, $b \in a$, also $b \subset a$ in DP, wegen (4 b) für P. Da $b \in N(DP)$, ist (4 a) für DP gezeigt.

Zu 4*b*. — Ist $a \in P' - \{E\}$, also $a \in N(DP)$, so gibt es, wegen (4 a) für P, ein $z \in N(P) = W(P)$, $z < a$. Daher ist $z > a$ in DP und (4 b) für DP gezeigt.

Zu 5*a*. — Ist $a \leqslant b_1, b_2$ in DP, $|b_1| = |b_2|$, dann ist entweder $b_1, b_2 \in N(DP) = P'$ und $a = b_1 = b_2$. Anderenfalls ist $b_1, b_2 \in W(P)$, aber da P offen ist, heißt das $b_1 = b_2$. Damit ist (5a) bewiesen.

Zu 5*b*. — Ist $a \in (DP)'$, $X \in DA$, $X \geqslant |a|$ in DA, so ist $X \leqslant |a|_A$ in A und $a \in W(P)$. Wir bilden das Element $w_X \in W(P)$, das durch X bestimmt wird, und existiert, wenn $X \neq \emptyset$ ist, und es ist $a \leqslant w_X$ in DP. Ist $X = \emptyset$, so ist sicher für $O \in P$, $O \geqslant a$ in DP. Damit ist (5b) bewiesen.

Da es zu jedem $|w|_A \in |W(P)|_A$ nur ein $w \in W(P)$ mit diesem Träger gibt, ist DP einfach.

Da P einfach war, gibt es zu jedem $a \in P'$ nur ein a mit diesem Träger. Darum ist DP offen.

Damit ist (2.4) bewiesen.

Wir sehen aus dem letzten Teil des Beweises, daß « einfach » und « offen » Eigenschaften darstellen, die dual im Sinne der durch D vermittelten Dualität sind.

(2.5) Es ist für eine offene Struktur

$$D^2P = P.$$

Beweis. — Die Konstruktion von DP verläuft so, daß P' und W(P) vertauscht werden, wobei die Abordnung umgekehrt wird. (Gewöhnlich nimmt man auch in W(P) die Anordnung, die durch die Träger in A induziert wird.) Die zweimalige Anwendung dieses Prozesses liefert wieder P. Das gilt natürlich auch für A, da $D^2A = A$ eine einfache verbandstheoretische Tatsache ist.

Nun haben wir alles zusammengetragen, was nötig war, um die allgemeine Dualität zu konstruieren:

DEFINITION 2.1. — *Sei* P *eine einfache, normalisierte Struktur, so erklären wir:*

$$\tilde{P} = N_A D N_A^{-1} P.$$

Wir nennen $W(\tilde{P}) = K(P)$ *den Bereich der Kowurzeln von* P. Auf diese Weise kommen wir zu dem Satz:

SATZ 3.1. — *Ist* P *eine einfache, normalisierte Tangentialstruktur, so gibt es eine eindeutig bestimmte Tangentialstruktur* $\tilde{P}$, *welche ebenfalls einfach und normalisiert ist, sodaß gilt:*

$$\tilde{\tilde{P}} = P.$$

Beweis. — Ist P einfach, so ist $N_A^{-1}P$ wegen (2.2), $DN_A^{-1}P$ wegen (2.4) und $N_A DN_A^{-1}P$ wegen (2.1) einfach. Ist P normalisiert, so ist $N_A^{-1}P$ offen, DN_A^{-1} P offen und $N_A DN_A^{-1}$ normalisiert wegen (2.2), (2.4) und (2.1). Alle Konstruktionen sind eindeutig, also ist P eindeutig.

Es ist

$$\tilde{\tilde{P}} = N_A D N_A^{-1} N_A D N_A^{-1} P.$$

Wegen (2.3) und (2.5) ist das aber gleich P.

Das beendet den Beweis von Satz 2.1.

Wir sprechen von einem Quasiepimorphismus $f : W(a) \to W(a_1)$ ($a \in P'$, $a_1 \in Q'$ für zwei Tangentialstrukturen P, Q; $W(a) = W(\hat{a})$ entspr. für a_1), wenn f ein anordnungserhaltender Homomorphismus ist, zu dem es einen $\cap$-Homomorphismus

$$|f| : |W(a)|_{|P|} \to |W(a_1)|_{|Q|} \quad \text{mit} \quad |f|\,|w|_{|P|} = |fw|_Q$$

gibt und wenn zu jedem $b_1 \in \hat{a}_1$ eine absteigende Folge von Wurzelträgern $|w_i|_A \in |W(a_1)|_A$ mit $\cup\, |w_i|_A = |b_1|$ gibt, sodaß zu jedem w_i ein $v_i \in W(a)$ mit $fv_i = w_i$ existiert. Da im Folgendem im Rahmen der Dualitätstheorie nur Quasiepimorphismen auftreten, sprechen wir einfach von Epimorphismen.

Wenn aus der Tatsache, daß $w_1 \in W(a_1)$ in $X \leqslant |a_1|$ erzeugt, folgt, daß jedes $w \in f^{-1} w_1$ in $|f|^{-1} X$ erzeugt, dann nennen wir f dualisierbar, wenn folgendes gilt:

(1) Zu jedem $w_1 \in f\mathrm{OW}(a)$ gibt es einen Monomorphismus

$$\varphi : \hat{w}_1 \to \mathrm{OW}(a),$$

$(\hat{w}_1 = \{v | v \in f\mathrm{OW}(a) \cap \mathrm{OW}(a_1),\ v \leqslant w_1\})$, so daß $f\varphi$ die Identität ist.

(2) Zu jedem $w \in \mathrm{OW}(a)$ gibt es ein $v \geqslant w$, ein $w_1 \in \mathrm{OW}(a_1)$ und einen unter (1) geschilderten Monomorphismus, sodaß $v \in \varphi\hat{w}_1$ ist. Die Menge der Abbildungen φ nennen wir Df.

Wir können sofort diesen Begriff dualisieren und von einem Epimorphismus

$$f: \mathrm{K}(w) \to \mathrm{K}(w_1)$$

sprechen, $w \in \mathrm{OW}(\mathrm{P})$, $w_1 \in \mathrm{OW}(\mathrm{Q})$. Wegen Satz 2.1 entsprechen den Elementen von P, Q gerade die offenen Wurzeln und den Wurzeln die Kowurzeln. Die Abbildungen $\varphi \in \mathrm{D}f$ gehen jetzt von den Elementen $a_1 \in w_1$ in die Elemente $a \in w$, nämlich gerade von den offenen Kowurzeln, die größer als w_1 sind, in die offenen Kowurzeln, die größer als w sind.

Im Falle von M_r ist es so, daß jeder duale Quasiepimorphismus sogar zu einem regelrechten Epimorphismus fortsetzbar ist.

