ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

COLETTE GUILLOPÉ

Comportement à l'infini des solutions des équations de Navier-Stokes et propriété des ensembles fonctionnels invariants (ou attracteurs)

Annales de l'institut Fourier, tome 32, n° 3 (1982), p. 1-37

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1982__32_3_1_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
32, 3 (1982), 1-37

COMPORTEMENT À L'INFINI DES SOLUTIONS DES ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES ET PROPRIÉTÉ DES ENSEMBLES FONCTIONNELS INVARIANTS (OU ATTRACTEURS)

par Colette GUILLOPE

Introduction

Dans cet article, nous nous intéressons au comportement à l'infini d'une solution forte, définie sur $(t_0, +\infty)$, des équations de Navier-Stokes dans un ouvert borné régulier Ω de $\mathbf{R}^N$, $N = 2$ ou 3 :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu\Delta u + \sum_{i=1}^{N} u_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + \operatorname{grad} p = f \quad \text{dans} \quad \Omega \times [0, +\infty), \tag{0.1}$$

$$\operatorname{div} u = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \times [0, +\infty), \tag{0.2}$$

$$u(\cdot, 0) = u_0 \quad \text{dans} \quad \Omega, \tag{0.3}$$

$$u(x, t) = 0 \quad \forall (x, t), \quad x \in \Gamma = \partial\Omega, \quad t \in [0, +\infty); \tag{0.4}$$

$\nu > 0$, u_0 et $f = f(t)$ sont données, les inconnues sont la vitesse $u = (u_i)_{i=1}^N$ et la pression p et sont définies presque partout sur $\Omega \times [0, +\infty)$.

Soient t_0 et t_1 deux réels vérifiant $0 \leqslant t_0 < t_1$, t_1 pouvant éventuellement être égal à $+\infty$. Nous savons que toute solution u de (0.1)-(0.4) définie sur l'intervalle de temps (t_0, t_1), i.e. vérifiant $u \in \mathcal{C}((t_0, t_1); H^1(\Omega)^N)$, est sur (t_0, t_1) aussi régulière que la force f le permet (cf. O.A. Ladyzhenskaya [4]).

Nous étudions ici le comportement à l'infini d'une solution forte, définie sur l'intervalle semi-infini $(t_0, +\infty)$ et continue à valeurs dans l'espace $H^m(\Omega)^N$, $m \geqslant 1$ fixé. Nous montrons qu'une telle solution, supposée en outre bornée dans l'espace $H^1(\Omega)^N$, est aussi bornée dans l'espace $H^m(\Omega)^N$, c'est-à-dire appartient à $L^\infty(\eta, +\infty; H^m(\Omega)^N)$, $\forall \eta > t_0$; de plus, la norme de u dans cet espace est majorée par une constante ne dépendant que des données, de t_0 et de η. Une propriété analogue est vérifiée par les dérivées de la fonction u par rapport au temps (cf. Théorème 2.1).

Nous précisons ce résultat dans le cas où $f \equiv 0$. En effet, nous savons que toute solution u de (0.1)-(0.4) est alors bornée de $(t_0, +\infty)$ dans $H^1(\Omega)^N$, pour t_0 assez grand, et que $u(t)$ converge vers 0 dans $H^1(\Omega)^N$ quand $t \longrightarrow +\infty$. (cf. J. Leray [7], R. Temam [11]). Nous montrons ici que la norme de $\dfrac{d^j u(t)}{dt^j}$ dans $H^m(\Omega)^N$ tend vers 0 de façon exponentielle quand $t \longrightarrow +\infty$, pour tout $j \geqslant 0$, pour tout $m \geqslant 0$. (cf. Théorème 2.2).

Par ailleurs, de la propriété de bornitude montrée au Théorème 2.1, nous déduisons une propriété de régularité des ensembles fonctionnels invariants (ou attracteurs) pour les équations de Navier-Stokes. La donnée f est supposée indépendante du temps. Nous savons que tout ensemble fonctionnel invariant, borné dans $H^1(\Omega)^N$, est de dimension de Hausdorff finie (cf. C. Foias – R. Temam [4]). Nous montrons ici qu'un tel ensemble fonctionnel est en fait constitué de fonctions aussi régulières que la donnée f le permet (cf. Théorème 2.3). En particulier, si f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, tout ensemble attracteur, borné dans $H^1(\Omega)^N$, est constitué de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$. Cette propriété généralise les propriétés de régularité de l'ensemble des solutions stationnaires ou périodiques des équations de Navier-Stokes.

Dans un premier paragraphe, nous rappelons quelques propriétés des solutions des équations de Navier-Stokes. Les résultats obtenus sont énoncés dans le deuxième paragraphe. Le troisième paragraphe est consacré à l'étude de la régularité et de la propriété de bornitude des solutions des équations de Navier-Stokes sur l'intervalle de temps semi-infini $(t_0, +\infty)$. Le quatrième paragraphe est consacré à l'étude du cas $f \equiv 0$.

PLAN

1) Préliminaires.

2) Enoncé des principaux résultats.

3) Estimations des dérivées par rapport au temps d'une solution forte.

4) Etude du cas où la force est nulle.

1. PRELIMINAIRES

Nous utilisons ici la présentation des équations de Navier-Stokes décrite par R. Temam en [11] et en [12].

1.1. Notations.

Soit Ω un ouvert borné, connexe de $\mathbf{R}^N$, $N = 2, 3$, de frontière Γ de classe $\mathcal{C}^\infty$, telle que Ω soit situé localement d'un seul côté de Γ.

Nous notons $H^s(\Omega)$, $s \in \mathbf{R}$, l'espace de Sobolev construit sur $L^2(\Omega)$ et $\mathbf{L}^2(\Omega) = L^2(\Omega)^N$, $\mathbf{H}^s(\Omega) = H^s(\Omega)^N$.

Soient $\mathcal{V} = \{v \mid v \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)^N, \operatorname{div} u = 0\}$,

H : adhérence de $\mathcal{V}$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$,

V : adhérence de $\mathcal{V}$ dans $\mathbf{H}^1(\Omega)$,

V' : dual de V,

$E_m = \mathbf{H}^m(\Omega) \cap H, \quad m \geqslant 0$.

Les produits scalaires sur H et V sont notés $(.,.)$ et $((.,.))$, et les normes sur H, V, V', E_m sont notées $|\cdot|$, $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_*$ et $|\cdot|_m$.

Soit A l'opérateur de Stokes défini comme un isomorphisme de V dans V' par $\langle Au, v\rangle_{V',V} = ((u, v))$, $\forall v \in V$, et prolongé à H comme opérateur non borné de domaine $D(A) = V \cap \mathbf{H}^2(\Omega)$. L'opérateur A^{-1}, autoadjoint, compact de H, admet une suite de vecteurs propres, formant une base orthonormale de H, soit

$$Aw_m = \lambda_m w_m, \quad w_m \in D(A), \quad \text{où} \quad 0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \dots$$

Les espaces $V_m = D(A^{m/2})$, $m \in \mathbf{R}$, munis de la norme $|A^{m/2}.|$ sont hilbertiens et s'injectent de façon continue dans E_m, pour

$m \in \mathbf{N}$; de plus, la restriction à V_m de la norme $|\cdot|_m$ est équivalente à la norme de V_m .

Soit b la forme trilinéaire continue, définie par

$$b(u, v, w) = \sum_{i,j,k=1}^{N} \int_\Omega u_j D_j v_k w_k \, dx, \quad \forall (u, v, w) \in V \times V \times V .$$

Nous notons B la forme bilinéaire, définie pour $(u, v) \in V \times V$ par

$$\langle B(u, v), w \rangle_{V', V} = b(u, v, w), \quad \forall w \in V ,$$

et nous notons $B(u) = B(u, u)$.

Les propriétés de b et B sont les suivantes :

$$b \text{ est continue sur } \mathbf{H}^{s_1}(\Omega) \times \mathbf{H}^{s_2+1}(\Omega) \times \mathbf{H}^{s_3}(\Omega), \tag{1.1}$$

où $s_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, 3$, et $\begin{cases} s_1 + s_2 + s_3 > \dfrac{N}{2} & \text{si deux des } s_i \text{ sont nuls,} \\ \qquad\qquad \geqslant \dfrac{N}{2} & \text{sinon ;} \end{cases}$

$$B \text{ est continue de } E_{m+1} \times E_{m+1} \text{ dans } E_m, \text{ pour tout } m \geqslant 1, \tag{1.2}$$

$B : V \times V \longrightarrow H$ est continue sur tout borné de $D(A) \times D(A)$. (cf. par exemple, C. Foias – R. Temam [4], R. Temam [13]). (1.3)

1.2. Présentation du problème.

Dans la suite, les données ν, u_0, f vérifieront $\nu > 0$,

$$u_0 \in H, \tag{1.4}$$

$$f \in L^\infty(0, +\infty; V'), \tag{1.5}$$

ou

$$f \in L^\infty(0, +\infty; E_m), \quad \text{pour un certain} \quad m \geqslant 0 . \tag{1.6}$$

Le système (0.1)-(0.4) s'écrit alors sous la forme d'une équation différentielle dans V'

$$u' + \nu A u + B(u) = f, \tag{1.7}$$

$$u(0) = u_0 , \tag{1.8}$$

où u' désigne la dérivée (au sens des distributions) de la fonction u par rapport au temps.

Sous les hypothèses (1.4)-(1.5), le problème (1.6)-(1.7) admet (au moins) une solution vérifiant

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in \mathcal{C}_b([0, +\infty); \mathrm{H}_{\text{faible}}) \cap \mathrm{L}^2_{\text{loc}}(0, +\infty; \mathrm{V})^{(1)}, \\ \dfrac{d}{dt} |u(t)|^2 + 2\nu \|u(t)\|^2 \leqslant 2 \langle f(t), u(t) \rangle, \quad \text{p.p. } t \geqslant 0 \end{array} \right. \tag{1.9}$$

(cf. par exemple J. Leray [7], R. Temam [11]).

Une solution vérifiant (1.9) sera dite *solution faible.*

Par ailleurs, sous les hypothèses (1.4) et (1.6) avec $m = 0$, toute solution faible vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in \mathrm{L}^{2/3}_{\text{loc}}(0, +\infty; \mathrm{D}(\mathrm{A})), \\ \dfrac{d}{dt} \|u(t)\|^2 + \nu\, |\mathrm{A}u(t)|^2 \leqslant \dfrac{c_1}{\nu^3} \|u(t)\|^6 + \dfrac{2}{\nu}\, |f(t)|^2, \quad \text{p.p. } t \geqslant 0, \end{array} \right. \tag{1.10}$$

si $\mathrm{N} = 3$, et

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in \mathrm{L}^1_{\text{loc}}(0, +\infty; \mathrm{D}(\mathrm{A})), \\ \dfrac{d}{dt} \|u(t)\|^2 + \nu\, |\mathrm{A}u(t)|^2 \leqslant \dfrac{c_2}{\nu^3} |u(t)|^2\, \|u(t)\|^4 + \dfrac{2}{\nu}\, |f(t)|^2, \\ \hfill \text{p.p. } t \geqslant 0, \end{array} \right. \tag{1.11}$$

si $\mathrm{N} = 2$. Ci-dessus, les constantes c_1 et c_2 sont des constantes géométriques (i.e. ne dépendant que de Ω) (cf. [1]).

Une solution u de (1.7)-(1.8) sera dite *solution forte* sur l'intervalle (t_1, t_2) si u appartient à $\mathcal{C}([t_1, t_2]; \mathrm{V})$; la solution est alors unique sur l'intervalle $[t_1, t_2]$.

Exemples de solutions fortes (cf. [2] [3] [6] [7] [11] [12]).

Exemple 1.1. – Si $\mathrm{N} = 2$, le problème (1.7)-(1.8) admet une unique solution forte définie sur $[\eta, +\infty[$, $\forall \eta > 0$ (cf. aussi Remarque 1.7).

Exemple 1.2. – Si $\mathrm{N} = 3$ et $u_0 \in \mathrm{V}$, il existe un réel $t(u_0)$, dépendant de Ω, ν, u_0 et f, tel que le problème (1.7)-(1.8) admette une unique solution forte sur $[0, t]$, $\forall t$, $0 \leqslant t < t(u_0)$.

(1) $\mathcal{C}_b(0, +\infty; \mathrm{H}_{\text{faible}})$ désigne l'espace des fonctions de $\mathrm{L}^\infty(0, +\infty; \mathrm{H})$ qui sont faiblement continues de $[0, +\infty[$ dans H.

