

ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

GERARDO GONZALEZ-SPRINBERG

Résolution de Nash des points doubles rationnels

Annales de l'institut Fourier, tome 32, n° 2 (1982), p. 111-178

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1982__32_2_111_0>

© Annales de l'institut Fourier, 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

RÉSOLUTION DE NASH DES POINTS DOUBLES RATIONNELS

par Gerardo GONZÁLEZ-SPRINBERG

Sommaire

	Pages
1. Définitions et notations	114
2. Méthode de calcul du transformé de Nash d'une surface	115
3. Plongements cylindriques	117
4. Le morphisme de contraction	124
5. Résolution de Nash des points doubles rationnels	126
5.2. Cas A_n	127
5.2.1. Énoncé du transformé de Nash des éventails	127
5.3. Cas E_6 (Énoncé des résultats)	129
5.4. Cas E_7 (Énoncé des résultats)	131
5.5. Cas E_8 (Énoncé des résultats)	132
5.6. Cas D_n (Énoncé des résultats)	134
5.7. Démonstration de 5.3 à 5.6	136
5.8. Corollaire et remarques	156
Appendice : Résolution de Nash des éventails	160
Bibliographie	177

Introduction.

La transformation de Nash d'une variété algébrique réduite consiste intuitivement à remplacer chaque point singulier par les positions limites des espaces tangents aux points lisses voisins (on donnera plus loin la définition précise). Nous présentons ici une méthode qui permet de calculer le transformé de Nash d'une singularité de surface pour laquelle on dispose d'une résolution explicite. Plus particulièrement, cette méthode devient effective pour certaines singularités rationnelles de surfaces pour lesquelles le morphisme de résolution est assez facilement calculable à partir du graphe dual pondéré de la résolution (i.e. de la matrice intersection de la fibre exceptionnelle). Pour expliciter un tel morphisme de résolution (ou de contraction) on définit la notion de plongement cylindrique, notion qui généralise en quelque sorte celle d'éventail (non complet). Nous obtenons par ce moyen une résolution du transformé de Nash, à partir de laquelle on peut calculer le transformé de Nash itéré. Il se trouve que le normalisé du transformé de Nash d'une singularité rationnelle de surface est, ou bien une surface lisse, ou bien une surface n'ayant que des singularités rationnelles. En fait le même résultat est valable pour les singularités quasi-rationnelles (i.e. en remplaçant rationnelle par quasi-rationnelle dans la phrase précédente). Pour illustrer cette méthode, nous calculons la normalisation du transformé de Nash de chaque point double rationnel, et nous itérons ce procédé pour conclure qu'en un nombre fini de telles opérations (transformé de Nash suivi de normalisation) on arrive à les résoudre. La résolution ainsi trouvée n'est pas, en général, minimale. Parmi les singularités qu'on trouve dans ce processus il y a des singularités de multiplicité plus grandes que deux (et aussi des singularités qui ne sont pas des singularités quotient – i.e. quotient de \mathbf{C}^2 par un sous-groupe fini de $GL(2, \mathbf{C})$ – même si la singularité au départ l'était).

Je tiens à remercier Jean-Louis Verdier pour les discussions fructueuses qui sont à l'origine de ce travail.

1. Définitions et notations.

1.1. Nous travaillerons sur le corps de nombres complexes ⁽¹⁾.

Soit S une variété algébrique réduite de dimension pure d et soit Ω_S^1 le faisceau des différentielles.

⁽¹⁾ Bien que les méthodes employées soient algébriques, donc les résultats sont valables sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle.

Soit $\pi : \text{Grass}_d(\Omega_S^1) \rightarrow S$ le morphisme canonique, de la grassmannienne des quotients localement libres de rang d de Ω_S^1 , dans S . Soit U l'ouvert des points lisses de S ; alors la restriction de π à $\pi^{-1}(U)$ est un isomorphisme sur U , car Ω_S^1 est localement libre de rang d sur U . On appelle *transformé de Nash* de S l'adhérence \tilde{S} de $\pi^{-1}(U)$ dans $\text{Grass}_d(\Omega_S^1)$.

1.2. Soit v la restriction de π à \tilde{S} , et sur \tilde{S} considérons le faisceau localement libre de rang d $\tilde{\Omega}^1$ (qu'on appelle fibré cotangent de Nash), quotient de $v^*\Omega_S^1$, induit par le faisceau universel de $\text{Grass}_d(\Omega_S^1)$. Le morphisme v est propre et birationnel. Le transformé de Nash \tilde{S} muni du quotient $\tilde{\Omega}^1$ de $v^*\Omega_S^1$ a la propriété universelle suivante. Si $\bar{v} : \bar{S} \rightarrow S$ est un morphisme propre et *birationnel*, et si \bar{S} est muni d'un faisceau localement libre de rang d $\bar{\Omega}^1$ quotient de $v^*\Omega_S^1$, alors v se factorise de façon unique par un morphisme $\mu : \bar{S} \rightarrow \tilde{S}$, $\bar{v} = v \circ \mu$, tel que $\mu^*\tilde{\Omega}^1 = \bar{\Omega}^1$.

1.3. Dans la construction précédente du transformé de Nash on peut prendre, au lieu de $\text{Grass}_d(\Omega_S^1)$, le fibré projectif $\mathbf{P}(\Omega_S^d)$ associé à $\Omega_S^d = \Lambda^d \Omega_S^1$, et considérer, de manière analogue, l'adhérence de la section canonique au-dessus de U . En effet, le morphisme de Plücker reliant les deux constructions envoie $\text{Grass}_d(\Omega_S^1)$ dans $\mathbf{P}(\Omega_S^d)$ et c'est une immersion fermée [E.G.A].

1.4. Si S est une variété affine plongée dans \mathbf{C}^N , on peut donner la description géométrique suivante.

Considérons la section σ définie sur l'ouvert U des points lisses de S , à valeurs dans le produit $S \times \text{Grass}_d(\mathbf{C}^N)^*$, qui associe à chaque point $s \in U$ le couple (s, T_s^*S) formé du point s et de la direction de l'espace cotangent T_s^*S à S en s .

Alors on peut définir le transformé de Nash \tilde{S} comme étant l'adhérence de $\sigma(U)$ dans $S \times \text{Grass}_d(\mathbf{C}^N)^*$.

Aussi dans ce cas on peut plonger $S \times \text{Grass}_d(\mathbf{C}^N)^*$ dans $S \times \mathbf{P}^M$, avec $M = \binom{N}{d} - 1$, grâce au morphisme de Plücker, en identifiant $\mathbf{P}(\Lambda^d(\mathbf{C}^N)^*)$ avec \mathbf{P}^M .

Le morphisme $v : \tilde{S} \rightarrow S$ est la restriction à \tilde{S} de la projection p_1 de $S \times \mathbf{P}^M$ sur le premier facteur. On a donc les diagrammes suivants :

$$(1.4.1) \quad \begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\sigma} & S \times \text{Grass}_d(\mathbf{C}^N)^* \hookrightarrow S \times \mathbf{P}^M \\ s & \longmapsto & (s, T_s^*S) \qquad \qquad \qquad \longmapsto (s, \Lambda^d T_s^*S). \end{array}$$

(1.4.2)

$$\begin{array}{ccccc}
 S \times \mathbf{P}^M & \xleftrightarrow{\quad} & \tilde{S} & \xleftrightarrow{\quad} & \sigma(U) \\
 \downarrow p_1 & \nearrow v & & & \uparrow \\
 S & \xleftarrow{\quad} & & \xrightarrow{\quad} & U
 \end{array}$$

2. Méthode de calcul du transformé de Nash d'une surface.

2.1. Soit $\pi : X \rightarrow S$ une résolution de la surface S , i.e. X est une surface lisse π est birrationnel, et isomorphisme au-dessus du complémentaire du lieu singulier de S .

Considérons sur X le faisceau $\pi^*\Omega_S^1$; ce faisceau est envoyé canoniquement dans Ω_X^1 par le morphisme $d\pi$.

Notons $\bar{\Omega}^1$ l'image de $d\pi$, qui est donc un sous-module de type fini de Ω_X^1 . On a donc une flèche surjective.

(2.1.2)

$$\pi^*\Omega_S^1 \xrightarrow{d\pi} \bar{\Omega}^1 \rightarrow 0.$$

Étant donné que X est une surface lisse et que $\bar{\Omega}^1$ est génériquement localement libre (de rang 2), alors l'ensemble où $\bar{\Omega}^1$ n'est pas localement libre est de codimension au moins égale à 2, car l'anneau local au point générique d'un diviseur est un anneau de valuation discrète, et $\bar{\Omega}^1$ est un sous-module du module libre Ω_X^1 .

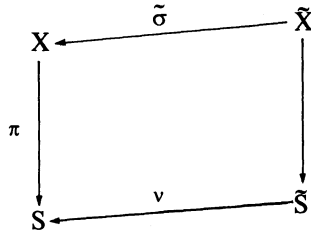
2.2. PROPOSITION. — Avec les notations précédentes, il existe une surface lisse \tilde{X} , obtenue à partir de X par une suite finie d'éclatements de points fermés (i.e. de transformations quadratiques), qui est une résolution du transformé de Nash \tilde{S} de S .

Démonstration. — Soit $\sigma : G \rightarrow X$ le morphisme canonique dans X de $G = \text{Grass}_2(\pi^*\Omega_S^1)$, la grassmannienne des quotients localement libres de rang 2 de $\pi^*\Omega_S^1$; ce morphisme est un isomorphisme au-dessus d'un ouvert dense V de X tel que $X - V$ est de codimension 2. Sur G on considère les faisceaux $\sigma^*(\pi^*\Omega_S^1)$ et $\sigma^*(\Omega_X^1)$ munis de la flèche $d\pi$ (remontée). Par ailleurs on a le quotient canonique $q : \sigma^*(\pi^*\Omega_S^1) \rightarrow Q$, où Q est localement libre de rang 2 et q est surjectif. La sous-variété \bar{G} de G définie par la condition que $d\pi$ se factorise par q est fermée. Par suite, l'adhérence \tilde{X} de $\sigma^{-1}(V)$ dans G est contenue dans \bar{G} . Soit $\bar{\sigma} : \tilde{X} \rightarrow X$ la restriction de σ à \tilde{X} . Alors $\bar{\sigma}$ est birationnelle et l'image de $\bar{\sigma}^*(\pi^*\Omega_S^1)$

dans $\bar{\sigma}^*(\Omega_{\bar{X}}^1)$ par $d\pi$ (qui n'est autre que $\bar{\sigma}^*\bar{\Omega}^1$) est localement libre et de rang 2, car c'est Q .

Si la surface \bar{X} n'est pas lisse, soit $\tau : \tilde{X} \rightarrow \bar{X}$ une résolution, et soit $\tilde{\sigma} : \tilde{X} \rightarrow X$ la composition $\bar{\sigma} \circ \tau$. Alors $\tilde{\sigma}^*(\pi^*\Omega_S^1)$ est munie d'un quotient localement libre de rang 2, $\tilde{\sigma}^*\Omega^1$; et le morphisme $\tilde{\sigma}$ de \tilde{X} sur X est un morphisme birationnel entre deux surfaces lisses, donc c'est une composition de transformations quadratiques (à isomorphismes près).

Il résulte de la propriété universelle (1.2) du transformé de Nash $v : \tilde{S} \rightarrow S$, que $\pi \circ \tilde{\sigma}$ se factorise par v (i.e. on a le diagramme commutatif suivant), d'où la proposition.



2.3. Soit S une surface affine plongée dans C^N .

En reprenant le point de vue de (1.4), on peut décrire le procédé énoncé dans la proposition 2.2 de la façon suivante. Soit σ la section définie sur l'ouvert des points lisses U de S , à valeurs dans $S \times P^M$, avec $M = \binom{N}{2} - 1$, dont l'adhérence est par définition le transformé de Nash \tilde{S} .

Alors en composant avec $\pi : X \rightarrow S$, on obtient un morphisme $\sigma \circ \pi : \pi^{-1}(U) \rightarrow S \times P^M$. Soient p_1 (resp. p_2) les projections de $S \times P^M$ sur le premier (resp. deuxième) facteur. La première composante $p_1 \circ \sigma \circ \pi$ coïncide avec π , donc est définie sur X tout entier. La deuxième composante $p_2 \circ \sigma \circ \pi$ définit une application rationnelle de X dans un espace projectif P^M qui consiste à associer à chaque point $x \in \pi^{-1}(U)$ la direction de l'espace cotangent à S en $\pi(x)$. Or, X étant lisse, l'ensemble où l'application rationnelle est indéterminée est de codimension au moins 2, donc c'est un ensemble fini et on peut lever l'indétermination par des transformations quadratiques de centre les points successifs d'indétermination. De sorte qu'on obtient finalement une surface lisse \tilde{X} et un morphisme propre et birationnel de \tilde{X} sur \tilde{S} .

On a le diagramme commutatif suivant :

$$(2.3.1) \quad \begin{array}{ccccc} & & & & \tilde{X} \\ & & & \swarrow & \downarrow \\ X & \xleftarrow{\pi^{-1}(U)} & & & \tilde{X} \\ \downarrow \pi & & \downarrow & \searrow \sigma \circ \pi & \downarrow \tilde{\pi} \\ S & \xleftarrow{\quad} & U & \xrightarrow{\sigma} & \tilde{S} \hookrightarrow S \times \mathbf{P}^M \end{array}$$

On remarquera que les points qui sont centres des transformations quadratiques se projettent sur des points singuliers de S.

2.4. On obtient par cette méthode le transformé de Nash \tilde{S} de S donné d'une façon « paramétrée », c'est-à-dire comme image d'un morphisme défini sur une surface lisse. Puisqu'on obtient ainsi une résolution de \tilde{S} , on peut recommencer par la même méthode et calculer le transformé de Nash itéré, i.e. le transformé de Nash de \tilde{S} .

2.5. Soit $n : \tilde{S}_n \rightarrow \tilde{S}$ le normalisé du transformé de Nash \tilde{S} . Étant donné que \tilde{X} est lisse (donc normale), alors le morphisme $\tilde{\pi} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{S}$ se factorise par n , c'est-à-dire qu'il existe un morphisme $\tilde{\pi}_n : \tilde{X} \rightarrow \tilde{S}_n$ tel que l'on ait $n \circ \tilde{\pi}_n = \tilde{\pi}$. Le morphisme $\tilde{\pi}_n : \tilde{X} \rightarrow \tilde{S}_n$ est une résolution de \tilde{S}_n , donc on peut appliquer la méthode précédente pour calculer le transformé de Nash de \tilde{S}_n .

3. Plongements cylindriques.

3.1. Soit $O \in S$ une singularité normale de surface (donc isolée). Le problème qui nous intéresse (à savoir la détermination du transformé de Nash) est alors local et on peut supposer S plongé dans \mathbf{C}^N .

Soit $\pi : X \rightarrow S$ une résolution de S et soit $E = \bigcup_1^n L_i \neq \pi^{-1}(O)$ la fibre exceptionnelle, où les L_i sont les composantes irréductibles. On dit que π est la *résolution minimale* si on a l'auto-intersection $(L_i \cdot L_i) \leq -2$ pour toute L_i de genre nul. Si π est une *bonne résolution*, ce qui veut dire que chaque courbe L_i est lisse, que les croisements entre différentes L_i sont normaux et qu'il n'y a pas d'intersection commune à trois L_i , alors on associe à π un *graphe dual pondéré*. Ce graphe consiste en un ensemble de sommets tel que chaque sommet est associé à une courbe L_i , un ensemble d'arêtes qui sont associées aux points d'intersection de deux courbes, et des poids pour chaque sommet qui sont donnés par l'auto-

intersection et par le genre de la courbe représentée par le sommet. Le *cycle fondamental* d'une résolution $\pi : X \rightarrow S$ d'une singularité normale de surface est l'unique cycle qui est minimal parmi les cycles positifs $Z = \sum n_i L_i$ à support dans la fibre exceptionnelle qui satisfont les inégalités $(Z \cdot L_i) \leq 0 \cdot \forall i$ (voir [2]). On peut calculer le cycle fondamental d'une bonne résolution en connaissant seulement le graphe dual pondéré.

3.2. Une *singularité rationnelle* de surface $O \in S$ est par définition une singularité normale telle que si $\pi : X \rightarrow S$ est une résolution, alors $R^1 \pi_* \mathcal{O}_X$ est nul (voir [2], [12]).

On trouve la caractérisation suivante des singularités rationnelles. Soit Z le cycle fondamental de X . Alors S est une singularité rationnelle si et seulement si le genre de Z , $p(Z) = [(Z \cdot Z) + (Z \cdot K)]/2 + 1$, est nul, où K est un diviseur canonique de X . En ce cas, on a aussi les faits suivants :

- i) Chaque composante irréductible L_i de la fibre exceptionnelle est une courbe rationnelle lisse.
- ii) La résolution minimale est une bonne résolution.
- iii) Le graphe dual de X ne contient pas de boucles, i.e. il est simplement connexe.

3.3. On appelle *configuration* la donnée d'un couple (C, Γ) , où C est une courbe connexe réduite telle que les composantes irréductibles sont des courbes rationnelles lisses à croisements normaux (i.e. si x est un point d'intersection de deux composantes, alors on a $\hat{\mathcal{O}}_{C,x} \cong C[[X,Y]]/XY$), et où Γ est le graphe associé à C muni d'une pondération. (La donnée du graphe pondéré Γ est équivalent à la donnée d'une matrice carrée symétrique — « matrice d'intersection »).

Exemple. — Soit $\pi : X \rightarrow S$ une bonne résolution d'une singularité normale de surface $O \in S$ dont les composantes irréductibles de la fibre exceptionnelle sont des courbes rationnelles lisses (i.e. une *singularité quasi-rationnelle*, cf. [1]).

Soit C la courbe $\pi^{-1}(O)$ réduite et soit Γ le graphe dual pondéré associé à C . Alors (C, Γ) est une configuration appelée *configuration associée* à $\pi : X \rightarrow S$.

Soient (C, Γ) et (C', Γ') deux configurations. On dit que (C, Γ) est une *sous-configuration* de (C', Γ') si on a $C \subset C'$ et si Γ est le sous-graphe de Γ' associé à C' .

On appelle *configuration rationnelle* une configuration (C, Γ) telle qu'il

existe une singularité rationnelle de surface $O \in S$ ayant une résolution $\pi : X \rightarrow S$ dont la configuration associée soit (C, Γ) . On sait que la propriété d'une configuration d'être rationnelle ne fait intervenir que le graphe pondéré Γ .

3.3.1. PROPOSITION. — Soit $O \in S$ une singularité rationnelle (resp. quasi-rationnelle) et soit $p \in \tilde{S}_n$ un point singulier du transformé de Nash normalisé. Alors p est une singularité rationnelle (resp. quasi-rationnelle).

Démonstration. — Soit $\pi : X \rightarrow S$ une résolution de S et soit (C, Γ) la configuration associée. Soit \tilde{X} la surface obtenue dans la proposition 2.2, qui est obtenue par une suite d'éclatements à partir de X , et soit $\sigma : \tilde{X} \rightarrow X$ le morphisme correspondant. Alors \tilde{X} est une résolution du transformé de Nash \tilde{S} de S et par conséquent de son normalisé \tilde{S}_n , $\tilde{\pi}_n : \tilde{X} \rightarrow \tilde{S}_n$. Soit $(\tilde{C}, \tilde{\Gamma})$ la configuration associée à $\pi \circ \sigma : \tilde{X} \rightarrow S$. Alors la configuration associée à $\tilde{\pi}_n : \tilde{X} \rightarrow \tilde{S}_n$ au point p est une sous-configuration de $(\tilde{C}, \tilde{\Gamma})$, donc si O est quasi-rationnelle, alors p aussi, car les composantes de \tilde{C} sont des courbes rationnelles lisses. Si O est rationnelle, alors p aussi car il est facile de vérifier qu'une sous-configuration d'une configuration rationnelle est aussi rationnelle (voir [2]).

On appelle *plongement d'une configuration* (C, Γ) la donnée d'un plongement de C dans une surface lisse X tel que le graphe pondéré associé soit Γ .

Une propriété importante des configurations rationnelles est que si on a un plongement d'une telle configuration (C, Γ) , dans une surface algébrique lisse X , alors elle est *contractable algébriquement*, i.e. il existe un morphisme $\pi : X \rightarrow S$ où S est une surface algébrique, et un point normal $O \in S$ tel que la restriction de π à $X - \pi^{-1}(O)$ soit un isomorphisme sur $S - \{O\}$, où la courbe $\pi^{-1}(O)$ réduite soit C (voir [3]).

3.4. La propriété précédente fait des singularités rationnelles un exemple de choix pour essayer d'appliquer la méthode décrite au § 2. Étant donné un plongement d'une configuration rationnelle, nous allons, donc, construire le morphisme de contraction dont l'image sera une singularité rationnelle ayant pour configuration associée la configuration donnée.

3.4.1. Nous appelons un *cylindre canonique de degré n* , noté F_n , l'espace total d'un fibré vectoriel en droites de degré n sur \mathbf{P}^1 . La base plongée dans F_n par la section nulle, a une auto-intersection égale à n .

3.4.2. Soit (C, Γ) une configuration; soient $L_i, i = 1, \dots, n$, les

composantes irréductibles de C , et soit $((a_{ij}))$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$, la matrice (« intersection ») associée à Γ .

On définit un *plongement cylindrique* de la configuration (C, Γ) comme étant la donnée d'un plongement de (C, Γ) dans une surface lisse X , satisfaisant aux propriétés suivantes :

I) Pour chaque i avec $1 \leq i \leq n$, il existe un ouvert de Zariski C_i dans X , contenant L_i , et une immersion ouverte $f_i : C_i \rightarrow F_{a_{ii}}$ de C_i dans un cylindre canonique $F_{a_{ii}}$ de degré a_{ii} qui envoie L_i sur la section zéro Σ_i du fibré $F_{a_{ii}}$ et tel que le complémentaire $F_{a_{ii}} - f_i(C_i)$ de $f_i(C_i)$ dans $F_{a_{ii}}$ soit un ensemble fini de points. On appelle un tel C_i un *voisinage cylindrique* de L_i .