Der Grund, Quasiepimorphismen und nicht Epimorphismen zu betrachten, ist der, daß leider nicht das Urbild einer $\leqslant r$-dimensionalen Menge unter einer eineindeutigen stetigen Abbildung $\leqslant r$-dimensional ist.

Diese Begriffe werden wir im nächsten Abschnitt, bei der Definition der Fortsetzungen, verwenden. Im 5. und 6. Abschnitt werden wir sie entscheidend ausnutzen.

Die Strukturen P_r, M_r, D_r sind normalisiert und einfach, so daß wir alle unsere Überlegungen auf diese Standardbeispiele anwenden können.

3. Fortsetzungen von Tangentialstrukturen. — Wir geben in diesem Abschnitt ein Verfahren an, wie man aus einer Tangentialstruktur P neue, reichhaltigere gewinnen kann. Insbesondere interessieren zwei extreme Strukturen P^i, P^p, die injektive bzw. projektive Fortsetzung von P. Die injektive Fortsetzung ist der Konstruktion der $\geqslant r$-dimensionalen Teilmengen des

R^n aus dem Bereich der Polyeder nachgebildet. Die projektive Fortsetzung von P_r führt zu den differenzierbaren Mannigfaltigkeiten. Wie schon des öfteren betont wurde, werden wir diese Fortsezungstheorie mit der Dualitätstheorie verbinden. Dies wird im 4. Abschnitt geschehen, aber schon an den Definitionen 3.1 *a*, *b* erkennt man, daß sie dual zueinander sind.

Außerdem enthält dieser Abschnitt einen einfachen Existenzbeweis für die projektive bzw. injektive Fortsetzung.

Definition 3.1. *a.* — *Seien* P, P^i ($P \subset P^i$) *zwei Tangentialstrukturen über dem Normbereich* A, *so daß es zu jedem* $b \in P^{i'}$, *ein* $a \in P^{i'}$, *und ein* $a_1 \in P'$ *gibt*, $b \geqslant a$, *daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

(1 *a*) *Es gibt einen dualisierbaren Epimorphismus*

$$\varphi : W(a) \to W(a_1).$$

(2 *a*) *Ist* $|a_1| = |a|$, *dann wird durch* φ *die Menge*

$$W_P(a) = \{w | w \in W(a) \cap W(a_1)\}$$

isomorph auf $W(a_1)$ *abgedildet.*

(3 *a*) *Es ist* P^i *maximal mit diesen Eigenschaften.*

Unter diesen Umständen nennen wir P^i *die injektive Fortsetzung von* P.

Wir wollen die Definition 3.1 *a* grob so formulieren: Es ist P^i im kleinen auf P abbildbar. Bei der Untersuchung der Dimensionstheorie wird φ die Rolle einer wesentlichen Abbildung übernehmen, wie wir schon in der Einleitung bemerkt haben.

Die Forderung, daß φ dualisierbar ist, hängt in der Dimensionstheorie mit dem folgenden dimensionstheoretischen Satz zusammen:

(*) Ist $a \in D'_r$, $a \leqslant I^r$, dann enthält a eine offene Menge in I^r, d.h. dann ist $a \in P'_r$.

(3.1) Ist $X \in D'_r$ und $\psi : W(X) \to W(I^r)$ ein Epimorphismus, von dem wir wissen, daß er offene Atome in offene Atome überführt, so ist ψ dualisierbar.

Beweis. — Sei $w \in OW(I^r)$, so ist $w = \cap\, (z_0)$ wo $z_0 \in OW(I^r)$ offene Atome sind. Wegen (*) ist dim $|w|_A < r$. Nun gibt es, da f ein Epimorphismus ist, ein $Y \subset X$, mit $fY = |w|_A$, $\dim Y \leqslant r - 1$. Man kann also zu jedem z_0 ein $z_0' \in OW(X)$ finden, $|z_0'|_t \in R^n$, sodaß $fz_0' = z_0$ und sodaß $\dim |\cap (z_0')|_A \leqslant r - 1$ ist. Es ist also $w_1 = \cap (z_0')$ eine Wurzel mit $fw_1 = w$. Man kann offenbar für jede $v \leqslant w$, $v \in OW\ (I^r)$ ein solches $v_1 \in OX(X)$ finden, sodaß $\psi\ v_1 = v$ und $v_1 \leqslant w_1$ ist. Also ist f ein anordnungserhaltender Monomorphismus. Ist $w_1 \in OW(X)$ eine beliebige Wurzel, so findet man ein offenes Atom $z_0' \geqslant w_1$ und den eben konstruierten Monomorphismus $f \in D\psi$, $f : \hat{z}_0 \to \hat{z}_0'$, $\psi z_0' = z_0$.

Die Definition einer projektiven Fortsetzung ist zu Definition 3.1 *a* dual.

Definition 3.1*b*. — *Seien* P, P^p, $(P \subset P^p)$ *zwei Tangentialstrukturen, sodaß es zu jedem* $v \in OW(P^p)$ *ein* $w \in OW(P^p)$ *und ein* $w_1 \in OW(P)$ *gibt,* $v \leqslant w$, *daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

(1*b*) *Es gibt einen dualisierbaren Epimorphismus:*

$$\varphi : K(w) \to K(w_1).$$

(2*b*) *Ist* $|w_1|_A = |w|_A$, *dann wird durch* φ *die Menge* $K_p(w) = \{k | k \in K(w) \cap K(w_1)\}$ *isomorph auf* $K(w_1)$ *abgebildet.*

(3*b*) *Es ist* P^p *maximal mit diesen Eigenschaften.*

Unter diesen Umständen nennen wir P^p *die projektive Fortsetzung von* P.

Wir nennen $[P^i]$*bzw.* $[OW(P^p)]$ die Menge aller a bzw. w in Definition 3.1 *a*, *b*.

Wir beweisen nun die Existenz einer injektiven bzw. einer projektiven Fortsetzung.

Satz 3.1 *a*. — *Zu jedem* P *gibt es immer ein eindeutig bestimmtes* P^i.

Beweis. — Unser Beweisverfahren besteht darin, die Vereinigung aller Strukturen Q zu bilden, die (1*a*), (2*a*), aber nicht notwendig (3*a*) erfüllen. Solche Q nennen wir schwache injektive Fortsetzungen. Es gibt sicherlich eine schwache injektive Fortsetzung, nämlich P selbst mit $a = a_1$, φ = Indentität. Sind Q_1, Q_2 beide schwache injektive Fortsetzungen, so erklären wir zunächst $Q_1' \cup Q_2'$. Wir identifizieren zwei $q_i \in Q_i'$ mit $|q_1| = |q_2|$ in A. Jetzt können wir $Q_1' \cup Q_2'$ bilden. Da

Q_i einfach ist, ist jedes $q \in Q_1' \cup Q_2'$ eindeutig bestimmt. Ist $z_i \in N(Q_i)$, so identifizieren wir z_1 und z_2, wenn $(z_1) = (z_2)$ in $Q_1' \cup Q_2'$ ist. Ist $|z_1| = |z_2|$, $(z_1) \supseteq (z_2)$, so lassen wir z_2 fort. Auf diese Weise erhalten wir ein $N(Q_1 \cup Q_2)$, welches $Q_1' \cup Q_2'$ zu $Q_1 \cup Q_2$ ergänzt. Ist $a \in [Q_1'] \cup [Q_2'] - Q_1' \cap Q_2'$, dann gibt es ein Paar $t = (\varphi, a_1)$ wie für a in Definition 3.1 a, für q. Dieses Paar können wir auch in $Q_1 \cup Q_2$ beibehalten.