Exemple 1.3. – Si $N = 3$, si f est assez régulier, si f, u_0, ν vérifient une certaine condition (i.e. ν assez grand, ou f et u_0 assez petits), il existe un réel $t_0 > 0$, dépendant de ν, Ω, u_0 et f, tel que la solution de (1.7)-(1.8) soit forte sur l'intervalle $[t_0, +\infty[$. (cf. § 4 pour le cas particulier $f = 0$).

Dans la suite de ce travail, nous nous intéressons *au comportement à l'infini des solutions fortes définies sur* $[t_0, +\infty[$, $t_0 \geqslant 0$. Pour cela, nous définissons et étudions quelques espaces de fonctions définies sur $[t_0, +\infty[$ à valeurs dans un espace de Banach X.

1.3. Espaces de fonctions de $[t_0, +\infty[$ à valeurs dans X.

Soit η un réel $\geqslant 0$. Soit X un espace de Banach.

Nous notons $\mathcal{C}_b(\eta, +\infty; X)$ l'espace des fonctions de $L^\infty(\eta, +\infty; X)$ qui sont continues et bornées de $[\eta, +\infty[$ dans X. Si u appartient à $L^\infty(\eta, +\infty; X)$ ou à $\mathcal{C}_b(\eta, +\infty; X)$, nous notons

$$|u|_{X,\infty} = \operatorname*{Sup}_{t \geqslant \eta} |u(t)|_X .$$

Si X est l'un des espaces V', H ou E_m, nous notons cette norme par $|\cdot|_{-1,\infty}$, $|\cdot|_{0,\infty}$ ou $|\cdot|_{m,\infty}$.

Nous notons $\mathcal{E}(\eta, +\infty; X)$ l'espace des fonctions u de $L^2_{loc}(\eta, +\infty; X)$ telles que, pour tout $\alpha \geqslant 0$,

$$\operatorname*{Sup}_{t \geqslant \alpha + \eta} \int_{t-\alpha}^{t} |u(s)|_X^2 \, ds \leqslant c(\alpha)$$

où $c(\alpha)$ est un réel dépendant de α et de la fonction u.

Si u appartient à $\mathcal{E}(\eta, +\infty; X)$, nous notons

$$[u]_{X,\alpha} = \left[\operatorname*{Sup}_{t \geqslant \alpha + \eta} \int_{t-\alpha}^{t} |u(s)|_X^2 \, ds \right]^{1/2} . \tag{1.12}$$

Nous noterons $[u]_{\mathbf{R},\alpha}$ par $[u]_\alpha$.

L'espace $\mathcal{E}(\eta, +\infty; X)$ possède les propriétés suivantes, faciles à vérifier :

i) L'application $u \longrightarrow [u]_{X,\alpha}$ est une norme sur $\mathcal{E}(\eta, +\infty; X)$, pour tout $\alpha > 0$. Toutes les normes $[\cdot]_{X,\alpha}$, $\alpha > 0$, sont équivalentes. L'application $\alpha \longrightarrow [\cdot]_{X,\alpha}$ est croissante.

ii) L'espace $\mathcal{E}(\eta, +\infty; X)$, muni d'une quelconque norme $[\cdot]_{X,\alpha}$ $(\alpha > 0)$, est un espace de Banach.

iii) L'espace $\mathcal{E}(\eta, +\infty; X)$ vérifie la suite d'inclusions

$$L^\infty(\eta, +\infty; X) \subset \mathcal{E}(\eta, +\infty; X) \subset L^2_{loc}(\eta, +\infty; X).$$

Exemple 1.4. – De l'inégalité (1.9), nous déduisons que, si $f \in L^\infty(0, +\infty; V')$, toute solution faible u des équations de Navier-Stokes vérifie $u \in \mathcal{C}_b(0, +\infty; H_{\text{faible}}) \cap \mathcal{E}(0, +\infty; V)$,

avec
$$|u|^2_{0,\infty} \leqslant |u_0|^2 + \frac{1}{\nu^2 \lambda_1} |f|^2_{-1,\infty},$$

$$[u]^2_{V,\alpha} \leqslant \frac{|u_0|^2}{\nu} + \frac{|f|^2_{-1,\infty}}{\nu^2} \left[\frac{1}{\nu\lambda_1} + \alpha\right].$$

LEMME 1.5. – *Soit $\phi : [\eta, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction positive absolument continue $(\eta \geqslant 0)$ vérifiant*

$$\sqrt{\phi} \in \mathcal{E}(\eta, +\infty; \mathbf{R}), \tag{1.13}$$

$$\phi'(t) \leqslant \sigma(t)(1 + \phi(t)), \quad \text{p.p. } t \geqslant \eta, \tag{1.14}$$

où σ est une fonction positive presque partout sur $(\eta, +\infty)$ telle que $\sqrt{\sigma} \in \mathcal{E}(\eta, +\infty; \mathbf{R})$.

Alors, la fonction ϕ appartient à $\mathcal{C}_b(\eta, +\infty; \mathbf{R})$. Plus précisément, il existe une constante $c(\alpha)$, dépendant en outre de σ et η, telle que

$$\operatorname*{Sup}_{t \geqslant \eta} (1 + \phi(t)) \leqslant c(\alpha) \left[1 + \operatorname{Max}\left(\phi(\eta), \frac{[\sqrt{\phi}]^2_{\alpha-\eta}}{\alpha - \eta}\right)\right], \qquad \alpha > \eta. \tag{1.15}$$

Démonstration. – Soit $\alpha > \eta$.

De l'inégalité (1.14), nous déduisons que

$$\frac{d}{dt}\left[(1 + \phi(t)) \exp\left(-\int_s^t \sigma(\tau)\, d\tau\right)\right] \leqslant 0, \quad \text{p.p. } s, t \geqslant \eta,$$

puis en intégrant par rapport à $t \geqslant s$,

$$(1 + \phi(t)) \exp\left(-\int_s^t \sigma(\tau)\, d\tau\right) \leqslant 1 + \phi(s), \quad \forall s, t, \ \eta \leqslant s \leqslant t. \tag{1.16}$$

En particulier, pour $t \in [\eta, \alpha]$, nous obtenons

$$\operatorname*{Sup}_{\eta \leq t \leq \alpha} (1 + \phi(t)) \leq \exp([\sqrt{\sigma}]^2_{\alpha - \eta})\,(1 + \phi(\eta)) \tag{1.17}$$

en utilisant l'hypothèse sur σ.

Soit maintenant $t \geq \alpha$ et $s \in (t - \alpha + \eta, t)$.

Nous avons donc $t - s \leq \eta - \alpha$: de l'hypothèse vérifiée par σ et de la croissance de l'application $\alpha \longrightarrow [\cdot]_\alpha$, nous déduisons que (1.16) implique

$$1 + \phi(t) \leq \exp([\sqrt{\sigma}]^2_{\alpha - \eta})\,(1 + \phi(s)).$$

Nous intégrons cette inégalité par rapport à $s \in (t - \alpha + \eta, t)$ et nous obtenons, d'après (1.13) :

$$(\alpha - \eta)(1 + \phi(t)) \leq \exp([\sqrt{\sigma}]^2_{\alpha - \eta})\,((\alpha - \eta) + [\sqrt{\phi}]^2_{\alpha - \eta}),$$

soit

$$\operatorname*{Sup}_{t \geq \alpha} (1 + \phi(t)) \leq \exp([\sqrt{\sigma}]^2_{\alpha - \eta}) \left[1 + \frac{[\sqrt{\phi}]^2_{\alpha - \eta}}{\alpha - \eta}\right]. \tag{1.18}$$

De (1.17)-(1.18), nous déduisons que

$$\operatorname*{Sup}_{t \geq \eta} (1 + \phi(t)) \leq \exp([\sqrt{\sigma}]^2_{\alpha - \eta}) \left[1 + \operatorname{Max}\left(\phi(\eta), \frac{[\sqrt{\phi}]^2_{\alpha - \eta}}{\alpha - \eta}\right)\right], \quad \forall \alpha > \eta.$$

Remarque 1.6. — Si $\sigma(t) = \sigma$ est une constante, le Lemme s'applique : sous les hypothèses (1.13)-(1.14), ϕ vérifie l'inégalité (1.15) avec $c_\alpha = \exp[\sigma(\alpha - \eta)]$.

Remarque 1.7. — Nous déduisons du Lemme 1.5 le résultat suivant, dû à C. Foias et G. Prodi [4] :

En dimension d'espace $\mathrm{N} = 2$, *si la donnée* f *appartient à* $\mathrm{L}^\infty(0, +\infty; \mathrm{H})$ *et* $u_0 \in \mathrm{H}$, *alors la solution* u *du problème de Navier-Stokes correspondant appartient à* $\mathrm{L}^\infty(t_0, +\infty; \mathrm{V})$, $\forall t_0 > 0$, *et la norme de* u *dans cet espace est majorée par une constante ne dépendant que des données* ν, Ω, u_0, f *et de* t_0.

En effet, nous avons les inégalités (cf. (1.9) et (1.11))

$$|u(t)| \leq |u_0|\, e^{-\nu\lambda_1 t} + \frac{|f|_{0,\infty}}{\nu\lambda_1}(1 - e^{-\nu\lambda_1 t}), \quad \forall t \geq 0, \tag{1.19}$$

$$\operatorname*{Sup}_{t \geqslant \alpha} \left(\int_{t-\alpha}^{t} \|u(s)\|^2 \, ds \right) \leqslant \frac{d}{\nu} \left(\frac{d}{2} + \alpha \right), \tag{1.20}$$

$$\frac{d}{dt} \|u(t)\|^2 + \nu \, |Au(t)|^2 \leqslant d_1 (1 + \|u(t)\|^2)^2 , \quad \text{p.p. } t \geqslant 0 , \tag{1.21}$$

où
$$\begin{cases} d = \operatorname{Max} \left(|u_0| , \dfrac{|f|_{0,\infty}}{\nu \lambda_1} \right) , \\ d_1 = \operatorname{Max} \left(\dfrac{2}{\nu} \, |f|_{0,\infty}^2 , \dfrac{c_2}{\nu^3} \, d^2 \right) \leqslant d^2 \operatorname{Max} \left(2 \nu \lambda_1^2 , \dfrac{c_2}{\nu^3} \right) , \end{cases}$$

et c_2 est une constante géométrique (i.e. ne dépendant que de Ω).

Soit $t_0 > 0$. En raisonnant par l'absurde, nous montrons que l'inégalité (1.20) implique l'existence de $\eta \in \left(\frac{t_0}{2} , t_0 \right)$ tel que

$$u(\eta) \in V , \quad \|u(\eta)\|^2 \leqslant \frac{d}{\nu} \left(\frac{d}{t_0} + 1 \right) . \tag{1.22}$$

Puis nous appliquons le Lemme à la fonction $t \longrightarrow \phi(t) = \|u(t)\|^2$ définie, absolument continue(2) sur $[\eta , + \infty)$.

Nous obtenons donc

$$\operatorname*{Sup}_{t \geqslant t_0} (1 + \|u(t)\|^2) \leqslant \operatorname*{Sup}_{t \geqslant \eta} (1 + \|u(t)\|^2) \leqslant c_\eta \left[1 + \frac{d}{\nu} \left(\frac{d}{t_0} + 1 \right) \right]$$

avec

$$c_\eta = \exp \left[\frac{d_1}{2} \left(\left(1 + \frac{d}{\nu} \right) t_0 + \frac{d^2}{\nu} \right) \right] . \qquad \square$$

2. ENONCE DES PRINCIPAUX RESULTATS

Nous énonçons d'abord le résultat de régularité concernant toute solution forte bornée dans V. Puis nous donnons des compléments dans le cas particulier où $f = 0$. Enfin, nous donnons une application

(2) Les inégalités (1.19)-(1.22) sont, en fait, démontrées pour les approximées de Galerkin $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de la fonction u puis le Lemme 1.5 est appliqué à la fonction $t \longrightarrow \phi_n(t) = \|u_n(t)\|^2$. Nous obtenons alors le résultat pour u en passant à la limite $(n \longrightarrow + \infty)$.

de ce résultat concernant les ensembles fonctionnels invariants (en particulier les ensembles attracteurs).

