ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

GUSTAVE CHOQUET

Sur les G_δ de capacité nulle

Annales de l'institut Fourier, tome 9 (1959), p. 103-109
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1959__9__103_0>

SUR LES G_δ DE CAPACITÉ NULLE [1]

par Gustave CHOQUET, Paris.

Pour toute application semi-continue inférieurement f d'un espace topologique dans la droite achevée $\overline{R}$, l'ensemble I_f des x tels que $f(x) = +\infty$ est un G_δ. C'est en particulier le cas si f est le potentiel N_μ d'une mesure $\mu \geqslant 0$ lorsque N est un noyau $\geqslant 0$ semi-continu inférieurement sur E localement compact (comme c'est le cas pour le noyau newtonien de $R^p (p \geqslant 3)$); mais on peut affirmer alors de plus que I_f est de capacité extérieure nulle [2].

Inversement, J. Deny a montré [3] que dans $R^p (p \geqslant 3)$, pour le noyau newtonien N, tout ensemble A qui est un G_δ de capacité extérieure nulle est l'ensemble des infinis d'un potentiel $N_\mu (\mu \geqslant 0)$; mais la mesure μ construite par Deny n'est pas portée par A; on peut ajouter cette restriction lorsque A est compact (G. C. Evans) [4] ou contenu dans un F_σ de capacité nulle (N. Ninomya) [5].

On va établir ici l'énoncé le plus précis; pour simplifier l'exposé, nous supposerons partout que le noyau étudié est le noyau newtonien de $E = R^p$.

[1] Ce mémoire développe un résultat annoncé dans :
G. Choquet, Potentiels sur un ensemble de capacité nulle, *C. R.*, t. 244, 1957, p. 1710-1712.

[2] G. Choquet, Sur les fondements de la théorie fine du potentiel, *C. R.*, t. 244, 1957, p. 1606-1609.

[3] J. Deny. Sur les infinis d'un potentiel, *C. R.*, t. 224, 1947, p. 524.

[4] G. C. Evans, *Monatshefte fur Math. u. Phys.* Bd 43, 1936, p. 419-424.

[5] N. Ninomya, Sur un ensemble de capacité nulle. *Math. J. Okoyama Univ.*, 2, n° 2, 1953.

Puis nous indiquerons pour terminer à quels autres noyaux s'étend le théorème obtenu.

LEMME 1. — *Soient* μ *une mesure* $\geqslant 0$ *sur* E; K *un compact de* E; φ *une fonction numérique continue sur* E, *telle que* $N\mu > \varphi$ *sur* K.

Il existe un voisinage ouvert ω_1 *de* μ (*dans l'espace* $\mathcal{M}_+(E)$ *des mesures* $\mu \geqslant 0$ *sur* E, *muni de la topologie vague*) *et un voisinage* ω_2 *de* K *dans* E, *tels que pour tout* $(\nu, x) \in \omega_1 \times \omega_2$ *on ait:*

$$N\nu(x) > \varphi(x).$$

En termes plus simples, si $N\mu(x) > \varphi(x)$ pour tout $x \in K$, l'inégalité reste vraie lorsqu'on modifie un peu μ, et un peu K.

En effet, l'application $(\nu, x) \to N\nu(x)$ de $\mathcal{M}_+(E) \times E$ dans $\overline{R}_+$ est semi-continue inférieurement; donc l'ensemble Ω des (ν, x) tels que $N\nu(x) - \varphi(x) > 0$ est ouvert dans $\mathcal{M}_+(E) \times E$. Or Ω contient $\mu \times K$, donc aussi un ouvert de la forme $\omega_1 \times \omega_2$ (en vertu de la compacité de K).

DÉFINITION. — *Pour tout ouvert* ω *de* E, *on appelle* recouvrement régulier *de* ω *une suite* (K_n) *de compacts de* ω *telle que*

a) *Pour tout* n, $\mathring{K}_n$ *est partout dense dans* K_n.

b) $\omega = \bigcup_n \mathring{K}_n$.

c) $K_i \cap K_j = \emptyset$ *pour* $|i - j| > 1$.

Il est bien connu que tout ouvert de R^p admet un tel recouvrement régulier.

LEMME 2. — *On se donne un ouvert* $\omega \subset E$; *une partie* X *de* ω; *une mesure* $\lambda \geqslant 0$ *portée par* $\overline{X} \cap \omega$; *une fonction numérique* φ *définie et continue dans* ω, *telle que* $N\lambda > \varphi$ *dans* ω.