Ist $p \in Q_1' \cap Q_2'$ und gibt es ein $p \geqslant q = [Q_1'] \cup [Q_2'] - Q_1' \cap Q_2'$, so verfahren wir wie oben.

Ist $q \in Q_1' \cap Q_2'$, dann gibt es ein Paar $q_i \in Q_i'$ mit

$$|q_1| = |q_2| = |q|.$$

Ferner gibt es ein Paar $t^i = (\varphi^i, a_1^i)$ für $q_i (i = 1, 2)$. Anstelle von q betrachten wir dasjenige Element $q' \in Q_1'$, $q' \leqslant q$ mit $|\overline{q'}| = |\overline{q_1}|$ und $|q'| = \bigcup_{z < q'} |z| ((z \in N(Q_1))$, welches es nach Definition gibt. Wir verwenden das Paar t^1 für q' und müssen nur noch für die Wurzeln w_2, die nicht in $W(q_1)$ liegen, aber in $W(q')$, die Abbildung φ erklären. Wir bilden die Gesamtheit aller Wurzeln $v \in W(q_1)$ mit $|v'|_A = |w_2|_A$ und $v \leqslant w_2$. Dann setzen wir $\varphi(w_2) = \varphi^1 \cap v$. Es ist $\varphi(w_2)$ eine Wurzel, denn $\cap\, v$ ist eine Wurzel in q_1, da $| \cap v|_A = |w_2|_A$ ein Wurzelträger in q_1 ist. Andernfalls wäre q_2 keine Wurzel in $Q_1 \cup Q_2$. Diese Abbildung ist anordnungserhaltend, da φ^1 es war. Es gehen offene Atome wieder in offene Atome über, weil die Atomträger die gleichen geblieben sind. Also ist auch das neue dualisierbar. Eigenschaft (2a) wird offenbar durch unsere Konstruktionen nicht berührt. Wir setzen $P^i = \cup\, Q_i$ für alle schwachen injektiven Fortsetzungen. Das ist die eindeutig bestimmte Struktur P^i.

Satz 3.1 *b*. — *Zu jedem* P *gibt es ein eindeutig bestimmtes* P^p.

Beweis. — Wir können den obigen Beweis Wort für Wort dualisieren. Wir verzichten aber darauf und beweisen Satz 3.1 b, indem wir auf Formel (5) aus dem Korollar von Satz 4.1 zurückgreifen. Da es zu P ein eindeutig bestimmtes $\widetilde{\tilde{P}^i}$ gibt, existiert

$$P^p = \widetilde{(\tilde{P})^i}.$$

4. Fortsetzungen von $\tilde{P}$. — Das Hauptergebnis dieser Arbeit ist in Satz 4.1 zusammengefaßt und lautet:

$$\tilde{P}^p = \widetilde{P^i}, \tag{1}$$
$$\tilde{P}^i = \widetilde{P^p}. \tag{2}$$

Hierdurch werden die Fortsetzungs- und die Dualitätstheorie miteinander verbunden. Es ist (2) eine Folge von (1), ebenso umgekehrt: Schreiben wir (1) für $\tilde{P}$ anstelle von P auf und benutzen Satz 2.1, dann erhalten wir:

$$P^p = \widetilde{\tilde{P}^i}.$$

Jetzt dualisieren wir diese Gleichung, verwenden noch einmal Satz 2.1 und erhalten (2). Ebenso schließt man umgekehrt.

In diesem Abschnitt soll (1) bewiesen werden. Der Beweis ist jetzt nicht mehr schwer, er besteht in einer konsequenten Anwendung der Definitionen 3.1 *a*, *b* und Definition 2.1. Die Definitionen 3.1 *a*, *b* sind schon so formuliert, daß alles sehr einfach wird. Wir beweisen zunächst die schwächere Form von (1), nämlich

$$\widetilde{P^i} \supseteq \tilde{P}^p. \tag{3}$$

Ist $\tilde{\nu} \in OW(\tilde{P}^p)$, so gibt es ein $\tilde{w} \in OW(\tilde{P}^p)\tilde{\nu} \leqslant \tilde{w}$ und ein $\tilde{w}_1 \in OW(\tilde{P})$ sowie einen dualisierbaren Epimorphismus

$$\tilde{\varphi} : K(\tilde{w}) \to K(\tilde{w}_1).$$

Da $\tilde{w}_1 \in P'$ ist, ist wegen der Dualitätskonstruktion und da (3*b*), in Definition 3.1*b* das duale Gegenstück zu (3*a*) ist $\tilde{w} \in [P^i]$ und $\tilde{\nu} \in P^{i'}$. Da aber andererseits jedes $a \in P^{i'}$ ein $\tilde{\nu} \in OW(\widetilde{P^i})$ ist, und da es wegen Definition 3.1 *a* einen dualisierbaren Epimorphismus

$$\varphi : W(a') \to W(a_1)$$

für ein $a = \tilde{w} \geqslant \tilde{\nu}$, $\tilde{w} \in OW(\widetilde{P^i})$ gibt, für $a_1 = \tilde{w}_1 \in OW(\tilde{P})$, ist $\widetilde{P^i} \subseteq \tilde{P}^p$. Die Forderung (3 *b*) für $\tilde{P}^p$ ist wieder erfüllt, da (3 *a*) für P^i richtig war. Also gilt:

Satz 4.1. — *Es ist*

$$(1) \qquad \tilde{\mathrm{P}}^p = \widetilde{\mathrm{P}^i}$$

$$(2) \qquad \tilde{\mathrm{P}}^i = \widetilde{\mathrm{P}^p}.$$

Korollar. — *Die injektive Fortsetzung von* P *läßt sich durch Dualisierung sowie den projektiven Fortsetzungsprozeß wie folgt beschreiben:*

$$(4) \qquad \mathrm{P}^i = \widetilde{\tilde{\mathrm{P}}^p}$$

und umgekehrt

$$(5) \qquad \mathrm{P}^p = \widetilde{\tilde{\mathrm{P}}^i}.$$

5. Dimensionstheorie. — Die Theorie, welche wir in den vorangehenden Abschnitten behandelt haben, bekommt erst dadurch ihre Bedeutung, daß sie mit den Beispielen aus der Einleitung in einen sinnvollen Zusammenhang gebracht wird. Dieser Abschnitt ist dem Beweis der Tatsache gewidmet, daß $\mathrm{P}^i = \mathrm{D}_r$ ist. Wir zeigen also, daß durch unser Verfahren der injektiven Fortsetzung gerade die $\geqslant r$-dimensionalen Mengen im R^n gewonnen werden können. Der Beweis wird in zwei Teile zerfallen: Zunächst muß man zeigen, daß es zu jedem $a \in \mathrm{P}_r^{i'}$ immer eine Abbildung

$$f : |a| \to |a_1|,$$

$a_1 \in \mathrm{P}_r$ gibt, die wesentlich ist. Dann beweisen wir die Umkehrung: Zu jedem $a \in \mathrm{D}_r'$ gibt es immer einen dualisierbaren Epimorphismus

$$\varphi : \mathrm{W}(a) \to \mathrm{W}(a_1)$$

für geeignete $a_1 \in \mathrm{P}_r'$.

Im Folgenden werden wir uns die Freiheit nehmen, des Öfteren a anstelle von $|a|$ zu schreiben ($a \in \mathrm{D}_r'$ oder $\mathrm{P}_r^{i'}$), da die Normabbildung auf diesem Bereich eindeutig umkehrbar ist: Aus $|a_1| = |a_2|$ folgt $a_1 = a_2$.

Zu Beginn erinnern wir uns noch einmal an die Definition der Atome in P_r bzw. D_r:

Ein Atom $z \in \mathrm{N}(\mathrm{P}_r)$ wird durch ein Ideal (z) beschrieben, sodaß

(1) $|z| = |(z)|_{\mathrm{A}} \in \mathrm{R}^n$ ist.

(2 *a*) Für jede Umgebung $\mathrm{U}(|z|)$ und jedes $a \in (z)$ ist $\mathrm{U}(|z|) \cap a \in (z)$.

(2 *b*) Es gibt ein Simplex $\sigma^r \in P'_r$, sodaß $a \leqslant \sigma^r$ für alle hinreichend kleinen $a \in (z)$.

(3) Es ist (z) maximal mit den Eigenschaften (1), (2).

Ein Atom $z \in N(D_r)$ wird ebenfalls durch ein Ideal (z) beschrieben, welches (1), (2 *a*) und (3) erfüllt. Die Bedingung (2 *b*) ist fortgefallen.

Wir bemerken an der Stelle, daß nicht jedes Atom $z < a$, $a \in D'_r$ einen r-dimensionalen Punkt beschreibt. Es kann $|z|$ auch Häufungspunkt von $\geqslant r$-dimensionalen Punkten in a sein. Ist $x \in R^n$, $x \leqslant |a|$ ein solcher Punkt, so ist ein Atom $z < a$ mit $|z| = x$ wegen (2*a*) vorhanden. Man kann also $|\bar{a}|$ als die Menge aller Häufungspunkte von $\geqslant r$-dimensionalen Punkten beschreiben. Wenn wir für ein $X \in D'_r X_1$ diese Menge aller $|z|$, $|z| \in X$ nennen, dann ist X_1 abgeschlossen in X.

Wir sammeln jetzt eine Reihe von Tatsachen über D_r:

(5.1) Sei f: $X \to Y$ eine stetige Abbildung, $X \in D'_r$, $Y \in P'_r$ und $Y_1 \subseteq Y$ in P'_r, dann gibt es immer eine abnehmende Folge von Wurzelträgern $|w_i|_A$, sodaß $Y_1 = U|w_i|_A$ und sodaß es zu jedem w_i ein $v_i \in W(X)$ mit $fv_i = w_i$ gibt.

Der Beweis ist offenbar trivial, denn die Punkte in Y und deren abzählbare Vereinigungsmengen liefern ein solches System von Wurzelträgern. Allerdings darf man nicht fordern, daß die Menge der w_i abzählbar ist.

Der Sinn von (5.1) ist, zu zeigen, daß jede Abbildung f: $X \to Y$ Anlass zu einem dualisierbaren Epimorphismus gibt, in der Art, wie wir sie in (3.1) bereits angedeutet haben.

Wir kommen auf unsere Untersuchung bezüglich der Atome zurück:

(5.2) Ist $X \in D'_r$, so ist X_1 (die Menge aller Atomträger in X) ebenfalls in D'_r enthalten.

Beweis. — Da X_1 abgeschlossen ist, ist $Y = X - X_1$ offen. Wäre $\dim X_1 < r$, dann wäre $\dim \mathrm{Rd}\, Y < r$, da $\mathrm{Rd}\, Y \leqslant X_1$ ist. Weiterhin ist $\mathrm{Rd}\, Y$ abgeschlossen in $Y_1 = Y \cup \mathrm{Rd}\, Y$ und Y offen in Y_1 sowie Y_1 abgeschlossen in X. Da Y keinen $\geqslant r$-dimensionalen Punkt in X, also erst recht nicht in Y enthält, ist $\dim Y < r$. Jetzt können wir den Summensatz der Dimensionstheorie verwenden und finden:

$$\dim Y \cup \mathrm{Rd}\, Y = \dim Y_1 < r$$

und

$$\dim X = \dim Y_1 \cup X_1 < r$$

entgegen unserer Voraussetzung, daß $X \in |D'_r|$ ist.

Wir bemerken, daß (5.2) falsch wird, wenn wir anstelle der Atomträger die $\geqslant r$-dimensionalen Punkte nehmen. Bekanntlich gibt es Mengen X, mit $\dim X \geqslant r$ sodaß die Menge aller $\geqslant r$-dimensionalen Punkte eine Dimension $< r$ hat.

Ist $a_1 \in P'_r$ und I^r ein r-dimensionaler Würfel, so findet man immer eine Abbildung h: $|a_1| \to I^r$, die wesentlich ist. Wir nehmen ein Simplex $\sigma^r \subset a_1$ und retrahieren $|a_1|$ auf σ^r. Anschließend bilden wir σ^r homöomorph auf I^r ab. Weiter unten werden wir einer solchen Abbildung h einen dualisierbaren Epimorphismus h: $W(a_1) \to W(I^r)$ zuordnen.

Ist f: $|a| \to |a_1|$, $a \in D^r$ eine in allen Punkten von $|a_1|$ wesentliche Abbildung, so kann man $g = hf$ bilden und wir behaupten, daß g wesentlich ist. Wäre g im Punkte $x \in I^r$ nicht wesentlich, so wäre es auch in dem eindeutig bestimmten Punkte $h^{-1}(x) \in \sigma^r$ nicht wesentlich gewesen, entgegen unserer Voraussetzung. Diese Überlegungen fassen wir zu der einen Behauptung zusammen:

(5.3) Wir können uns bei unseren Betrachtungen auf $a_1 = I^r$ beschränken.