2.1. Comportement asymptotique des solutions fortes.

THEOREME 2.1. – Soit $N = 2$ ou 3. *Supposons que les données vérifient*

$$u_0 \in H\,, \tag{2.1}$$

$$f^{(j)} \in \mathcal{C}_b(0, +\infty; E_{m-2j})\,, \quad j = 0, \dots, \ell - 1\,, \tag{2.2}$$

$$f^{(\ell)} \in \mathcal{C}_b(0, +\infty; V_{m-2\ell-1})^{(3)}\,, \tag{2.3}$$

où m *est un entier* $\geqslant 0$ *et* $\ell = \left[\dfrac{m}{2}\right]$.

Alors, toute solution du problème (1.7)-(1.8) vérifiant

$$u \in L^\infty(t_0, +\infty; V)\,, \quad t_0 \geqslant 0 \text{ fixé}\,, \tag{2.4}$$

vérifie

$$u^{(j)} \in \mathcal{C}_b(\eta, +\infty; E_{m-2j})\,, \quad j = 0, \dots, \ell\,, \quad \forall \eta > t_0\,, \tag{2.5}$$

et la norme de $u^{(j)}$ *dans cet espace est majorée par une constante ne dépendant que des données de* t_0, η *et* $|u|_{L^\infty(t_0, \infty; V)}$.

Dans le cas de la dimension $N = 2$, l'hypothèse (2.4) est vérifiée pour tout $t_0 > 0$ (et même $t_0 = 0$ si $u_0 \in V$) (cf. Remarque 1.7). Par contre, dans le cas de la dimension $N = 3$, la propriété (2.4) n'est nullement automatique, mais nous notons au passage la Proposition suivante qui permet d'affaiblir un peu la condition (2.4) :

PROPOSITION 2.3. – *Soit* $N = 3$. *Supposons que*

$$u_0 \in H\,, \quad f \in L^\infty(0, +\infty; H)\,.$$

Alors, toute solution du problème (1.7)-(1.8) vérifiant

$$u \in L^\infty(0, +\infty; H^{1/2+\epsilon})\,, \quad \epsilon \text{ fixé}\,, \quad 0 < \epsilon < \frac{1}{2}\,,$$

vérifie

$$u \in L^\infty(t_0, +\infty; V)\,, \quad \forall t_0 > 0\,,$$

(3) $V_{m-2\ell-1} = V'$ si $m = 2\ell$, $= H$ si $m = 2\ell + 1$.

et la norme de u *dans* $L^\infty(t_0, +\infty; V)$ *est majorée par une constante ne dépendant que des données, de* t_0 *et de* $|u|_{L^\infty(0,+\infty;H^{1/2+\epsilon})}$.

Démonstration. – Soit ϵ, $0 < \epsilon < \dfrac{1}{2}$, et supposons que $u \in L^\infty(0, +\infty; H^{1/2+\epsilon})$.

i) *Une estimation a priori.* Utilisant la propriété (1.1) avec $s_1 = \dfrac{1}{2} + \epsilon$, $s_2 = 1 - \epsilon$, $s_3 = 0$, nous obtenons

$$
\begin{aligned}
|b(u(t), u(t), Au(t))| &\leqslant c_0(\epsilon)\, |u(t)|_{\frac{1}{2}+\epsilon}\, |u(t)|_{2-\epsilon}\, |Au(t)| \\
&\leqslant c_1(\epsilon)\, |u(t)|_{\frac{1}{2}+\epsilon}\, |u(t)|^{\epsilon/2}\, |Au(t)|^{2-\epsilon/2}.
\end{aligned}
$$

Puis, en utilisant l'inégalité de Young, nous obtenons au lieu de (1.10),

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2 + \nu\,|Au(t)|^2 \leqslant \frac{c_2(\epsilon)}{\nu^{4/\epsilon-1}}|u(t)|^2\,|u(t)|^{4/\epsilon}_{1/2+\epsilon} \\
+ \frac{2}{\nu}\,|f(t)|^2, \quad \text{p.p. } t \geqslant 0
\end{aligned}
$$

où $c_2(\epsilon)$ est une constante géométrique. Comme $u \in L^\infty(0, +\infty; H)$, il existe une constante $c(\epsilon)$ dépendant de Ω, ν, f et u telle que

$$
\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2 + \nu\,|Au(t)|^2 \leqslant c(\epsilon)\,(1 + |u(t)|^{4/\epsilon}_{1/2+\epsilon}), \quad \text{p.p. } t \geqslant 0. \tag{2.6}
$$

ii) Soit $t_0 > 0$. Les propriétés (1.19)-(1.20) sont vraies pour $N = 2$ ou 3. Soit donc $\eta \in \left(\dfrac{t_0}{2}, t_0\right)$ défini par (1.22).

Utilisant dans (2.6) l'inégalité

$$
|Av|^2 \geqslant \lambda_1\,\|v\|^2, \quad \forall v \in D(A),
$$

et intégrant sur (η, t), nous obtenons

$$
\sup_{t \geqslant t_0}(\|u(t)\|^2) \leqslant \sup_{t \geqslant \eta}(\|u(t)\|^2) \leqslant \|u(\eta)\|^2 + \frac{c(\epsilon)}{\nu\lambda_1}(1 + |u|^{4/\epsilon}_{1/2+\epsilon,+\infty}),
$$

soit, d'après (1.22)

$$
\sup_{t \geqslant t_0}(\|u(t)\|^2) \leqslant \frac{d}{\nu}\left(\frac{d}{t_0} + 1\right) + \frac{c(\epsilon)}{\nu\lambda_1}(1 + |u|^{4/\epsilon}_{1/2+\epsilon,+\infty}). \qquad \square
$$

Remarque 2.2. – Nous ne faisons aucune hypothèse de régularité au point t_0 (cf. R. Temam [13]). Nous obtenons donc un résultat de régularité seulement sur les intervalles $[\eta, +\infty[$, $\eta > t_0$. □

La démonstration du théorème 2.1. est l'objet du § 3.

2.2. Cas particulier : $f \equiv 0$.

Dans la suite de ce paragraphe, nous supposons

$$u_0 \in \mathrm{H}, \quad f \equiv 0. \tag{2.7}$$

Il a été montré par J. Leray [7] l'existence d'un réel $t_0 > 0$, dépendant des données ν, Ω, u_0, tel que toute solution u des équations de Navier-Stokes associées à (2.7) vérifie $u \in \mathrm{L}^\infty(t_0, +\infty; \mathrm{V})$. Donc, du Théorème 2.1., nous déduisons que

$$u \in \mathcal{C}_b^\infty(\eta, +\infty; \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})) \quad \forall \eta > t_0; \tag{2.8}$$

la propriété (2.8) signifie que les fonctions $u^{(j)}$, $j = 0, 1, \ldots,$ sont bornées de $[\eta, +\infty[$ dans E_m, $\forall m \geqslant 0$; de plus, la norme de $u^{(j)}$ dans $\mathcal{C}_b(\eta, +\infty; \mathrm{E}_m)$ est majorée par une constante dépendant de ν, Ω, u_0 et η.

Par ailleurs, nous montrons que, lorsque $t \longrightarrow +\infty$, le fluide tend vers l'état d'équilibre de façon très régulière (cf. aussi J.G. Heywood [14], R. Temam [11]).

THEOREME 2.3. – *Soit* $\mathrm{N} = 2$ *ou* 3. *Soit* $u_0 \in \mathrm{H}$.

Alors, il existe un réel $t_0 > 0$, *dépendant des données* ν, Ω, u_0, *tel que toute solution* u *du problème de Navier-Stokes associée à une force nulle vérifie*

$$u \in \mathcal{C}_b^\infty(\eta, +\infty; \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})), \quad \forall \eta > t_0.$$

De plus, lorsque $t \longrightarrow +\infty$, *la norme de* $u^{(j)}(t)$ *dans* $\mathrm{H}^m(\Omega)^\mathrm{N}$ *tend vers* 0 *exponentiellement, pour tous* $j = 0, 1, \ldots,$ *pour tous* $m = 0, 1, \ldots$

Ce résultat est démontré au § 4. Plus précisément, nous montrons qu'il existe un réel $t_1 > t_0$ et un réel $\overline{\xi}_1 \in]0,1[$ tel que

$$|u^{(j)}(t)|_m \leqslant k_{j,m} \exp[-\nu\lambda_1 \overline{\xi}_1 (t - t_1)], \quad \forall t \geqslant t_1 \tag{2.9}$$

où $k_{l,m}$ est une constante dépendant en outre des données ν, Ω, u_0, de t_1 et de t_0.

Remarque 2.4. – Si $N = 2$, la propriété (2.8) est vraie, pour tout $\eta > 0$ (cf. Remarque 1.7).

Remarque 2.5. – C. Foias – J.C. Saut [3] prouvent que, pour toute solution faible u du problème de Navier-Stokes associé à (2.7),

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \operatorname{Log} |u(t)| = -\nu\lambda(u), \qquad \lim_{t \to +\infty} \frac{u(t)}{|u(t)|} = v \quad \text{dans H},$$

où $\lambda(u)$ est l'une des valeurs propres de A et v un vecteur propre associé. De plus, pour u_0 petit dans V, $\lambda(u)$ est "génériquement" égale à la plus petite valeur propre de A. Ultérieurement, L. Tartar [10] a montré que les relations ci-dessus sont vraies avec $|\cdot|$ remplacé par $\|\cdot\|$. Enfin, nous montrons (cf. [5]) que des propriétés analogues sont vérifiées dans tous les espaces $\mathbf{H}^m$, $m \geqslant 0$.

2.3. Application aux ensembles fonctionnels invariants.

Nous supposons ici que f est indépendant de t, $f(t) \equiv f$, où $f \in H$.

Nous notons $S(t)$ l'application $\begin{cases} u_0 \longrightarrow u(t) \\ V \longrightarrow V \end{cases}$, définie pour tout $t > 0$ si $N = 2$ et pour $t \in [0, t(u_0)[$, si $N = 3$. ($t(u_0)$ a été défini dans l'exemple 1.2).

Nous dirons qu'un sous-ensemble X de V est invariant (pour l'équation de Navier-Stokes correspondante) si :

$$t(u) = +\infty \ \forall u \in X, \qquad S(t)X = X \ \forall t > 0$$

(cf. C. Foias – R. Temam [4]).

En [4], il a été montré en particulier que tout ensemble invariant borné dans V, est de dimension de Hausdorff finie, et donc de dimension finie.

Ici, nous déduisons du Théorème 2.1 un résultat de régularité : tout ensemble invariant, borné dans V, est contenu dans $V \cap \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})^N$.

THEOREME 2.6. – *Soit* $N = 2$ *ou* 3. *Supposons que* f *est indépendante de* t *et que* f *appartient à* $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})^N \cap H$.

Alors, tout ensemble invariant, borné dans V, *correspondant à l'équation de Navier-Stokes de donnée* f, *est contenu dans l'espace* $\mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})^N \cap V$.

Remarque 2.7. – Même en dimension d'espace $N = 2$, nous ne connaissons pas de condition impliquant la propriété "l'ensemble invariant X est borné dans V". Toutefois, dans le cas $N = 2$, si u désigne la solution faible de (1.7)-(1.8) (i.e. vérifiant (1.9)), alors il existe un ensemble fonctionnel invariant X, borné dans V, tel que la distance dans H de $u(t)$ à X tende vers 0 quand $t \longrightarrow +\infty$ (cf. C. Foias – R. Temam [4]). Dans le cas $N = 3$, d'après la Proposition 2.3, si X est borné dans $\mathbf{H}^{1/2+\epsilon}$, $\epsilon > 0$, alors il est borné dans V. □

Remarque 2.8. – Du Théorème 2.3, nous déduisons que tout ensemble attracteur, borné dans V, est constitué de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$. Cette propriété est l'analogue de celle vérifiée par les solutions stationnaires ou périodiques en temps des équations de Navier-Stokes. □

Remarque 2.9. – *Il nous paraît important de remarquer que s'il existe des ensembles fonctionnels invariants non bornés dans* V, *alors la conjecture de Leray* [7] *sur la turbulence serait confirmée* (c'est-à-dire, existence, pour des données régulières, de solutions $u(t)$ des équations de Navier-Stokes qui ne sont pas bornées dans V). □

Idée de la démonstration du Théorème 2.6. – (cf. R. Temam [12]).