II) Si L_i et L_j ($1 \leq i < j \leq n$) s'intersectent en un point P_{ij} , soit $U_{ij} = C_i \cap C_j$ l'ouvert intersection de deux voisinages cylindriques respectifs. Notons U_i (resp. U_j) l'ouvert de $F_{a_{ii}}$ (resp. $F_{a_{jj}}$) défini par

$$U_i = f_i(U_{ij}) \quad (\text{resp. } U_j = f_j(U_{ij})),$$

B_i (resp. B_j) l'ouvert de la section zéro Σ_i (resp. Σ_j) défini par

$$B_i = f_i(L_i \cap U_{ij}) \quad (\text{resp. } B_j = f_j(L_j \cap U_{ij})) \quad \text{et} \quad P_i \quad (\text{resp. } P_j)$$

le point de B_i (resp. B_j) défini par $P_i = f_i(P_{ij})$ (resp. $P_j = f_j(P_{ij})$). Soit $p_i : F_{a_{ii}} \rightarrow \Sigma_i$ (resp. $p_j : F_{a_{jj}} \rightarrow \Sigma_j$) la projection du fibré $F_{a_{ii}}$ (resp. $F_{a_{jj}}$) sur sa base (identifiée avec la section zéro). Alors l'isomorphisme $h_{ji} : U_i \rightarrow U_j$ défini par $h_{ji} = f_j \circ f_i^{-1}/U_i$ doit avoir la propriété suivante : il existe une trivialisations

$$t_i : p_i^{-1}(B_i) \rightarrow B_i \times C \quad (\text{resp. } t_j : p_j^{-1}(B_j) \rightarrow B_j \times C)$$

et un plongement $\bar{\pi}_i : B_i \rightarrow C$ (resp. $\bar{\pi}_j : B_j \rightarrow C$) tel que

$$\bar{\pi}_i(p_i) = 0 \quad (\text{resp. } \bar{\pi}_j(p_j) = 0)$$

qui induit un plongement

$$\pi_i = \bar{\pi}_i \times \text{id} : B_i \times C \rightarrow C \times C \quad (\text{resp. } \pi_j = \bar{\pi}_j \times \text{id} : B_j \times C \rightarrow C \times C)$$

tel que l'isomorphisme

$$\pi_j \circ t_j \circ h_{ji} \circ t_i^{-1} \circ \pi_i^{-1}|_{\pi_i \circ t_i(U_i)} : \pi_i \circ t_i(U_i) \rightarrow \pi_j \circ t_j(U_j)$$

se prolonge en l'isomorphisme $h : C \times C \rightarrow C \times C$ donné par

$$h(u, v) = (v, u).$$

3.4.3. *Remarques.* — a) La condition II imposée au morphisme de recollement h_{ji} implique en particulier que l'ouvert de la base B_i est envoyé sur l'ouvert $p_j^{-1}(P_j) \cap U_j$ de la fibre par P_j , que $p_i^{-1}(P_i) \cap U_i$ est envoyé sur B_j et que pour chaque point $b_i \in B_i$ avec $b_i \neq P_i$, l'ouvert de la fibre sur b_i , $p_i^{-1}(b_i) \cap U_i$, est envoyé sur un ouvert $s_{b_i} \cap U_j$ d'une section s_{b_i} du fibré $p_j^{-1}(B_i)$ sur B_j (i.e. d'une section rationnelle de $F_{a_{jj}}$ définie sur B_j), section qui ne s'annule pas, car $b_i \neq P_i$ donc $s_{b_i} \cap B_j = h_{ji}(p_i^{-1}(b_i) \cap p_i^{-1}(P_i)) = \emptyset$.

b) La définition de plongement cylindrique précédente est, en quelque sorte, l'analogue algébrique de la construction de « soudure » (plumbing) utilisée dans le cas analytique par Laufer (cf. [9], [10]).

3.4.4. *Exemple.* — Soit (C, Γ) une configuration rationnelle telle que chaque composante irréductible de C coupe au maximum deux autres, i.e. tel que Γ soit une chaîne.

Soient L_i ($1 \leq i \leq n$) les composantes de C (ou les sommets de Γ) et $-a_i$ le poids de L_i , avec $a_i \geq 2$.

Alors on peut construire un plongement cylindrique de (C, Γ) de la manière suivante. Soit U_i (resp. U'_i) une copie de \mathbb{C}^2 de coordonnées (u_i, v_i) (resp. u'_i, v'_i), $1 \leq i \leq n$, et considérons la surface C_i obtenue en recollant $U_i - \{v_i=0\}$ avec $U'_i - \{v'_i=0\}$ par l'identification $u'_i = u_i v_i^{a_i}$, $v'_i = 1/v_i$.

Alors C_i est un fibré vectoriel en droites de degré $-a_i$ sur la courbe rationnelle définie par $u_i = 0$, $u'_i = 0$, courbe qu'on va identifier avec L_i .

Soit X la surface obtenue par les recollements

$$u_i = v'_{i+1}, \quad v_i = u'_{i+1} \quad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq n - 1.$$

On voit facilement que X est un plongement cylindrique de (C, Γ) . La surface X est appelée un éventail (non complet) de dimension 2; et la singularité normale qu'on obtient en contractant C est appelée singularité en éventail (ou singularité de Jung normale, ou encore singularité torique). La définition de plongement cylindrique généralise, donc, les éventails (non complets) en dimension 2.

3.4.5. PROPOSITION. — Soit X un plongement cylindrique de la configuration (C, Γ) et soit P un point de C . Soit $\sigma : \bar{X} \rightarrow X$ l'éclatement de X de centre P . Notons \bar{C} la courbe $\sigma^{-1}(C)$ dans X , image inverse réduite de C , et $\bar{\Gamma}$ le graphe pondéré associé à \bar{C} . Alors \bar{X} est un plongement cylindrique de $(\bar{C}, \bar{\Gamma})$.

Démonstration. — Soient L_i , $1 \leq i \leq n$, les composantes de C ; soit \bar{L}_i la transformée stricte de L_i pour chaque i , et soit L la droite $\sigma^{-1}(P)$. On garde les notations de 3.4.2.

Soit C_i un voisinage cylindrique de L_i , identifié (par f_i) avec un fibré $F_{a_{ii}}$ moins un nombre fini de points n'appartenant pas à la section zéro; et soit $p_i : F_{a_{ii}} \rightarrow L_i$ la projection du fibré.

Montrons que la condition I est satisfaite :

1) Si $P \notin L_j$, pour un j fixé, $1 \leq j \leq n$, alors l'ouvert

$$\bar{C}_j = \sigma^{-1}(C_j - \{P\}) = \sigma^{-1}(C_j) - L$$

est un voisinage cylindrique de \bar{L}_j .

2) Supposons $P \in L_i$, pour un i fixé, $1 \leq i \leq n$. Soit $\bar{F}_{a_{ii}}$ l'éclaté de $F_{a_{ii}}$ de centre P . Soit \bar{L}_P la transformée stricte dans $\bar{F}_{a_{ii}}$ de la fibre $L_P = p_i^{-1}(P)$.

Alors $\bar{F}_{a_{ii}} - \bar{L}_P$ est un fibré vectoriel en droites de degré $a_{ii} - 1$ sur \bar{L}_i . Par conséquent l'ouvert $\bar{C}_i = \sigma^{-1}(C_i) - \bar{L}_P$ est un voisinage cylindrique de \bar{L}_i .

3) Pour finir de vérifier la condition I de la définition 3.4.2, il suffit de montrer qu'il existe un ouvert U_P dans X , contenant P , et isomorphe à C^2 moins un nombre fini de points, car alors l'ouvert $C_L = \sigma^{-1}(U_P)$ est un voisinage cylindrique de L . Or on a $P \in L_i$ pour un i avec $1 \leq i \leq n$, et on peut prendre pour U_P le voisinage cylindrique C_i moins une fibre $L_{P'}$ sur un point $P' \in L_i$, $P' \neq P$, car $F_{a_{ii}} - L_{P'}$ est un fibré trivial sur la droite affine $L_i - \{P'\}$.

Montrons maintenant que la condition II est satisfaite :

4) Supposons d'abord que P ne soit pas un point singulier de C (i.e. qu'il appartienne à une seule composante L_i), et soit $P_{ij} = L_i \cap L_j$ un point d'intersection de L_i avec une autre composante L_j , $1 \leq i, j \leq n$.

Étant donné que la surface X satisfait la condition II de 3.4.2, alors modulo des trivialisations t_i, t_j et des plongements π_i, π_j dans C^2 des ouverts $p_i^{-1}(B_i), p_j^{-1}(B_j)$, le morphisme de recollement h_{ji} est représenté par $h : C^2 \rightarrow C^2$ donné par

$$(u_i, v_i) \mapsto (v_i, u_i) = (u_j, v_j), \text{ où } (u_i, v_i) \text{ (resp. } (u_j, v_j))$$

sont les coordonnées de la première (resp. deuxième) copie de C^2 .

Soit $D_i = \{u_i=0\}$ (resp. $D_j = \{u_j=0\}$) l'axe de \mathbf{C}^2 tel que $D_i \supset B_i$ (resp. $D_j \supset B_j$). A une homothétie près on peut supposer $P = (0,1) \in D_i$. Soit $\bar{C}_i = \sigma^{-1}(C_i) - \bar{L}_P$ (resp. $\bar{C}_j = \sigma^{-1}(C_j) - L$) le voisinage cylindrique de \bar{L}_i (resp. \bar{L}_j) défini dans 2) (resp. 1)). Alors on a

$$(*) \quad \bar{C}_i \cap \bar{C}_j = \sigma^{-1}(C_i \cap C_j) - (\bar{L}_P \cup L).$$

Soient $\bar{f}_i : \bar{C}_i \rightarrow F_{a_{ii-1}}$ et $\bar{f}_j : \bar{C}_j \rightarrow F_{a_{jj}}$ les plongements des voisinages cylindriques dans des cylindres canoniques, tels qu'on ait $\bar{f}_j = f_j \circ \sigma$ et le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \bar{C}_i & \xrightarrow{\bar{f}_i} & F_{a_{ii-1}} \\ \sigma \downarrow & & \downarrow \sigma \\ C_i & \xrightarrow{f_i} & F_{a_{ii}} \end{array}$$

Alors on a :

$$(**) \quad \bar{f}_j(\bar{C}_i \cap \bar{C}_j) = f_j(C_i \cap C_j - L_P) \xrightarrow{\pi_i \circ t_j} \mathbf{C}^2 - \{u_j = 1\}$$

$$(***) \quad \sigma \circ \bar{f}_i(\bar{C}_i \cap \bar{C}_j) = f_i(C_i \cap C_j - L_P) \xrightarrow{\pi_i \circ t_i} \mathbf{C}^2 - \{v_i = 1\}.$$

Notons aussi $\sigma : \bar{\mathbf{C}}^2 \rightarrow \mathbf{C}^2$ l'éclatement de \mathbf{C}^2 de centre P , et soit \bar{L}_P la transformée stricte de $L_P = \{v_i = 1\}$ dans \mathbf{C}^2 .

Soient (u,v) les coordonnées de l'ouvert $U = \bar{\mathbf{C}}^2 - \bar{L}_P$ telles que

$$\sigma|_U : U \rightarrow \mathbf{C}^2 \quad \text{s'écrit} \quad (u,v) \mapsto (u(v-1), v).$$

Par suite de (*), (**) et (***), le morphisme \bar{h}_{ji} au voisinage $\bar{C}_i \cap \bar{C}_j$ de $P_{ij} = \bar{L}_i \cap \bar{L}_j$ est représenté par $\bar{h} : U - \{v=1\} \rightarrow \mathbf{C}^2 - \{u_j=1\}$ avec $\bar{h}(u,v) = (v, u(v-1))$, car on a $\sigma^{-1}[\mathbf{C}^2 - \{v_i=1\}] = U - \{v=1\}$, et le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} U - \{v=1\} & & \\ \sigma \downarrow & \searrow \bar{h} & \\ \mathbf{C}^2 - \{v_i=1\} & \xrightarrow{h} & \mathbf{C}^2 - \{u_j=1\}. \end{array}$$

Or on peut changer la trivialisat on de $U - \{v=1\}$ par $u^* = u(v-1)$, $v^* = v$; on a $\bar{h}^*(u^*, v^*) = (v^*, u^*)$ et on vérifie la condition II.

5) Finalement, si $P \in L_i$, il faut montrer que le morphisme de recollement au voisinage de $L \cap L_i$ satisfait II). Si $\{P\} = L_i \cap L_j$, on aura alors v erifi e la condition II) au voisinage de $L \cap \bar{L}_i$ et au voisinage de $L \cap \bar{L}_j$.

Soit U_P l'ouvert dans X consid er e en 3), et soit

$$t : F_{a_{ii}} - L_{P'} \rightarrow \mathbb{C}^2$$

une trivialisat on. Alors il est immédiat de voir que $t \circ \sigma$ fournit une trivialisat on de $\sigma^{-1}(U_P) - \overline{\{p_i^{-1}(P)\}} \cap \sigma^{-1}(U_P)$ qui permet de vérifier II. \square

3.4.6. *Remarques.* – La proposition précédente donne un moyen pour obtenir des plongements cylindriques.

Par exemple, soit X une surface obtenue en éclatant successivement des points à partir de \mathbb{C}^2 , soit C la courbe réduite réunion des courbes rationnelles introduites par les éclatements, et soit Γ le graphe dual associ e à C . Alors X est un plongement cylindrique de (C, Γ) . On peut obtenir par ce moyen un arbre arbitraire, mais on a des limitations pour les poids. On peut aussi combiner la méthode utilisée dans l'exemple 3.4.4 avec les éclatements, pour obtenir des plongements cylindriques.

Toutes les singularités dont on calcule le transform e de Nash (voir § 5) ont une résolution qui est un plongement cylindrique de la configuration associée.

4. Le morphisme de contraction.

4.1. Soit $O \in S$ une singularité rationnelle, et soit $\pi : X \rightarrow S$ une résolution. M. Artin a démonstré qu'on a $\mathfrak{M}_O = \mathcal{I}_Z$, où \mathfrak{M} est l'idéal maximal au point O et \mathcal{I}_Z est l'idéal du cycle fondamental Z de X cf. [2]). Pour ceci, il d emonstre que si D est un diviseur de X dont aucune composante irréductible n'est contenue dans la fibre exceptionnelle $\pi^{-1}(O) = \bigcup_{1 \leq i \leq n} L_i$ où les L_i , $1 \leq i \leq n$, sont les composantes irréductibles de $\pi^{-1}(O)$, et tel qu'on ait $(D.L_i) = -(Z.L_i) \forall i$, alors il existe $f \in \mathfrak{M}$ telle que le diviseur (π^*f) associ e   π^*f soit $Z + D$.

Plus généralement on d emonstre que si $Y = \sum r_i L_i$ est un diviseur positif à support dans la fibre exceptionnelle et tel qu'on ait $(Y.L_i) \leq 0$,

$1 \leq i \leq n$, et si D est un diviseur de X qui n'a pas de support dans la fibre exceptionnelle, avec $(D.L_i) = -(Y.L_i)$, $1 \leq i \leq n$, alors il existe $f \in \mathfrak{M}$ telle que $(\pi^*f) = Y + D$. (On remarque que D est la transformée stricte de (f)).

4.2. Maintenant, étant donné un plongement X d'une configuration rationnelle (C, Γ) on veut construire un morphisme $\pi : X \rightarrow S$ qui contracte C , avec S normale. L'existence (et unicité à isomorphisme près) est démontrée dans [3]. Soit \mathfrak{M} l'idéal maximal au point singulier $O = \pi(C)$, et soit e la dimension de plongement de cette singularité qui est par définition la dimension de l'espace tangent de Zariski au point O , c'est-à-dire $\dim_C \mathfrak{M}/\mathfrak{M}^2$.

Il résulte de l'égalité $\mathfrak{M}\mathcal{O}_X = \mathcal{I}_Z$ et de la rationalité qu'on a $e = \dim_C \Gamma(\mathcal{I}_Z)/\Gamma(\mathcal{I}_{2Z})$. On veut, en plus, que S soit plongée (localement) dans l'espace tangent de Zariski en O .

Donc on cherche des sections dans $\Gamma(\mathcal{I}_Z)$ dont les images dans $\Gamma(\mathcal{I}_Z)/\Gamma(\mathcal{I}_{2Z})$ engendrent $\Gamma(\mathcal{I}_Z)/\Gamma(\mathcal{I}_{2Z})$ sur C .

Pour réaliser ceci, dans certains cas, on pourra construire de telles sections f_1, \dots, f_e de telle façon que l'indépendance linéaire dans $\Gamma(\mathcal{I}_Z)/\Gamma(\mathcal{I}_{2Z})$ soit assurée par le critère valuatif suivant :

4.3. PROPOSITION. — Soient f_1, \dots, f_e des sections appartenant à $\Gamma(\mathcal{I}_Z)$, et soient $(f_i) = Y_i + D_i$, $1 \leq i \leq e$, les diviseurs associés, avec $Y_i = \sum_{j=1}^n r_{ij}L_j$, et D_i sans composantes irréductibles contenues dans la courbe exceptionnelle C . Soit v_j , $1 \leq j \leq n$, la valuation qui associe à chaque cycle Y_i la multiplicité r_{ij} . Supposons que, pour chaque entier k avec $1 \leq k \leq e$, il existe un entier $j = j(k)$ avec $1 \leq j \leq n$ tel qu'on ait $v_j(Y_k) < v_j(Y_i)$ pour $1 \leq i \leq k - 1$, et $v_j(Y_k) < 2v_j(Z)$. Alors les images \bar{f}_i des f_i , $1 \leq i \leq e$, dans $\Gamma(\mathcal{I}_Z)/\Gamma(\mathcal{I}_{2Z})$ forment une base de $\Gamma(\mathcal{I}_Z)/\Gamma(\mathcal{I}_{2Z})$.

Démonstration. — En effet, si $\sum_{i=1}^e a_i \bar{f}_i = 0$ dans $\Gamma(\mathcal{I}_Z)/\Gamma(\mathcal{I}_{2Z})$ alors

$$v_{j(e)} \left(\sum_{i=1}^e a_i f_i \right) = v_{j(e)}(a_e f_e) < v_{j(e)}(2Z), \text{ donc } \bar{f}_e = 0$$

dans $\Gamma(\mathcal{I}_Z)/\Gamma(\mathcal{I}_{2Z})$ et par suite $a_e = 0$.

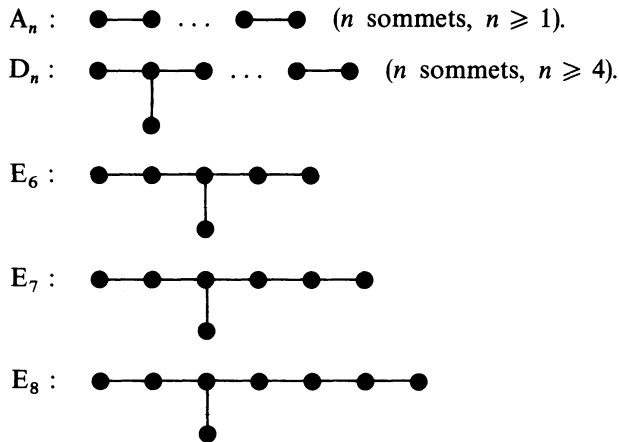
Par récurrence on a $a_i = 0$, $1 \leq i \leq e$.

4.4. Remarque. — Par conséquent on a $Z \leq Y_i$, $Y_i \not\leq 2Z$ et $(Y_i \cdot L_j) \leq 0$ pour $1 \leq i \leq e$, $1 \leq j \leq n$. On peut associer à chaque diviseur positif $Y = \sum_{i=1}^n r_i L_i$ le point à coordonnées entières non négatives (r_1, \dots, r_n) dans \mathbf{R}^n .

Les inégalités $(Y \cdot L_i) \leq 0$, $1 \leq i \leq n$ définissent un cône polyédral rationnel dans \mathbf{R}^n , qui a été considéré dans [11], [12] et [15]. Pour la construction du morphisme de contraction, on s'intéresse au sous-ensemble A du cône défini par $A : \{Y \mid Z \leq Y, 2Z \not\leq Y\}$.

5. Résolution de Nash des points doubles rationnels.

5.1. Les points doubles rationnels (i.e. les singularités rationnelles de multiplicité 2) sont des singularités normales dont le graphe dual pondéré de la résolution minimale est l'un des suivants (cf. [2]) :



où le poids de chaque sommet est -2 .

Par un résultat de Brieskorn ([4]; voir aussi [10]) on sait que les points doubles rationnels sont tendus (« taut »), i.e. si on a deux singularités dont les graphes duaux pondérés des résolutions minimales sont isomorphes, alors elles sont analytiquement isomorphes.

Nous allons calculer les transformés de Nash normalisés (i.e. suivis d'une normalisation) itérés de ces singularités.

Soit (C, Γ) la configuration associée à la résolution minimale $\pi : X \rightarrow S$ d'une singularité rationnelle $O \in S$. On peut obtenir une

résolution $\tilde{\pi} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{S}$ du transformé de Nash \tilde{S} de S , où \tilde{X} est une surface obtenue par une suite de transformations quadratiques $\sigma : \tilde{X} \rightarrow X$ à partir de X (prop. 2.2). Notons $(\tilde{C}, \tilde{\Gamma})$ la configuration dont la courbe \tilde{C} est la courbe réduite $\sigma^{-1}(C)$ image inverse de C par σ et où $\tilde{\Gamma}$ est le graphe dual pondéré associé à \tilde{C} plongée dans \tilde{X} . Soit n le nombre de sommets de Γ (i.e. le nombre de composantes irréductibles de C), et notons L_i , $1 \leq i \leq n$ les sommets de Γ . On note \tilde{L}_i le sommet de $\tilde{\Gamma}$ qui correspond à la composante de \tilde{C} obtenue comme transformée stricte de la composante de C représentée par le sommet L_i ($1 \leq i \leq n$). Dans la suite, on notera de la même façon un sommet et la courbe qu'il représente ; on précisera selon les besoins s'il s'agit de l'un ou de l'autre.

5.2. Pour les cas $A_n (n \geq 1)$ on a un résultat plus général valable pour toutes les singularités en éventails (introduites en 3.4.4).