(5.4) Ist

$$f\colon W(a) \to W(a_1)$$

ein dualisierbarer Epimorphismus ($a \in P^{i'}_r$, $a_1 \in P'_r$), so gehen offene Wurzeln in offene Wurzeln über und umgekehrt gibt es in der Menge $f^{-1}(w_0)$, $w_0 \in OW(a_1)$ eine offene Wurzel $w'_0 \in OW(a)$.

Beweis. — Zunächst wird bewiesen, daß offene Atome z_0 in offene Atome übergehen:

Da $|z_0| \in R^n$ ein Punkt und f ein dualisierbarer Epimorphismus ist, ist auch $|fz_0| \in R^n$. Das von ihm erzeugte offene Atom nennen wir z'_0. Da f dualisierbar ist, gibt es einen Monomorphismus φ: $\hat{z}'_0 \to \hat{z}_0$, sodaß $f\varphi =$ Identität und $z_0 \in \varphi(\hat{z}'_0)$ ist. Hierbei haben wir $\hat{z}_0 = \{w_0 | w_0 \in OW(a_1),\ w_0 \leqslant z_0\}$ und entsprechend für z_0 gesetzt. Daraus folgt aber $\varphi z'_0 = z_0$ und $fz_0 = z'_0$.

Sei nun $w_0 \in \mathrm{OW}(a)$. Wegen der Definition der offenen Wurzeln ist:

$$w_0 = \bigcap_{z_0 \geqslant w_0} (z_0).$$

Es ist $|fw_0|_A = \cap\, |fz_0|_A$. Ist $w_0 \leqslant z_0$. so ist auch $fw_0 \leqslant fz_0$, also ist $fw_0 \leqslant f(z_0)$ und da $\cap\, (fz_0)$ offen und $|fw_0|_A = \cap\, |(fz_0)|_A$ ist, folgt, daß fw_0 offen ist.

Ist umgekehrt $w_1 \in \mathrm{OW}(a_1) \cap f\mathrm{OW}(a)$, $X \geqslant |a|$, $|f|X = |w_1|_A$, so ist die von X bestimmte offene Wurzel w_X die kleinste, mit dem Träger X. Es ist $|fw_X|_A = |w_1|_A$, aber da fw_X offen ist, muß $fw_X = w_1$ sein. Damit ist (5.4) bewiesen.

Wir erinnern uns an die Behauptung (3.1), wo die Umkehrung zu (5.4) bewiesen wurde.

Ist

$$f: \quad \mathrm{W}(a) \to \mathrm{W}(a_1)$$

gegeben, so ist durch $|f|$ eine Abbildung von $|\bar{a}|$ auf $|\bar{a}_1|$ bestimmt wenn $|a| = \bigcup_{z<a} |z|$ ist. Das Umgekehrte ist allerdings nicht der Fall. Der Kenntnis von einem $|f|$ liefert uns hier kein eindeutig bestimmtes f.

Wir zeigen zunächst, daß, wenn f ein dualisierbarer Epimorphismus ist, $|f|$ eine wesentliche Abbildung ist. Damit hätten wir dann die erste Hälfte unseres Zieles erreicht, nämlich wir hätten bewiesen, daß $\mathrm{P}_r^i \subseteq \mathrm{D}_r$ ist.

(5.5) Es ist $|f|$ stetig.

Beweis. — Man kann sehr einfach zeigen, daß $|f|$ in der Topologie $\mathfrak{t}_{\mathrm{P}_r}$ stetig ist: Ist X offen in a_1, so erzeugt jedes Atom $z \in \mathrm{N}(a)$, $|fz| \in X$ in f^{-1} X, also ist auch f^{-1} X offen in $\mathfrak{t}_{p_r^i}$. Da f dualisierbar ist gibt es einen Monomorphismus

$$\varphi: \quad f\mathrm{OW}(a) \to \mathrm{OW}(a),$$

sodaß $f\varphi$ die Identität ist. Es ist φ ein Isomorphismus von $f\mathrm{OW}(a)_1$ auf $\varphi f\mathrm{OW}(a)$. Ist X offen in $|\varphi f\mathrm{OW}(a)|$, so ist $X = Y \cap |\varphi f\mathrm{OW}(a)|$, wobei Y offen in a ist (alles rel. $\mathfrak{t}_{p_r^i}$). Nun ist der Ubergang von $\mathfrak{t}$ zu $\mathfrak{p}$ in (1.4) ein, im Sinne der Tangentialstrukturen invarianter Prozeß, d.h. sind P und Q isomorph, so sind $\mathfrak{t}_p$ und $\mathfrak{t}_Q$ und $\mathfrak{p}_p$ und $\mathfrak{p}_Q$ isomorph. Das aber heißt, daß offene (rel. $\mathfrak{p}_{P_r}$) Mengen in $|a_1|$ in offene Mengen in P_r^i (rel. $\mathfrak{p}_{P_r^i}$) übergehen.

(5.6) Es ist $|f|$ wesentlich, wobei wir $a_1 = I^r$ setzen.

Beweis. — Wäre $|f|$ an allen Stellen unwesentlich, dann sei S^{r-1} ein $(r-1)$ — Simplex, welches I^r in zwei Teile, I_1^r und I_2^r zerlegt. Nun kann man ein Teilsimplex $T^{r-1} \subset S^{r-1}$ und ein zu $|f|$ beliebig benachbartes g, sowie eine Umgebung $U(T)$ rel. I_1^r finden, sodaß $g(|a|) \subset I^r - U$ und sodaß eine Umgebung $V(T)$ rel. I_2^r existiert, sodaß $|f| = g$ auf $|f|^{-1}\ V(T)$ ist. Ist $x \in |a|\ y = |f|\ x \in T^{r-1}$ und wie üblich, w_x das entsprechende offen Atom mit $|w_x|_A = x$, so ist $|f||b|$ $(b \in w_x)$ nicht offen in I^r. Sei $v \in W(I^r)$, $v \in W(I_1^r)$, so ist kein $v_1 \in W(a)$ mit $|v_1|_A = x$, $fv_1 = v$ vorhanden, also kann fw_x nicht offen gewesen sein, entgegen unseren Voraussetzungen.

Sei $|f|$ eine stetige, wesentliche Abbildung:

$$|f| : |a| \rightarrow |a_1|,$$

so erklären wir eine Abbildung

$$f : W(a) \rightarrow W(a_1)$$

$a \in D_r'$, $a_1 \in P_r'$ in folgender Weise:

Ist $w \in W(a) - OW(a)$, so bilden wir die Menge

$$|f|(w) = \{|f||b| \mid b \in w\}.$$

Es ist zwar $|f|(w)$ kein Ideal in I^r, also schon garnicht eine Wurzel, aber es ist $|f|(w)$ ein Ideal im Bereich aller Teilmengen von I^r. Sei $z \in N(P_r)$ ein Atom mit der folgenden Eigenschaft:

(*) Zu jedem $c \in (z)$ gibt es ein $c_1 \in |f|(w)$, mit $\bar{c} \cap |c_1| \neq \emptyset$. (Der Querstrich bedeutet hier die abgeschlossene Hülle).