Pour tout nombre $\varepsilon > 0$ *et tout voisinage* V *de* λ (*dans* $\mathcal{M}_+(E)$), *il existe* $\mu \in V$, *portée par un sous-ensemble de* X *fini sur tout compact de* ω, *et telle que:*

1) $N\mu > \varphi - \varepsilon$ (6) *sur* ω.

2) $|N\mu - N\lambda| < \varepsilon$ *sur* $\complement\omega$ *(là où la différence est définie).*

3) $\mu(E) = \lambda(E)$.

(6) Lorsque $\overline{\omega}$ est compact, on peut remplacer cette inégalité par $N\nu > \varphi$.

Démonstration. — Soit (K_n) un recouvrement régulier de ω; par commodité pour la suite, on posera $K_0 = \emptyset$.

Soit (λ_n) une partition (facile à réaliser) de λ en mesures $\lambda \geqslant 0$ telles que :

$$S\lambda_n \subset K_n, \qquad \text{donc aussi} \qquad S\lambda_n \subset \overline{X} \cap K_n$$

(où $S\lambda_n$ désigne le support de λ_n).

Comme N est continu hors de la diagonale de $E \times E$ et tend vers 0 à l'infini, il existe pour tout $n \geqslant 1$ un voisinage U_n de λ_n dans $\mathcal{M}_+(\overline{X} \cap K_n)$ tel que, pour toute $\mu_n \in U_n$ on ait :

$$(1) \quad |N\mu_n - N\lambda_n| < \varepsilon/2^n \qquad \text{sur} \qquad \Big(\bigcup_{\substack{i<n-1 \\ \text{ou } i>n+1}} K_i\Big) \cup \big(\complement\, \omega\big).$$

D'autre part, comme $N\Big(\sum\limits_{\substack{i<n-1 \\ i>n+1}} \lambda_i\Big)$ est continu sur K_n, il existe pour tout $n \geqslant 1$, d'après le lemme 1, des voisinages V_{n-1}^{-1}, V_n^0, V_{n+1}^1 de λ_{n-1}, λ_n, λ_{n+1} respectivement, dans $\mathcal{M}_+(E)$, tels que les relations : $\mu_{n-1} \in V_{n-1}^{-1}$, $\mu_n \in V_n^0$, $\mu_{n+1} \in V_{n+1}^1$ entraînent

$$(2) \qquad N\Big(\mu_{n-1} + \mu_n + \mu_{n+1} + \sum_{\substack{i<n+1 \\ i>n+1}} \lambda_i\Big) > \varphi \quad \text{sur } K_i.$$

Pour tout $p \geqslant 1$, choisissons maintenant

$$\mu_p \in U_p \cap V_p^{-1} \cap V_p^0 \cap V_p^1, \qquad \text{avec en outre} \qquad \mu_p(E) = \lambda_p(E).$$

Posons $\mu = \sum\limits_p \mu_p$; on a $\lambda(E) = \mu(E)$.

Des relations (1) et (2) on tire successivement :

$$|N\mu - N\lambda| < \varepsilon \quad \text{sur} \quad \complement\, \omega,$$
$$N\mu > \varphi - \varepsilon \quad \text{sur} \quad \omega.$$

Enfin, comme $X \cap \mathring{K}_n$ est partout dense dans $\overline{X} \cap K_n$, on peut toujours prendre μ_n à support fini contenu dans $X \cap K_n$.

La condition $\mu \in V$ est automatiquement réalisée si l'on choisit les U_p et V_p assez petits.

Remarque. — Comme le support de μ est fini sur tout compact de ω, $N\mu$ est fini et continu en tout point de ω, sauf aux points de l'ensemble (dénombrable et fermé relativement à ω) qui porte μ, à savoir $\omega \cap S\mu$.

Lemme 3. — *Soit* ω *un ouvert de* E, *de capacité* $< \omega$. *Pour tout* $X \subset \omega$ *et tout nombre* $\varepsilon > 0$, *il existe une mesure* $\mu \geqslant 0$ *portée par une partie* Y *de* X *dont la trace sur tout compact de* ω *est finie et telle que :*

1) $\mu(E) < a$.

2) $N\mu > 1$ *sur* $\overline{X} \cap \omega$.

3) $N\mu < 1 + \varepsilon$ *sur* $\complement \omega$.