Soit $\Gamma : \bullet \text{---} \dots \text{---} \bullet$, $n \geq 1$, le graphe dual pondéré d'une telle singularité, avec $a_i \geq 2$, $1 \leq i \leq n$. Notons L_i le sommet (et la droite qu'il représente) de poids $-a_i$. Si on a $n > 1$, soient k', k'' deux entiers avec $1 \leq k' < k'' \leq n$. On dit que le sous-graphe connexe $\Gamma_{k', k''}$ du graphe Γ qui contient les sommets L_i avec $k' \leq i \leq k''$ est un *segment* si on a $a_i = 2$ pour chaque i avec $k' < i < k''$, et $a_{k'} > 2$ (resp. $a_{k''} > 2$) ou $k' = 1$ (resp. $k'' = n$). Autrement dit, si on représente le graphe Γ sur une ligne polygonale ayant des points anguleux aux sommets de poids strictement inférieur à -2 , alors un segment de Γ est le sous-graphe porté par un des côtés de la ligne polygonale.

On dit qu'un *sommet de Γ est central* s'il est le sommet central d'un segment ayant un nombre impair de sommets, et qu'une *arête de Γ est centrale* si elle est l'arête centrale d'un segment ayant un nombre impair d'arêtes (donc un nombre pair de sommets).

5.2.1. THÉORÈME. — *On garde les notations précédentes.*

Soit $O \in S$ une singularité en éventail dont le graphe dual pondéré de la résolution minimale $\pi : X \rightarrow S$ est Γ .

i) La surface \tilde{X} de la résolution minimale $\tilde{\pi} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{S}$ du transformé de Nash \tilde{S} de S est obtenue à partir de X en éclatant les points de $\pi^{-1}(O)$ représentés par les arêtes centrales de Γ .

ii) Soit \tilde{L}_i la transformée stricte de L_i dans \tilde{X} ($1 \leq i \leq n$), et si a est une arête centrale de Γ , soit A la droite exceptionnelle de \tilde{X} introduite par l'éclatement du point représenté par a .

Soit $\delta(\tilde{L}_i)$ (resp. $\delta(A)$) le degré de la restriction à \tilde{L}_i (resp. A) du fibré

cotangent de Nash (relatif à S). Alors on a

$$\delta(\tilde{L}_i) = 2a_i - 6 \quad \text{si} \quad a_i \geq 3 \quad \text{et} \quad 1 < i < n.$$

$$\delta(\tilde{L}_i) = 2a_i - 4 \quad \text{si} \quad n > 1, \quad i = 1 \quad \text{ou} \quad i = n.$$

$$\delta(\tilde{L}_1) = 2a_1 - 2 \quad \text{si} \quad n = 1.$$

$\delta(\tilde{L}_i) = 0$ si $a_i = 2$, $1 < i < n$ et L_i n'est pas un sommet central de Γ .

$$\delta(\tilde{L}_i) = 2 \quad \text{si} \quad a_i = 2 \quad \text{et} \quad L_i \text{ est un sommet central de } \Gamma.$$

$$\delta(A) = 1.$$

Par conséquent $\tilde{\pi}$ contracte la droite \tilde{L}_i en un point si et seulement si ou bien $a_i = 2$, $n > 1$ et L_i n'est pas un sommet central de Γ ou bien $a_i = 3$, $i \neq 1, n$; ce sont les seules courbes contractées par $\tilde{\pi}$.

Pour la démonstration voir [6] ou l'appendice.

(Dans [6] on détermine si $\delta = 0$ ou $\delta \neq 0$, sans calculer la valeur de δ quand $\delta \neq 0$.)

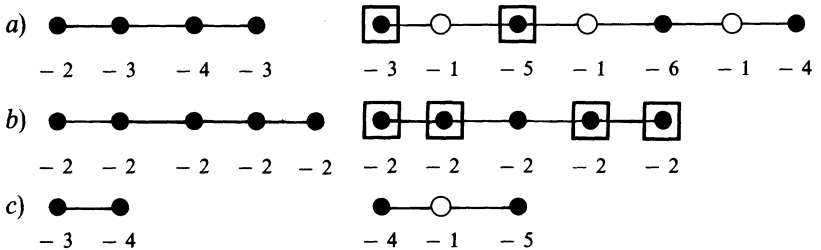
5.2.2. COROLLAIRE. — Soit $O \in S$ une singularité en éventail. Alors le transformé de Nash normalisé \tilde{S}_n de S est, ou bien une surface lisse, ou bien une surface ayant des singularités en éventail.

Démonstration. — En effet, si $P \in \tilde{S}_n$ est une singularité de \tilde{S}_n , alors le graphe dual de la résolution minimale de P est une chaîne.

5.2.3. THÉORÈME. — Soit $O \in S$ une singularité en éventail. Alors on résout S en un nombre fini de transformations de Nash normalisées.

Pour la démonstration voir [6] ou l'appendice.

5.2.4. Exemples. — Soit $\sigma : \tilde{X} \rightarrow X$ l'éclatement défini en 5.1.1i), et soit $\tilde{\Gamma}$ le graphe dual pondéré associé à la courbe $\sigma^{-1} \circ \pi^{-1}(O)$. Voici quelques exemples, où on a Γ dans la colonne à gauche et $\tilde{\Gamma}$ dans la colonne à droite :





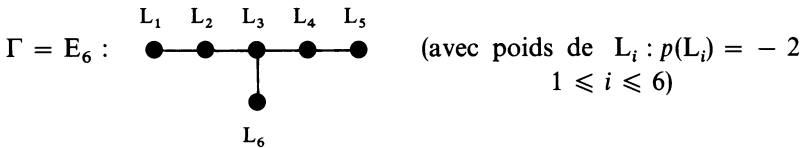
Les nouveaux sommets apparaissant dans $\tilde{\Gamma}$ sont représentés par \bigcirc . Les droites contractées par $\tilde{\pi} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{S}$ sont représentées par des sommets entourés d'un carré : $\boxed{\bullet}$

Donc, dans le cas a) le transformé de Nash normalisé \tilde{S}_n a deux singularités dont les graphes des résolutions minimales sont \bullet et \bullet ; dans le cas b) on a A_5 au départ et \tilde{S}_n a deux singularités A_2 ; dans le cas c) \tilde{S}_n est lisse mais ce n'est pas la résolution minimale de S ; et finalement dans le cas d) et e) on trouve que \tilde{S}_n est la résolution minimale de S .

Dans 5.(3-6) on donne l'énoncé des résultats des transformations de Nash normalisées itérées pour les cas E_6, E_7, E_8 et $D_n (n \geq 4)$, où on a fait le calcul jusqu'au moment où la surface obtenue présente seulement des singularités en éventail. On garde les notations fixées en 5.1.

5.3. CAS E_6 (Énoncé des résultats).

i) Soit $O \in S$ un point double rationnel dont le graphe Γ de la configuration (C, Γ) associée à la résolution minimale $\pi : X \rightarrow S$ est

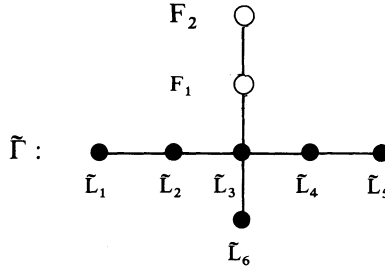


Notons Q_2 (resp. P_1 ; resp. P_2) le point d'intersection des courbes L_6 (resp. L_2 ; resp. L_4) et L_3 .

Soit Q_1 le point de la droite projective L_3 tel que le birapport (Q_1, Q_2, P_1, P_2) soit égal à -1 .

Alors, la surface \tilde{X} de la résolution minimale $\tilde{\pi} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{S}$ du transformé de Nash \tilde{S} de S est obtenue à partir de X par la suite d'éclatements $\sigma_1 \circ \sigma_2 = \sigma : \tilde{X} \rightarrow X$, où $\sigma_1 : X_1 \rightarrow X$ est l'éclatement de Q_1 dans X , et où $\sigma_2 : \tilde{X} \rightarrow X_1$ est l'éclatement d'un point $\overline{Q_1}$ de la droite exceptionnelle $\sigma_1^{-1}(Q_1) \subset X_1$, avec $\overline{Q_1}$ un point lisse de la courbe réduite $\sigma_1^{-1}(C)$.

Le graphe dual pondéré $\tilde{\Gamma}$ associé à la courbe réduite $\tilde{C} = \sigma^{-1}(C)$ est

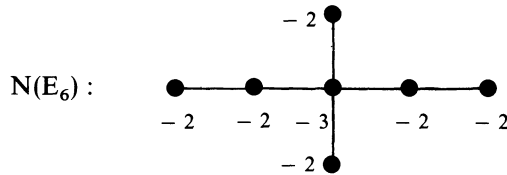


où on a représenté par \circ les nouveaux sommets introduits dans $\tilde{\Gamma}$, et où le poids $p(\)$ de chaque sommet est $p(\tilde{L}_i) = -2$ avec $1 \leq i \leq 6, i \neq 3$; $p(\tilde{L}_3) = -3$; $p(F_1) = -2$; $p(F_2) = -1$.

Soit $\delta(\tilde{L}_i), 1 \leq i \leq 6$, (resp. $\delta(F_i), i = 1, 2$) le degré de la restriction à \tilde{L}_i (resp. F_i) du fibré cotangent de Nash (relatif à S).

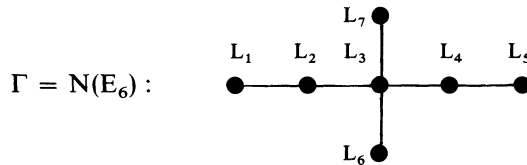
Alors on a $\delta(\tilde{L}_i) = 0, 1 \leq i \leq 6, \delta(F_1) = 0, \delta(F_2) = 1$.

Par conséquent le transformé de Nash normalisé \tilde{S}_n a un seul point singulier dont le graphe dual pondéré de la résolution minimale est



ii) On change les notations utilisées dans i).

Soit $O \in S$ le point singulier (rationnel) obtenu dans i), et soit (C, Γ) la configuration associée à sa résolution minimale $\pi : X \rightarrow S$, avec



(avec $p(L_i) = -2$ si $1 \leq i \leq 7, i \neq 3, p(L_3) = -3$).

Alors la surface \tilde{X} (de la résolution minimale $\tilde{\pi} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{S}$ du transformé de Nash \tilde{S} de S) est isomorphe à X , et le degré (L_i) de la restriction à L_i du fibré cotangent de Nash (relatif à S), $1 \leq i \leq 7$, est

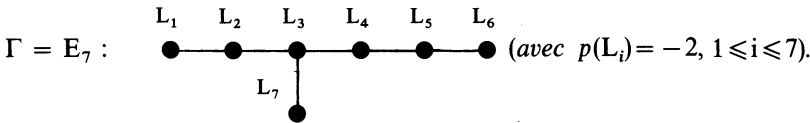
$$\delta(L_1) = \delta(L_5) = 1;$$

$$\delta(L_2) = \delta(L_4) = \delta(L_6) = \delta(L_7) = 0; \quad \delta(L_3) = 3.$$

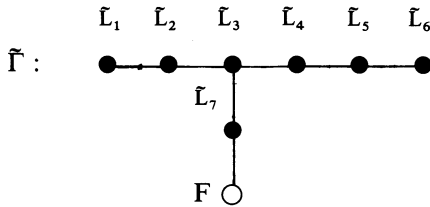
La surface normalisée \tilde{S}_n (de \tilde{S}) a quatre singularités de type A_1 .

5.4. CAS E_7 (Énoncé des résultats).

i) Soit $O \in S$ un point double rationnel dont le graphe Γ de la configuration (C, Γ) associée à la résolution minimale $\pi : X \rightarrow S$ est



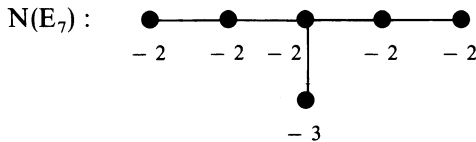
Alors la surface \tilde{X} de la résolution minimale $\tilde{\pi} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{S}$ du transformé de Nash \tilde{S} de S est obtenue à partir de X par l'éclatement $\sigma : \tilde{X} \rightarrow X$ d'un point de L_7 différent de $\{L_3 \cap L_7\}$. Le graphe dual pondéré $\tilde{\Gamma}$ associé à la courbe réduite $\tilde{C} = \sigma^{-1}(C)$ est



où on a représenté par \circ le nouveau sommet introduit dans $\tilde{\Gamma}$, et où les poids sont $p(\tilde{L}_i) = -2$ si $1 \leq i \leq 6$, $p(\tilde{L}_7) = -3$ et $p(F) = -1$. Le degré de la restriction du fibré cotangent de Nash (relatif à S) à chaque composante de \tilde{C} est :

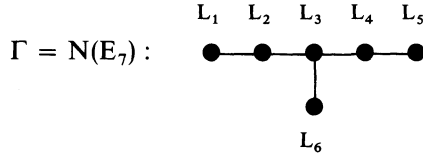
$$\delta(L_i) = 0 \quad \text{si} \quad 1 \leq i \leq 7, \quad i \neq 6; \quad \delta(L_6) = \delta(F) = 1.$$

Par conséquent le transformé de Nash normalisé \tilde{S}_n a un seul point singulier dont le graphe dual pondéré de la résolution minimale est :



ii) On change les notations utilisées dans i).

Soit $O \in S$ le point singulier (rationnel) obtenu dans i), et soit (C, Γ) la configuration associée à sa résolution minimale $\pi : X \rightarrow S$, avec



(avec $p(L_i) = -2$ si $1 \leq i \leq 5$, $p(L_6) = -3$).

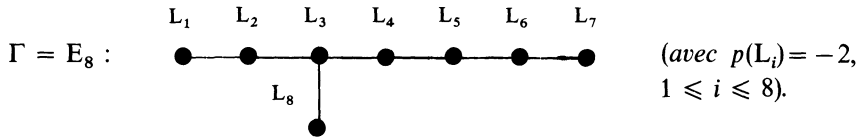
Alors la surface \tilde{X} (de la résolution minimale $\tilde{\pi} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{S}$ du transformé de Nash \tilde{S} de S) est isomorphe à X , et le degré $\delta(L_i)$ de la restriction à L_i du fibré cotangent de Nash (relatif à S), $1 \leq i \leq 6$, est

$$\delta(L_1) = \delta(L_3) = \delta(L_5) = 0; \quad \delta(L_2) = \delta(L_4) = 1; \quad \delta(L_6) = 2.$$

La surface normalisée \tilde{S}_n (de \tilde{S}) a trois singularités de type A_1 .

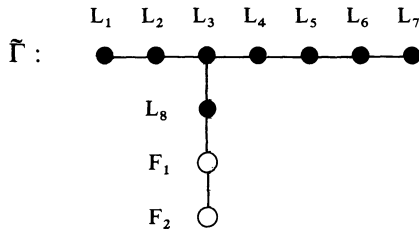
5.5. CAS E_8 (Énoncé des résultats).

i) Soit $O \in S$ un point double rationnel dont le graphe Γ de la configuration (C, Γ) associée à la résolution minimale $\pi : X \rightarrow S$ est



Alors la surface \tilde{X} (de la résolution minimale $\tilde{\pi} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{S}$ du transformé de Nash \tilde{S} de S) est obtenue à partir de X par la suite d'éclatements $\sigma_1 \circ \sigma_2 = \sigma : \tilde{X} \rightarrow X$, où $\sigma_1 : X_1 \rightarrow X$ est l'éclatement d'un point $Q \in L_8$ avec $Q \notin L_3 \cap L_8$, et où $\sigma_2 : \tilde{X} \rightarrow X_1$ est l'éclatement d'un point $Q_1 \in \sigma_1^{-1}(Q)$ avec Q_1 un point lisse de la courbe réduite $\sigma_1^{-1}(C)$.

Le graphe dual pondéré $\tilde{\Gamma}$ associé à la courbe réduite $\tilde{C} = \sigma^{-1}(C)$ est

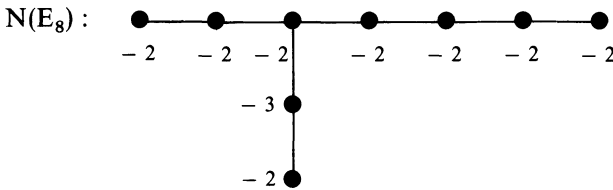


où on a représenté par \circ les nouveaux sommets introduits dans $\tilde{\Gamma}$, et où le poids $p(\cdot)$ de chaque sommet est $p(\tilde{L}_i) = -2$ avec $1 \leq i \leq 7$; $p(\tilde{L}_8) = -3$; $p(F_1) = -2$; $p(F_2) = -1$.

Le degré $\delta(\cdot)$ de la restriction du fibré cotangent de Nash (relatif à S) à chaque composante de \tilde{C} est :

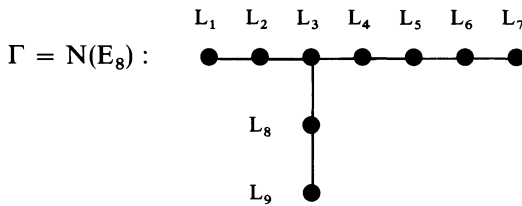
$$\delta(\tilde{L}_i) = 0 \quad \text{avec} \quad 1 \leq i \leq 8; \quad \delta(F_1) = 0; \quad \delta(F_2) = 1.$$

Par conséquent le transformé de Nash normalisé \tilde{S}_n a un seul point singulier dont le graphe dual pondéré de la résolution minimale est



ii) On change les notations utilisées dans i).

Soit $O \in S$ le point singulier (rationnel) obtenu dans i) et soit (C, Γ) la configuration associée à sa résolution minimale $\pi : X \rightarrow S$, avec

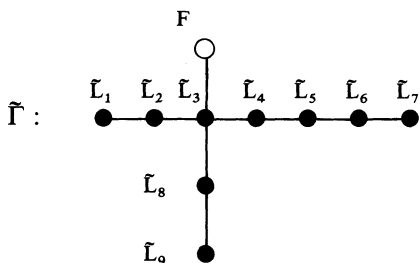


(avec $p(L_i) = -2$ si $1 \leq i \leq 9$, $i \neq 9$, $p(L_8) = -3$). Notons Q_2 (resp. P_1 ; resp. P_2) le point d'intersection des courbes L_8 (resp. L_2 ; resp. L_4) et L_3 .

Soit Q_1 le point de la droite projective L_3 tel que le birapport (Q_1, Q_2, P_1, P_2) soit égal à 4.

Alors la surface \tilde{X} (de la résolution minimale $\tilde{\pi} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{S}$ du transformé de Nash \tilde{S} de S) est obtenue à partir de X par l'éclatement $\sigma : \tilde{X} \rightarrow X$ du point Q_1 .

Le graphe dual pondéré $\tilde{\Gamma}$ associé à la courbe réduite $\tilde{C} = \sigma^{-1}(C)$ est :



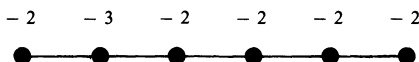
où on a représenté par \circ le nouveau sommet introduit dans $\tilde{\Gamma}$, et où le poids $p(\)$ de chaque sommet est $p(\tilde{L}_i) = -2$ si $1 \leq i \leq 9, i \neq 8, i \neq 3$; $p(\tilde{L}_3) = p(\tilde{L}_8) = -3$; $p(F) = -1$.

Le degré $\delta(\)$ de la restriction du fibré cotangent de Nash (relatif à S) à chaque composante de \tilde{C} est :

$$\delta(\tilde{L}_1) = \delta(\tilde{L}_8) = 1;$$

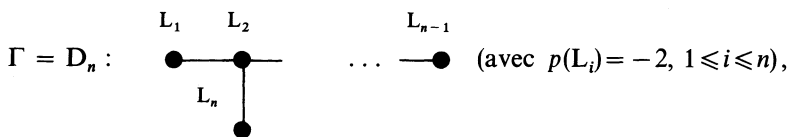
$$\delta(\tilde{L}_i) = 0 \quad \text{si} \quad 2 \leq i \leq 9, \quad i \neq 8 \quad \text{et} \quad \delta(F) = 1.$$

La surface normalisée \tilde{S}_n (de \tilde{S}) a une singularité de type A_1 et une singularité en éventail de type :



5.6. CAS D_n (Énoncé des résultats).

1) Soit $O \in S$ un point double rationnel dont le graphe Γ de la configuration (C, Γ) associée à la résolution minimale $\pi : X \rightarrow S$ est



où on suppose n pair, $n \geq 4$.

Alors la surface \tilde{X} (de la résolution minimale $\tilde{\pi} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{S}$ du transformé de Nash \tilde{S} de S) est isomorphe à X .

Le degré $\delta(\)$ de la restriction du fibré cotangent de Nash (relatif à S) à

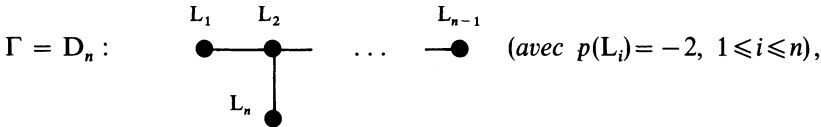
chaque composante de C est :

$$\delta(L_1) = \delta(L_{n-1}) = \delta(L_n) = 1; \quad \delta(L_i) = 0, \quad 2 \leq i \leq n - 2.$$

La surface normalisée \tilde{S}_n (de \tilde{S}) a une singularité de type A_{n-3} .

2.i) On change les notations utilisées dans 1).

Soit $O \in S$ un point double rationnel dont le graphe Γ de la configuration (C, Γ) associée à la résolution minimale $\pi : X \rightarrow S$ est



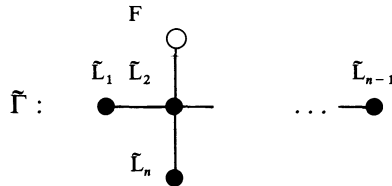
où on suppose n impair, $n \geq 5$.

Notons Q_2 (resp. $P_1; P_2$) le point d'intersection des courbes L_2 et L_n (resp. L_1 et L_2 ; resp. L_2 et L_3).

Soit Q_1 le point de la droite projective L_2 tel que le birapport (Q_1, Q_2, P_1, P_2) soit égal à $1/2$.