Nous utilisons la propriété d'analyticité du semi-groupe $S(t)$ qui implique que $S(t)$ est bijectif. Puis, nous utilisons le Théorème 2.1. □

Remarque 2.10. – Tous les résultats qui précèdent, s'étendent sans modification aucune au cas où Ω est un cube de $\mathbf{R}^N$, $\Omega = Q = (0, L)^N$ (par exemple) et où les conditions aux limites en x sont la périodicité de période L par rapport à chaque coordonnée x_i. On se reportera à R. Temam [12] pour les modifications à apporter dans ce cas dans les définitions des espaces $\mathcal{V}$, H, V, V', E_m, ... et des opérateurs A, B, ... □

3. ESTIMATIONS DES DERIVEES DE *u* PAR RAPPORT AU TEMPS

Nous supposons dans ce paragraphe que u est une solution du problème (1.7)-(1.8) vérifiant $u \in L^\infty(t_0, +\infty; V)$, où $t_0 \geqslant 0$ est fixé.

Soit $\eta > t_0$ et soit X un Banach. Nous dirons qu'une fonction v de $L^\infty(\eta, +\infty; X)$ (resp. $\mathcal{E}(\eta, +\infty; X)$) vérifie la condition (N.C.) si la norme de v dans cet espace est majorée par une constante ne dépendant que des données ν, Ω, f, u_0, de t_0, de η et de $|u|_{L^\infty(t_0, +\infty; V)}$.

3.1.

Nous énonçons ici un résultat de régularité disant que les fonctions dérivées $u^{(j)}$, $j = 0, 1, \ldots$ sont des fonctions continues bornées à valeurs dans D(A) où j est aussi grand que la régularité de f le permet.

PROPOSITION 3.1. – *Soit* $N = 2$ *ou* 3. *Les hypothèses sur les données* u_0 et f *sont celles du Théorème 2.1 avec* $m = 2\ell$ *ou* $2\ell + 1$, $\ell \geqslant 0$.

Soit u *une solution forte du problème de Navier-Stokes associée aux données* u_0 *et* f *vérifiant*

$$u \in L^\infty(t_0, +\infty; V), \quad t_0 \geqslant 0 \text{ fixé.} \tag{3.1}$$

Alors, les fonctions dérivées de u *par rapport au temps vérifient*

$$u^{(j)} \in \mathcal{C}_b(\eta, +\infty; D(A)) \cap \mathcal{E}(\eta, +\infty; E_3), \quad j = 0, \ldots, \ell - 1, \tag{3.2}$$

$$u^{(\ell)} \in \mathcal{C}_b(\eta, +\infty; V_{m-2\ell}) \cap \mathcal{E}(\eta, +\infty; V_{m-2\ell+1})^{(4)}, \tag{3.3}$$

$$u^{(\ell+1)} \in \mathcal{E}(\eta, +\infty; V_{m-2\ell-1})^{(4)} \quad \text{pour tout } \eta > t_0. \tag{3.4}$$

De plus, ces fonctions vérifient la condition (N.C.).

Ce résultat, qui nous permet de donner une démonstration du Théorème 2.1 au § 3.2, sera démontré au cours des § 3.3 à 3.5.

---

(4) La suite d'espaces $V_{m-2\ell+1}$, $V_{m-2\ell}$, $V_{m-2\ell-1}$ est égale à V, H, V' si $m = 2\ell$, et à $D(A), V, H$ si $m = 2\ell + 1$.

Dans tout ce qui suit, nous supposerons $N = 3$ (les cas $N = 2$ et $N = 3$ diffèrent en ce qui concerne les majorations du terme non linéaire mais d'après la propriété (1.1), les majorations données pour $N = 3$ sont vérifiées aussi pour $N = 2$). Par ailleurs, les majorations données feront clairement apparaître que toutes les fonctions concernées vérifient la condition (N.C.) sous l'hypothèse (3.1) : cette propriété sera donc implicitement supposée démontrée.

3.2. Démonstration du Théorème 2.1.

Pour $m = 0, 1, 2$, le résultat du Théorème est contenu dans la Proposition 3.1. Soit donc $m \geqslant 3$ et $\ell = \left[\frac{m}{2}\right]$.

Soit $\eta > t_0$. Utilisant la propriété (1.2) de B, la propriété $u^{(\ell)} \in \mathcal{C}_b(\eta, +\infty; E_{m-2\ell})$ donnée par la Proposition 3.3 et la relation

$$u^{(j)} = (-\nu A)^{-1} (u^{(j+1)} - g^{(j)}), \quad j = 0, \ldots, \ell - 1, \tag{3.5}$$

nous montrons de proche en proche que la propriété (2.5) est vérifiée.

i) Montrons que

$$u^{(j)} \in \mathcal{C}_b(\eta, +\infty; E_{m-2\ell+2}), \quad j = 0, \ldots, \ell - 1. \tag{3.6}$$

Si $m = 2\ell$, cela est contenu dans la Proposition 3.1.

Si $m = 2\ell + 1$, de la propriété (3.2), de la continuité (1.2) de B, nous déduisons que les fonctions $[B(u)]^{(j)}$, $j = 0, \ldots, \ell - 1$, appartiennent à $\mathcal{C}_b(\eta, +\infty; E_1)$ et

$$|B(u(t))^{(j)}|_1 \leqslant c_j \sum_{p=0}^{j} |u^{(j-p)}(t)|_2 \, |u^{(p)}(t)|_2 . \tag{3.7}$$

Puis, de la relation (3.5) et de $u^{(\ell)} \in \mathcal{C}_b(\eta, +\infty; E_1)$, nous déduisons que (3.6) est vérifié pour $m = 2\ell + 1$.

Nous avons donc en particulier démontré le Théorème pour $m = 3$.

ii) Supposons $\ell \geqslant 2$ et soit $s \in \{1, \ldots, \ell - 1\}$. Par deux applications successives du raisonnement fait en i) (i.e. utilisation de la continuité (1.2) de B et de la relation (3.5)), nous montrons que

$$\left.\begin{array}{l} u^{(j)} \in \mathcal{C}_b(\eta\,,+\infty\,;\mathrm{E}_{m-2\ell+2s}) \\ j=0,\ldots,\ell-s \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} u^{(j)} \in \mathcal{C}_b(\eta\,,+\infty\,;\mathrm{E}_{m-2\ell+2s+2}) \\ j=0,\ldots,\ell-s-1\,. \end{array}\right. \tag{3.8}$$

Comme, d'après le i), la première propriété (3.8) est vérifiée pour $s = 1$, nous avons montré (par récurrence sur s) que

$$u^{(j)} \in \mathcal{C}_b(\eta\,,+\infty\,;\mathrm{E}_{m-2\ell+2s})\,, \quad j=0,\ldots,\ell-s\,, \quad s=1,\ldots,\ell\,.$$

En particulier, pour $j = \ell - s$ et $s = 0,\ldots,\ell$, nous obtenons

$$u^{(j)} \in \mathcal{C}_b(\eta\,,+\infty\,;\mathrm{E}_{m-2j})\,, \quad j=0,\ldots,\ell\,. \qquad \square$$

3.3. Démonstration de la Proposition 3.1. dans le cas $m = 0$ et $m = 1$.

a) $m = 0$

Nous supposons que $u_0 \in \mathrm{H}$ et $f \in \mathcal{C}_b(0\,,+\infty\,;\mathrm{V}')$, et nous montrons que, sous l'hypothèse (3.1), nous avons un peu plus que (3.2)-(3.4) :

$$u \in \mathcal{C}_b(t_0\,,+\infty\,;\mathrm{H}) \cap \mathcal{E}(0\,,+\infty\,;\mathrm{V})\,,$$
$$u' \in \mathcal{E}(t_0\,,+\infty\,;\mathrm{V}')\,.$$

Nous avons déjà remarqué (cf. Exemple 1.4) que

$$u \in \mathcal{C}_b(0\,,+\infty\,;\mathrm{H}_{\mathrm{faible}}) \cap \mathcal{E}(0\,,+\infty\,;\mathrm{V})\,.$$

Par ailleurs, la fonction $u' \doteq \nu \mathrm{A}u + f - \mathrm{B}(u)$ appartient à l'espace $\mathcal{E}(t_0\,,+\infty\,;\mathrm{V}')$ car $u \in \mathrm{L}^\infty(t_0\,,+\infty\,;\mathrm{V})$ et $\mathrm{B}u \in \mathrm{L}^\infty(t_0\,,+\infty\,;\mathrm{V}')$ puisque

$$\|\mathrm{B}(u(t))\|_* \leqslant c_1\,\|u(t)\|\,|u(t)|_{1/2} \leqslant c_1'\,|u(t)|^{1/2}\,\|u(t)\|^{3/2}\,.$$

Par interpolation entre les espaces V et V′ (cf. J.L. Lions – E. Magenes [9]), nous déduisons alors que $u \in \mathcal{C}_b(t_0\,,+\infty\,;\mathrm{H})$, puis que $u' \in \mathcal{E}(t_0\,,+\infty\,;\mathrm{V}')$.

b) $m = 1$

Nous supposons que $u_0 \in \mathrm{H}$ et $f \in \mathcal{C}_b(0\,,+\infty\,;\mathrm{H})$. Montrons que, sous l'hypothèse (3.1),

$$\begin{array}{l} u \in \mathcal{C}_b(\eta\,,+\infty\,;\mathrm{V}) \cap \mathcal{E}(\eta\,,+\infty,\mathrm{D(A)})\,, \\ u' \in \mathcal{E}(\eta\,,+\infty\,;\mathrm{H})\,, \quad \forall \eta > t_0\,. \end{array} \tag{3.9}$$

L'inégalité (1.10) et l'hypothèse (3.1) impliquent que

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2 + \nu\,|\mathrm{A}u(t)|^2 \leqslant \frac{2}{\nu}\,|f|_{0,\infty}^2 + \frac{c_0}{\nu^3}\,|u|_{1,\infty}^6\,, \qquad \text{p.p. } t \geqslant t_0\,. \tag{3.10}$$

Soit $\eta > t_0$. D'après l'hypothèse (3.1), il existe $t_1 \in (t_0\,,\eta)$ tel que $u(t_1) \in \mathrm{V}$. L'inégalité (3.10) implique alors que

$$u \in \mathcal{E}(t_1\,, +\infty\,; \mathrm{D(A)})\,.$$

Par ailleurs, la fonction $u' = -\nu \mathrm{A}u + f - \mathrm{B}(u)$ appartient à l'espace $\mathcal{E}(t_1\,,+\infty\,;\mathrm{H})$ car $u \in \mathrm{L}^\infty(t_0\,,+\infty\,;\mathrm{V})$ et

$$|\mathrm{B}(u(t))| \leqslant c_2\,\|u(t)\|^{3/2}\,|\mathrm{A}u(t)|^{1/2} \leqslant c_2'\,|u|_{1,\infty}^{3/2}\,|\mathrm{A}u(t)|^{1/2}\,. \tag{3.11}$$

Par interpolation entre les espaces $\mathrm{D(A)}$ et H, nous déduisons alors que $u \in \mathcal{C}_b(\eta\,, +\infty\,;\mathrm{V})$.

Remarque 3.2. – D'après ce qui précède, si $u(t_0) \in \mathrm{V}$ et $m = 1$, alors la fonction u est continue bornée de $[t_0\,, +\infty[\longrightarrow \mathrm{V}$ (sous l'hypothèse (3.1)).

3.4. Démonstration de la Proposition 3.1. dans le cas $m \geqslant 2$.

Soit $m \geqslant 2$ et $\ell = \left[\frac{m}{2}\right]$. Nous faisons les hypothèses

$$u_0 \in \mathrm{H}\,, \tag{3.12}$$

$$\begin{cases} f^{(j)} \in \mathcal{C}_b(0\,,+\infty\,;\mathrm{E}_{m-2j}) \quad , \quad j = 0,\ldots,\ell-1\,, \\ f^{(\ell)} \in \begin{cases} \mathcal{C}_b(0\,,+\infty\,;\mathrm{V}') & \text{si} \quad m = 2\ell\,, \\ \mathcal{C}_b(0\,,+\infty\,;\mathrm{H}) & \text{si} \quad m = 2\ell+1\,. \end{cases} \end{cases} \tag{3.13}$$

D'après la Proposition 3.1. appliquée pour $m = 1$, toute solution u vérifiant $u \in \mathrm{L}^\infty(t_0\,,+\infty\,;\mathrm{V})$ est une solution forte des équations de Navier-Stokes et vérifie

$$\begin{cases} u \in \mathcal{C}_b(\eta\,,+\infty\,;\mathrm{V}) \cap \mathcal{E}(\eta\,,+\infty\,;\mathrm{D(A)})\,, \\ u' \in \mathcal{E}(\eta\,,+\infty\,;\mathrm{H}) \quad , \quad \forall \eta > t_0\,. \end{cases} \tag{3.14}$$

De plus, la fonction u est, sur tout intervalle borné $[\eta\,, t_1]$, aussi régulière que f le permet, c'est-à-dire

$$u^{(j)} \in \mathcal{C}([\eta\,,t_1]\,;\mathrm{E}_{m-2j}) \quad , \quad j = 0,\ldots,\ell\,,$$

pour tous $\eta\,,t_1$ vérifiant $t_0 < \eta < t_1$ (cf. R. Temam [13]).

