ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

JEAN-PIERRE DEMAILLY

Sur les nombres de Lelong associés à l'image directe d'un courant positif fermé

Annales de l'institut Fourier, tome 32, nº 2 (1982), p. 37-66

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1982__32_2_37_0>

© Annales de l'institut Fourier, 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://annalif.ujf-grenoble.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
32, 2 (1982), 37-66.

SUR LES NOMBRES DE LELONG ASSOCIÉS A L'IMAGE DIRECTE D'UN COURANT POSITIF FERMÉ

par Jean-Pierre DEMAILLY

0. Introduction.

Soit T un courant positif fermé de bidimension (p,p) sur un ouvert $\Omega \subset \mathbf{C}^n$. On définit classiquement le nombre de Lelong $\nu(\mathrm{T};x)$ du courant T en un point $x \in \Omega$ comme la limite quand r tend vers 0 du rapport entre la masse du courant T sur la boule euclidienne de centre x et de rayon r dans Ω, et le volume $\dfrac{\pi^p}{p\,!}r^{2p}$ de la boule de rayon r dans $\mathbf{C}^p$ (voir P. Lelong [6] pour de plus amples détails). Un théorème remarquable de Y.-T. Siu [11], fondé sur les résultats de E. Bombieri [1], affirme que pour tout $c > 0$ l'ensemble $\mathrm{E}_c = \{x \in \Omega;\ \nu(\mathrm{T};x) \geqslant c\}$ est un sous-ensemble analytique de Ω de dimension $\leqslant p$.

Dans le présent travail, nous envisageons la généralisation suivante des nombres de Lelong. T désignera un courant positif fermé de bidimension (p,p) sur un espace analytique X. On se donne une fonction $\varphi \geqslant 0$ de classe C^2, telle que $\log\varphi$ soit plurisousharmonique sur X, et telle que pour $\mathrm{R} > 0$ assez petit l'ensemble $\mathrm{Supp}\,\mathrm{T} \cap \varphi^{-1}([0,\mathrm{R}[)$ soit relativement compact dans X. Une formule de type Jensen, déjà utilisée dans [3], permet alors de définir le nombre de Lelong du courant T relativement au poids φ comme la limite

$$\nu(\mathrm{T};\varphi) = \lim_{r>0,r\to 0}\uparrow \frac{1}{(2\pi r)^p}\int_{\varphi(z)<r} \mathrm{T}\wedge(i\partial\bar\partial\varphi)^p.$$

Une propriété fondamentale, qui jouera un rôle central tout au long de ce travail, réside dans le fait que $\nu(T;\varphi)$ dépend uniquement du comportement asymptotique de $\log \varphi$ au voisinage de l'ensemble polaire $\varphi^{-1}(0)$ (cf. § 1, théorème 4). En particulier, si les fonctions $\log \varphi$ et $\log \psi$ ont mêmes pôles et sont équivalentes au voisinage de l'ensemble $\varphi^{-1}(0) = \psi^{-1}(0)$, alors $\nu(T;\varphi) = \nu(T;\psi)$. On retrouve ainsi l'invariance des nombres de Lelong par isomorphisme analytique local. Ce résultat avait été établi antérieurement par Y.-T. Siu [11] au moyen de la théorie du slicing de H. Federer [4].

Considérons maintenant un morphisme $F : X \to Y$ de l'espace X sur un espace analytique Y, dont la restriction au support de T soit *propre*. On désigne par F_*T le courant positif fermé sur Y, image directe de T. Nous étudions au § 2 les relations qui existent entre les nombres de Lelong de F_*T et ceux de T.

THÉORÈME 1. — *Soit y un point de Y. On suppose que l'ensemble compact* $\operatorname{Supp} T \cap F^{-1}(y)$, *intersection du support de T et de la fibre $F^{-1}(y)$, est totalement discontinu. Alors*

$$\nu(F_*T;y) \geqslant \sum_{x \in F^{-1}(y)} \nu(T;x).$$

Le théorème 1 s'applique notamment lorsque F est un morphisme *propre fini* de X dans Y, sans autre hypothèse sur T. Il s'applique plus généralement lorsque la restriction de F à $\operatorname{Supp} T$ est une application propre à fibres finies ou dénombrables. Il est facile de voir d'autre part que l'hypothèse de totale discontinuité de l'ensemble $\operatorname{Supp} T \cap F^{-1}(y)$ ne peut être éliminée : sans cette hypothèse, il existe en effet des contre-exemples triviaux (voir § 2).