Wir setzen $fw = \cap\,(z)$. Da w eine Wurzel war, ist auch fw eine Wurzel mit $|fw|_A = |f||w|_A$. Ist $w \in OW(a)$, so setzen wir fw gleich derjenigen offenen Wurzel, die durch $|f||w|_A$ bestimmt wird.

Wir behaupten:

(5.7) Es ist f ein dualisierbarer Epimorphismus von $W(a)$ auf $W(a_1)$.

Beweis. — Wir können wegen (5.3) für unsere Zwecke $a_1 = I^r$ setzen. Zunächst ist sicherlich f anordnungserhaltend, da die offenen Wurzeln die kleinsten mit festem Träger sind. Ist $X \subset I^r$ ein geeigneter Wurzelträger, so gibt es wegen (5.1) auch ein $Y \subset |a|$, $fY = X$, welches Wurzelträger ist. Ist $X \subset I^r$ und erzeugt ein Atom $z \in N(P_r)$ in X, so erzeugt jedes $f^{-1}z$ in $|f|^{-1}X$ wegen unserer Konstruktion. Sei also jetzt $w \in W(I^r) - OW(I^r)$ eine Wurzel, so nehmen wir ein $X \subset |a|$, mit $fX = |w|_A$ und konstruieren die folgende Wurzel $v \in W(a)$: Wir nehmen alle $z \in N(a)$, $(z) \supseteq f^{-1}w = \{ b | |f| |b| \in v\}$ und bilden $v = \cap (z)$. Ist $v \in W(a) - OW(a)$, so ist $fv = w$.

Wir müssen zeigen, daß man v so bestimmen kann, daß $v \in W(a) - OW(a)$ ist. Ist v offen, so behaupten wir, daß man immer aus jedem hinreichend kleinen $b \in w$ mindestens einen Punkt x fortlassen kann, sodaß $|f||b| = |f|(|b| - x)$ ist. Ist das gezeigt, so wäre diese Wurzel v_1 gefunden, sodaß $fv_1 = w$ und $v_1 \in W(a) - OW(a)$ ist. Wir nehmen also an, daß das nicht der Fall ist, was besagt, daß die Abbildung $|f|$ auf allen hinreichend kleinen $|b| \in v$ eineindeutig ist. Da w nicht offen war, ist für alle $c \in w$, die hinreichend klein sind, jeder Punkt x von $|w|_A$ Randpunkt von $|c|$. Es gibt nun nur einen Urbildpunkt y mit $|f|y = x$, $y \in |v|_A$. Nun ist aber v offen, d.h. y ist kein Randpunkt in y. Man kann jetzt leicht für beliebiges $\varepsilon > 0$ eine Abbildung g finden, $\varphi(|f|, g) < \varepsilon$, sodaß eine offene Menge U in I^r mit $x \in U$ vom Bild von einer Umgebung V von y freibleibt. Wählte man V so, was ohne Weiteres möglich ist, daß $|f|$ V wesentlich war, so ist das also ein Widerspruch. Also ist f ein Epimorphismus. Wegen (3.1) und unserer Definition von f ist f dualisierbar. Damit ist (5.7) und der folgende Satz bewiesen:

Satz 5.1. — *Ist* $t_{p_r^i}$ *eine* (T) *Topologie* (s. 1.2), *so ist:*

$$P_r^i = D_r.$$

Wir müssen nur noch etwas über das Axiom (2*a*) in Definition 3.1 *a* sagen:

Ist $|a| = |I^r| = |a_1|$, so kann man natürlich für f die Identität nehmen, da in I^r, wie bereits mehrfach erwähnt, jede r-dimensionale Teilmenge X eine offene (rel. I^r) enthält.

Offenbar ist die Forderung bezüglich der Topologie $t_{p_r^i}$ nötig, um auf D^r zu stoßen. Anderenfalls würde man zwar topologische Räume $a \in P_r^{i'}$ vorfinden, deren Punkte im R^n liegen, deren Topologien aber von der Topologie t_{p_r} verschieden sind.

P. S. Alexandroff hat bemerkt, daß dieser Satz Anlaß zu einem axiomatischen Aufbau der Dimensionstheorie geben könnte. Wir wollen hier auf diese Frage nicht näher eingehen, sondern sie an anderer Stelle ausführlich behandeln.

6. Differenzierbare Mannigfaltigkeiten. — Unter einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit V^r verstehen wir im Folgenden eine stetig differenzierbar in den R^n eingebettete Mannigfaltigkeit der Dimension r. Zu jedem $x \in V^r$ gibt es also eine eindeutig bestimmte Tangentialebene E^r_x, die stetig mit x variiert. In der Einleitung wurden die Atome in M_r definiert. Wir beziehen uns auf diese Definition. In diesem Abschnitt wird der vorläufige Schlußstein auf unser Gebäude gesetzt und der Satz 6.1 bewiesen:

Satz 6.1. — *Es ist*

$$(1) \qquad M_r = P^p_r.$$

Der Bereich der Wurzelträger ist atomar, die Atome sind die Punkte des R^n. Im Folgenden haben wir Abbildungen

$$f\colon\ K(w_0) \to K(w_1)$$

zu untersuchen, wo $w_1 \in OW(P_r)$ und $w_0 \in OW(P^p_r)$ oder aus $OW(M_r)$ ist. Wir können immer w_1 als eine offene Wurzel annehmen die, einen Punkt $x \in R^n$ zum Träger hat, denn zu jedem w_1 gibt es ein w'_1 mit $w_1 \leqslant w'_1$ und $|w'_1|_A = x$. Ebenso gibt es in w_0 eine Wurzel $w'_0 \geqslant w_0$, $|w'_0| = y \in R^n$, sodaß wir uns immer ohne Beschränkung der Allgemeinheit auf offene Wurzeln w_0, w_1 beschränken können, die Punkte zum Träger haben.

Wir beweisen (1) in zwei Teilen. Zunächst zeigen wir

$$(2) \qquad P^p_r \supseteq M_r.$$

Sind also $w_0 \in OW(M_r)$, $w_1 \in OW(P_r)$ zwei Wurzeln mit Punkten als Träger, dann müssen wir einen Epimorphismus

$$f\colon\ K(w_0) \to K(w_1)$$

finden, der dualisierbar ist. Wir nehmen zunächst

$$|w_0|_A = |w_1|_A = x$$

an. Wegen der Homogenität des R^n kann man diese Annahme offenbar ohne Beschränkung der Allgemeinheit machen.