Le schéma de la démonstration de la Proposition 3.1. pour $m \geqslant 2$ est le même que pour $m \leqslant 1$, mais le fait qu'un grand nombre de fonctions $u^{(j)}$ est concerné rend l'exposé plus délicat.

Les lemmes suivants permettent une présentation systématique de la démonstration de la Proposition.

LEMME 3.3. – *Soit* $(\mathrm{X}_0\,,\mathrm{X}_1\,,\mathrm{X}_2\,,\mathrm{X}_3)$ *la suite d'espaces* $(\mathrm{H}\,,\mathrm{V}\,,\mathrm{D(A)}\,,\mathrm{E}_3)$ (*resp.* $(\mathrm{V}'\,,\mathrm{H}\,,\mathrm{V}\,,\mathrm{D(A)})$).

Soit $j \in \{1\,,\ldots,\ell-1\}$ *si* $m = 2\ell$, $\{1\,,\ldots,\ell\}$ *si* $m = 2\ell+1$ (*resp.* $j \in \{1\,,\ldots,\ell\}$).

Supposons que

$$\begin{aligned} &u^{(p)} \in \mathcal{C}_b(\eta\,,+\infty\,;\mathrm{X}_2) \cap \mathcal{E}(\eta\,,+\infty\,;\mathrm{X}_3) \quad , \quad p = 0,\ldots,j-1\,,\\ &u^{(j)} \in \mathcal{E}(\eta\,,+\infty\,;\mathrm{X}_1) \quad , \quad \forall \eta > t_0\,, \end{aligned} \tag{3.15}$$

et que les fonctions $u,\ldots,u^{(j)}$ *vérifient la condition (N.C.).*

Alors

$$\begin{aligned} &u^{(j)} \in \mathcal{C}_b(\eta\,,+\infty\,;\mathrm{X}_1) \cap \mathcal{E}(\eta\,,+\infty\,;\mathrm{X}_2)\,,\\ &u^{(j+1)} \in \mathcal{E}(\eta\,,+\infty\,;\mathrm{X}_0) \quad , \quad \forall \eta > t_0\,, \end{aligned} \tag{3.16}$$

et les fonctions $u^{(j)}$ *et* $u^{(j+1)}$ *satisfont la condition (N.C.) dans ces espaces.*

LEMME 3.4. – *Soit* $j \in \{0\,,\ldots,\ell-1\}$.

Supposons que(5)

$$\begin{aligned} &u^{(p)} \in \mathcal{C}_b(\eta\,,+\infty\,;\mathrm{D(A)}) \cap \mathcal{E}(\eta\,,+\infty\,;\mathrm{E}_3) \quad , \quad p = 0,\ldots,j-1\,,\\ &u^{(j)} \in \mathcal{C}_b(\eta\,,+\infty\,;\mathrm{V}) \cap \mathcal{E}(\eta\,,+\infty\,;\mathrm{D(A)})\,,\\ &u^{(j+1)} \in \mathcal{C}_b(\eta\,,+\infty\,;\mathrm{H}) \cap \mathcal{E}(\eta\,,+\infty\,;\mathrm{V}) \quad , \quad \forall \eta > t_0\,, \end{aligned} \tag{3.17}$$

et que les fonctions $u,\ldots,u^{(j+1)}$ *vérifient la condition (N.C.).*

Alors

$$u^{(j)} \in \mathcal{C}_b(\eta\,,+\infty\,;\mathrm{D(A)}) \cap \mathcal{E}(\eta\,,+\infty\,;\mathrm{E}_3) \quad , \forall \eta > t_0\,, \tag{3.18}$$

et la fonction $u^{(j)}$ *satisfait la condition (N.C.) dans ces espaces.*

(5) La première condition (3.17) n'existe pas si $j = 0$.

Les lemmes seront démontrés au § 3.5. Admettant pour l'instant ces lemmes, nous sommes en mesure de donner une démonstration de la Proposition 3.1.

Démonstration de la Proposition 3.1. – Nous effectuons une récurrence sur $j = 0, \ldots, \ell$ de la manière suivante :

i) Appliquons le Lemme 3.3 avec

$$(X_0, X_1, X_2, X_3) = (V', H, V, D(A))$$

et avec $j = 1$: d'après (3.14), nous obtenons

$$\begin{aligned} &u' \in \mathcal{C}_b(\eta, +\infty; H) \cap \mathcal{E}(\eta, +\infty; V) \\ &u'' \in \mathcal{E}(\eta, +\infty; V') \quad , \quad \forall \eta > t_0 , \end{aligned} \tag{3.19}$$

puis, du Lemme 3.4, nous déduisons que

$$u \in \mathcal{C}_b(\eta, +\infty; D(A)) \cap \mathcal{E}(\eta, +\infty; E_3) \quad , \quad \forall \eta > t_0 . \tag{3.20}$$

Donc, si $m = 2$, la Proposition 3.1 est démontrée. Si $m = 3$, la Proposition sera montrée au § iv).

ii) Nous supposons ici $m \geqslant 4$ et nous fixons $j \in \{1, \ldots, \ell - 1\}$.

Nous montrons que

$$\begin{aligned} &u^{(p)} \in \mathcal{C}_b(\eta, +\infty; D(A)) \cap \mathcal{E}(\eta, +\infty; E_3) \quad , \quad p = 0, \ldots, j-1 , \\ &u^{(j)} \in \mathcal{E}(\eta, +\infty; V) \quad , \quad \forall \eta > t_0 . \end{aligned} \tag{3.21}$$

Appliquons le Lemme 3.3 avec $(X_0, X_1, X_2, X_3) = (H, V, D(A), E_3)$, nous obtenons

$$\begin{aligned} &u^{(j)} \in \mathcal{C}_b(\eta, +\infty; V) \cap \mathcal{E}(\eta, +\infty; D(A)) , \\ &u^{(j+1)} \in \mathcal{E}(\eta, +\infty; H) , \end{aligned} \tag{3.22}$$

puis nous appliquons de nouveau le Lemme 3.3 avec

$$(X_0, X_1, X_2, X_3) = (V', H, V, D(A))$$

et j remplacé par $j + 1$, et nous obtenons

$$\begin{aligned} &u^{(j+1)} \in \mathcal{C}(\eta, +\infty; H) \cap \mathcal{E}(\eta, +\infty; V) , \\ &u^{(j+2)} \in \mathcal{E}(\eta, +\infty; V') \quad , \quad \forall \eta > t_0 . \end{aligned} \tag{3.23}$$

Enfin, appliquant le Lemme 3.4, nous obtenons

$$u^{(j)} \in \mathcal{C}_b(\eta, +\infty ; D(A)) \cap \mathcal{E}(\eta, +\infty ; E_3) \quad , \quad \forall \eta > t_0 \,. \tag{3.24}$$

De (3.22)-(3.24), nous déduisons que la propriété (3.21) est vraie avec j remplacé par $(j+1)$. Mais, comme d'après (3.19)-(3.20) la propriété (3.21) est vraie pour $j = 1$, nous avons démontré par récurrence que

$$\begin{aligned} &u^{(p)} \in \mathcal{C}_b(\eta, +\infty ; D(A)) \cap \mathcal{E}(\eta, +\infty ; E_3) \quad , \quad p = 0, \ldots, \ell - 1 \,, \\ &u^{(\ell)} \in \mathcal{E}(\eta, +\infty ; V) \quad , \quad \forall \eta > t_0 \,. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Cela démontre la propriété (3.2).

iii) De plus, les propriétés (3.23) sont vraies pour $j = \ell - 1$ et en particulier

$$\begin{aligned} &u^{(\ell)} \in \mathcal{C}_b(\eta, +\infty ; H) \cap \mathcal{E}(\eta, +\infty ; V) \,, \\ &u^{(\ell+1)} \in \mathcal{E}(\eta, +\infty ; V') \quad , \quad \forall \eta > t_0 \,. \end{aligned}$$

Cela démontre la Proposition pour $m = 2\ell$, $\ell \geqslant 2$.

iv) Soit $m = 2\ell + 1$, avec $\ell \geqslant 1$. Nous appliquons le Lemme 3.3 avec $(X_0, X_1, X_2, X_3) = (H, V, D(A), E_3)$ et $j = \ell$.

De (3.19)-(3.20) si $\ell = 1$ ou de (3.25) si $\ell > 1$, nous déduisons les propriétés (3.3)-(3.4). Cela démontre la Proposition pour $m = 2\ell + 1$, $\ell \geqslant 1$. □

3.5. Démonstration du Lemme 3.3.

Soit $\eta > t_0$.

a) Montrons l'existence d'un réel $t_1 \in]t_0, \eta[$ tel que $u^{(j)}$ soit solution du problème de Cauchy

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{d}{dt} u^{(j)}(t) + \nu A u^{(j)}(t) = [f(t) - B(u(t))]^{(j)} \quad , \quad \text{p.p. } t \geqslant t_1 \,, \\ &u^{(j)}(t_1) \in X_1 \,, \end{aligned} \right. \tag{3.26}$$

et tel que la norme de $u^{(j)}(t_1)$ dans X_1 soit majorée par une constante ne dépendant que des données, de t_0, η et de $|u|_{L^\infty(t_0, +\infty; V)}$.
La première relation (3.26) est déduite par dérivation de (1.7).

Raisonnons par l'absurde : soit $\tau \in \left[t_0, \dfrac{t_0+\eta}{2}\right]$ et supposons que

$$|u^{(j)}(t)|_{X_1}^2 \geqslant R > 0 \quad , \quad \forall t \in (\tau, \eta).$$

Comme $u^{(j)} \in \mathcal{E}(\tau, +\infty; X_1)$, nous avons

$$R\,\frac{\eta - t_0}{2} < R(\eta - \tau) \leqslant \int_\tau^\eta |u^{(j)}(s)|_{X_1}^2\, ds \leqslant [u^{(j)}]_{X_1, \eta-\tau}^2$$
$$\leqslant [u^{(j)}]_{X_1, \eta - t_0}^2 .$$

Choisissant par exemple $R = 2\,[u^{(j)}]_{X_1, \eta - t_0}^2/(\eta - t_0)$, nous obtenons l'existence de $t_1 \in]t_0, \eta[$ tel que

$$u^{(j)}(t_1) \in X_1 \quad \text{et} \quad |u^{(j)}(t_1)|_{X_1}^2 \leqslant 2\,[u^{(j)}]_{X_1, \eta - t_0}^2/(\eta - t_0).$$

b) Montrons que $g^{(j)} = [f - B(u)]^{(j)}$ appartient à $L^2_{loc}(t_1, +\infty; X_0)$.

Nous écrivons

$$B(u(t))^{(j)} = \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} B(u^{(j-k)}(t), u^{(k)}(t)).$$

i) Cas où $(X_0, X_1, X_2, X_3) = (H, V, D(A), E_3)$.

D'après la propriété (1.1), nous obtenons

$$|B(u(t))^{(j)}| \leqslant c_j \Big(\sum_{k=1}^{j} \|u^{(k)}(t)\|\,|Au^{(j-k)}(t)|\Big) \quad , \quad \text{p.p. } t \geqslant t_1$$

ce qui, avec l'hypothèse (3.15), implique le résultat désiré.

De plus, nous avons aussi la majoration

$$|B(u(t))^{(j)}| \leqslant c_j' \Big(\sum_{k=0}^{j} \|u^{(j-k)}(t)\|\,\|u^{(k)}(t)\|^{1/2}\,|Au^{(k)}(t)|^{1/2}\Big),$$

soit, en utilisant (3.15),

$$|B(u(t))^{(j)}| \leqslant K_j(|u|_{1,\infty})\,(1 + \|u^{(j)}(t)\| + \|u^{(j)}(t)\|^{1/2}\,|Au^{(j)}(t)|^{1/2}), \tag{3.27}$$

où $K_j(|u|_{1,\infty})$ est une constante dépendant en outre des données, de t_0 et η.

ii) Cas où $(X_0, X_1, X_2, X_3) = (V', H, V, D(A))$.