On dit qu'une telle μ *est* associée *à* $(a, \varepsilon, \omega, X)$; *son potentiel est partout fini hors de* X.

Démonstration. — 1) Montrons d'abord qu'il existe une mesure $\pi \geqslant 0$ portée par $\overline{X} \cap \omega$ et telle que :

$\pi(E) < a$; $N\pi > (1 - \varepsilon)$ quasi-partout sur $\overline{X} \cap \omega$; $N\pi \leqslant 1$ partout.

Si cap $(\overline{X} \cap \omega) = 0$, on prend $\pi = 0$; sinon soit ν la distribution capacitaire de $\overline{X} \cap \omega$.

On a $\nu = \nu' + \nu''$, où ν' est portée par ω^* et ν'' est portée par $\overline{X} \cap \omega$.

Comme $N\nu' \leqslant 1$ partout et que N est un noyau régulier, on peut écrire $\nu' = \sum_n \nu_n$, où pour tout n on a : $\nu_n \geqslant 0$; $S\nu_n$ compact; $N\nu_n$ continu.

Soit ν_n^K la balayée de ν_n sur le compact K de $\overline{X} \cap \omega$; on a : $\nu_n = \lim \nu_n^K$ suivant l'ordonné filtrant croissant de ces compacts (7) K.

Soit C_n un compact assez grand pour que $N\nu_n < \varepsilon/2^n$ hors de C_n. Comme $N\nu_n$ est continu, il existe d'après le lemme 1 un compact $K_n \subset \overline{X} \cap \omega$, tel que

$$N\nu_n^{K_n} > N\nu_n - \varepsilon/2^n \text{ sur } C_n.$$

Cette inégalité est évidemment vraie aussi hors de C_n puisque $N\nu_n^{K_n} \geqslant 0$. On a donc partout dans E :

$$N\nu_n - \varepsilon/2^n < N\nu_n^{K_n} \leqslant N\nu_n.$$

D'où par addition :

$$(1) \qquad N\nu' - \varepsilon < N(\Sigma \nu_n^{K_n}) \leqslant N\nu'.$$

(7) En effet, si ν_n' désigne une valeur d'adhérence des ν_n^K, on a d'après le théorème classique de convergence : $N\nu_n' = 1$ quasi-partout sur $\overline{X} \cap \omega$ et $\nu_n'(E) \leqslant \nu^n(E)$. Il en résulte $\nu_n' = \nu_n$ à cause de l'unicité de la distribution capacitaire de $\overline{X} \cap \omega$.

Posons $\pi = \nu'' + \sum_n \nu_n^{K_n}$; la relation (1) devient :

$$N\nu - \varepsilon < N\pi \leqslant N\nu \leqslant 1.$$

Comme par ailleurs $\pi(E) \leqslant \nu(E) < a$, la mesure π a les propriétés annoncées.

2) L'ensemble A des points de $\overline{X} \cap \omega$ en lesquels $N\pi < 1$ est un F_σ de capacité nulle. Posons $A = \bigcup A_n$, où les A_n sont des compacts de $\overline{X} \cap \omega$.

D'après la propriété d'Evans, il existe une mesure $\varkappa_n \geqslant 0$ portée par A_n, de masse $< \varepsilon/2^n$, avec $N\varkappa_n = +\infty$ sur A_n, et $N\varkappa_n < \varepsilon/2^n$ sur $\complement\omega$.

Donc $\lambda = \pi + \Sigma\varkappa_n$ est portée par $\overline{X} \cap \omega$; elle a une masse totale $< a$ si ε est assez petit; son potentiel est $> (1 - \varepsilon)$ sur $\overline{X} \cap \omega$ et $< (1 + \varepsilon)$ sur $\complement\omega$.

On va maintenant utiliser le lemme 2. Comme $N\lambda > (1 - \varepsilon)$ sur $(\overline{X} \cap \omega)$, il existe une fonction numérique continue φ sur ω, égale à $(1 - \varepsilon)$ sur $\overline{X} \cap \omega$ et telle que $N\mu > \varphi$ partout dans ω. Donc d'après le lemme 2, il existe $\mu \geqslant 0$ portée par un sous-ensemble de X fini sur tout compact de ω, et telle que :

$$\mu(E) < a; \quad N\mu > 1 - 2\varepsilon \text{ sur } \overline{X} \cap \omega; \quad N\mu \leqslant 1 + 2\varepsilon \text{ sur } \complement\omega.$$

La mesure $\mu/(1 - 2\varepsilon)$ répond à la question, après un changement élémentaire du ε.