Alors la surface \tilde{X} (de la résolution minimale $\tilde{\pi} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{S}$ du transformé de Nash \tilde{S} de S) est obtenue à partir de X par l'éclatement $\sigma : \tilde{X} \rightarrow X$ du point Q_1 .

Le graphe dual pondéré $\tilde{\Gamma}$ associé à la courbe réduite $\tilde{C} = \sigma^{-1}(C)$ est



où on a représenté par \circ le nouveau sommet introduit dans $\tilde{\Gamma}$, et où le poids $p(\)$ de chaque sommet est

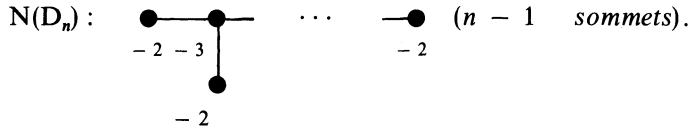
$$p(\tilde{L}_i) = -2 \quad \text{si} \quad 1 \leq i \leq n, \quad i \neq 2;$$

$$p(\tilde{L}_2) = -3; \quad p(F) = -1.$$

Le degré $\delta(\)$ de la restriction du fibré cotangent de Nash (relatif à S) à chaque composante de \tilde{C} est :

$$\delta(\tilde{L}_i) = 0 \quad \text{si} \quad 1 \leq i \leq n, \quad i \neq n - 1; \quad \delta(\tilde{L}_{n-1}) = \delta(F) = 1.$$

Par conséquent le transformé de Nash normalisé \tilde{S}_n a un seul point singulier dont le graphe dual pondéré de la résolution minimale est :



2.ii) On change les notations utilisées dans 1) et 2.i).

Soit $O \in S$ le point singulier (rationnel) obtenu dans 2.i), et soit (C, Γ) la configuration associée à la résolution minimale $\pi : X \rightarrow S$, avec



Alors la surface \tilde{X} (de la résolution minimale $\tilde{\pi} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{S}$ du transformé de Nash \tilde{S} de S) est isomorphe à X .

Le degré $\delta(\)$ de la restriction du fibré cotangent de Nash (relatif à S) à chaque composante de C est :

si $n = 5$: $\delta(L_1) = \delta(L_3) = \delta(L_4) = 0$; $\delta(L_2) = 4$.
 si $n \geq 7$: $\delta(L_i) = 0$ si $1 \leq i \leq n - 1$, $i \neq 2$, $i \neq (n-1)/2$;

$$\delta(L_2) = \delta(L_{(n-1)/2}) = 2.$$

La surface normalisée \tilde{S}_n (de \tilde{S}) a trois singularités de type A_1 si $n = 5$; deux singularités de type A_1 , une de type A_{k-2} et une de type A_k (où $k=(n-3)/2$) si $n \geq 7$.

5.7. Dans ce paragraphe on donne les démonstrations des énoncés 5.3 à 5.6

Démonstration de 5.3 i). — On peut réaliser un plongement (cylindrique) de la configuration (C, Γ) dans une surface lisse X de la façon suivante : on plonge d'abord chaque droite $L_i (1 \leq i \leq 6)$ dans un cylindre canonique de degré -2 , donné par le recollement de deux copies de C^2 , U_i resp. U'_i , de coordonnées (u_i, v_i) (resp. (u'_i, v'_i)) par les identifications définies sur l'ouvert $\{v_i \neq 0\}$ (resp. $\{v'_i \neq 0\}$)

$$u'_i = u_i v_i^2, \quad v'_i = 1/v_i,$$

où L_i est identifiée à la courbe rationnelle définie par $u_i = 0$ (resp. $u'_i=0$) dans U_i (resp. U'_i).

Ensuite on construit la surface X par les recollements suivants de ces six cylindres :

$$u'_i = v_{i+1}, \quad v'_i = u_{i+1} \quad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq 4,$$

et

$$u_3 = v_6, \quad v_3 + 1 = u_6.$$

On va donner un morphisme (de contraction) $\pi : X \rightarrow S$ de X sur une surface normale, qui contracte la courbe C en un point $O \in S$. Le cycle fondamental Z de X associé à un tel point singulier O est

$$Z = L_1 + 2L_2 + 3L_3 + 2L_4 + L_5 + 2L_6$$

(voir 3.1), et par conséquent la dimension de plongement e de O est égale à $1 - (Z, Z) = 3$. D'après le § 4 il suffit de donner des fonctions $f_i (1 \leq i \leq 3)$ appartenant à $\Gamma(\mathcal{I}_Z)$ (où \mathcal{I}_Z est l'idéal de Z), telles que leurs images \bar{f}_i dans $\Gamma(\mathcal{I}_Z)/\Gamma(\mathcal{I}_{2Z})$ forment une base (sur C) de $\Gamma(\mathcal{I}_Z)/\Gamma(\mathcal{I}_{2Z})$. On va noter un cycle $Y = \sum_{1 \leq i \leq 6} m_i L_i$ à support dans C avec un diagramme analogue au graphe Γ , où on remplacera un sommet L_i par le nombre m_i :

$$\begin{array}{cccccc} m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & m_5 & \\ & & & & & m_6 \end{array}$$

et on indiquera de façon similaire à la précédente l'ensemble des nombres d'intersection

$$\Delta = \{d_i = (Y, L_i), \quad 1 \leq i \leq 6\} : \begin{array}{cccccc} d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 & \\ & & & & & d_6 \end{array}$$

Soient $Y_j = \sum_{1 \leq i \leq 6} m_i(j) L_i, \quad 1 \leq j \leq 3$, les trois cycles définis par :

$$\begin{array}{l} Y_1 = Z : \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & \\ & & & & & 2 \end{array}; \quad Y_2 : \begin{array}{cccccc} 2 & 3 & 4 & 3 & 2 & \\ & & & & & 2 \end{array}; \\ Y_3 : \begin{array}{cccccc} 2 & 4 & 6 & 5 & 4 & \\ & & & & & 3 \end{array}. \end{array}$$

Alors les ensembles de nombres d'intersection

$$\Delta(j) = \{d_i(j) = (Y_j, L_i), \quad 1 \leq i \leq 6\}, \quad 1 \leq j \leq 3,$$

sont :

$$\begin{aligned} \Delta(1) : & \begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & -1 \\ & & & & & 0 \end{array} ; & \Delta(2) : & \begin{array}{cccccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ & & & & & 0 \\ & & & & & 0 \end{array} ; \\ \Delta(3) : & \begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ & & & & & 0 \end{array} . \end{aligned}$$

Soit B_1 (resp. B_5 ; resp. B_6) la droite affine dans X définie par $\{v_1=0\}$ (resp. $\{v_5=0\}$; resp. $\{v_6=0\}$) dans l'ouvert U_1 (resp. U_5 ; resp. U_6). Alors il existe une fonction f_1 (resp. f_2 ; resp. f_3) définie sur X , dont le diviseur associé (f_1) (resp. (f_2); resp. (f_3)) est $(f_1) = Y_1 + B_6$ (resp. (f_2) = $Y_2 + B_1 + B_5$; resp. (f_3) = $Y_3 + 3B_5$). On a $Y_j \geq Z$, d'où $f_j \in \Gamma(\mathcal{O}_Z)$, $1 \leq j \leq 3$. D'autre part on a $2Z \not\geq Y_j$, $1 \leq j \leq 3$, et on vérifie les hypothèses de la proposition 4.3; par conséquent $\{\bar{f}_j, 1 \leq j \leq 3\}$ forme une base de $\Gamma(\mathcal{O}_Z)/\Gamma(\mathcal{O}_{2Z})$. Donc les fonctions $f_j, 1 \leq j \leq 3$ définissent un morphisme π de X dans \mathbb{C}^3 dont l'image est une surface normale S ayant un point singulier à l'origine O de \mathbb{C}^3 ; la résolution minimale de S est $\pi : X \rightarrow S$. On considère l'application rationnelle $\bar{\pi} : X \dashrightarrow \bar{S}$ induite par l'isomorphisme $S - \{O\} \simeq \bar{S} - v^{-1}\{O\}$, et d'autre part le faisceau $\tilde{\Omega}^2$ sur X défini par $\tilde{\Omega}^2 = \Lambda^2(d\pi(\pi^*\Omega_S^1))$ (voir § 2). On cherche à lever les indéterminations de $\bar{\pi}$, autrement dit, à « rendre inversible $\tilde{\Omega}^2$ ».

Pour cela, on fait un calcul local pour déterminer $\tilde{\Omega}^2|_U$ avec U parcourant les ouverts du recouvrement de X $\{U_i; U_i, 1 \leq i \leq 6\}$. En fait, il suffit de faire ce calcul pour les ouverts $U_1, U'_1 = U_2, U'_2 = U_3 = U_6$ (car par symétrie on peut éviter de le faire pour $U'_3 = U_4, U'_4 = U_5$ et U'_5), et pour U'_6 . La restriction $\tilde{\Omega}^2|_U$ est engendrée par $df_j \wedge df_{j'}|_U$ (avec $1 \leq j < j' \leq 3$) sur \mathcal{O}_U . Les fonctions $f_j, 1 \leq j \leq 3$, sont déterminées à un facteur constant non nul près, donc on peut écrire :

$$\begin{aligned} f_1|_{U_1} &= u_1(1 + u_1^2 v_1^3)^2; \\ f_2|_{U_1} &= u_1^2 v_1(1 + u_1^2 v_1^3)^2; \\ f_3|_{U_1} &= u_1^2(1 + u_1^2 v_1^3)^3; \end{aligned}$$

et par conséquent :

$$\begin{aligned} df_1 \wedge df_2|_{U_1} &= u_1^2(1 + u_1^2 v_1^3)^3(1 - u_1^2 v_1^3) du_1 \wedge dv_1; \\ df_1 \wedge df_3|_{U_1} &= -3u_1^4 v_1^2(1 + u_1^2 v_1^3)^4 du_1 \wedge dv_1; \\ df_2 \wedge df_3|_{U_1} &= u_1^3(1 + u_1^2 v_1^3)^5 du_1 \wedge dv_1. \end{aligned}$$

Sur l'ouvert U_2 on a :

$$\begin{aligned} f_1|_{U_2} &= u_2^2 v_2 (1 + u_2 v_2^2)^2; \\ f_2|_{U_2} &= u_2^3 v_2^2 (1 + u_2 v_2^2)^2; \\ f_3|_{U_2} &= u_2^4 v_2^2 (1 + u_2 v_2^2)^3, \end{aligned}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} df_1 \wedge df_2|_{U_2} &= u_2^4 v_2^2 (1 + u_2 v_2^2)^3 (1 - u_2 v_2^2) du_2 \wedge dv_2; \\ df_1 \wedge df_3|_{U_2} &= -3u_2^5 v_2^2 (1 + u_2 v_2^2)^4 du_2 \wedge dv_2; \\ df_2 \wedge df_3|_{U_2} &= -2u_2^6 v_2^3 (1 + u_2 v_2^2)^5 du_2 \wedge dv_2. \end{aligned}$$

Sur l'ouvert U_3 on a :

$$\begin{aligned} f_1|_{U_3} &= u_3^3 v_3^2 (1 + v_3)^2; \\ f_2|_{U_3} &= u_3^4 v_3^3 (1 + v_3)^2; \\ f_3|_{U_3} &= u_3^6 v_3^4 (1 + v_3)^3; \end{aligned}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} df_1 \wedge df_2|_{U_3} &= u_3^5 v_3^4 (1 + v_3)^3 (1 - v_3) du_3 \wedge dv_3; \\ df_1 \wedge df_3|_{U_3} &= u_3^8 v_3^7 (1 + v_3)^4 du_3 \wedge dv_3; \\ df_2 \wedge df_3|_{U_3} &= -2u_3^9 v_3^6 (1 + v_3)^5 du_3 \wedge dv_3. \end{aligned}$$

Finalement, sur l'ouvert U'_6 on a :

$$\begin{aligned} f_1|_{U'_6} &= u_6'^2 v_6' (u_6' v_6'^2 - 1)^2; \\ f_2|_{U'_6} &= u_6'^2 (u_6' v_6'^2 - 1)^3; \\ f_3|_{U'_6} &= u_6'^3 (u_6' v_6'^2 - 1)^4; \end{aligned}$$

et par conséquent :

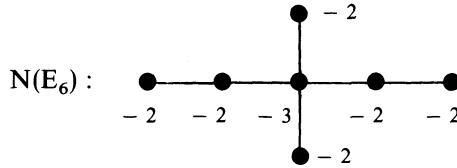
$$\begin{aligned} df_1 \wedge df_2|_{U'_6} &= u_6'^3 (u_6' v_6'^2 - 1)^4 (2 - u_6' v_6') du_6' \wedge dv_6'; \\ df_1 \wedge df_3|_{U'_6} &= -3u_6'^4 (u_6' v_6'^2 - 1)^6 du_6' \wedge dv_6'; \\ df_2 \wedge df_3|_{U'_6} &= -2u_6'^5 v_6' (u_6' v_6'^2 - 1)^6 du_6' \wedge dv_6'. \end{aligned}$$

Il résulte des calculs précédents qu'on a

$$\tilde{\Omega}^2 \cong \mathcal{I} \mathcal{O}_X(-M + K_X),$$

où K_X est un diviseur canonique de X , où $M = \sum M_i L_i$ est le diviseur défini par $M_1 = M_5 = 2$, $M_2 = M_4 = 4$, $M_3 = 6$, $M_6 = 3$, i.e. le

sont strictement inférieurs à -1 . Le graphe dual pondéré associé à \check{C}_0 est :



Finalement on vérifie bien que le point Q_1 est le conjugué harmonique de $Q_2 = L_3 \cap L_6$ par rapport au couple de points

$$P_1 = L_2 \cap L_3 \quad \text{et} \quad P_2 = L_3 \cap L_4,$$

car v_3 et v'_3 sont des paramètres locaux de L_3 (avec $v_3 = 1/v'_3$), et la coordonnée de Q_1 (resp. Q_2 ; resp. P_1 ; resp. P_2) est $v_3 = 1$ (resp. $v_3 = -1$, resp. $v_3 = 0$; resp. $v'_3 = 0$), d'où le résultat.

Pour les énoncés 5.3 ii), 5.4, 5.5 et 5.6 on donne seulement une idée de la démonstration, en fournissant les éléments de base, et en laissant les vérifications des calculs au lecteur courageux.

Démonstration de 5.3 ii). — La partie précédente fournit un plongement cylindrique X (prop. 3.4.5) de la nouvelle configuration (C, Γ) . Le cycle fondamental Z d'un morphisme (de contraction) $\pi : X \rightarrow S$ sur une surface normale S , qui contracte la courbe C en un point de S est :

$$Z : \begin{matrix} & & 1 & & & & \\ & & & & & & \\ & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & \\ & & & & & & \\ & & & & & & 1 \end{matrix}$$

et le diagramme de nombres d'intersection $(Z.L_i)$, $1 \leq i \leq 7$, est :

$$\begin{matrix} & & 0 & & & & \\ & & & & & & \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0; & & \\ & & & & & & 0 \end{matrix}$$

par conséquent on a $(Z.Z) = -4$ et la dimension de plongement est $e = 5$.

Soient $Y_j = \sum_{1 \leq i \leq 7} m_i(j)L_i$, $1 \leq j \leq 5$, les cycles à support dans C

donnés par :

$$\begin{array}{c}
 1 \\
 Y_1: 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2; \\
 1 \\
 2 \qquad \qquad \qquad 2 \\
 Y_2: 1 \ 2 \ 3 \ 3 \ 3; \quad Y_3: 3 \ 3 \ 3 \ 2 \ 1 \\
 2 \qquad \qquad \qquad 2 \\
 2 \qquad \qquad \qquad 2 \\
 Y_4: 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6; \quad Y_5: 6 \ 5 \ 4 \ 3 \ 2 \\
 2 \qquad \qquad \qquad 2
 \end{array}$$

Alors les diagrammes de nombres d'intersection associés $\Delta(j) = \{(Y_j \cdot L_i), 1 \leq i \leq 7\}$, $1 \leq j \leq 5$, sont

$$\begin{array}{c}
 0 \\
 \Delta(1): -2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -2; \\
 0 \\
 -1 \qquad \qquad \qquad -1 \\
 \Delta(2): 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -3; \quad \Delta(3): -3 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \\
 -1 \qquad \qquad \qquad -1 \\
 0 \qquad \qquad \qquad 0 \\
 \Delta(4): -1 \ 0 \ 0 \ 0 \ -7; \quad \Delta(5): -7 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1. \\
 0 \qquad \qquad \qquad 0
 \end{array}$$

On vérifie qu'il existe une fonction f_j telle que la partie à support dans C du diviseur (f_j) associé soit Y_j , pour chaque j avec $1 \leq j \leq 5$. Ces fonctions appartiennent à $\Gamma(\mathcal{I}_Z)$, et leurs images dans $\Gamma(\mathcal{I}_Z)/\Gamma(\mathcal{I}_{2Z})$ forment une base (sur C) de $\Gamma(\mathcal{I}_Z)/\Gamma(\mathcal{I}_{2Z})$ (prop. 4.3).

Il résulte que $\tilde{\Omega}^2$ est inversible et qu'on a $\tilde{\Omega}^2 \cong \mathcal{O}_X(-M + K_X)$ où $M = \sum M_i L_i$ est le cycle à support dans C représenté par

$$\begin{array}{c}
 2 \\
 M: 2 \ 3 \ 4 \ 3 \ 2. \\
 2
 \end{array}$$

Par conséquent le diagramme de degrés qui représente les nombres

d'intersection $(-M + K_X \cdot L_i)$, $1 \leq i \leq 7$ est

$$\begin{array}{c} 0 \\ 1 \ 0 \ 3 \ 0 \ 1, \\ 0 \end{array}$$

d'où le résultat.

Démonstration de 5.4 i). — On réalise un plongement (cylindrique) de (C, Γ) de façon analogue à celle de 5.3 i). Le cycle fondamental Z est représenté par

$$\begin{array}{c} Z : 2 \ 3 \ 4 \ 3 \ 2 \ 1, \\ 2 \end{array}$$

et le diagramme des nombres d'intersection

$$\Delta(Z) = \{(Z \cdot L_i), 1 \leq i \leq 7\}$$

est :

$$\begin{array}{c} - \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0. \\ 0 \end{array}$$

Par conséquent on vérifie que la dimension de plongement est $e = 3$. Soient Y_j , $1 \leq j \leq 3$, les cycles à support dans C donnés par

$$\begin{array}{c} Y_1 = Z; \quad Y_2 : 2 \ 4 \ 6 \ 5 \ 4 \ 3; \\ 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} Y_3 : 3 \ 6 \ 9 \ 7 \ 5 \ 3. \\ 5 \end{array}$$

Alors les diagrammes de nombres d'intersection

$$\Delta(j) = \{(Y_j \cdot L_i), 1 \leq i \leq 7\},$$

$1 \leq j \leq 3$, sont $\Delta(1) = \Delta(Z)$;

$$\begin{array}{c} \Delta(2) : 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ - \ 2; \quad \Delta(3) : 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ - \ 1. \\ 0 \qquad \qquad \qquad - \ 1 \end{array}$$

On vérifie qu'il existe une fonction f_j telle que la partie à support dans C du diviseur (f_j) associé soit Y_j , pour chaque j avec $1 \leq j \leq 3$. Ces fonctions appartiennent à $\Gamma(\mathcal{J}_Z)$, et leurs images dans $\Gamma(\mathcal{J}_Z)/\Gamma(\mathcal{J}_{2Z})$

forment une base (sur \mathbb{C}) de $\Gamma(\mathcal{I}_Z)/\Gamma(\mathcal{I}_{2Z})$ (prop. 4.3). Il résulte qu'on a $\Omega^2 \cong \mathcal{I}\mathcal{O}_X(-M + K_X)$, où $M = \sum M_i L_i$ est le cycle à support dans C représenté par

$$M : 3 \ 6 \ 9 \ 7 \ 5 \ 3, \\ 5$$

et où l'idéal \mathcal{I} est à cosupport fini concentré en un point de L_7 différent de $L_3 \cap L_7$. Avec l'éclatement $\sigma : \tilde{X} \rightarrow X$ de ce point, on trouve que l'idéal $\sigma^*\mathcal{I}$ est inversible, et qu'on a $\text{div}(\sigma^*\mathcal{I}) \equiv F$ avec les notations de l'énoncé 5.4 i) pour le graphe $\tilde{\Gamma}$ associé à $\tilde{C} = \sigma^{-1}(C)$. On a

$$\sigma^*M \equiv \sum_{1 \leq i \leq 7} M_i \tilde{L}_i + M_7 F; \\ \sigma^*K_X \equiv K_{\tilde{X}} - F.$$

Par suite on a $\sigma^*\tilde{\Omega}^2 \cong \mathcal{O}_{\tilde{X}}(D)$, avec

$$D \equiv -\text{div}(\sigma^*\mathcal{I}) - \sigma^*M + \sigma^*K_X,$$

d'où

$$D \equiv -(M_7 + 2)F - \left(\sum_{1 \leq i \leq 7} M_i \tilde{L}_i \right) + K_{\tilde{X}}.$$

Par conséquent le diagramme de degrés qui représente les nombres d'intersection (D, \tilde{L}_i) , $1 \leq i \leq 7$ et (D, F) est :

$$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \\ 0 \\ 1$$

d'où le résultat.