De la propriété (1.1), nous déduisons que

$$g^{(j)} \in \mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(t_1\,,+\infty\,;\mathrm{V}_{-3/2})$$

avec $$|\,\mathrm{B}(u(t))^{(j)}\,|_{-3/2} \leqslant c_j\left(\sum_{k=0}^{j-1}\,|\,u^{(j-k)}(t)|\;\|u^{(k)}(t)\|\right);$$

puis, de l'équation (3.26), nous déduisons que

$$u^{(j)} \in \mathcal{C}(t_1\,,+\infty\,;\mathrm{V}_{1/2}) \cap \mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(t_1\,,+\infty\,;\mathrm{V}_{1/2})\,.$$

Enfin, de la propriété (1.1), nous déduisons le résultat désiré avec

$$\|\,\mathrm{B}(u(t))^{(j)}\,\|_* \leqslant c'_j\left(\sum_{k=0}^{j-1}\,|\,u^{(j-k)}(t)|_{1/2}\;\|u^{(k)}(t)\|\right)$$

soit, d'après l'hypothèse (3.15),

$$\|\,\mathrm{B}(u(t))^{(j)}\,\|_* \leqslant \mathrm{K}_j(|\,u\,|_{1,\infty})\,(1+|\,u^{(j+1)}(t)|^{1/2}\;\|u^{(j+1)}(t)\|^{1/2})\,. \quad (3.28)$$

c) De a) et b) nous déduisons que la fonction $u^{(j)}$ appartient à $\mathcal{C}(t_1\,,+\infty\,;\mathrm{X}_1) \cap \mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(t_1\,,+\infty\,;\mathrm{X}_2)$. De plus, $u^{(j)}$ vérifie l'estimation a priori

$$\frac{d}{dt}\,|\,u^{(j)}(t)|^2_{\mathrm{X}_1} + \nu\,|\,u^{(j)}(t)|^2_{\mathrm{X}_2} \leqslant \mathrm{K}'_j(|\,u\,|_{1,\infty})\,(1+|\,u^{(j)}(t)|^2_{\mathrm{X}_1})\,,$$
$$\text{p.p.} \quad t \geqslant t_1\,, \quad (3.29)$$

où $\mathrm{K}'_j(|\,u\,|_{1,\infty})$ est une constante dépendant en outre des données, de η et de t_0.

En effet, formellement[(6)], nous multiplions l'équation (3.26) par $u^{(j)}(t)$ dans H et nous majorons $g^{(j)}(t)$ en utilisant l'estimation (3.27) ou (3.28). Une formule de Young permet d'obtenir (3.29).

d) Le Lemme 1.6 appliqué à la fonction $t \longrightarrow \phi(t) = |\,u^{(j)}(t)|^2_{\mathrm{X}_1}$ montre que $u^{(j)} \in \mathcal{C}_b(t_1\,,+\infty\,;\mathrm{X}_1) \cap \mathcal{E}(t_1\,,+\infty\,;\mathrm{X}_2)$.

Enfin, des inégalités (3.27) ou (3.28), nous déduisons que la fonction $g^{(j)} \in \mathcal{E}(t_1\,,+\infty\,;\mathrm{X}_0)$ et donc que $u^{(j+1)} = -\nu\,\mathrm{A}u^{(j)} + g^{(j)}$ appartient à $\mathcal{E}(t_1\,,+\infty\,;\mathrm{X}_0)$.

---

(6) L'inégalité (3.29) est en fait obtenue pour les fonctions approximées $(u_n^{(j)})_{n\in\mathbf{N}}$ de $u^{(j)}$ par une méthode de Galerkin, puis, pour la fonction u, par passage à la limite quand $n \longrightarrow +\infty$.

Démonstration du Lemme 3.4. – Soit $\eta > t_0$.

Des hypothèses (3.17), de la relation (3.11) pour $j = 0$ ou de la relation (3.27) pour $j \geqslant 1$, nous déduisons que la fonction

$$u^{(j)} = (-\nu \mathrm{A})^{-1} (u^{(j+1)} - g^{(j)})$$

vérifie

$$|\mathrm{A}u^{(j)}(t)| \leqslant \mathrm{K}_j''(|u|_{1,\infty})(1 + |\mathrm{A}u^{(j)}(t)|^{1/2}) \quad , \quad \text{p.p. } t \geqslant \eta ,$$

ce qui prouve en utilisant l'inégalité de Young que

$$u^{(j)} \in \mathrm{L}^\infty(\eta, +\infty; \mathrm{D(A)}) .$$

De la propriété (1.3) et du fait que les fonctions $u^{(p)}, p = 0, \ldots, j$, appartiennent à $\mathrm{L}^\infty(\eta, +\infty; \mathrm{D(A)}) \cap \mathcal{C}(\eta, +\infty; \mathrm{V})$, nous déduisons que l'application $t \longrightarrow \mathrm{B}(u(t))^{(j)}$ est continue de $[\eta, +\infty[$ dans H et donc que la fonction $u^{(j)}$ est continue de $[\eta, +\infty[$ dans D(A).

Enfin, d'après la propriété (1.2), nous avons

$$\|\mathrm{B}(u(t))^{(j)}\| \leqslant c_j''\Big(\sum_{k=0}^{j} |\mathrm{A}u^{(j-k)}(t)|\,|\mathrm{A}u^{(k)}(t)|\Big) \quad , \quad \text{p.p. } t \geqslant \eta,$$

ce qui prouve avec ce qui précède que la fonction $u^{(j)} \in \mathcal{E}(\eta, +\infty; \mathrm{E}_3)$.

□

4. ETUDE DU CAS OU $f = 0$

Dans ce paragraphe nous désignons par c_0 une constante telle que

$$|b(u, v, w)| \leqslant c_0 \begin{cases} \|u\|\,|\mathrm{A}v|\,|w| , & \forall (u, v, w) \in \mathrm{V} \times \mathrm{D(A)} \times \mathrm{H}, \\ \|u\|\,\|v\|\,\|w\| , & \forall (u, v, w) \in \mathrm{V} \times \mathrm{V} \times \mathrm{V} . \end{cases} \tag{4.1}$$

Soit $u_0 \in \mathrm{H}$. Soit u une solution faible des équations de Navier-Stokes, associée à u_0 et à $f \equiv 0$ et soit t_0 un réel, dépendant de ν, Ω, u_0, et éventuellement de u, tel que u vérifie $u \in \mathrm{L}^\infty(t_0, +\infty; \mathrm{V})$ (cf. § 2.2).

4.1. Une estimation de t_0.

LEMME 4.1. – *Soit* $u_0 \in \mathrm{H}$.

Il existe t_0, *vérifiant*

$$0 \leqslant t_0 \leqslant \frac{1}{2\nu}\left(\frac{c_0}{\nu}|u_0|\right)^2, \tag{4.2}$$

tel que toute solution u *soit décroissante dans* V *pour* $t \geqslant t_0$ *et converge vers* 0 *quand* $t \longrightarrow +\infty$.

Plus précisément, il existe une constante $\xi_0 \in]0,1[$ *telle que*

$$\|u(t)\| \leqslant \frac{\nu}{c_0} \exp[-\nu\lambda_1 \xi_0 (t - t_0)] \quad , \quad \forall t \geqslant t_0 . \tag{4.3}$$

Démonstration. – De (1.19)-(1.20), nous déduisons

$$|u(t)| \leqslant |u_0| \exp(-\nu\lambda_1 t) \quad , \quad \forall t \geqslant 0, \tag{4.4}$$

$$2\nu \left(\int_s^t \|u(\tau)\|^2 \, d\tau\right) \leqslant |u(s)|^2 \quad , \quad \forall s, t, \; 0 \leqslant s \leqslant t. \tag{4.5}$$

D'autre part, de l'équation (1.7) et de (4.1), nous déduisons

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2 + \nu|\mathrm{A}u(t)|^2 \leqslant c_0 \|u(t)\| \, |\mathrm{A}u(t)|^2 \quad , \quad \text{p.p. } t \geqslant 0,$$

soit

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2 + 2\nu\left(1 - \frac{c_0}{\nu}\|u(t)\|\right)|\mathrm{A}u(t)|^2 \leqslant 0 \quad , \quad \text{p.p. } t \geqslant 0. \tag{4.6}$$

Notons ξ la fonction de $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(0, +\infty)$ définie par

$$\xi(t) = 1 - \frac{c_0}{\nu}\|u(t)\| \quad , \quad \text{p.p. } t \geqslant 0. \tag{4.7}$$

Notons $t_* = \dfrac{1}{2\nu}\left(\dfrac{c_0}{\nu}|u_0|\right)^2$. De la relation (4.5), nous déduisons en raisonnant par l'absurde qu'il existe $t_0 \in [0, t_*]$ tel que $u(t_0) \in \mathrm{V}$ et tel que $\xi_0 = \xi(t_0) > 0$. En particulier $\|u(t_0)\| < \dfrac{\nu}{c_0}$.

Mais la relation (4.6), écrite au point $t = t_0$, montre que la fonction $t \longrightarrow \|u(t)\|$ est décroissante au voisinage de t_0 et vérifie

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2 + 2\nu\,\xi_0\lambda_1\,\|u(t)\|^2 \leqslant 0 \quad , \quad \text{p.p. } t \text{ au voisinage de } t_0\,. \tag{4.8}$$

En fait, l'ensemble $\{t \geqslant t_0 \mid \|u(s)\| \leqslant \|u(t_0)\|,\ \text{p.p. } s \in [t_0, t]\}$ coïncide avec l'intervalle $[t_0, +\infty[$ et donc la relation (4.8) est vraie pour presque tout $t \geqslant t_0$. Intégrant cette relation sur (t_0, t), nous obtenons que $u \in L^\infty(t_0, +\infty; V)$ avec

$$\begin{aligned}\|u(t)\| &\leqslant \|u(t_0)\| \exp[-\nu\lambda_1\,\xi_0(t - t_0)]\\ &\leqslant \frac{\nu}{c_0}\exp[-\nu\lambda_1\,\xi_0(t - t_0)] \quad , \quad \text{p.p. } t \geqslant t_0\,.\end{aligned} \tag{4.9}$$

Du théorème 2.1 et de la Remarque 3.2, nous déduisons alors $u \in \mathcal{C}_b(t_0, +\infty; V)$.

De plus, comme la fonction $t \longrightarrow \xi(t)$ est croissante pour $t \geqslant t_0$, nous déduisons de (4.8) que

$$\|u(t)\| < \frac{\nu}{c_0}\exp[-\nu\lambda_1\,\xi(\eta)\,(t - \eta)] \quad , \quad \forall (t, \eta) \quad , \quad t_0 \leqslant \eta \leqslant t\,. \quad \square \tag{4.10}$$

Remarque 4.2. – Donnons une meilleure estimation de t_0. Notons c_1 une constante telle que

$$|b(u, v, w)| \leqslant c_1\,\|u\|\,|v|_{3/2}\,|w| \quad , \quad \forall (u, v, w) \in V \times V_{3/2} \times H \tag{4.11}$$

Utilisant (4.11), nous obtenons au lieu de

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2 + 2\nu\left(1 - \frac{c_1}{\nu}\|u(t)\|^{3/2}\,|Au(t)|^{-1/2}\right)|Au(t)|^2 \leqslant 0\,,$$

soit en utilisant la relation

$$\|v\|^2 \leqslant |Av|\,|v| \quad , \quad \forall v \in D(A)\,, \tag{4.12}$$

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2 + 2\nu\left(1 - \frac{c_1}{\nu}\|u(t)\|^{1/2}\,|u(t)|^{1/2}\right)|Au(t)|^2 \leqslant 0\,.$$

De (4.5), nous déduisons alors l'existence d'un réel t'_0 vérifiant

$$0 \leqslant t'_0 \leqslant \frac{1}{2\nu\lambda_1}\ \text{Log}\left[1 + \left(\frac{c_1}{\nu}\,\lambda_1^{1/4}\,|u_0|\right)^4\right]$$

tel que la fonction $t \longrightarrow \|u(t)\|$ soit décroissante pour $t \geqslant t_0$ et vérifie l'inégalité (4.10) avec

$$\xi(t) = 1 - \frac{c_1}{\nu} \|u(t)\|^{1/2} \, |u(t)|^{1/2} \, . \qquad \square$$

Dans la suite du paragraphe 4, t_0 et ξ_0 sont fixés comme dans le Lemme 4.1. Du Théorème 2.1, nous déduisons alors que

$$u^{(j)} \in \mathcal{C}_b(\eta, +\infty ; \mathrm{E}_m) \ , \ \forall j = 0, 1, \ldots, \ \forall m = 0, 1, \ldots, \ \forall \eta > t_0 \tag{4.13}$$

et la norme de $u^{(j)}$ dans cet espace est majorée par une constante dépendant de j, m, η, des données $\nu, \Omega, |u_0|$, de t_0 et ξ_0.