Ist I^r ein Würfel mit Zentrum x, so betrachten wir alle Mannigfaltigkeiten V^r und bezeichnen sie mit (I^r, x), die den folgenden Bedingungen genügen:

(1) Ist $V^r \in (I^r, x)$, so hat V^r die von I^r aufgespannte Ebene E^r_x zur Tangentialebene an der Stelle x.

(2) Die senkrechte Parallelprojektion p_V von V^r in E^r_x ist eine topologische Abbildung in I^r.

Jede Mannigfaltigkeit, die (1) erfüllt, enthält eine Mannigfaltigkeit, die (2) erfüllt. Ist $V^r_i \in (I^r_i, x)$ $(i = 1{,}2)$, so kann es durchaus ein $W \in M'_r$, $W \leqslant V^r_1 \cap V^r_2$ geben. Wir bemerken, daß es zu diesem W eine Abbildung $p_1 = p_{V_1}$ und eine Abbildung $p_2 = p_{V_2}$ in I^r_1 *bzw.* I^r_2 gibt. Liegt W in einem $V \in (I^r, x)$ und ist ein Atom $z \in N(M_r)$, $|z| = x$, $z < W$ vorhanden, dann gibt es nur ein solches V, denn die Tangentialebene an W im Punkte x ist eindeutig bestimmt.

Sei jetzt $\varkappa \in K(w_0)$. Wir zerlegen den Träger in soviele W mit der zuletzt genannten Eigenschaft, wie es gibt und bilden die entsprechenden p_V. Ist in U kein Atom z, $|z| = x$ vorhanden, so kann es mehrere $W \supseteq U$ geben, die es enthalten und dementsprechend wird U in mehrere I^r abgebildet. Ist ein $|a| \leqslant |\varkappa|_A$ und $a \in P'_r$, so bilden wir den Teil a überhaupt nicht ab, sondern lassen ihn fest. Da die Abbildung von $|\varkappa|_A$, die wir so erklärt haben, im Kleinen topologisch ist, werden Wurzeln in $|\varkappa|_A$ auch eindeutig in Wurzeln abgebildet und wir bekommen im Ganzen eine Abbildung von $\varkappa$ auf eine Kowurzel ν in (w_1). Hat $\varkappa$ einen Träger, der eine offene Menge im R^n enthält, so ist offenbar dasselbe für $\nu = f\varkappa$ richtig. Ist also $\varkappa$ irgend eine Kowurzel in $K(w_0)$, so finden wir eine Kowurzel $\varkappa_1 \geqslant \varkappa$ mit offenem Träger und es wird durch f^{-1}:

$$\widehat{f(\varkappa_1)} = \{\gamma | \gamma \leqslant f(\varkappa_1),\ \gamma \in fK(w_1)\}$$

in $\hat{\varkappa}_1$ abgebildet. Da f^{-1} ein Monomorphismus ist, ist

(6.1) f dualisierbar.

Ist ν irgend eine Kowurzel in $K(w_1)$, so nehmen wir zu jedem $X \leqslant |\nu|_A$, welches in einem I^r liegt, eine Mannigfaltigkeit $V^r_2 \in (I^r, x)$ und das Urbild $p_V^{-1}X$. Diejenigen Teile von $|\nu|_A$, die zu keinem solchen V gehören, lassen wir fort. Mann kann natürlich auch $V^r = I^r$ setzen. Dadurch bekommen wir ein Urbild von ν heraus, welches, da diese Umkehrabbildung im Kleinen topologisch ist, eine Kowurzel ν wird mit $f\nu = \varkappa$, also:

6.2 Es ist f eine epimorphe Abbildung.

Sind $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ zwei Kowurzeln in $K(w_0)$ und $\varkappa_1 \leqslant \varkappa_2$, dann ist natürlich auch $f\varkappa_1 \leqslant f\varkappa_2$. Ebenfalls sieht man sofort, daß $|f\varkappa|_A = |f|\,|\varkappa|_A$ ist, wenn man $|f|$ in naheliegenderweise so erklärt, wie wir es oben getan haben. Wir waren ja so vorgegangen, daß wir erst $|f|$ und dann erst f erklärten. Daraus folgt also:

(6.3) Es ist f eine homomorphe Abbildung von $K(w_0)$ in $K(w_1)$. Die Behauptungen (6.1), (6.2) und (6.3) zusammen liefern:

(6.4) Es ist f eine dualisierbare, epimorphe Abbildung von $K(w_0)$ auf $K(w_1)$ und infolgedessen

$$P_r^p \supseteq M_r. \tag{2}$$

Jetzt gehen wir dazu über, die Umkehrung zu beweisen.

Wieder ist $w_1 \in OW(P_r)$, $|w_1|_A \in R^n$, w_0 ist aber jetzt in $OW(P_r^p)$ und $|w_0|_A \in R^n$. Es werden von dem offenen Atom w_0 in der nicht normalisierten Struktur $N_A^{-1}P_r^p$ unter anderem auch die differenzierbaren Mannigfaltigkeiten, also vor allem die Würfel I^r mit Zentren $x = |w_0|_A$ erzeugt. Wir setzen voraus, es gäbe einen dualisierbaren Epimorphismus

$$f\colon K(w_0) \to K(w_1).$$

Aus der Dualisierbarkeit von f folgt, daß die offenen Kowurzeln in $K(w_1)$ monomorph in gewisse offene Kowurzeln von $K(w_0)$ abgebildet werden. Den offenen Kowurzeln entsprechen aber die Elemente von P_r' *bzw.* $P_r^{p'}$. Sei also φ ein solcher Monomorphismus, der f dualisiert und einen Würfel I^r in ein Element $a \in P_r^{p'}$ abbildet. Da φ eineindeutig und, wie man sich leicht überlegt, auch beiderseitig stetig ist, ist in jedem $a \in P_r^{p'}$ eine topologische Mannigfaltigkeit enthalten. Also ist $P_r^{p'}$ sicher in der Struktur T_r aller r-dimensionalen topologischen Mannigfaltigkeiten im R^n enthalten. Es ist

$$P_r \subset M_r \subset P_r^p \subset T_r.$$

Wir zeigen jetzt, daß diese Mannigfaltigkeiten sogar differenzierbar sind. Wir wollen hier noch einmal auf den Beweis (6.4) zurückgreifen. Die Abbildung f vermittelt natürlich insbesonders eine Abbildung

$$f\colon \{z \,|\, |z| = |w_0|_A\} \to \{z_1 \,|\, |z_1| = |w_1|_A\}.$$

Im Falle von (6.4) war $|w_0|_A = |w_1| = x \in R^n$ und wir können das Ideal

$$D = D(z_1) = \bigcap_{fz = z_1} (z)$$

betrachten. Die fragliche Abbildung f wird auf den Atomen einfach durch die entsprechenden Ideale erklärt. Wir haben sie in der Einleitung schon erwähnt. Dieses Ideal D hat nun die folgenden Eigenschaften:

(D1) Ist $z_2 \in N(P_r)$, $(z_2) \supseteq D$, dann ist $z_1 = z_2$.