Démonstration de 5.4 ii). — La partie précédente fournit un plongement cylindrique (prop. 3.4.5) de la nouvelle configuration (C, Γ) . Le cycle fondamental Z est

$$Z : 1 \ 2 \ 3 \ 2 \ 1, \\ 1$$

et le diagramme de nombres d'intersection (Z, L_i) , $1 \leq i \leq 6$, est :

$$0 \ 0 \ -1 \ 0 \ 0; \\ 0$$

par conséquent on vérifie que la dimension de plongement est $e = 4$. Soient Y_j , $1 \leq j \leq 4$ les cycles à support dans C donnés par :

$$\begin{array}{l} Y_1 : 2 \ 3 \ 4 \ 3 \ 2 ; \\ \qquad \qquad \qquad 2 \\ Y_2 : 1 \ 2 \ 3 \ 3 \ 3 ; \quad Y_3 : 3 \ 3 \ 3 \ 2 \ 1 \\ \qquad \qquad \qquad 1 \qquad \qquad \qquad 1 \\ Y_4 : 3 \ 4 \ 5 \ 4 \ 3 . \\ \qquad \qquad \qquad 2 \end{array}$$

Alors les diagrammes de nombres d'intersection

$$\Delta(j) = \{(Y_j, L_i), 1 \leq i \leq 6\},$$

$1 \leq j \leq 4$, sont

$$\begin{array}{l} \Delta(1) : -1 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1 \\ \qquad \qquad \qquad -2 \\ \Delta(2) : 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -3 ; \quad \Delta(3) : -3 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \\ \qquad \qquad \qquad 0 \qquad \qquad \qquad 0 \\ \Delta(4) : -2 \ 0 \ 0 \ 0 \ -2 . \\ \qquad \qquad \qquad -1 \end{array}$$

On vérifie qu'il existe une fonction f_j telle que la partie à support dans C du diviseur (f_j) associé soit Y_j , pour chaque j avec $1 \leq j \leq 4$. Ces fonctions appartiennent à $\Gamma(\mathcal{F}_Z)$ et leurs images dans $\Gamma(\mathcal{F}_Z/\Gamma(\mathcal{F}_{2Z}))$ forment une base (sur C) de $\Gamma(\mathcal{F}_Z)/\Gamma(\mathcal{F}_{2Z})$ (prop. 4.3). Il résulte que $\tilde{\Omega}^2$ est inversible et qu'on a

$$\tilde{\Omega}^2 \cong \mathcal{O}_X(-M + K_X), \quad \text{où} \quad M = \sum_{1 \leq i \leq 6} M_i L_i$$

est le cycle à support dans C représenté par

$$\begin{array}{l} M : 2 \ 4 \ 5 \ 4 \ 2 . \\ \qquad \qquad \qquad 2 \end{array}$$

Par conséquent le diagramme de degrés qui représente les nombres

d'intersection $(-M + K_X \cdot L_i)$, $1 \leq i \leq 6$, est :

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \\ & & & & & 2 \end{array}$$

d'où le résultat.

Démonstration de 5.5 i). — On réalise un plongement (cylindrique) de (C, Γ) de façon analogue à celle de 5.3 i). Le cycle fondamental Z est représenté par

$$\begin{array}{cccccccc} Z : & 2 & 4 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2, \\ & & & & & & & 3 \end{array}$$

et le diagramme de nombres d'intersection $\Delta(Z) = \{(Z \cdot L_i), 1 \leq i \leq 8\}$ est :

$$\begin{array}{cccccccc} \Delta(Z) : & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1; \\ & & & & & & & 0 \end{array}$$

par conséquent on vérifie que la dimension de plongement est $e = 3$. Soient Y_j , $1 \leq j \leq 3$, les cycles à support dans C donnés par :

$$\begin{array}{cccccccc} Y_1 = Z, & Y_2 : & 4 & 7 & 10 & 8 & 6 & 4 & 2, \\ & & & & & & & & 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccc} Y_3 : & 5 & 10 & 15 & 12 & 9 & 6 & 3. \\ & & & & & & & 8 \end{array}$$

Alors les diagrammes de nombres d'intersection

$$\Delta(j) = \{(Y_j \cdot L_i), 1 \leq i \leq 8\},$$

$1 \leq j \leq 3$ sont : $\Delta(1) = \Delta(Z)$;

$$\begin{array}{cccccccc} \Delta(2) : & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0; & \Delta(3) : & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0. \\ & & & & & & & 0 & & & & & & & & -1 \end{array}$$

On vérifie qu'il existe une fonction f_j telle que la partie à support dans C du diviseur (f_j) associé soit Y_j , pour chaque j avec $1 \leq j \leq 3$. Ces fonctions appartiennent à $\Gamma(\mathcal{F}_Z)$, et leurs images dans $\Gamma(\mathcal{F}_Z)/\Gamma(\mathcal{F}_{2Z})$ forment une base (sur C) de $\Gamma(\mathcal{F}_Z)/\Gamma(\mathcal{F}_{2Z})$ (prop. 4.3).

Il résulte qu'on a $\tilde{\Omega}^2 \cong \mathcal{I} \mathcal{O}_X(-M + K_X)$, où $M = \sum_{1 \leq i \leq 8} M_i L_i$ est le cycle à support dans C représenté par

$$M : 5 \ 10 \ 15 \ 12 \ 9 \ 6 \ 3, \\ 8$$

et où \mathcal{I} est un idéal à cosupport fini concentré en un point Q appartenant à L_8 , différent du point $L_3 \cap L_8$. Avec l'éclatement $\sigma^* : \tilde{X} \rightarrow X$ (voir énoncé 5.5 i)), on trouve que l'idéal $\sigma^*\mathcal{I}$ est un inversible, et qu'on a $\text{div}(\sigma^*\mathcal{I}) = F_1 + 2F_2$ (avec les notations de l'énoncé 5.5 i) pour le graphe $\tilde{\Gamma}$ associé à $\tilde{C} = \sigma^{-1}(C)$).

On a

$$\sigma^*M \equiv \left(\sum_{1 \leq i \leq 8} M_i \tilde{L}_i \right) + M_8 F_1 + M_8 F_2, \\ \sigma^*K_X \equiv K_{\tilde{X}} - F_1 - 2F_2.$$

Par suite on a $\sigma^*\tilde{\Omega}^2 \cong \mathcal{O}_{\tilde{X}}(D)$, avec

$$D \equiv -\text{div}(\sigma^*\mathcal{I}) - \sigma^*M + \sigma^*K_X, \text{ d'où} \\ D \equiv -(M_8 + 2)F_1 - (M_8 + 4)F_2 - \left(\sum_{1 \leq i \leq 8} M_i \tilde{L}_i \right) + K_{\tilde{X}}.$$

Par conséquent, le diagramme de degrés qui représente les nombres d'intersection $(D \cdot \tilde{L}_i)$, $1 \leq i \leq 7$ et $(D \cdot F_i)$, $i = 1, 2$ est

$$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0, \quad \text{d'où le résultat.} \\ 0 \\ 0 \\ 1$$

Démonstration de 5.5 ii). — La partie précédente fournit un plongement cylindrique (prop. 3.4.5) de la nouvelle configuration (C, Γ) . Le cycle fondamental Z est

$$Z : 2 \ 4 \ 5 \ 4 \ 3 \ 2 \ 1, \\ 2 \\ 1$$

et le diagramme de nombres d'intersection $(Z.L_i)$, $1 \leq i \leq 9$, est :

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0; \\ & & 0 & & & & & \\ & & & 0 & & & & \end{array}$$

par conséquent on vérifie que la dimension de plongement est $e = 5$.

Soient Y_j , $1 \leq i \leq 5$, les cycles à support dans C donnés par

$$\begin{array}{ll} Y_1 : 3 & 4 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1; & Y_2 : 2 & 4 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2; \\ & & 2 & & & & & & & 3 & & & & \\ & & 1 & & & & & & & 3 & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} Y_3 : 3 & 5 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3; & Y_4 : 4 & 7 & 10 & 8 & 6 & 4 & 2; \\ & & 3 & & & & & & & 5 & & & & \\ & & 2 & & & & & & & 5 & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{l} Y_5 : 3 & 6 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5. \\ & & 4 & & & & \\ & & 3 & & & & \end{array}$$

Alors les diagrammes de nombres d'intersection

$$\Delta(j) = \{(Y_j.L_i), 1 \leq i \leq 9\},$$

$1 \leq j \leq 5$, sont :

$$\begin{array}{ll} \Delta(1) : -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0; & \Delta(2) : 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1; \\ & & 0 & & & & & & & & 0 & & & \\ & & 0 & & & & & & & & -3 & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \Delta(3) : -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2; & \Delta(4) : -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0; \\ & & 0 & & & & & & & & 0 & & & \\ & & -1 & & & & & & & & -5 & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \Delta(5) : 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4. \\ & & 0 & & & & \\ & & -2 & & & & \end{array}$$

On vérifie qu'il existe une fonction f_j telle que la partie à support dans C

du diviseur (f_j) associé soit Y_j , pour chaque j avec $1 \leq j \leq 5$. Ces fonctions appartiennent à $\Gamma(\mathcal{I}_Z)$ et leurs images dans $\Gamma(\mathcal{I}_Z)/\Gamma(\mathcal{I}_{2Z})$ forment une base (sur \mathbb{C}) de $\Gamma(\mathcal{I}_Z)/\Gamma(\mathcal{I}_{2Z})$ (prop. 4.3).

Il résulte qu'on a

$$\tilde{\Omega}^2 \cong \mathcal{I}\mathcal{O}_X(-M + K_X), \quad \text{où} \quad M = \sum_{1 \leq i \leq 9} M_i L_i$$

est le cycle à support dans C représenté par :

$$M : \begin{array}{cccccccc} 4 & 7 & 10 & 8 & 6 & 4 & 2; \\ & & & & 4 & & \\ & & & & & & 2 \end{array}$$

et où l'idéal \mathcal{I} est à cosupport fini concentré au point Q_1 de L_3 défini dans l'énoncé 5.5 ii). Avec l'éclatement $\sigma : \tilde{X} \rightarrow X$ du point Q_1 , on trouve que l'idéal $\sigma^*\mathcal{I}$ est inversible et qu'on a $\text{div}(\sigma^*\mathcal{I}) \equiv F$ (avec les notations de l'énoncé 5.5 ii) pour le graphe $\tilde{\Gamma}$ associé à $\tilde{C} = \sigma^{-1}(C)$. On a

$$\begin{aligned} \sigma^*M &\equiv \left(\sum_{1 \leq i \leq 9} M_i \tilde{L}_i \right) + M_3 F, \\ \sigma^*K_X &\equiv K_{\tilde{X}} - F. \end{aligned}$$

Par suite on a $\tilde{\Omega}^2 \cong \mathcal{O}_{\tilde{X}}(D)$, avec

$$\begin{aligned} D &\equiv -\text{div}(\sigma^*\mathcal{I}) - \sigma^*M + \sigma^*K_X, \quad \text{d'où} \\ D &\equiv -(M_3 + 2)F - \left(\sum_{1 \leq i \leq 9} M_i \tilde{L}_i \right) + K_{\tilde{X}}. \end{aligned}$$

Par conséquent le diagramme de degrés que représentent les nombres d'intersection $(D \cdot \tilde{L}_i)$, $1 \leq i \leq 9$ et $(D \cdot F)$ est :

$$\begin{array}{cccccccc} & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & 0 \\ & & & & & & & 0 \\ & & & & & & & 0 \\ & & & & & & & 0 \\ & & & & & & & 0 \\ & & & & & & & 0 \\ & & & & & & & 0 \\ & & & & & & & 0 \end{array}, \quad \text{d'où le résultat.}$$

Démonstration de 5.6.1). — On réalise un plongement (cylindrique) de (C, Γ) de façon analogue à celle de 5.3 i). Le cycle fondamental $Z = \sum m_i L_i$

est défini par $m_1 = m_{n-1} = m_n = 1$, $m_i = 2$ si $2 \leq i \leq n - 2$. Les nombres d'intersection $d_i = (Z.L_i)$, $1 \leq i \leq n$, sont : $d_i = 0$ si $1 \leq i \leq n$, $i \neq n - 2$; $d_{n-2} = -1$. Par conséquent on vérifie que la dimension de plongement est $e = 3$. Soient $Y_j = \sum_{1 \leq i \leq n} m_i(j)L_i$, $1 \leq j \leq 3$, les cycles à support dans C donnés par :

$$\begin{aligned} m_1(1) &= m_n(1) = 1, m_i(1) = 2 \text{ si } 2 \leq i \leq n - 1; \\ m_1(2) &= n/2, m_i(2) = n - i \text{ avec } 2 \leq i \leq n - 1, m_n = n/2 - 1; \\ m_1(3) &= n/2, m_i(3) = n - i + 1 \text{ avec } 2 \leq i \leq n - 1, m_n = n/2; \end{aligned}$$

i.e. représentés par les diagrammes :

$$\begin{aligned} Y_1 : & 1 \ 2 \ 2 \ \dots \ 2; & Y_2 : & (n/2) \ (n-2) \ (n-3) \ \dots \ 2 \ 1 \\ & 2 & & (n/2-1) \\ Y_3 : & (n/2) \ (n-1) \ (n-2) \ \dots \ 3 \ 2. \\ & (n/2) \end{aligned}$$

Alors les ensembles de nombres d'intersection

$$\Delta(j) = \{d_i(j) = \{Y_j.L_i\}, 1 \leq i \leq n\}$$

sont donnés par :

$$\begin{aligned} d_i(1) &= 0 \text{ avec } 1 \leq i \leq n, i \neq n - 1; & d_{n-1}(1) &= -2. \\ d_1(2) &= -2, d_i(2) = 0 \text{ avec } 2 \leq i \leq n. \\ d_1(3) &= d_{n-1}(3) = d_n(3) = -1, d_i(3) = 0 \text{ avec } 2 \leq i \leq n - 2; \end{aligned}$$

i.e. représentés par les diagrammes :

$$\begin{aligned} \Delta(1) : & 0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ -2; & \Delta(2) : & -2 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0, \\ & 0 & & 0 \\ \Delta(3) : & -1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ -1. \\ & -1 \end{aligned}$$

On vérifie qu'il existe une fonction f_j telle que la partie à support dans C du diviseur (f_j) associé soit Y_j , pour chaque j avec $1 \leq j \leq 3$. Ces fonctions appartiennent à $\Gamma(\mathcal{F}_Z)$, et leurs images dans $\Gamma(\mathcal{F}_Z)/\Gamma(\mathcal{F}_{ZZ})$ forment une base (sur C) de $\Gamma(\mathcal{F}_Z)/\Gamma(\mathcal{F}_{ZZ})$ (prop. 4.3). Il résulte que $\tilde{\Omega}^2$

est inversible et qu'on a $\tilde{\Omega}^2 \cong \mathcal{O}_X(-M + K_X)$, où $M = \sum M_i L_i$ est le cycle à support dans C donné par

$$M_1 = M_n = n/2 - 1, \quad M_i = n - i + 1$$

avec $2 \leq i \leq n - 1$ (i.e. le diagramme correspondant est

$$M : (n/2-1) \ (n-1) \ (n-2) \ \dots \ 3 \ 2 \) \\ (n/2-1)$$

Par conséquent les degrés $\delta(L_i) = (-M + K_X \cdot L_i)$, $1 \leq i \leq n$, sont

$$\delta(L_1) = \delta(L_{n-1}) = \delta(L_n) = 1, \quad \delta(L_i) = 0 \quad \text{avec} \quad 2 \leq i \leq n - 2.$$

(i.e. le diagramme correspondant est $1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1$), d'où le résultat.

1

Démonstration de 5.6.2 i). — On réalise un plongement (cylindrique) de (C, Γ) de façon analogue à celle de 5.3.1). Le cycle fondamental est le même que celui de 5.6.1), et la dimension de plongement est $e = 3$.

Soient $Y_j = \sum_{1 \leq i \leq n} m_i(j) L_i$, $1 \leq j \leq 3$ les cycles à support dans C donnés par :

$$m_1(1) = m_n(1) = 1, \quad m_i(1) = 2 \quad \text{si} \quad 2 \leq i \leq n - 1;$$

$$m_1(2) = m_n(2) = (n-1)/2, \quad m_i(2) = n - i \quad \text{avec} \quad 2 \leq i \leq n - 1;$$

$$m_1(3) = (n+1)/2, \quad m_i(3) = n - i + 1 \quad \text{avec} \quad 2 \leq i \leq n - 1;$$

$$m_n(3) = (n-1)/2;$$

i.e. représentés par les diagrammes :

$$Y_1 : 1 \ 2 \ 2 \ \dots \ 2 \ 2; \quad Y_2 : (n-1)/2 \ (n-2) \ (n-3) \ \dots \ 2 \ 1; \\ 1 \quad \quad \quad (n-1)/2$$

$$Y_3 : (n+1)/2 \ (n-1) \ (n-2) \ \dots \ 3 \ 2 \\ (n-1)/2.$$

Alors les ensembles de nombres d'intersection

$$\Delta(j) = \{d_i(j) = (Y_j \cdot L_i), \quad 1 \leq i \leq n\}$$

sont donnés par :

$$\begin{aligned}
 d_i(1) &= 0 & \text{avec} & & 1 \leq i \leq n, & i \neq n-1; & & d_{n-1}(1) &= -2; \\
 d_1(2) &= d_n(2) &= -1; & & d_i(2) &= 0 & \text{avec} & & 2 \leq i \leq n-1 \\
 d_1(3) &= -2; & & d_i(3) &= 0 & \text{avec} & & 2 \leq i \leq n, & i \neq n-1; \\
 d_{n-1}(3) &= -1;
 \end{aligned}$$

i.e. représentés par les diagrammes :

$$\begin{array}{ccc}
 \Delta(1) : 0 & 0 & 0 \dots 0 - 2; \\
 & & 0 \\
 \Delta(2) : -1 & 0 & 0 \dots 0 & 0 \\
 & & & -1 \\
 \Delta(3) : -2 & 0 & 0 \dots 0 - 1. \\
 & & & 0
 \end{array}$$

On vérifie qu'il existe une fonction f_j telle que la partie à support dans C du diviseur (f_j) associé soit Y_j , pour chaque j avec $1 \leq j \leq 3$. Ces fonctions appartiennent à $\Gamma(\mathcal{I}_Z)$, et leurs images dans $\Gamma(\mathcal{I}_Z)/\Gamma(\mathcal{I}_{2Z})$ forment une base (sur C) de $\Gamma(\mathcal{I}_Z)/\Gamma(\mathcal{I}_{2Z})$ (prop. 4.3). Il résulte qu'on a

$$\Omega^2 \cong \mathcal{I} \mathcal{O}_X(-M + K_X), \quad \text{où} \quad M = \sum_{1 \leq i \leq n} M_i L_i$$

est le cycle à support dans C défini par

$$M_1 = M_n = (n-1)/2; \quad M_i = n - i + 1 \quad \text{avec} \quad 2 \leq i \leq n - 1$$

(i.e. le diagramme correspondant est

$$M : (n-1)/2 \ (n-1) \ (n-2) \dots \ 3 \ 2 \), \\
 (n-1)/2$$

et où \mathcal{I} est un idéal à cosupport fini concentré au point Q_1 tel que le birapport (Q_1, Q_2, P_1, P_2) soit égal à $1/2$, avec $Q_2 = L_2 \cap L_n$, $P_1 = L_1 \cap L_2$, $P_2 = L_2 \cap L_3$. Avec l'éclatement $\sigma : \tilde{X} \rightarrow X$ du point Q_1 , on obtient que l'idéal $\sigma^* \mathcal{I}$ est inversible et qu'on a $\text{div}(\sigma^* \mathcal{I}) = F$ (avec les notations de l'énoncé 5.6.2-i) pour le graphe associé à $\tilde{C} = \sigma^{-1}(C)$). On a

$$\begin{aligned}
 \sigma^* M &\equiv \left(\sum_{1 \leq i \leq n} M_i \tilde{L}_i \right) + M_2 F, \\
 \sigma^* K_X &\equiv K_{\tilde{X}} - F.
 \end{aligned}$$

Par suite on a $\sigma^*\tilde{\Omega}^2 \cong \mathcal{O}_{\tilde{X}}(D)$, avec

$$D \equiv -\operatorname{div}(\sigma^*\mathcal{F}) - \sigma^*M + \sigma^*K_X,$$

d'où

$$D \equiv -(M_2+2)F - \left(\sum_{1 \leq i \leq n} M_i \tilde{L}_i \right) + K_{\tilde{X}}.$$

Par conséquent les degrés $\delta(\tilde{L}_i) = (D \cdot \tilde{L}_i)$, $1 \leq i \leq n$ et $\delta(F) = (D \cdot F)$ sont :

$$\delta(\tilde{L}_i) = 0, \quad 1 \leq i \leq n, \quad i \neq n-1; \quad \delta(\tilde{L}_{n-1}) = 1; \quad \delta(F) = 1$$

1

(i.e. le diagramme correspondant est 0 0 0 ... 0 1), d'où le résultat.

0

Démonstration de 5.6.2 ii). — La partie précédente fournit un plongement cylindrique (prop. 3.4.5) de la nouvelle configuration (C, Γ) . Le cycle fondamental Z est réduit : $Z = \sum_{1 \leq i \leq n-1} L_i$, et l'ensemble de nombres d'intersection

$$\Delta(Z) = \{(Z \cdot L_i), \quad 1 \leq i \leq n-1\}$$

est $(Z \cdot L_1) = (Z \cdot L_{n-2}) = (Z \cdot L_{n-1}) = -1$, et $(Z \cdot L_i) = 0$ avec $2 \leq i \leq n-3$; par conséquent on vérifie que la dimension de plongement est $e = 4$. Soient

$$Y_j = \sum_{1 \leq i \leq n-1} m_i(j) L_i, \quad 1 \leq j \leq 4$$

les cycles à support dans C donnés par : $Y_1 = Z$;

$$m_1(2) = 1; \quad m_i(2) = 2 \quad \text{avec} \quad 2 \leq i \leq n-2; \\ m_{n-1}(2) = 3;$$

$$m_1(3) = 3; \quad m_i(3) = 2 \quad \text{avec} \quad 2 \leq i \leq n-2; \\ m_{n-1}(3) = 1;$$

$$m_1(4) = n-1; \quad m_i(4) = n-i-1 \quad \text{avec} \quad 2 \leq i \leq n-2, \\ m_{n-1}(4) = n-4;$$

i.e. le diagramme correspondant est

$$M : 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ \dots \ k \ (k+1) \ k \ \dots \ 2 \ 1, \quad \text{avec} \quad k = (n-1)/2 - 1.$$

$$1$$

Par conséquent les degrés $\delta(L_i) = (-M + K_X \cdot L_i)$ avec $1 \leq i \leq n - 1$ sont

$$\delta(L_1) = \delta(L_3) = \delta(L_4) = 0 \quad \text{et} \quad \delta(L_2) = 4 \quad \text{si} \quad n = 5$$

(i.e. le diagramme correspondant est $0 \ 4 \ 0$); et

$$0$$

$$\delta(L_1) = 0; \quad \delta(L_2) = 2;$$

$$\delta(L_i) = 0 \quad \text{avec} \quad 3 \leq i < (n-1)/2, \quad \text{ou} \quad (n-1)/2 < i \leq n - 1;$$

$$\delta(L_{(n-1)/2}) = 2, \quad \text{si} \quad n > 5, \quad n \text{ impair}$$

(i.e. le diagramme correspondant est

$$0 \ 2 \ 0 \ \dots \ 0 \ 2 \ 0 \ \dots \ 0, \quad \text{avec} \quad k = (n-1)/2 - 1,$$

$$0 \quad \underbrace{k-2} \quad \underbrace{k}$$

ce qui termine la démonstration des énoncés 5.3, 5.4, 5.5 et 5.6.