4.2. Etude de la fonction u'.

LEMME 4.3. – *La fonction* $u' :]t_0, +\infty[\longrightarrow \mathrm{H}$ *est décroissante et converge vers* 0 *quand* $t \longrightarrow +\infty$. *De plus, il existe une constante* c_1, *dépendant de* Ω, ν, *telle que*

$$|u'(t)| < c_1 [\xi_0(\eta - t_0)]^{-1/2} \exp[-\nu\lambda_1 \xi(\eta)(t - \eta)] \ , \ \forall t \geqslant \eta > t_0 \, . \tag{4.14}$$

Démonstration. – a) En utilisant (4.1) et l'équation vérifiée par u', nous déduisons

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} |u'(t)|^2 + \nu \|u'(t)\|^2 \leqslant c_0 \|u'(t)\|^2 \|u'(t)\| \quad , \quad \forall t > t_0 \, ,$$

soit, d'après la définition (4.7) de ξ,

$$\frac{d}{dt} |u'(t)|^2 + 2\nu\xi(t) \|u'(t)\|^2 \leqslant 0 \quad , \quad \forall t > t_0 \, . \tag{4.15}$$

L'application $t \longrightarrow |u'(t)|$ est donc décroissante sur $]t_0, +\infty[$; de plus

$$|u'(t)| \leqslant |u'(\eta)| \exp[-\nu\lambda_1 \xi(\eta)(t - \eta)] \quad , \quad \forall t \geqslant \eta > t_0 \, .$$

b) Soit $\eta > t_0$. Nous cherchons à estimer $|u'(\eta)|$. De $u' = -\nu \mathrm{A}u - \mathrm{B}(u)$ nous déduisons

$$|u'(t)| \leqslant \nu \, |\mathrm{A}u(t)| + c_0 \|u(t)\| \, |\mathrm{A}u(t)| \leqslant \nu(2 - \xi(t)) \, |\mathrm{A}u(t)| \, . \tag{4.16}$$

Par ailleurs, d'après l'équation (4.6), nous avons

$$2\nu\xi_0 \left(\int_{t_0}^{\eta} |Au(t)|^2\, dt\right) \leqslant \|u(t_0)\|^2 < \left(\frac{\nu}{c_0}\right)^2 . \tag{4.17}$$

En raisonnant par l'absurde, nous déduisons de (4.17) qu'il existe $t_2 \in (t_0, \eta)$ tel que $|Au(t_2)| \leqslant \dfrac{\nu}{c_0}[2\nu\xi_0(\eta - t_0)]^{-1/2}$ et d'après (4.16) tel que

$$|u'(t_2)| \leqslant \frac{\nu^2}{c_0}(2-\xi_0)[2\nu\xi_0(\eta - t_0)]^{-1/2} \leqslant \frac{2\nu^2}{c_0}[2\nu\xi_0(\eta - t_0)]^{-1/2} .$$

Comme l'application $t \longrightarrow |u'(t)|$ est décroissante, nous avons $|u'(\eta)| \leqslant |u'(t_2)|$ et donc la relation (4.14) est vérifiée avec

$$c_1 = \frac{\nu}{c_0}(2\nu)^{1/2} .$$

□

LEMME 4.4 (cf. aussi J. Heywood [14]). – *La fonction* u *tend vers* 0 *dans* D(A) *quand* $t \to +\infty$ *et vérifie*

$$|Au(t)| < c_1[\xi_0^3(\eta - t_0)]^{-1/2} \exp[-\nu\lambda_1\xi(\eta)(t-\eta)] \quad , \quad \forall t \geqslant \eta > t_0 . \tag{4.18}$$

Démonstration. – De $\nu Au = -u' - B(u)$, nous déduisons

$$\nu\, |Au(t)| \leqslant |u'(t)| + c_0 \|u(t)\|\, |Au(t)| \quad , \quad \forall t > t_0$$

soit, d'après la définition de ξ,

$$\nu\xi_0\, |Au(t)| \leqslant \nu\xi(t)\, |Au(t)| \leqslant |u'(t)| \quad , \quad \forall t > t_0 .$$

Nous déduisons alors (4.18) de (4.14). □

Remarque 4.5. – De (4.4), (4.12) et (4.18), nous déduisons que

$$\|u(t)\| \leqslant c_1 |u_0| [\xi_0^3(\eta - t_0)]^{-1/2} \exp\left[-\nu\lambda_1 \frac{1+\xi(\eta)}{2}(t-\eta)\right] \quad \forall t \geqslant \eta > t_0 , \tag{4.19}$$

ce qui, comparé avec (4.10), donne une convergence plus rapide vers 0, quand $t \longrightarrow +\infty$. □

LEMME 4.6. – *Il existe un réel* t_1 *vérifiant*

$$t_0 \leqslant t_1 \leqslant t_0 + \frac{2}{\nu}\,\frac{1}{\xi_0^5 \lambda_1} \tag{4.20}$$

tel que la fonction $u' : [t_1, +\infty[\longrightarrow V$ *soit décroissante, converge vers* 0 *quand* $t \longrightarrow +\infty$. *Il existe une constante* $\zeta_1 \in]0, \xi_1[$ *dépendant de* ν, Ω, u_0 *et une constante* $k_{1,1}$ *dépendant de* ν, Ω, u_0, ξ_0 *et* t_1 *telles que*

$$\|u'(t)\| \leqslant k_{1,1} \exp[-\nu\lambda_1 \zeta_1 (t - t_1)] \quad , \quad \forall t \geqslant t_1 \, . \tag{4.21}$$

Démonstration. – a) De (4.1) et de l'équation vérifiée par u', nous déduisons

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u'(t)\|^2 + \nu\,|Au'(t)|^2 \leqslant c_0\,[\|u(t)\|\;|Au'(t)|^2 + \|u'(t)\|\;|Au(t)|\;|Au'(t)|]$$

soit

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u'(t)\|^2 + \nu\left[1 - \frac{c_0}{\nu}\|u(t)\| - \frac{c_0}{\nu}|Au(t)|\,\|u'(t)\|\,|Au'(t)|^{-1}\right] |Au'(t)|^2 \leqslant 0 \, .$$

De la propriété $\lambda_1^{1/2}\,\|v\| \leqslant |Av|$, $\forall v \in D(A)$, nous déduisons

$$\frac{d}{dt}\|u'(t)\|^2 + 2\nu\zeta(t)\,|Au'(t)|^2 \leqslant 0 \quad , \quad \forall t \geqslant \eta > t_0 \, , \tag{4.22}$$

où nous avons noté ζ la fonction de $\mathcal{C}_b(\eta, +\infty)$ définie par

$$\begin{aligned} \zeta(t) &= 1 - \frac{c_0}{\nu}\|u(t)\| - \frac{c_0}{\nu}\lambda_1^{-1/2}\,|Au(t)| \\ &= \xi(t) - \frac{c_0}{\nu}\lambda_1^{-1/2}\,|Au(t)| \quad , \quad \forall t \geqslant \eta \, . \end{aligned} \tag{4.23}$$

La fonction u convergeant vers 0 dans $D(A)$, quand $t \longrightarrow +\infty$, il existe $t_1 > t_0$ tel que $\zeta_1 = \zeta(t_1)$ soit strictement positif. De l'inégalité (4.22), nous déduisons que la fonction $t \longrightarrow \|u'(t)\|$ est décroissante pour $t \geqslant t_1$, converge vers 0 quand $t \longrightarrow +\infty$ et vérifie une estimation de la forme (4.21).

b) *Estimation de* t_1.

D'après (4.23), t_1 est tel que

$$|Au(t_1)| < \frac{\xi_1 \nu}{c_0} \lambda_1^{1/2} \quad , \quad t_1 > t_0 \,. \tag{4.24}$$

Comme d'après (4.18), nous avons

$$|Au(t_1)| < c_1 [\xi_0^3 (t_1 - t_0)]^{-1/2} \quad \text{et} \quad \xi_0 \leqslant \xi_1 \,,$$

la condition (4.24) sera vérifiée si $c_1 [\xi_0^3 (t_1 - t_0)]^{-1/2} \leqslant \dfrac{\xi_0 \nu}{c_0} \lambda_1^{1/2}$.

Donc, pour tout réel $t_1 \geqslant t_0 + \left(\dfrac{c_1 c_0}{\nu}\right)^2 \dfrac{1}{\lambda_1 \xi_0^5}$, la condition $\zeta(t_1) > 0$ est vérifiée. □

Remarque 4.7. – Un calcul de la constante $k_{1,1}$ donne

$$k_{1,1} = \exp\left[\frac{2}{\xi_0}\left(\frac{c_0}{\nu}|u_0|\right)^2\right] \frac{2}{c_0 \xi_0^2} (t_1 - t_0)^{-2}$$

où $t_1 > t_0$. □

Dans la suite, pour des raisons techniques (cf. § 4.3), nous allons fixer $\eta = t_1 > t_0$ tel que

$$\frac{\xi(t_1)}{2} = \frac{\xi_1}{2} < \zeta_1 \leqslant \xi_1 \,, \tag{4.25}$$

ce qui est bien sûr possible car $\dfrac{\xi(t)}{2} \longrightarrow \dfrac{1}{2}$ et $\zeta(t) \longrightarrow 1$ quand $t \longrightarrow +\infty$. L'estimation de t_1 correspondante à (4.20) est alors

$$t_0 < t_1 \leqslant t_0 + \frac{8}{\nu} \frac{1}{\xi_0^5 \lambda_1} \,. \tag{4.26}$$

4.3. Démonstration du Théorème 2.1.

Correspondant à la Proposition 3.1, nous avons le résultat suivant :

PROPOSITION 4.8. – *Il existe des constantes $k_{j,2}$, $j = 1, 2 \ldots$, dépendant des données et de t_1, telles que*

$$|Au^{(j)}(t)| \leqslant k_{j,2} \exp\left[-\nu \lambda_1 \frac{\xi_1}{2}(t - t_1)\right] \quad \forall t \geqslant t_1 \,, \quad \forall j = 1, 2, \ldots \tag{4.27}$$

Ce résultat permet de donner une démonstration du Théorème 2.2 similaire à celle du Théorème 2.1 : nous montrons par récurrence que pour tout $m = 0, 1, \dots$

$$\begin{cases} |u^{(j)}(t)|_{m-2j} \leqslant k_{j,m-2j} \exp\left(-\nu\lambda_1 \dfrac{\xi_1}{2}(t-t_1)\right) \quad , \quad \forall t \geqslant t_1 \, , \\ j = 0, \dots, \left[\dfrac{m}{2}\right] . \end{cases} \tag{4.28}$$

Cela montre l'inégalité (2.9) avec $\bar{\xi}_1 = \dfrac{\xi_1}{2}$.

Pour montrer la Proposition 4.8, nous utilisons les résultats suivants.

LEMME 4.9. – *Soit j un entier $\geqslant 2$.*

Supposons que

$$\begin{cases} |Au^{(p)}(t)| \leqslant k_{p,2} \exp\left(-\nu\lambda_1 \dfrac{\xi_1}{2}(t-t_1)\right) \quad , \quad \forall t \geqslant t_1 \, , \\ p = 1, \dots, j-1 \, . \end{cases} \tag{4.29}$$

Alors, il existe une constante $k_{j,1}$ dépendant des données telle que

$$\|u^{(j)}(t)\| \leqslant k_{j,1} \exp\left(-\nu\lambda_1 \frac{\zeta_1}{2}(t-t_1)\right) \quad , \quad \forall t \geqslant t_1 \, . \tag{4.30}$$

LEMME 4.10. – *Soit j un entier $\geqslant 1$.*

Supposons que(7)

$$\begin{cases} \|u^{(p)}(t)\| \leqslant k_{p,1} \exp\left[-\nu\lambda_1 \dfrac{\xi_1}{2}(t-t_1)\right] \quad , \quad p = 2, \dots, j-1 \, , \\ |u^{(j)}(t)| \leqslant k_{j,0} \exp\left[-\nu\lambda_1 \dfrac{\xi_1}{2}(t-t_1)\right] \, , \\ \|u^{(j)}(t)\| \leqslant k_{j,1} \exp\left[-\nu\lambda_1 \dfrac{\zeta_1}{2}(t-t_1)\right] \quad , \quad \forall t \geqslant t_1 \, . \end{cases} \tag{4.31}$$

---

(7) Pour $j = 1$ et 2, la première hypothèse n'existe pas.