L'inégalité du théorème 1 sera affinée au § 3 de manière à tenir compte des multiplicités d'annulation des dérivées du morphisme F. Pour simplifier, on supposera ici que $F = (F_1, F_2, \ldots F_N)$ est un morphisme de X dans un sous-ensemble analytique Y d'un ouvert de $\mathbf{C}^N$, tel que la restriction de F à $\operatorname{Supp} T$ soit propre. Dans ces conditions, on a le

THÉORÈME 2. — *Soit $x \in X$ un point tel que $\nu(T;x) > 0$ et $F(x) = 0$. On suppose que la composante connexe de x dans* $\operatorname{Supp} T \cap F^{-1}(0)$ *est réduite à $\{x\}$. Si $F_1, F_2, \ldots, F_N$ s'annulent respectivement aux ordres $s_1 \leqslant s_2 \leqslant \cdots \leqslant s_N$ au point x, alors $N \geqslant p$ et*

$$\nu(F_*T;0) \geqslant s_1 s_2 \ldots s_p \nu(T;x).$$

Nous obtiendrons un énoncé plus géométrique en introduisant une notion intrinsèque de multiplicités pour le morphisme F.

Si les $\mu_p(F;x)$ sont ces multiplicités (définition 4), le théorème 5 affirme que

$$\nu(F_*T;y) \geqslant \sum \mu_p(F;x)\nu(T;x)$$

où la somme est étendue à tous les points $x \in \operatorname{Supp} T \cap F^{-1}(y)$ qui coïncident avec leur composante connexe dans $\operatorname{Supp} T \cap F^{-1}(y)$, et tels que $\nu(T;x) > 0$.

Les minorations des nombres de Lelong de F_*T données par les théorèmes 1, 2 et 5 entraînent elles-mêmes une majoration des nombres $\nu(F_*T;y)$ par les nombres $\nu(T;x)$ aux points $x \in F^{-1}(y)$, lorsque la fibre $F^{-1}(y)$ est finie (théorème 6). Il faut naturellement faire intervenir encore certaines multiplicités $\bar{\mu}_p(F;x)$ du morphisme F (cf. définition 5). Nous montrerons par un exemple qu'il n'est pas possible d'améliorer l'encadrement obtenu.

Le quatrième et dernier paragraphe est consacré à l'étude du « degré » $\delta(T;\varphi)$ du courant T. De façon précise, on pose

$$\delta(T;\varphi) = \lim_{r \to +\infty} \uparrow \frac{1}{(2\pi r)^p} \int_{\varphi(z)<r} T \wedge (i\partial\bar{\partial}\varphi)^p,$$

la fonction φ étant supposée exhaustive sur le support de T. La théorie est tout à fait analogue à celle des nombres de Lelong.

En particulier, il est possible d'encadrer le degré de l'image directe Q_*T d'un courant T par un morphisme algébrique Q au moyen du degré de T et de certaines multiplicités du morphisme Q.

Tous ces résultats apparaissent comme des généralisations d'inégalités obtenues dans [3], qui nous avaient permis de retrouver le théorème de E. Bombieri [1] sur les valeurs algébriques de fonctions méromorphes. Les démonstrations du présent travail sont assez notablement différentes de celles de [3], et d'une certaine manière plus élémentaires ; les raisonnements reposent ici sur des arguments de théorie géométrique de la mesure, mais n'utilisent plus de résultats fins sur la structure des ensembles analytiques ou algébriques.

L'idée d'étudier ce problème m'a été suggérée par M. Henri Skoda, que je tiens à remercier ici pour ses nombreuses remarques.

1. Formules de Jensen et nombres de Lelong généralisés.

Nous commencerons par rappeler quelques définitions qui nous seront utiles, de manière à fixer simultanément les notations.

Si X est un espace analytique (réduit), nous désignerons par $\mathscr{C}^k_{p,q}(\mathrm{X})$ l'espace des (p,q)-formes de classe C^k, défini de la manière suivante : k, p, q sont trois entiers $\geqslant 0$, k pouvant éventuellement prendre la valeur $+\infty$. Soit U un ouvert de X plongé comme sous-ensemble analytique d'un ouvert Ω de $\mathbf{C}^{\mathrm{N}}$. Si U′ est l'ensemble des points réguliers de U, on note $\mathscr{C}^k_{p,q}(\mathrm{U})$ l'image du morphisme de restriction

$$j^* : \mathscr{C}^k_{p,q}(\Omega) \to \mathscr{C}^k_{p,q}(\mathrm{U}')$$

(où $j : \mathrm{U}' \hookrightarrow \Omega$ est l'inclusion), munie de la topologie-quotient ; on peut montrer que $\mathscr{C}^k_{p,q}(\mathrm{U})$ est bien indépendant du plongement j choisi. On définit $\mathscr{C}^k_{p,q}(\mathrm{X})$ par recollement, et $\mathscr{D}^k_{p,q}(\mathrm{X})$ comme l'espace des (p,q)-formes de classe C^k à support compact dans X, avec la topologie limite inductive.