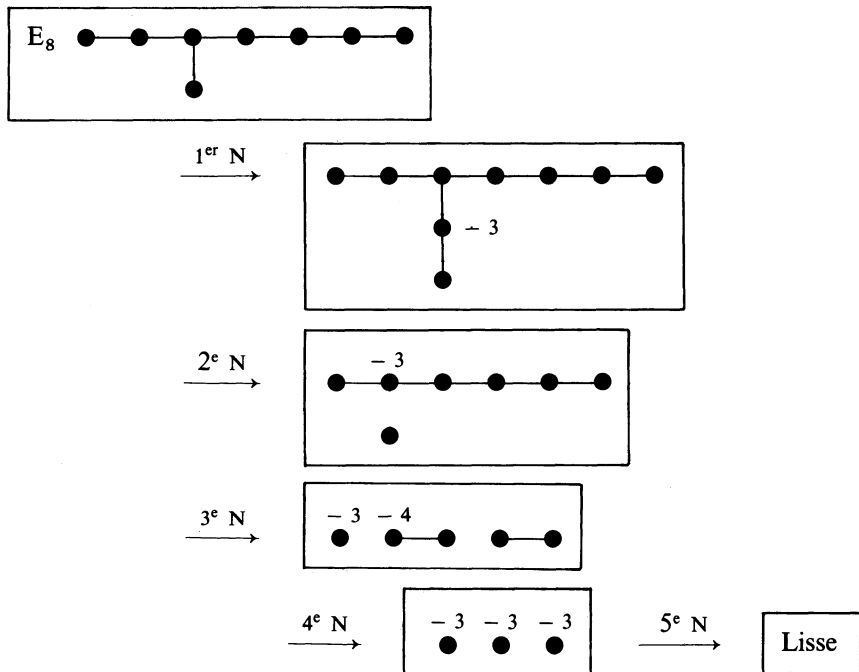
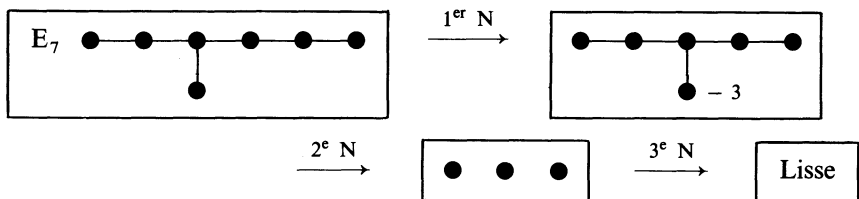
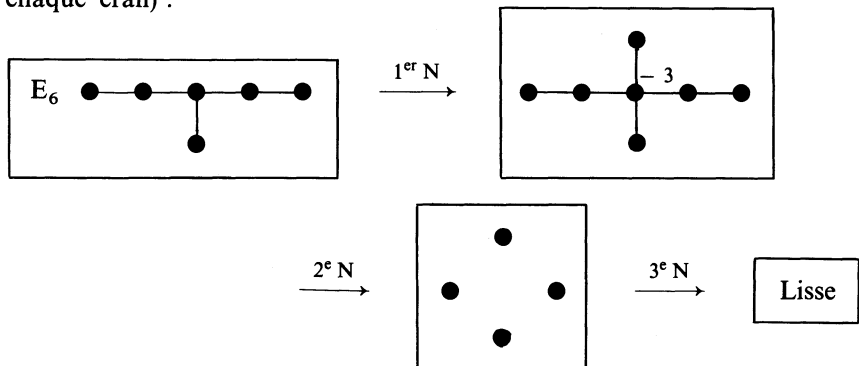
5.8.1. COROLLAIRE. — On résout les points doubles rationnels en un nombre fini de transformations de Nash suivies de normalisations.

Démonstration. — En effet, pour les cas E_6, E_7, E_8 et $D_n (n \geq 4)$ on obtient une surface ayant des singularités en éventail après avoir fait au maximum deux transformations de Nash suivies de normalisations (5.3-5.6). Or, on sait qu'on résout les singularités en éventail (donc en particulier les $A_n, n \geq 1$) en un nombre fini de telles transformations (th. 5.2.2), d'où le résultat. □

5.8.2. *Remarques.* — 1) Après avoir fait une transformation de Nash normalisée dans le cas E_6 (resp. E_7 ; resp. E_8) on obtient une singularité de multiplicité plus grande : 4 (resp. 3; resp. 4); dans les cas E_6 et E_8 on obtient ainsi des singularités qui ne sont pas des singularités quotient (i.e. quotient de C^2 par un sous-groupe fini de $GL(2,C)$, voir [4]).

2) On peut résumer la résolution de Nash de E_6, E_7, E_8 (en précisant le nombre de telles transformations), avec les diagrammes suivants (où les

graphes pondérés correspondent aux singularités qui apparaissent dans chaque cran) :



Les sommets dont le poids n'est pas indiqué ont un poids -2 . On a indiqué par N une transformation de Nash suivie d'une normalisation.

Donc il faut 3 (resp. 3; resp. 5) de telles transformations de Nash normalisées-globales – pour résoudre E_6 (resp. E_7 ; resp. E_8).

3) Le birapport $(Q_1, Q_2, P_1, P_2) = -1$ qui détermine le point Q_1 en ayant fixé les points Q_2, P_1, P_2 (voir énoncé 5.3 i) est invariant par l'automorphisme de la configuration (C, E_6) qui échange les courbes L_1 (resp. L_2) et L_5 (resp. L_4) en laissant fixes L_3 et L_6 . En effet, cet automorphisme échange P_1 et P_2 , et laisse fixe Q_2 , donc on a

$$(Q_1, Q_2, P_2, P_1) = 1/(Q_1, Q_2, P_1, P_2) = -1.$$

Le birapport $(Q_1, Q_2, P_1, P_2) = 1/2$ qui détermine le point Q_1 en ayant fixé les points Q_2, P_1, P_2 (voir énoncé 5.6 ii) est invariant par l'automorphisme de la configuration (C, D_n) qui échange les courbes L_1 et L_n en laissant fixe L_i pour $2 \leq i \leq n-1$. En effet, cet automorphisme échange P_1 et Q_2 et laisse fixe P_2 donc on a

$$(Q_1, P_1, Q_2, P_2) = 1 - (Q_1, Q_2, P_1, P_2) = 1/2.$$

De même, l'arête centrale (resp. le sommet central) de A_n avec n pair (resp. impair) est invariante (resp. invariant) par l'automorphisme de A_n qui échange les sommets L_i et L_{n+1-i} , $1 \leq i \leq n$.

Les graphes A_n, D_n et E_6 sont les seuls graphes (de points doubles rationnels) dont le groupe d'automorphismes est non trivial.

4) Les points doubles rationnels sont obtenus aussi comme singularités quotient par l'action sur C^2 d'un sous-groupe fini de $SL(2, C)$ (voir par exemple [8], [4]). Avec ce point de vue on peut aussi calculer le *premier* transformé de Nash des points doubles rationnels par une méthode analogue à celle exposée dans ce travail. Pour le cas E_6 on trouve une interprétation curieuse du quatrième point Q_1 qui apparaît sur la droite centrale L_3 (voir 5.3. ii) :

Soit $q : C^2 \rightarrow S$ le morphisme obtenu en passant au quotient par l'action du groupe binaire tétraédrique G qui agit sur C^2 en laissant seulement l'origine comme point fixe; la surface S a une singularité du type E_6 . Soit $\sigma : \hat{C}^2 \rightarrow C^2$ l'éclatement de l'origine de C^2 , et notons D la droite projective exceptionnelle dans \hat{C}^2 . L'action de G se remonte à \hat{C}^2 et le centre Z de G agit trivialement sur D , donc on retrouve l'action du groupe tétraédrique pur G/Z sur la sphère $S^2 \approx D$. En

passant au quotient $\hat{q} : \hat{C}^2 \rightarrow \hat{S}$ par l'action de G sur \hat{C}^2 , on obtient une surface \hat{S} qui a deux points singuliers \hat{P}_1 et \hat{P}_2 de type A_2 et un point singulier \hat{Q}_2 de type A_1 , tous les trois portés par la droite \hat{D} image de D .

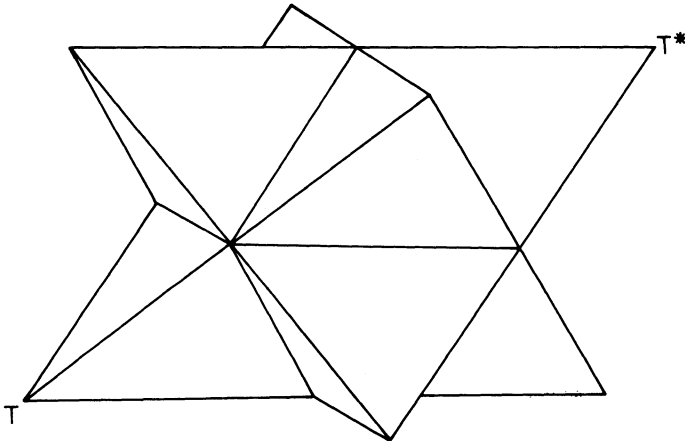
On considère l'application rationnelle $\pi : \hat{S} \dashrightarrow \tilde{S}$ de \hat{S} dans le transformé de Nash \tilde{S} de S , et on trouve qu'elle n'est pas définie seulement en un point \hat{Q}_1 de la droite \hat{D} . Le point \hat{Q}_1 est un point lisse de \hat{S} . En résolvant les singularités \hat{P}_1 , \hat{P}_2 et \hat{Q}_2 de \hat{S} on trouve la résolution minimale X de S .

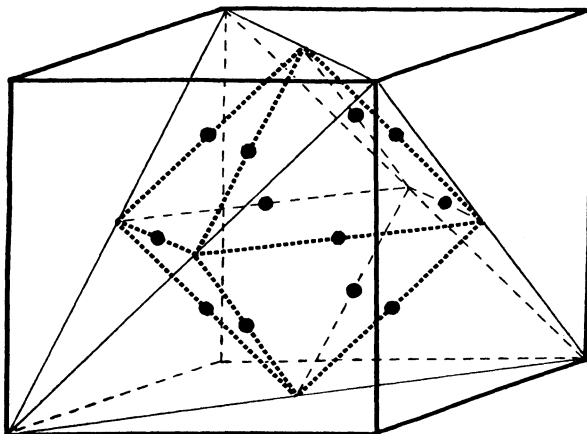
On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 & & X \supset L_3 \\
 & & \downarrow \quad \downarrow \\
 D \subset \hat{C}^2 & \xrightarrow{\hat{q}} & \hat{S} \supset \hat{D} \\
 \downarrow \sigma & & \downarrow \\
 C^2 & \xrightarrow{q} & S
 \end{array}$$

La droite centrale L_3 (de la configuration E_6 dans X) se projette isomorphiquement sur la droite \hat{D} , de sorte que les points P_1, P_2, Q_1 et Q_2 se projettent respectivement sur $\hat{P}_1, \hat{P}_2, \hat{Q}_1$ et \hat{Q}_2 .

Les fibres $\hat{q}^{-1}(\hat{P}_1), \hat{q}^{-1}(\hat{P}_2)$ et $\hat{q}^{-1}(\hat{Q}_2)$ sont les orbites de G/Z dans D formées respectivement par les quatre sommets d'un tétraèdre T , par les quatre sommets du tétraèdre dual T^* et par les six sommets de l'octaèdre O (déterminé par l'intersection de T et T^*).





Pour le point \hat{Q}_1 , sa fibre $\hat{q}^{-1}(\hat{Q}_1)$ est l'orbite de G/Z dans D formée par les douze points au milieu des arêtes de l'octaèdre O , ou encore les douze points déterminés (par projection sur S^2) par l'intersection de l'octaèdre O avec le cube C , où les sommets de C sont ceux de T et ceux de T^* .

APPENDICE

RÉSOLUTION DE NASH DES SINGULARITÉS EN ÉVENTAIL (DE SURFACES)

Nous présentons ici une démonstration de la résolution des singularités en éventail par des transformations de Nash suivies de normalisations. La méthode utilisée est celle qui a été exposée dans la première partie. On peut voir une autre démonstration, utilisant les techniques des éventails, dans [6]. (Pour d'autres références sur les singularités en éventail, voir [7], [13], [14]). Les renvois au paragraphe n de la première partie sont indiqués par In .

1. Notations.

Soient $n, a_i (1 \leq i \leq n)$ des entiers positifs avec $a_i \geq 2$. Soit (C, Γ) une configuration (I 3.3), où le graphe pondéré Γ est une chaîne ayant n

sommets L_i , $1 \leq i \leq n$ ordonnés à partir d'une des extrémités, et où le poids de L_i est $-a_i$.

$$(1) \quad \Gamma : \begin{array}{ccccccc} \bullet & \text{---} & \bullet & \dots & \bullet & \dots & \bullet \text{---} & \bullet \\ -a_1 & & -a_2 & & -a_i & & -a_{n-1} & -a_n \end{array}$$

On notera de la même façon le sommet L_i et la composante irréductible de C qu'il représente.

Soit X la surface lisse définie de la façon suivante : pour chaque entier i , $1 \leq i \leq n$, soit U_i (resp. U'_i) une copie de \mathbb{C}^2 de coordonnées (u_i, v_i) (resp. u'_i, v'_i).

Soit F_i le cylindre canonique obtenu en recollant $U_i - \{v_i=0\}$ avec $U'_i - \{v'_i=0\}$ par les identifications $u'_i = u_i v_i^{a_i}$, $v'_i = 1/v_i$.

La surface F_i est un fibré vectoriel en droites sur la courbe rationnelle définie par $u_i = 0$ (resp. $u'_i = 0$) dans l'ouvert U_i (resp. U'_i), de degré $-a_i$; on identifie cette courbe rationnelle avec la courbe L_i .

Soit X la surface (lisse) obtenue en recollant l'ouvert U'_i de F_i avec l'ouvert U_{i+1} de F_{i+1} , pour $1 \leq i \leq n - 1$, par les identifications $u_i = v'_{i+1}$, $v_i = u'_{i+1}$.

Alors X est un plongement cylindrique de (C, Γ) (I 3.4.2, I 3.4.4).

2. Construction du morphisme de contraction.

Soit $\pi : X \rightarrow S$ un morphisme de X sur une surface normale S , qui soit un isomorphisme de $X - C$ sur $S - \pi(C)$ et qui contracte la courbe C en un point $O = \pi(C)$, de telle sorte que O est un point singulier en éventail ayant X comme résolution minimale. Le cycle fondamental Z de X (I 3.1) est $Z = \sum_{i=1}^n L_i$; et la dimension de plongement e de O est égale à $1 - (Z.Z)$ (car c'est une singularité rationnelle, cf. [2]), où $(.)$ est la forme intersection de $\text{Pic}(X)$. Donc on a

$$e = 1 - \sum_{i=1}^n (Z.L_i) = 1 + (a_1 - 1) + \left(\sum_{i=2}^{n-1} (a_i - 2) \right) + (a_n - 1) = 3 + \sum_{i=1}^n (a_i - 2).$$

Soit L_0 (resp. L_{n+1}) la droite affine dans X définie par $v'_1 = 0$ dans U'_1 (resp. $v_n = 0$ dans U_n).

Si on a $n = 1$, pour chaque entier j avec $0 \leq j \leq a_1$, soit f_j une fonction définie sur X dont le diviseur associé (f_j) soit $(f_j) = Z + jL_0 + (a_1 - j)L_2$. Donc on a $f_j \in \Gamma(\mathcal{J}_Z)$, $0 \leq j \leq a_1$, où \mathcal{J}_Z est l'idéal de Z ; notons \bar{f}_j l'image de f_j dans $\Gamma(\mathcal{J}_Z)/\Gamma(\mathcal{J}_{2Z})$.

Si on a $n > 1$, soit B l'ensemble des cycles positifs $Y = \sum_{i=1}^n m_i L_i$ à support dans C défini par :

$$B = \{Y \mid \exists j = j(Y) \text{ t.q. } m_j = 1; \quad (Y.L_i) = 0 \text{ pour } 2 \leq i \leq n-1; \quad (Y.L_1) \leq 0; \quad (Y.L_n) \leq 0\}.$$

Pour chaque cycle $Y \in B$, soit f_Y une fonction définie sur X dont le diviseur associé (f_Y) soit $(f_Y) = Y - (Y.L_1)L_0 - (Y.L_n)L_{n+1}$. Par la définition de B et du cycle fondamental Z on a $Y \geq Z \forall Y \in B$. Donc $f_Y \in \Gamma(\mathcal{J}_Z) \forall Y \in B$. Pour chaque fonction f_Y avec $Y \in B$, notons \bar{f}_Y son image dans $\Gamma(\mathcal{J}_Z)/\Gamma(\mathcal{J}_{2Z})$. Alors on a la

2.1. PROPOSITION. — Avec les notations précédentes,

i) Si on a $n = 1$, alors l'ensemble $\{\bar{f}_j \mid 0 \leq j \leq a_1\}$ forme une base de $\Gamma(\mathcal{J}_Z)/\Gamma(\mathcal{J}_{2Z})$ sur C .

ii) Si on a $n > 1$, alors l'ensemble $\{\bar{f}_Y \mid Y \in B\}$ forme une base de $\Gamma(\mathcal{J}_Z)/\Gamma(\mathcal{J}_{2Z})$ sur C .

Démonstration. — i) Il suffit de démontrer l'indépendance linéaire, car on a $\dim_C(\Gamma(\mathcal{J}_Z)/\Gamma(\mathcal{J}_{2Z})) = e = 1 + a_1$.

Pour chaque entier j , $0 \leq j \leq a_1$ la fonction f_j est définie à un facteur constant près; soit f_j donnée par les expressions locales suivantes :

$$f_j|_{U_1} = u_1 v_1^j; \quad f_j|_{U'_1} = u'_1 v'_1{}^{(a_1-j)}.$$

Si on a une combinaison linéaire $\sum_{j=0}^{a_1} \lambda_j f_j$ équivalente à 0 modulo $\Gamma(\mathcal{J}_{2Z})$, alors on a :

$$u_1 \left(\sum_{j=0}^{a_1} \lambda_j v_1^j \right) = \sum_{j=0}^{a_1} \lambda_j f_j|_{U_1} \equiv 0,$$

car on a $\mathcal{J}_{2Z}|_{U_1} = (u_1^2)$, d'où $\lambda_j = 0$, $0 \leq j \leq a_1$.

ii) Pour chaque entier k avec $1 \leq k \leq n - 1$ soit B_k le sous-ensemble de B défini par

$$B_k = \{Y = \sum_{i=1}^n m_i L_i \in B \mid m_k = 1 \text{ et } m_{k+1} \geq 2\},$$

et soit

$$B_n = \{Y = \sum_{i=1}^n m_i L_i \in B \mid m_n = 1\}.$$

Alors, la famille B_k , $1 \leq k \leq n$, est une partition de B . En effet, soit

$Y = \sum_{i=1}^n m_i L_i$ un élément de B , et soit $k = \max \{i \mid m_i = 1\}$. Alors on a

$Y \in B_k$, d'où $B = \bigcup_{j=1}^n B_j$. D'autre part, si k et k' sont deux entiers avec

$1 \leq k < k' \leq n$, alors on a $B_k \cap B_{k'} = \emptyset$: le nombre d'intersection $(Y.L_i)$, qui est égal à $m_{i-1} - a_i m_i + m_{i+1}$ pour chaque i avec $1 < i < n$, est nul par la définition de B , et par conséquent l'inégalité $m_i > m_{i-1}$ implique $m_{i+1} = a_i m_i - m_{i-1} > m_i$ (car $a_i \geq 2$), et par récurrence on a $m_{i-1} < m_i < m_{i+1} < \dots < m_n$.

Donc si Y appartient à $B_k \cap B_{k'}$, on aurait d'une part $m_k < m_{k'}$, et d'autre part $m_k = 1 = m_{k'}$, d'où une contradiction.

A l'aide de cette partition $\{B_k \mid 1 \leq k \leq n\}$ de B on va montrer que $\text{card } B$, le cardinal de B , est égal à e .

2.2. LEMME. — Soient k et m deux entiers tels qu'on ait : $1 < k < n$ et $1 \leq m \leq a_k - 1$ (resp. $k=1$ et $1 \leq m \leq a_1$; resp. $k=n$ et $1 \leq m \leq a_n$). Alors il existe un seul cycle $Y = \sum_{i=1}^n m_i L_i$ appartenant à B tel qu'on ait $m_k = 1$ et $m_{k+1} = m$ (resp. $m_1 = 1$ et $m_2 = m$, resp. $m_n = 1$ et $m_{n-1} = m$).

Démonstration. — On définit par récurrence m_i pour $1 \leq i \leq k - 1$ par $m_i = a_{i+1} m_{i+1} - m_{i+2}$ et m_j pour $k + 2 \leq j \leq n$ par $m_j = a_{j-1} m_{j-1} - m_{j-2}$ (resp. m_j pour $3 \leq j \leq n$, par $m_j = a_{j-1} m_{j-1} - m_{j-2}$; resp. m_i pour $1 \leq i \leq n - 2$, par $m_i = a_{i+1} m_{i+1} - m_{i-2}$). Alors on a $m_{k-1} = a_k - m \geq 1 = m_k$ et la suite m_i , $1 \leq i \leq k$ est décroissante : $m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_k$; d'autre part on a $m_k = 1 \leq m = m_{k+1}$ et la suite m_j , $k \leq j \leq n$ est croissante : $m_k \leq m_{k+1} \leq \dots \leq m_n$ (resp. $m_1 = 1 \leq m = m_2$ et la suite m_j ,

$1 \leq j \leq n$ est croissante : $m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_n$; resp. $m_{n-1} = m \geq 1 = m_n$ et la suite m_i , $1 \leq i \leq n$ est décroissante : $m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_n$. Par conséquent tous les m_i , $1 \leq i \leq n$ sont positifs et le cycle $Y = \sum_{i=1}^n m_i L_i$ est positif (en fait on a $Y \geq Z$).