Alors, il existe une constante $k_{j+1,0}$ *telle que*

$$|u^{(j+1)}(t)| \leqslant k_{j+1,0} \exp \left[-\nu\lambda_1 \frac{\xi_1}{2}(t-t_1)\right] \quad , \quad \forall t \geqslant t_1 \, . \tag{4.32}$$

LEMME 4.11. – *Soit* j *un entier* $\geqslant 1$.

Supposons que[8]

$$\left\{\begin{array}{ll} |\mathrm{A}u^{(p)}(t)| \leqslant k_{p,2} \exp \left[-\nu\lambda_1 \frac{\xi_1}{2}(t-t_1)\right] & , \quad p=1,\ldots,j-1 \, , \\ |u^{(j+1)}(t)| \leqslant k_{j+1,0} \exp \left[-\nu\lambda_1 \frac{\xi_1}{2}(t-t_1)\right] & , \quad \forall t \geqslant t_1 \, . \end{array}\right. \tag{4.33}$$

Alors, il existe une constante $k_{j,2}$ *telle que*

$$|\mathrm{A}u^{(j)}(t)| \leqslant k_{j,2} \exp \left[-\nu\lambda_1 \frac{\xi_1}{2}(t-t_1)\right] \quad , \quad \forall t \geqslant t_1 \, . \tag{4.34}$$

Démonstration de la Proposition 4.8. – Nous effectuons une récurrence de la manière suivante.

a) Nous appliquons le Lemme 4.10, puis le Lemme 4.11 pour $j=1$.

De (4.14) et (4.21), nous déduisons que

$$|u^{(2)}(t)| \leqslant k_{2,0} \exp \left[-\nu\lambda_1 \frac{\xi_1}{2}(t-t_1)\right] ,$$

$$|\mathrm{A}u'(t)| \leqslant k_{1,0} \exp \left[-\nu\lambda_1 \frac{\xi_1}{2}(t-t_1)\right] \quad , \quad \forall t \geqslant t_1 \, .$$

b) Soit $j \geqslant 2$. Supposons que

$$\begin{array}{ll} |\mathrm{A}u^{(p)}(t)| \leqslant k_{p,2} \exp \left[-\nu\lambda_1 \frac{\xi_1}{2}(t-t_1)\right] & , \quad p=1,\ldots,j-1 \, , \\ |u^{(j)}(t)| \leqslant k_{j,0} \exp \left[-\nu\lambda_1 \frac{\xi_1}{2}(t-t_1)\right] & , \quad \forall t \geqslant t_1 \, . \end{array} \tag{4.35}$$

(8) Pour $j=1$, la première hypothèse n'existe pas.

Alors, en appliquant successivement les Lemmes 4.9, 4.10, 4.11, nous déduisons que la propriété (4.35) est vérifiée avec j remplacé par $j+1$. Comme d'après le a), la propriété (4.35) est vraie pour $j = 2$, nous avons montré la Proposition. □

4.4. Démonstration des Lemmes 4.9 à 4.11.

Démonstration du Lemme 4.9. – Soit $j \geqslant 2$.

Précisons l'inégalité (3.29) dans le cas particulier $f \equiv 0$ et $(X_1, X_2) = (V, D(A))$:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u^{(j)}(t)\|^2 + \nu\,|Au^{(j)}(t)|^2 \leqslant c_0\,[\|u(t)\|\,|Au^{(j)}(t)|^2 + |Au(t)|\,\|u^{(j)}(t)\|\,|Au^{(j)}(t)|] + c_j\Big(\sum_{k=1}^{j-1}\|u^{(j-k)}(t)\|\,|Au^{(k)}(t)|\Big)\,|Au^{(j)}(t)| \tag{4.36}$$

soit, d'après la définition (4.23) de ζ,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u^{(j)}(t)\|^2 + \nu\zeta(t)\,|Au^{(j)}(t)|^2 \leqslant c_j\Big(\sum_{k=1}^{j-1}\|u^{(j-k)}(t)\|\,|Au^{k}(t)|\Big)\,|Au^{(j)}(t)|\,.$$

De l'inégalité de Young et de $\zeta(t) \geqslant \zeta_1$, $\forall t \geqslant t_1$, nous obtenons

$$\frac{d}{dt}\|u^{(j)}(t)\|^2 + \nu\zeta_1\,|Au^{(j)}(t)|^2 \leqslant c_j'\Big(\sum_{k=1}^{j-1}\|u^{(j-k)}(t)\|^2\,|Au^{(k)}(t)|^2\Big), \quad \forall t \geqslant t_1\,.$$

Des inégalités (4.27), nous déduisons que

$$\frac{d}{dt}\|u^{(j)}(t)\|^2 + \nu\zeta_1\,|Au^{(j)}(t)|^2 \leqslant c_j''\exp[-2\nu\lambda_1\xi_1(t-t_1)]\,, \quad \forall t \geqslant t_1$$

et donc, après intégration

$$\|u^{(j)}(t)\| \leqslant k_{j,1}\exp\left[-\nu\lambda_1\frac{\zeta_1}{2}(t-t_1)\right]\,, \quad \forall t \geqslant t_1\,. \quad \square$$

Démonstration du Lemme 4.10. – Soit $j \geqslant 1$.

Précisons l'inégalité (3.29) dans le cas particulier $f \equiv 0$ et $(X_1, X_2) = (H, V)$ $(j \longrightarrow j+1)$:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u^{(j+1)}(t)|^2 + \nu \|u^{(j+1)}(t)\|^2 \leqslant c_0 \|u(t)\| \, \|u^{(j+1)}(t)\|^2 + c_j \Big(\sum_{k=1}^{j} \|u^{(j+1-k)}(t)\| \, \|u^{(k)}(t)\| \Big) \|u^{(j+1)}(t)\| .$$

Soit, d'après (4.7) et l'inégalité de Young

$$\frac{d}{dt}|u^{(j+1)}(t)|^2 + \nu\xi_1 \|u^{(j+1)}(t)\|^2 \leqslant c_j' \Big(\sum_{k=1}^{j} \|u^{(j+1-k)}(t)\|^2 \, \|u^{(k)}(t)\|^2 \Big) \quad , \quad \forall t \geqslant t_1 . \tag{4.37}$$

Des inégalités (4.31) pour $j > 1$ et de (4.21) pour $j = 1$, nous déduisons que

$$c_j' \Big(\sum_{k=1}^{j} \|u^{(j+1-k)}(t)\|^2 \, \|u^{(k)}(t)\|^2 \Big) \leqslant c_j'' \begin{cases} \exp[-4\nu\lambda_1\xi_1(t-t_1)] & \text{si} \quad j = 1 \\ \exp[-\nu\lambda_1 \min(2\xi_1, 3\zeta_1)(t-t_1)] & \text{si} \quad j > 1 . \end{cases} \tag{4.38}$$

Or, d'après (4.25), nous avons $-3\zeta_1 + \xi_1 > 0$ et donc intégrant l'inégalité (4.37) où le second membre est donné par (4.38), nous obtenons

$$|u^{(j+1)}(t)| \leqslant k_{j+1,0} \exp\Big[-\nu\lambda_1 \frac{\xi_1}{2}(t-t_1)\Big] \quad , \quad \forall t \geqslant t_1 . \quad \square$$

Démonstration du Lemme 4.11. – Soit $j \geqslant 1$.

La fonction $u^{(j)}$ est donnée par $\nu\, Au^{(j)} = -u^{(j+1)} + g^{(j)}$ avec

$$|g^{(j)}(t)| \leqslant c_0 [\|u(t)\| \, |Au^{(j)}(t)|^2 + |Au(t)| \, \|u^{(j)}(t)\|] + c_j \Big(\sum_{k=1}^{j-1} \|u^{(j-k)}(t)\| \, |Au^{(k)}(t)| \Big)$$

(cf. (4.36)).

Donc, d'après la définition de ζ,

$$\nu\zeta(t)\,|\mathrm{A}u^{(j)}(t)| \leqslant |u^{(j+1)}(t)| + c_j\Big(\sum_{k=1}^{j-1} \|u^{(j-k)}(t)\|\,|\mathrm{A}u^{(k)}(t)|\Big) \qquad \forall t \geqslant t_1 .$$

Des hypothèses (4.33), nous déduisons le résultat. □

Remarque 4.12. – Utilisant dans la démonstration des Lemmes (4.9 et 4.10) la formule de Young $2ab \leqslant 2\epsilon a^2 + \dfrac{1}{2\epsilon}b^2$ $(0 < \epsilon < 1)$, nous obtenons en fait que, sous la condition (4.25), nous avons dans la Proposition (4.8) : $\forall \epsilon$, $0 < \epsilon < 1$,

$$\begin{cases} |\mathrm{A}u^{(j)}(t)| \leqslant k_{j,2}(\epsilon)\exp[-\nu\lambda_1\xi_1(1-\epsilon)(t-t_1)] \quad , \quad \forall t \geqslant t_1 \\ j = 1, 2, \ldots \end{cases} \tag{4.39}$$

Dans les Lemmes 4.9 à 4.11, nous avons les mêmes formules avec $\dfrac{\zeta_1}{2}$ remplacé par $\zeta_1(1-\epsilon)$ et $\dfrac{\xi_1}{2}$ remplacé par $\xi_1(1-\epsilon)$. Fixant ϵ, $0 < \epsilon < \dfrac{1}{2}$, nous avons alors les inégalités (2.9) avec $\overline{\xi}_1 = \xi_1(1-\epsilon)$. □

Note ajoutée à la correction des épreuves : Après que ce travail ait été accepté pour publication, j'ai eu connaissance d'un résultat similaire au Théorème 2.1 obtenu par J.G. Heywood et R. Ronnacher [15].

BIBLIOGRAPHIE

[1] C. Foias, C. Guillope, R. Temam, New a priori estimates for Navier-Stokes equations in dimension 3, *Comm. in Part. Diff. Eq.*, 6 (1981), 329-359.

[2] C. Foias, G. Prodi, Sur le comportement global des solutions non stationnaires des équations de Navier-Stokes en dimension 2, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, 39 (1967), 1-34.

[3] C. Foias, J.C. Saut, Limite du rapport de l'enstrophie sur l'énergie pour une solution faible des équations de Navier-Stokes, *C.R.A.S.*, 293, série I (1981), 241-244 et *Séminaire du Collège de France*, éditions Pitman, à paraître.

[4] C. Foias, R. Temam, Some analytic and geometric properties of the solutions of the evolution Navier-Stokes equations, *J. Math. pures et appl.*, 58 (1979), 339-368.

[5] C. Guillope, Remarques à propos du comportement, lorsque $t \longrightarrow +\infty$, des solutions des équations de Navier-Stokes associées à une force nulle, à paraître.

[6] O.A. Ladyzhenskaya, *The mathematical theory of viscous incompressible flows*, Gordon and Breach, New York, 1963.

[7] J. Leray, Sur le mouvement d'un fluide visqueux emplissant l'espace, *Acta Math.*, 63 (1934), 193-248.

[8] J.L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod – Gauthier-Villars, Paris, 1969.

[9] J.L. Lions, E. Magenes, *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, I, Dunod, Paris, 1968.

[10] L. Tartar, communication personnelle.

[11] R. Temam, *Navier-Stokes Equations, Theory and numerical Analysis*, North-Holland, Amsterdam, 1979.

[12] R. Temam, Navier-Stokes Equations and Nonlinear Analysis, *Proceedings of the NSF/CBMS Regional Conference*, Dekalb, 1981, à paraître.

[13] R. Temam, Behaviour at time $t = 0$ of the solutions of semilinear evolution equations, *Journ. Diff. Eq.*, 43 (1982), 73-83.

[14] J.G. HEYWOOD, The Navier-Stokes equations: on the existence, regularity and decay of solutions, *Ind. U. Math. J.*, 29 (1980), 639-681.

[15] J.G. HEYWOOD, R. RANNACHER, Finite element approximation of the nonstationary Navier-Stokes problem, Part I: Regularity of solutions and second-order estimates for spatial discretization, *SIAM J. Num. An.*, 19 (1982), 275-311.

Manuscrit reçu le 1er décembre 1981.

Colette GUILLOPE,
Université de Paris-Sud
Mathématiques
Bâtiment 425
91405 – Orsay Cedex.