(D2) Das Ideal D wird von Elementen a erzeugt, deren Träger offen rel. x ist (d.h. es ist $|\bar{a}| - x$ offen).

(D3) Es ist D minimal mit den Eigenschaften (1) und (2).

Diese Eigenschaften sind offensichtlich alle erfüllt. Wir interessieren uns sehr viel mehr dafür, daß diese Eigenschaften sogar $D(z_1)$ eindeutig bestimmen, denn man kann leicht eine Konstruktionsvorschrift für $D(z_1)$ angeben und durch Durchschnittsbildung aller Ideale, die (D1) und (D2) erfüllen, die Eindeutigkeit von $D(z_1)$ beweisen. Diese Konstruktionsvorschrift lautet so, daß wir für die erzeugenden Elemente, die in (D2) genannt werden, rel. x offene Elemente nehmen, die die Vereinigunsgmenge von lauter Elementen $a \in P'_r$ sind, zu denen es ein Atom $z_2 < a$, $|z_2| = x$ gibt und ein I^r mit $a \subset I^r$.

Ist nun $z_2 \in N(T_r)$ und $(z_2) \supseteq D(z_1)$, dann ist jede Mannigfaltigkeit $V \in T'_r$ (also jede nicht notwendig differenzierbare, aber topologische r-dimensionale Mannigfaltigkeit) an der Stelle x differenzierbar. Auf die stetige Differenzierbarkeit werden wir noch näher eingehen.

Wir behandeln zunächst den Spezialfall, daß f auf den offenen Wurzeln von $K(P_r)$ die Identität ist und daß infolgedessen $|w_0|_A = |w_1|_A = x$ ist, also die Dinge so liegen wie bei der Abbildung f aus (6.3).

Entsprechend zu unserem $D(z_1)$ gibt es jetzt auch ein Ideal $D'(z_1)$, welches so erklärt ist, daß jetzt alle $z \in N(P_r^p)$ zur

Konkurrenz zugelassen werden. Es ist $D'(z_1) \leqslant D(z_1)$. Könnten wir zeigen, daß immer

$$(3) \qquad D'(z_1) = D(z_1)$$

ist, so wäre wegen obiger Überlegung dieser Spezialfall erledigt.

Es ist (3) bewiessen, wenn wir die obigen drei Eigenschaften für D' nachgewiesen haben:

Zu (D1): Wäre $z_2 \in N(P_r)$, $(z_2) \supseteq D'(z_1)$, dann wäre $f(z_2) = z_1$ und da f auf P_r konstant ist, $z_1 = z_2$.

Zu (D2): Wäre (D2) nicht erfüllt, so gibt es ein Erzeugendensystem $\{a_i \vee b_i\}$, wobei $\{a_i\}$ das in (D2) genannte Erzeugendensystem von $D(z_1)$ ist. Da jedes $a_i \vee b_i$ Träger einer Kowurzel in P_r ist, muß $b_i \in P'_r$ sein, d.h., es kann nur ein $z < b_i$ für alle b_i geben, nämlich $z = z_1$. Daraus folgt, daß $b_i \leqslant a_i$ und $a_i \vee b_i = a_i$ ist.

Zu (D3): Das Axiom (D3) ist für $D'(z_1)$ erfüllt, da es bereits für das größere $D(z_1)$ erfüllt war.

Da mit ist (3) bewiesen.

Um diesen Spezialfall, den wir bereits bewiesen haben, auf den allgemeinen Fall zu erweitern, benutzen wir Definition 3.1 b (2b): Da $|w_0|_A$, $|w_1|_A$ beides Punkte sind, sind ihre Träger isomorph. Zu w_0 gibt es eine Wurzel $w'_0 \in OW(P_r)$, die den Träger $|w_0|_A$ hat und die zu w_1 isomorph ist. Durch f wird dieses w'_0 auf w_1 isomorph abgebildet. Durch f wird also eine topologische Abbildung des R^n auf sich vermittelt, bei welcher w'_0 auf w_1, also insbesondere $|w'_0|_A$ auf $|w_1|_A$ abgebildet wird. Damit ist die Möglichkeit gegeben, w'_0 und w_1 zu identifizieren und wir haben den allgemeisten Fall auf den früher behandelten Spezialfall zurückgeführt.

Jetzt haben wir noch die Frage der stetigen Differenzierbarkeit zu behandeln:

Sei V^r eine Mannigfaltigkeit in $P_r^{p'}$ und V_D^r eine in V^r dichte Menge, die nirgends offen ist. Es ist V_D^r Träger einer Wurzel $v \in OW(P_r^p)$. Wegen Definition 3.1b muß es eine Wurzel $w \in OW(P)$ und einen dualisierbaren Epimorphismus $f: K(v) \to K(w)$ geben. Man kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $v \in [OW(P_r^p)]$ ist. Man kann eine polyedrale Mannigfaltigkeit $W^r \in P'_r$ finden, die zu V^r topologisch äquivalent ist und eine Bildmenge $fV_D^r = W_D^r$, die die gleichen Eigenschaften wie V_D^r in V^r um in W^r hat. Sei $\sigma \subset W^r$ ein Simplex und $x \in V_D^r$, sodaß $y = fx$ innerer Punkt in W_D^r ist. Durch eine Abbildung $\varphi \in Df$ (s. Definition der dualisierbaren Abbildung am Ende von Abschnitt 2) wird σ isomorph auf eine Umgebung $U(x) \subset V^r$ abgebildet. Wegen Definition 3.1*b* (2*b*) ist dieses auf die in D(2) beschriebenen Erzeugendensysteme a festsetzbar. Ist nun in $\{y_i\}$ eine gegen y konvergierende Folge, so betrachten wir zu jedem y_i ein Erzeugendensystem $\{a_j^i\}$ für ein Atom z_i, $|z_i| = y_i$ von $D(z_i)$. Wenn nun eine Folge a_y für festes y gegen ein $a_j \in D(z)$ $(|z|) = y$ konvergiert, so ist für die Bilder unter f dasselbe richtig. Das beweist aber die stetige Differenzierbarkeit von V^r, da damit auch die Tangentialebenen an den Punkten x_i gegen die Tangentialebenen im Punkte x konvergiert.

LITERATUR

[1] F. W. Bauer, Über Fortsetzungen von Homologiestrukturen, *Math. Ann. Bd.*, 135 S. 93-114 (1958).

[2] F. W. Bauer, Spezielle Homologiestrukturen, *Math. Ann. Bd.* 136 S. 348-364 (1958).

[3] W. Hurewicz et H. Wallman, Dimension Theory, Princeton Univ. Press (1948).