Pour chaque entier i avec $1 < i < n$ on a $(Y \cdot L_i) = 0$, car en ce cas on a $(Y \cdot L_i) = m_{i-1} - a_i m_i + m_{i+1}$. Finalement on vérifie $(Y \cdot L_1) \leq 0$ et $(Y \cdot L_m) \leq 0$, car on a $(Y \cdot L_1) = -a_1 m_1 + m_2$ et $m_1 \geq m_2$ (resp. $(Y \cdot L_1) = -a_1 + m$; resp. $(Y \cdot L_1) = -a_1 m_1 + m_2$ et $m_1 \geq m_2$) et d'autre part on a $(Y \cdot L_n) = a_n m_n + m_{n-1}$ et $m_n \geq m_{n-1}$ (resp. $(Y \cdot L_n) = -a_n m_n + m_{n-1}$ et $m_n \geq m_{n-1}$; resp. $(Y \cdot L_n) = -a_n + m$). \square

Soit $Y = \sum_{i=1}^n m_i L_i$ un cycle appartenant à B_k avec $2 \leq k \leq n-1$ (resp. à B_1 , resp. à B_n). Alors on a d'une part $Y \geq Z$ (i.e. $m_i \geq 1$, $\forall i$, $1 \leq i \leq n$) et d'autre part $0 = (Y \cdot L_k) = m_{k-1} - a_k + m_{k+1}$ (resp. $0 \geq (Y \cdot L_1) = -a_1 + m_2$, resp. $0 \geq (Y \cdot L_n) = -a_n + m_{n-1}$). Par conséquent on a $m_{k+1} \leq a_k - 1$ (resp. $m_2 \leq a_1$; resp. $m_{n-1} \leq a_n$). Donc il résulte du lemme qu'on a autant d'éléments dans B_k que de valeurs possibles pour m_{k+1} (resp. m_2 ; resp. m_{n-1}), i.e. $\text{card} \{m \mid 2 \leq m \leq a_k - 1\}$ (resp. $\text{card} \{m \mid 2 \leq m \leq a_1\}$; resp. $\text{card} \{m \mid 1 \leq m \leq a_n\}$). Par suite on a :

$$\text{card } B_k = a_k - 2 \quad \text{pour} \quad 2 \leq k \leq n-1, \quad \text{card } B_1 = a_1 - 1,$$

et $\text{card } B_n = a_n$. Donc on obtient

$$\begin{aligned} \text{card } B &= \sum_{i=1}^n \text{card } B_i = (a_1 - 1) + \left(\sum_{k=2}^{n-1} (a_k - 2) \right) + a_n \\ &= 3 + \sum_{k=1}^n (a_k - 2) = e. \end{aligned}$$

Pour finir la démonstration de ii) de la proposition, il suffit, donc, de démontrer que l'ensemble $\{\tilde{f}_Y \mid Y \in B\}$ est libre.

Pour chaque entier i avec $1 \leq i \leq n$ posons $b_i = \sum_{k=1}^i \text{card } B_k$ (donc on a $b_n = e$). On peut numérotter les éléments de B , $Y(j)$, $1 \leq j \leq b_n$, de sorte qu'on ait

$$B_k = \{Y(j) \mid b_{k-1} < j \leq b_k\} \quad \text{pour} \quad 2 \leq k \leq n,$$

et

$$B_1 = \{Y(j) \mid 1 \leq j \leq b_1\}.$$

Pour chaque j avec $1 \leq j \leq b_n$, soit $Y(j) = \sum_{i=1}^n m_i(j)L_i$. Pour simplifier un peu les notations, posons

$$U_0 = U'_1, \quad (u_0, v_0) = (v'_1, u'_1), \quad m_0(j) = -(Y(j) \cdot L_1),$$

$m_{n+1}(j) = -(Y(j) \cdot L_n)$. Notons f_j la fonction $f_{Y(j)}$ associée à $Y(j)$, définie par :

$$f_j|_{U_i} = u_i^{m_i(j)} v_i^{m_{i+1}(j)} \quad \text{pour chaque } i \text{ avec } 0 \leq i \leq n.$$

Soit $\sum_{1 \leq j \leq b_n} \lambda_j f_j$ une combinaison linéaire à coefficients dans \mathbb{C} , des fonctions f_j , et supposons qu'on ait

$$(I_n) \quad \sum_{1 \leq j \leq b_n} \lambda_j \bar{f}_j = 0.$$

Alors on a

$$(II_n) \quad \sum_{b_{n-1} < j \leq b_n} \lambda_j f_j|_{U_n} \equiv 0 \pmod{\mathcal{I}_{22}|_{U_n}}.$$

En effet, on a $\mathcal{I}_{22}|_{U_n} = (u_n^2)$ et $m_n(j) \geq 2$ pour $1 \leq j \leq b_{n-1}$, d'où

$$\sum_{1 \leq j \leq b_n} \lambda_j f_j|_{U_n} \equiv \sum_{b_{n-1} < j \leq b_n} \lambda_j f_j|_{U_n} \pmod{\mathcal{I}_{22}|_{U_n}}.$$

Par ailleurs on a

$$\sum_{b_{n-1} < j \leq b_n} \lambda_j f_j|_{U_n} = \sum_{b_{n-1} < j \leq b_n} \lambda_j u_n v_n^{m_{n+1}(j)},$$

et tous les $m_{n+1}(j)$ avec $b_{n-1} < j \leq b_n$ sont distincts, car si on avait

$$a_n - m_{n-1}(j) = m_{n+1}(j) = m_{n+1}(j') = a_n - m_{n-1}(j')$$

avec $b_{n-1} < j \leq j' \leq b_n$, alors on aurait $m_{n-1}(j) = m_{n-1}(j')$ et par conséquent $Y(j) = Y(j')$ (lemme précédent), d'où $j = j'$.

Alors l'équation (II_n) implique $\lambda_j = 0$ pour $b_{n-1} < j \leq b_n$. Donc on est ramené à (I_{n-1}) : $\sum_{1 \leq j \leq b_{n-1}} \lambda_j \bar{f}_j = 0$.

Maintenant on procède par récurrence : supposons qu'on ait :

$$(I_k) \quad \sum_{1 \leq j \leq b_k} \lambda_j \bar{f}_j = 0, \quad \text{avec} \quad 2 \leq k \leq (n-1).$$

Alors on a

$$(II_k) \quad \sum_{b_{k-1} < j \leq b_k} \lambda_j f_j|_{U_k} \equiv 0 \pmod{\mathcal{F}_{2Z}|_{U_k}}.$$

En effet, on a $\mathcal{F}_{2Z}|_{U_k} = (u_k^2 v_k^2)$, et $m(j) \geq m(j') \geq 2$ pour $1 \leq j \leq b_{k-1}$ (lemme), donc on a :

$$\sum_{1 \leq j \leq b_k} \lambda_j f_j|_{U_k} \equiv \sum_{b_{k-1} < j \leq b_k} \lambda_j f_j|_{U_k} \pmod{\mathcal{F}_{2Z}|_{U_k}}.$$

Par ailleurs on a

$$\sum_{b_{k-1} < j \leq b_k} \lambda_j f_j|_{U_k} = \sum_{b_{k-1} < j \leq b_k} \lambda_j u_k v_k^{m_{k+1}(j)},$$

et tous les $m_{k+1}(j)$ (avec $b_{k-1} < j \leq b_k$) sont distincts, car si on avait $m_{k+1}(j) = m_{k+1}(j')$ avec $b_{k-1} < j \leq j' \leq b_k$, alors on aurait $Y(j) = Y(j')$ (lemme), d'où $j = j'$. Alors l'équation (II_k) implique $\lambda_j = 0$ pour $b_{k-1} < j \leq b_k$. Par conséquent on est ramené à

$$(I_1) \quad \sum_{1 \leq j \leq b_1} \lambda_j \bar{f}_j = 0,$$

donc

$$\sum_{1 \leq j \leq b_1} \lambda_j f_j|_{U_0} = \sum_{1 \leq j \leq b_1} \lambda_j u_0^{m_0(j)} v_0 \equiv 0 \pmod{\mathcal{F}_{2Z}|_{U_0}}.$$

Or on a $\mathcal{F}_{2Z}|_{U_1} = (v_0^2)$, et tous les $m_0(j)$ (avec $1 \leq j \leq b_1$) sont distincts, car si on avait :

$$a_1 - m_2(j) = m_0(j) = m_0(j') = a_1 - m_2(j') \quad \text{avec} \quad 1 \leq j \leq j' \leq b_1$$

on aurait $m_2(j) = m_2(j')$, donc $Y(j) = Y(j')$ (lemme), d'où $j = j'$.

Alors l'équation (I_1) implique $\lambda_j = 0$, $1 \leq j \leq b_1$. Donc tous les λ_j , $1 \leq j \leq b_n$, sont nuls et on a démontré l'indépendance linéaire. \square

En conséquence de la proposition précédente, les fonctions f_j , $1 \leq j \leq e$, définissent un morphisme π de X dans C^e , dont l'image S a une singularité en éventail à l'origine de C^e .

3. Calcul du transformé de Nash.

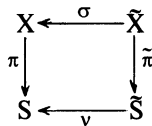
Si on a $n > 1$, soient k', k'' deux entiers avec $1 \leq k' < k'' \leq n$. On dit que le sous-graphe connexe $\Gamma_{k',k''}$ du graphe $\Gamma^{(1)}$ qui contient les sommets L_i avec $k' \leq i \leq k''$ est un *segment* si on a $a_i = 2$ pour $k' < i < k''$, et $a_{k'} > 2$ (resp. $a_{k''} > 2$) ou $k' = 1$ (resp. $k'' = n$). Autrement dit, si on représente le graphe Γ par une ligne polygonale ayant des points anguleux aux sommets de poids strictement inférieur à -2 , alors un segment de Γ est le sous-graphe porté par un des côtés de la ligne polygonale.

On dit qu'un *sommet de Γ est central* s'il est le sommet central d'un segment ayant un nombre impair de sommets, et qu'une *arête de Γ est centrale* si elle est l'arête centrale d'un segment ayant un nombre impair d'arêtes (donc un nombre pair de sommets).

Soit $v : \tilde{S} \rightarrow S$ le transformé de Nash de S , et soit $\pi : X \rightarrow S$ la résolution minimale de S décrite au § 2.

Alors il existe une surface \tilde{X} , obtenue à partir de X par des transformations quadratiques $\sigma : \tilde{X} \rightarrow X$, qui est une résolution de \tilde{S} (voir I.2.2).

On a le diagramme commutatif suivant :



3.1. THÉORÈME. — *On garde les notations précédentes*

i) Soit \tilde{X} la surface obtenue à partir de X en éclatant les points de C représentés par les arêtes centrales de Γ . Alors il existe un morphisme $\tilde{\pi} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{S}$ qui est une résolution de \tilde{S} .

ii) Soit \tilde{L}_i la transformée stricte (dans \tilde{X}) de la courbe L_i , $1 \leq i \leq n$, et si P est un point de C représenté par une arête centrale de Γ , soit $A = \sigma^{-1}(P)$ la courbe exceptionnelle de \tilde{X} image inverse de P par $\sigma : \tilde{X} \rightarrow X$.

Soit $\delta(\tilde{L}_i)$ (resp. $\delta(A)$) le degré de la restriction à \tilde{L}_i (resp. A) du fibré cotangent de Nash (relatif à S). Alors on a

$$\begin{aligned} \delta(\tilde{L}_i) &= 2a_i - 6 && \text{si } a_i \geq 3 \text{ et } 1 < i < n. \\ \delta(\tilde{L}_i) &= 0 && \text{si } a_i = 2, 1 < i < n \text{ et } L_i \text{ n'est pas un sommet} \\ &&& \text{central de } \Gamma. \\ \delta(\tilde{L}_i) &= 2 && \text{si } a_i = 2 \text{ et } L_i \text{ est un sommet central de } \Gamma. \\ \delta(\tilde{L}_i) &= 2a_i - 4 && \text{si } n > 1, i = 1 \text{ ou } i = n. \\ \delta(\tilde{L}_1) &= 2a_1 - 2 && \text{si } n = 1 \\ \delta(A) &= 1. \end{aligned}$$

Par conséquent $\tilde{\pi}$ contracte la droite \tilde{L}_i en un point si et seulement si ou bien $a_i = 2$, $n > 1$ et L_i n'est pas un sommet central de Γ , ou bien $a_i = 3$, $i \neq 1$ $i \neq n$. Ce sont les seules courbes contractées par $\tilde{\pi} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{S}$ qui est la résolution minimale de \tilde{S} .

Démonstration. — Nous gardons les notations de la démonstration de la proposition 2.1 sur le morphisme de contraction $\pi : X \rightarrow S \subset \mathbb{C}^e$, qui est donné par les fonctions f_j , $1 \leq j \leq e$.

On considère l'application rationnelle $\tilde{\pi} : X \dashrightarrow \tilde{S}$, induite par l'isomorphisme $S - \{O\} \simeq \tilde{S} - v^{-1}(O)$, et d'autre part le faisceau $\tilde{\Omega}^2$ sur X défini par $\tilde{\Omega}^2 = \Lambda^2(d\pi(\pi^*\Omega_S^2))$ (voir I.2). On cherche à lever les indéterminations de $\tilde{\pi}$, autrement dit, « à rendre inversible $\tilde{\Omega}^2$ ».

Si on a $n = 1$, alors on a (par i) de la proposition 2.1) :

$$df_j|_{U_1} = v_1^j du_1 + ju_1 v_1^{j-1} dv_1, \quad 0 \leq j \leq e,$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}^2|_{U_1} &= (df_j \wedge df_{j'}|_{U_1} \mid 0 \leq j < j' < e) \\ &= ((j' - j)u_1 v_1^{j+j'-1} du_1 \wedge dv_1 \mid 0 \leq j < j' < e). \end{aligned}$$

Donc on a $\tilde{\Omega}^2|_{U_1} = (u_1 du_1 \wedge dv_1)$ et par symétrie une expression analogue sur U'_1 . Alors $\tilde{\Omega}^2$ est inversible et on a :

$$\tilde{\Omega}^2 = \mathcal{O}_X(-L_1 + K_X) \text{ où } K_X \text{ est un diviseur canonique de } X.$$

Il résulte $\tilde{X} = X$, $\tilde{L}_1 = L_1$ et $\tilde{\pi} = \pi : X \rightarrow \tilde{S}$, d'où :

$$\delta(L_1) = (L_1 \cdot (-L_1 + K_X)) = a_1 + (a_1 - 2) = 2a_1 - 2,$$

d'où le théorème pour le cas $n = 1$.

Supposons $n > 1$ dans la suite de la démonstration. Pour chaque j avec $1 \leq j \leq e$ on rappelle que f_j est définie par

$$f_j|_{U_k} = u_k^{m_k(j)} v_k^{m_{k+1}(j)} \quad \text{pour} \quad 0 \leq k \leq n \quad \text{et par suite}$$

$$df_j|_{U_k} = m_k(j) u_k^{m_k(j)-1} v_k^{m_{k+1}(j)} du_k + m_{k+1}(j) u_k^{m_k(j)} v_k^{m_{k+1}(j)-1} dv_k.$$

Pour chaque couple (j, j') avec $1 \leq j < j' \leq e$, posons

$$\lambda_k(j, j') = m_k(j) m_{k+1}(j') - m_{k+1}(j) m_k(j'), \quad 0 \leq k \leq n,$$

et

$$\mu_k(j, j') = m_k(j) + m_k(j') - 1, \quad 0 \leq k \leq n + 1.$$

Alors on a

$$(*) \quad df_j \wedge df_{j'}|_{U_k} = \lambda_k(j, j') u_k^{\mu_k(j, j')} v_k^{\mu_{k+1}(j, j')} du_k \wedge dv_k.$$

La restriction du faisceau $\tilde{\Omega}^2$ à U_k est engendré par $\{df_j \wedge df_{j'}|_{U_k}\}$ sur $\mathcal{O}_{U_k} \cong \mathbb{C}[u_k, v_k]$, $0 \leq k \leq n$.

Pour chaque k avec $0 \leq k \leq n + 1$, posons

$$M_k = \min \{\mu_k(j, j') \mid 1 \leq j < j' \leq e\}.$$

3.2. LEMME. — Avec les notations précédentes, on a :

$$M_0 = M_{n+1} = 0, \quad M_1 = M_n = 1, \\ M_k = 1 \quad \text{si} \quad a_k > 2, \quad 1 < k < n$$

$M_k = \min \{k - k', k'' - k\} + 1$ si $a_k = 2$, $1 < k < n$ et où le sommet L_k appartient au segment $\Gamma_{k, k'}$ (voir définition au début du § 3)

$$\lambda_k(j, j') \neq 0, \quad 0 \leq k \leq n, \quad 1 \leq j < j' \leq e.$$

Démonstration du lemme 3.2. — Soit $Y(j) = \sum_{1 \leq i \leq n} m_i(j) L_i \in B$ défini par $m_1(j) = 1$ et $m_2(j) = a_1$ et soit $Y(j')$ défini par $m_1(j') = 1$ et $m_2(j') = a_1 - 1$ (lemme 2.2). Alors on a $m_0(j) = 0$ et $m_0(j') = 1$, d'où on vérifie $M_0 = 0$ (par symétrie on a aussi $M_{n+1} = 0$).

Pour $1 \leq k \leq n$ on sait qu'on a $m_k(j) \geq 1 \quad \forall j, \quad 1 \leq j \leq e$, d'où $M_k \geq 1$. On a $M_1 = 1$ car il y a au moins deux cycles $Y(j), Y(j') \in B$ avec $m_1(j) = m_1(j') = 1$ (par exemple ceux définis plus haut); et de manière

analogue on a $M_{n+1} = 1$. Si $a_k > 2$, $1 < k < n$, alors on a aussi au moins deux cycles $Y(j), Y(j') \in B$ avec $m_k(j) = m_k(j') = 1$, déterminés par $m_{k+1}(j) = 1$, $m_{k+1}(j') = 2 \leq a_k - 1$ (lemme 2.2) d'où $M_k = 1$.

Si $a_k = 2$, $1 < k < n$, il existe un seul cycle $Y(j)$ avec $m_k(j) = 1$ (celui où on a $m_{k+1}(j) = m_{k-1}(j) = 1$) et on vérifie que le minimum de $\{m_k(l) > 1, 1 \leq l \leq e\}$ est réalisé par le cycle $Y(j')$ défini par $m_k(j') = 1$, $m_{k'+1}(j') = 2$ (resp. $m_{k''}(j') = 1$, $m_{k''-1}(j') = 2$) si $k - k' \leq k'' - k$ (resp. $k - k' \geq k'' - k$), et qu'on a $m_k(j') = k - k' + 1$ (resp. $m_k(j') = k'' - k + 1$), d'où

$$M_k = \min \{k - k', k'' - k\} + 1.$$

Finalement, supposons par contradiction qu'on ait $\lambda_k(j, j') = 0$. On a $m_k(j) \neq 0$ et $m_k(j') \neq 0$ ou bien $m_{k+1}(j) \neq 0$ et $m_{k+1}(j') \neq 0$ (car on peut avoir $m_i(j) = 0$ seulement si $i = 0$ ou $i = n + 1$), donc on peut supposer $m_k(j) \neq 0$ et $m_k(j') \neq 0$. Soit $r = m_k(j)/m_k(j')$; alors on a aussi $m_{k+1}(j)/m_{k+1}(j') = r$, d'où $Y(j) = rY(j')$. Par suite on a $r = 1$ et $j = j'$, une contradiction. \square

Soit M le cycle défini par $M = \sum_{1 \leq i \leq n} M_i L_i$. Alors, en vertu des relations (*) et du lemme précédent, on a :

$$(**) \quad \tilde{\Omega}^2 \cong \mathcal{S} \mathcal{O}_X(-M + K_X),$$

où K_X est un diviseur canonique de X et où \mathcal{S} est l'idéal de \mathcal{O}_X tel que sa restriction $\mathcal{S}|_{U_k}$ à U_k , $0 \leq k \leq n$ soit engendré par

$$u_k^{\mu_k(j, j') - M_k} v_k^{\mu_{k+1}(j, j') - M_{k+1}}, \quad 1 \leq j < j' \leq e, \quad \text{sur } \mathcal{O}_{U_k}.$$

Le cycle $M - K_X$ est appelé la partie divisorielle de $\tilde{\Omega}^2$, car on a que l'idéal \mathcal{S} est à cosupport (i.e. le support de $\mathcal{O}_X/\mathcal{S}$) fini. En effet, sur l'ouvert $U = X - C$ on a $\mathcal{S}|_U = \mathcal{O}_U$, donc le cosupport de \mathcal{S} est contenu dans C . Posons pour chaque k , $0 \leq k \leq n + 1$,

$$J_k = \{(j, j') \mid 1 \leq j < j' \leq e, \mu_k(j, j') = M_k\}.$$

Alors la restriction de \mathcal{S} à $L_k \cap U_k$, $0 \leq k \leq n$, est engendrée par $v_k^{\mu_{k+1}(j, j') - M_{k+1}}$ pour $(j, j') \in J_k$ sur $\mathcal{O}_{L_k \cap U_k}$, car on rappelle qu'on a $L_k \cap U_k = \{u_k = 0\}$. Par conséquent le cosupport de \mathcal{S} est contenu dans $\{L_k \cap L_{k+1}, 0 \leq k \leq n\}$.