Il est immédiat que $N\mu$ est partout fini hors de X.

LEMME 4. — *Soit ω un ouvert de* E; *soit* $A \subset \omega$, *avec* $\text{cap}^* A = 0$; *soit* $X \subset A$ *avec* X *partout dense dans* A; *et soit ε un nombre* > 0.

Il existe une mesure $\mu \geqslant 0$ portée par une partie dénombrable de X *et telle que :*

$\mu(E) < \varepsilon$; $N\mu \geqslant 1$ *sur* A; $N\mu < \varepsilon$ *sur* $\complement\omega$; $N\mu$ *est finie hors de* X.

Démonstration. — Soit (K_n) un recouvrement régulier de ω. Soit ε_n une constante > 0 assez petite pour que toute mesure positive portée par K_n et de masse totale $< \varepsilon_n$ ait un potentiel $< \varepsilon/2^n$ sur $\complement\omega$.

Posons $A_n = A \cap \mathring{K}_n$ et $X_n = X \cap \mathring{K}_n$.

Comme $\text{cap}^* A_n = 0$, il existe un ouvert $\omega_n \subset \mathring{K}_n$ tel que

$$A_n \subset \omega_n \qquad \text{et} \qquad \text{cap}\, \omega_n < \varepsilon'_n = \inf(\varepsilon_n, \varepsilon/2^n).$$

Soit μ_n une mesure associée à $(\varepsilon'_n, \varepsilon/2^n, \omega_n, X_n)$.

Posons $\mu = \Sigma\mu_n$; on vérifie aisément toutes les propriétés indiquées dans l'énoncé.

On peut même ajouter que μ est portée par un ensemble dont tout point est isolé.

Théorème. — *Soit* $A \subset E$, *où* A *est un* G_δ *non vide de capacité extérieure nulle.*

Il existe une mesure $\mu > 0$ *portée par* A, *dont le potentiel* $N\mu$ *est infini en tout point de* A *et fini hors de* A.

Plus précisément, pour tout X *dénombrable* $\subset A$, *tel que* $\overline{X} = \overline{A}$, *on peut imposer à* μ *d'être portée par* X.

Démonstration. — Posons $A = \bigcap \omega_n$, où la suite des ouverts ω_n est décroissante. D'après le lemme 4, il existe une mesure μ_n portée par X et telle que:

$\mu_n(E) < 1/2^n$; $N\mu_n \geqslant 1$ sur A; $N\mu_n < 1/2^n$ sur $\complement\, \omega_n$; $N\mu_n$ est finie hors de X.

Posons $\mu = \Sigma\mu_n$. On a $\mu(E) < 1$ et $N\mu = +\infty$ sur A. Enfin, pour tout $x \notin A$, il existe n_0 tel que $x \notin \omega_n$ (pour tout $n \geqslant n_0$). On a donc:

$$N\mu(x) = \Sigma N\mu_n(x) \leqslant \sum_1^{n_0 - 1} N\mu_n(x) + \sum_{n_0}^{\infty} 1/2^n < \infty.$$

Espaces et noyaux auxquels s'étend le théorème.

Nous ne rechercherons pas la généralité maxima; les conditions qui vont être données montreront que le théorème est valable pour tous les « bons » noyaux de la théorie du potentiel, en particulier pour les noyaux de Green et les noyaux $r^{\alpha - p}$ $(0 < \alpha \leqslant 2)$ dans R^p $(p \geqslant 3)$.

On verrait aisément qu'il est valable aussi dans R^2 pour le noyau logarithmique (bien qu'il ne soit pas positif), à cause du fait que, localement, ce noyau est un « bon » noyau.

Conditions suffisantes. — E est un espace localement compact à base dénombrable.

Le noyau N est une application continue de $E \times E$ dans $[0, +\infty]$, finie hors de la diagonale Δ, infinie sur Δ.

N est symétrique et satisfait au principe du maximum ordinaire.

N satisfait au principe du balayage (ou, ce qui est équivalent, au principe de domination).

N tend vers 0 à l'infini, en ce sens que, pour tout compact $K \subset E$, $\sup_{a \in K} N\varepsilon_a(x)$ tend vers 0 lorsque a tend vers le point à l'infini de E.

Notons que la symétrie de N n'a rien d'indispensable et n'est imposée ici que pour simplifier l'énoncé des conditions.