3.3 LEMME. — Le cosupport de \mathcal{J} est formé des points de C représentés par les arêtes centrales de Γ .

Démonstration du lemme 3.3. — Le point $P = L_k \cap L_{k+1}$ avec $0 \leq k \leq n$ appartient au cosupport de \mathcal{J} si et seulement si on a $\mu_{k+1}(j,j') - M_{k+1} > 0$ pour tout couple $(j,j') \in J_k$; par conséquent si et seulement si on a $J_k \cap J_{k+1} = \emptyset$. On a déjà vu dans la démonstration du lemme 3.2 qu'on a $J_0 \cap J_1 \neq \emptyset$ et $J_n \cap J_{n+1} \neq \emptyset$, donc les cas qui restent à considérer sont les points singuliers de C . Soit $I_k = \{j | 1 \leq j \leq e, m_k(j) = M_k\}$ pour $1 \leq k \leq n$. Si $a_k > 2$ et $1 < k < n$ (resp. $k = 1$, resp. $k = n$) on a

$$I_k = \{j | m_k(j) = 1 \quad \text{et} \quad 1 \leq m_{k+1}(j) \leq a_k - 1\}$$

(resp. $I_1 = \{j | m_1(j) = 1 \quad \text{et} \quad 1 \leq m_2(j) \leq a_1\}$, resp. $I_n = \{j | m_n(j) = 1 \quad \text{et} \quad 1 \leq m_{n-1}(j) \leq a_n\}$ par les lemmes 3.2 et 2.2; par conséquent on a, en ces cas,

$$\text{card } I_k > 1, \quad \text{d'où} \quad J_k = \{(j,j') \in I_k \times I_k | j < j'\}.$$

Si $a_k = 2$, $1 < k < n$ on a $M_k \geq 2$, lemme 3.2), alors on a

$$J_k = \{(j,j') | j < j'; \quad m_k(j) = 1 \quad \text{et} \quad j' \in I_k, \\ \text{ou} \quad j \in I_k \quad \text{et} \quad m_k(j') = 1\}.$$

Supposons que $L_k \cap L_{k+1}$ soit représenté par une arête centrale de $\Gamma_{k',k''}$ avec $1 \leq k' \leq k < k'' \leq n$; on a les cas suivants :

(ac₁) Si on a $k' = k$ et $k'' = k + 1$, i.e. $a_k > 2$ (resp. $a_{k+1} > 2$) ou $k = 1$ (resp. $k + 1 = n$) alors on a

$$I_k \cap I_{k+1} = \{j | m_k(j) = m_{k+1}(j) = 1\},$$

d'où $\text{card}(I_k \cap I_{k+1}) = 1$ (lemme 2.2), et par suite $J_k \cap J_{k+1} = \emptyset$.

(ac₂) Si $a_k = a_{k+1} = 2$ et $2k + 1 = k' + k''$ (donc $k' < k$, $k + 1 < k''$), alors on a $k - k' + 1 = k'' - k$, donc

$$M_k = \min \{k - k', k'' - k\} + 1 = k - k' + 1$$

est égal à $M_{k+1} = \min \{k + 1 - k', k'' - (k + 1)\} + 1 = k'' - k$. Or il n'existe pas de j tel qu'on ait

$$m_k(j) = m_{k+1}(j) = M_k > 1, \quad \text{d'où} \quad J_k \cap J_{k+1} = \emptyset.$$

Si $L_k \cap L_{k+1}$ est représenté par une arête non centrale de $\Gamma_{k',k''}$, on a les cas suivants :

nac₁) Si $k + 1 < n$, $a_k > 2$ (resp. $k = 1$) et $a_{k+1} = 2$, alors on a $M_{k+1} = 2$, d'où $J_k \cap J_{k+1} = J_{k+1} \neq \emptyset$.

nac₂) Si $k > 1$, $a_k = 2$ et $a_{k+1} > 2$ (resp. $k + 1 = n$), alors on a $M_k = 2$, d'où $J_k \cap J_{k+1} = J_k \neq \emptyset$.

nac₃) Si $1 < k < n - 1$, $a_k = a_{k+1} = 2$, et $2k + 1 \neq k' + k''$, alors on a $M_{k+1} = M_k + 1$ (resp. $M_k = M_{k+1} + 1$) si $2k + 1 < k' + k''$ (resp. $2k + 1 > k' + k''$), donc on a

$$J_k = J_k \cap J_{k+1} = J_{k+1} \neq \emptyset. \quad \square$$

On peut vérifier facilement que si $L_k \cap L_{k+1}$, $1 \leq k \leq n - 1$, est représenté par une arête centrale de Γ (i.e. dans les cas *ac₁*) et *ac₂*) de la démonstration du lemme précédent), alors on a

$$\min \{ \mu_{k+1}(j, j') \mid (j, j') \in J_k \} - M_{k+1} = 1.$$

Par conséquent, si $\sigma : \tilde{X} \rightarrow X$ est l'éclatement des points de X appartenant au cosupport de \mathcal{S} , on a (par la remarque précédente et le lemme 3.3) que $\sigma^* \tilde{\Omega}^2$ est un faisceau inversible sur \tilde{X} ; autrement dit l'application rationnelle $\tilde{\pi} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{S}$, induite par $\bar{\pi} : X \rightarrow \tilde{S}$, est un morphisme. D'où l'assertion i) du théorème.

Soit $\text{div}(\sigma^* \mathcal{S})$ le diviseur, dans \tilde{X} , associé (à équivalence linéaire près) au faisceau inversible $\sigma^* \mathcal{S}$ tel qu'on ait

$$\sigma^* \mathcal{S} \cong \mathcal{O}_{\tilde{X}}(-\text{div}(\sigma^* \mathcal{S})).$$

Soit D le diviseur, dans \tilde{X} , défini (à équivalence linéaire près) par :

$$(1) \quad D = -\text{div}(\sigma^* \mathcal{S}) - \sigma^* M + \sigma^* K_X.$$

Alors l'isomorphisme (***) implique :

$$(***) \quad \sigma^* \tilde{\Omega}^2 \cong \mathcal{O}_{\tilde{X}}(D).$$

Posons $\Lambda = \{k \mid 1 \leq k < n; P_k = L_k \cap L_{k+1} \text{ est représenté par une arête centrale de } \Gamma\}$; soit $A_k = \sigma^{-1}(P_k)$ la courbe exceptionnelle (réduite) image inverse du point P_k , $k \in \Lambda$, par $\sigma : \tilde{X} \rightarrow X$; soit \tilde{L}_k la transformée

stricte de L_k , $1 \leq k \leq n$, et soit $K_{\tilde{X}}$ un diviseur canonique de \tilde{X} . Alors on a :

$$(2) \quad \operatorname{div}(\sigma^*\mathcal{J}) \equiv \sum_{k \in \Lambda} A_k$$

$$(3) \quad \sigma^*M \equiv \left(\sum_{1 \leq k \leq n} M_k \tilde{L}_k \right) + \left(\sum_{k \in \Lambda} (M_k + M_{k+1}) A_k \right).$$

$$(4) \quad \sigma^*K_X \equiv K_{\tilde{X}} - \sum_{k \in \Lambda} A_k.$$

Il résulte de (1), (2), (3) et (4) :

$$(5) \quad D \equiv - \left(\sum_{k \in \Lambda} (M_k + M_{k+1} + 2) A_k \right) - \left(\sum_{1 \leq k \leq n} M_k \tilde{L}_k \right) + K_{\tilde{X}}.$$

Soit $\delta(\tilde{L}_k)$, $1 \leq k \leq n$, (resp. $\delta(A_k)$, $k \in \Lambda$) le degré de la restriction de $\sigma^*\tilde{\Omega}^2$ à \tilde{L}_k (resp. A_k). Alors on a (par (***)) $\delta(\tilde{L}_k) = (D \cdot \tilde{L}_k)$ (resp. $\delta(A_k) = (D \cdot A_k)$). Pour chaque $k \in \Lambda$ on a $(A_k \cdot \tilde{L}_i) = 1$ si $i = k$ ou $i = k + 1$, et $(A_k \cdot \tilde{L}_i) = 0$ si $i \neq k$ et $i \neq k + 1$, $(A_k \cdot A_k) = -1$. Posons $\mathcal{P} = \{P_i | i \in \Lambda\}$. Pour chaque k avec $1 \leq k \leq n$, on a

$(\tilde{L}_k \cdot \tilde{L}_k) = -a_k$	si	$L_k \cap \mathcal{P} = \emptyset$,
$(\tilde{L}_k \cdot \tilde{L}_k) = -a_k - 1$	si	$\operatorname{card}(L_k \cap \mathcal{P}) = 1$,
$(\tilde{L}_k \cdot \tilde{L}_k) = -a_k - 2$	si	$\operatorname{card}(L_k \cap \mathcal{P}) = 2$,
$(\tilde{L}_k \cdot \tilde{L}_i) = 1$	si	$1 \leq i = k + 1 \leq n$ et $k \notin \Lambda$, ou
	si	$n \geq i = k - 1 \geq 1$ et $k - 1 \notin \Lambda$
$(\tilde{L}_k \cdot \tilde{L}_i) = 0$	si	$1 \leq i \leq n$, $i \neq k - 1, k, k + 1$, ou
	si	$i = k + 1$ et $k \in \Lambda$, ou
	si	$i = k - 1$ et $k \in \Lambda$.

Par la formule du genre on a $(\tilde{L}_k \cdot K_{\tilde{X}}) = -(\tilde{L}_k \cdot \tilde{L}_k) - 2$, $1 \leq k \leq n$; et $(A_k \cdot K_{\tilde{X}}) = -1$, $k \in \Lambda$.

Calculons maintenant les degrés $\delta(\tilde{L}_k)$ $1 \leq k < n$ et $\delta(A_k)$, $k \in \Lambda$:

d₁) Si $a_k > 2$, $1 < k < n$, $L_k \cap \mathcal{P} = \emptyset$, on a

$$(D \cdot \tilde{L}_k) = -M_{k+1} + a_k M_k - M_{k+1} + a_k - 2 = 2a_k - 6,$$

car $M_{k-1} = M_{k+1} = 2$ et $M_k = 1$ (lemma 3.2).

$d_2)$ Si $a_k > 2$, $1 < k < n$, $L_k \cap \mathcal{P} = \{P_{k-1}\}$ (resp. $L_k \cap \mathcal{P} = \{P_k\}$)
on a

$$(D. \tilde{L}_k) = -M_{k-1} - M_k - 2 + M_k(a_k + 1) - M_{k+1} \\ + (a_k + 1) - 2 = 2a_k - 6$$

car $M_{k-1} = M_k = 1$ et $M_{k+1} = 2$ (lemme 3.2)

$$\text{(resp. } (D. \tilde{L}_k) = -M_k - M_{k+1} - 2 - M_{k-1} + M_k(a+1) \\ + (a_k + 1) - 2 = 2a_k - 6$$

car $M_{k-1} = 2$, $M_k = M_{k+1} = 1$ (lemme 3.2)).

$d_3)$ Si $a_k > 2$, $1 < k < n$, $L_k \cap \mathcal{P} = \{P_{k-1}, P_k\}$ on a

$$(D. \tilde{L}_k) = -(M_{k-1} + M_k + 2) - (M_k + M_{k-1} - 2) + M_k(a_k + 2) \\ + (a_k + 2) - 2 = 2a_k - 6$$

car $M_{k-1} = M_k = M_{k+1} = 1$ (lemme 3.2).

En conséquence de $d_1)$, $d_2)$ et $d_3)$ on a $\delta(\tilde{L}_k) = 2a_k - 6$ si $a_k > 2$,
 $1 < k < n$.

Si on a $a_k = 2$, $1 < k < n$ et le sommet L_k n'est pas central (dans le
segment $\Gamma_{k', k''}$) on a les cas possibles suivants :

$d_4)$ $L_k \cap \mathcal{P} = \emptyset$, donc :

$$(D. \tilde{L}_k) = -M_{k-1} + 2M_k - M_{k+1} = 0,$$

car on a $M_{k-1} = M_k - 1$ et $M_{k+1} = M_k + 1$ si $k - k' < k'' - k$, et
on a

$M_{k-1} = M_k + 1$ et $M_{k+1} = M_k - 1$ si $k - k' > k'' - k$
(lemme 3.2)

$d_5)$ $L_k \cap \mathcal{P} = \{P_{k-1}\}$ (resp. $L_k \cap \mathcal{P} = \{P_k\}$), donc

$$(D. \tilde{L}_k) = -(M_{k-1} + M_k + 2) + 3M_k - M_{k+1} + 1 = 0$$

car on a $M_{k-1} = M_k = M_{k+1} + 1$ (lemme 3.2)

$$\text{(resp. } (D. \tilde{L}_k) = -(M_k + M_{k+1} + 2) - M_{k-1} + 3M_k + 1 = 0$$

car on a $M_{k+1} = M_k = M_{k-1} + 1$ (lemme 3.2)).

En conséquence de d_4) et d_5) on a $\delta(\tilde{L}_k) = 0$ si $a_k = 2$, $1 < k < n$, et le sommet L_k n'est pas central.

d_6) Si $a_k = 2$ et L_k est un sommet central de Γ , alors on a $L_k \cap \mathcal{P} = \emptyset$, donc :

$$(D.\tilde{L}_k) = -M_{k-1} + 2M_k - M_{k+1} = 2,$$

car on a $M_{k-1} = M_{k+1} = M_k - 1$ (lemme 3.2), d'où $\delta(\tilde{L}_k) = 2$.

Si $k = 1$ (resp. $k = n$) on a les cas possibles suivants :

d_7) $L_1 \cap \mathcal{P} = \emptyset$ (resp. $L_n \cap \mathcal{P} = \emptyset$), donc

$$(D.\tilde{L}_1) = M_1 a_1 - M_2 + a_1 - 2 = 2a_1 - 4,$$

car on a $M_1 = 1$, $M_2 = 2$ (lemme 3.2)

$$\text{(resp. } (D.\tilde{L}_n) = -M_{n-1} + M_n a_n + a_n - 2 = 2a_n - 4,$$

car on a $M_n = 1$, $M_{n-1} = 2$ (lemme 3.2)).

d_8) $L_1 \cap \mathcal{P} = \{P_2\}$ (resp. $L_n \cap \mathcal{P} = \{P_{n-1}\}$), donc

$$(D.\tilde{L}_1) = -(M_1 + M_2 + 2) + M_1(a_1 + 1) + (a_1 + 1) - 2 = 2a_1 - 4,$$

car on a $M_1 = M_2 = 1$ (lemme 3.2)

$$\text{(resp. } (D.\tilde{L}_n) = -(M_{n-1} + M_n + 2) + M_n(a_n + 1) + (a_n + 1) - 2 = 2a_n - 4$$

car on a $M_n = M_{n-1} = 1$ (lemme 3.2)).

En conséquence de d_6), d_7) on a $\delta(\tilde{L}_k) = 2a_k - 4$ si $k = 1$ ou n .
Finalement on a le cas

d_9) si $k \in \Lambda$, on a

$$(D.A_k) = M_k + M_{k+1} + 2 - M_k - M_{k+1} - 1 = 1.$$

On a, donc, les égalités de l'assertion ii) du théorème, et $\tilde{\pi} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{S}$ est la résolution minimale de \tilde{S} car les courbes contractées en un point par $\tilde{\pi}$ ont une auto-intersection strictement inférieure à -1 . \square

3.4. *Remarque.* — L'assertion ii) du théorème 3.1 donne plus de précisions que le résultat de [6], car dans ce dernier on ne calcule pas les degrés du fibré cotangent de Nash (notés ici $\delta(\quad)$), mais seulement on calcule s'ils sont nuls ou non.

3.5. COROLLAIRE. — *Le transformé de Nash normalisé \tilde{S}_n est ou bien une surface lisse ou bien une surface ayant des singularités aussi en éventail.*

Démonstration. — La résolution $\tilde{\pi} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{S}$ se factorise par la résolution (minimale) $\tilde{\pi}_n : \tilde{X} \rightarrow \tilde{S}_n$ de \tilde{S}_n . Si $P \in \tilde{S}_n$ est un point singulier, alors on a (théorème 3.1) que le graphe dual associé est une chaîne. \square

3.6. Remarque. — Soit P un point singulier de \tilde{S}_n , et soit $-a$ l'auto-intersection d'une composante irréductible de la fibre exceptionnelle, sur P , de sa résolution minimale. Alors on peut vérifier (par le théorème 3.1) qu'on a les inégalités $2 \leq a \leq 5$, et il existe des exemples où ces bornes sont atteintes.

4. Résolution de Nash.

THÉORÈME. — *Soit $O \in S$ une singularité en éventail. Alors on résout avec un nombre fini de transformations de Nash suivies de normalisations. (Nombre plus petit ou égal au nombre de composantes irréductibles de la fibre exceptionnelle de la résolution minimale de S).*

Démonstration. — On garde les notations du § 3. Soit $P \in \tilde{S}_n$ un point singulier du transformé de Nash normalisé de S . Nous allons montrer que le nombre de composantes irréductibles de la fibre exceptionnelle de la résolution minimale de P est strictement inférieur à celui du point O .

Soit G un graphe; on appelle longueur de G (notée $l(G)$) le nombre de sommets de G .

Soit Γ le graphe dual pondéré de la résolution minimale de O , L_i ses sommets avec poids $-a_i$, $1 \leq i \leq n$.

Si $n = 1$ on a montré que \tilde{S}_n est lisse, donc on peut supposer $n > 1$.

Notons $\Gamma_{j,j}$, le sous-graphe de Γ qui contient les sommets L_i avec $1 \leq j \leq i \leq j' \leq n$.

Soit $\sigma : \tilde{X} \rightarrow X$ le morphisme obtenu par éclatements de points de X , défini dans le théorème 3.1.

Soit C_P la fibre exceptionnelle de P dans \tilde{X} et $\sigma(C_P)$ son image dans X , et soit $\tilde{\Gamma}_P$ (resp. Γ_P) le graphe dual associé à C_P (resp. $\sigma(C_P)$); Γ_P est un sous-graphe de Γ .

Par le théorème 3.1 on sait que C_P est obtenu en éclatant au maximum

un des points d'intersection des composantes irréductibles de $\sigma(C_p)$, et par conséquent on a

$$(1) \quad l(\tilde{\Gamma}_p) \leq l(\Gamma_p) + 1.$$

Supposons qu'il existe un entier k , $1 < k < n$ tel qu'on ait $a_k > 2$. Alors il existe ou bien un sommet central de Γ , $L_{d'}$ (resp. $L_{d''}$), avec $1 < d' < k$ (resp. $k < d'' < n$), ou bien une arête centrale de Γ représentant le point $L_{c'} \cap L_{c'+1}$ (resp. $L_{c''-1} \cap L_{c''}$) avec $1 \leq c' < k$ (resp. $k < c'' \leq n$), ou bien les deux. (Voir définitions de sommet et arête centrale au début du § 3). Dans le premier cas on a $\delta(\tilde{L}_{d'}) > 0$ (resp. $\delta(\tilde{L}_{d''}) > 0$) et dans le deuxième on a $\delta(A_{c'}) > 0$ (resp. $\delta(A_{c''}) > 0$), par le théorème 3.1 ii). Par conséquent Γ_p est un sous-graphe d'un des graphes suivants : $\Gamma_{1,k-1}$, $\Gamma_{2,n-1}$, $\Gamma_{k+1,n}$, dont les longueurs sont respectivement $k - 1$, $n - 2$, $n - k$. Or ces trois nombres sont strictement inférieurs à $n - 1$, donc on a l'inégalité $l(\Gamma_p) < n - 1$, et il résulte de (1) qu'on a $l(\tilde{\Gamma}_p) < n$.

Si, par contre, on a $a_k = 2 \forall k$ avec $1 < k < n$, alors ou bien n est pair et par suite $L_{n/2} \cap L_{n/2+1}$ est représenté par une arête centrale de Γ , ou bien n est impair et par conséquent $L_{(n+1)/2}$ est un sommet central de Γ . Dans le premier cas on a $l(\Gamma_p) \leq n/2 - 1$ et dans le deuxième $l(\Gamma_p) \leq (n-1)/2$. Par suite on a, dans les deux cas, $l(\Gamma_p) < n - 1$, et il résulte de (1) qu'on a $l(\tilde{\Gamma}_p) < n$, d'où le théorème. \square

BIBLIOGRAPHIE

- [1] S. ABHYANKAR, Quasi rational singularities, *Am. J. of Math.*, 101 (1979), 267-300.
- [2] M. ARTIN, On isolated rational singularities of surfaces, *Amer. J. Math.*, 88 (1966), 129-136.
- [3] M. ARTIN, Some numerical criteria for contractibility of curves on algebraic surfaces, *Amer. J. Math.*, 84 (1962), 485-496.
- [4] E. BRIESKORN, Rationale singularitäten komplexer Flächen, *Inv. Math.*, 4 (1968), 336-358.
- [5] A. GROTHENDIECK, *Éléments de Géométrie Algébrique I*, 1.9.8.4 Springer (1971).
- [6] G. GONZÁLEZ-SPRINBERG, Éventails en dimension 2 et transformé de Nash, *Publications de l'E.N.S.*, Paris (1977).
- [7] F. HIRZEBRUCH, Über vierdimensionale Riemannsche Flächen mehrdeutiger analytischer Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen, *Math. Ann.*, 126 (1953), 1-22.
- [8] F. KLEIN, *The Icosahedron and the General 5th Degree Equation*, 1884, Dover reprint, 1956.

- [9] H. LAUFER, Deformations of resolutions of two-dimensional singularities, *Proc. of Rice conference on Complex Analysis* (1972).
- [10] H. LAUFER, Taut two dimensional singularities, *Math. Ann.*, 205 (1973), 131-164.
- [11] J. LIPMAN, Rational singularities with applications to algebraic surfaces and unique factorizations, *Publ. Math. I.H.E.S.*, 36 (1969), 195-279.
- [12] H. PINKHAM, Singularités rationnelles de surfaces, *Springer Lecture Notes*, n° 777 (1980).
- [13] O. RIEMENSCHNEIDER, Deformationen von Quotientensingularitäten (nach zyklischen Gruppen), *Math. Ann.*, 209 (1974), 211-248.
- [14] KEMPF, KNUDSEN, MUMFORD et SAINT-DONAT, Toroidal Embeddings I, *Springer Lecture Notes*, n° 339 (1973).
- [15] G. N. TYURINA, Absolute isolatedness of rational singularities and triple rational points, *Func. Anal. Appl.*, 2 (1968), 324-332.

Manuscrit reçu le 20 février 1981
révisé le 13 juillet 1981.

Gerardo GONZALEZ-SPRINBERG,
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences de Metz
57000 Metz
et
Centre de Mathématiques
de l'École Polytechnique
91128 Palaiseau Cedex.