L'espace des courants de bidimension (p,q) et d'ordre k sur X sera par définition l'espace dual $[\mathscr{D}^k_{p,q}(\mathrm{X})]'$. Les opérateurs d, ∂, $\bar\partial$ sont étendus aux courants par dualité. Si l'on revoit le détail de la construction, on s'aperçoit que pour tout courant $\mathrm{T} \in [\mathscr{D}^k_{p,q}(\mathrm{X})]'$ et tout plongement $j : \mathrm{U} \to \Omega$ considéré plus haut, il existe un courant $\theta \in [\mathscr{D}^k_{p,q}(\Omega)]'$ ayant la propriété suivante :

$$\langle \mathrm{T}, j^*v\rangle = \langle \theta, v\rangle \tag{1}$$

pour toute forme $v \in \mathscr{D}^k_{p,q}(\Omega)$. θ est unique, et son support est contenu dans $j(\mathrm{U})$.

On dira qu'un courant $\mathrm{T} \in [\mathscr{D}^0_{p,p}(\mathrm{X})]'$ est faiblement positif si tous les courants $\theta \in [\mathscr{D}^0_{p,p}(\Omega)]'$ qui lui sont associés sont eux-mêmes faiblement positifs. On rappelle qu'un courant $\theta \in [\mathscr{D}^0_{p,q}(\Omega)]'$ est dit (faiblement) positif si quelles que soient les formes $u_1, u_2, \ldots, u_p \in \mathscr{C}^0_{1,0}(\Omega)$, le (n,n) courant $\mathrm{T} \wedge (iu_1 \wedge \bar u_1) \wedge \ldots (iu_p \wedge \bar u_p)$ est une mesure positive.

Les résultats qui suivent reposent sur une formule de Jensen à plusieurs variables. Cette formule, déjà utilisée dans [3], est d'ailleurs parfaitement classique dans son principe. La démonstration s'appuie sur la formule de

Stokes et constitue une généralisation naturelle de la méthode suivie par P. Lelong [6] pour établir l'existence des nombres de Lelong d'un courant positif fermé.

Soit φ une fonction réelle de classe C^2 sur X. On pose

$$\begin{aligned}\beta &= i\partial\bar{\partial}\varphi,\\ \alpha &= i\partial\bar{\partial}(\log\varphi) \text{ sur l'ouvert } \varphi > 0,\end{aligned}$$

et pour tous réels $r > 0$, $r_2 > r_1 > 0$:

$$\begin{aligned}B(r) &= \{z\in X;\ \varphi(z) < r\},\\ S(r) &= \{z\in X;\ \varphi(z) = r\},\\ B(r_1,r_2) &= \{z\in X;\ r_1 \leqslant \varphi(z) < r_1\} = B(r_2)\backslash B(r_1).\end{aligned}$$

PROPOSITION 1. — *Soit* T *un courant de bidimension* (p,p) *sur* X, *d'ordre* 0 *ainsi que ses différentielles* dT, $i\partial\bar{\partial}T$. *Soient* $r_2 > r_1 > 0$. *On suppose que l'ensemble* $\operatorname{Supp} T \cap B(r_2)$ *est relativement compact dans* X. *Alors*

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}&\int_{r_1}^{r_2} \frac{dt}{t^p} \int_{B(t)} i\partial\bar{\partial}T \wedge \beta^{p-1}\\ &= \frac{1}{r_2^p}\int_{S(r_2)} T\wedge\beta^{p-1}\wedge i\bar{\partial}\varphi - \frac{1}{r_1^p}\int_{S(r_1)} T\wedge\beta^{p-1}\wedge i\bar{\partial}\varphi - \int_{B(r_1,r_2)} T\wedge\alpha^p,\end{aligned}\right.$$

où l'intégrale $\int_{S(r)} T\wedge\beta^{p-1}\wedge i\bar{\partial}\varphi$ $(r=r_1,r_2)$ *est définie par la formule de Stokes* :

$$\int_{S(r)} T\wedge\beta^{p-1}\wedge i\bar{\partial}\varphi = \int_{B(r)} T\wedge\beta^p + \int_{B(r)} dT\wedge\beta^{p-1}\wedge i\bar{\partial}\varphi.$$

La démonstration est assez technique, mais sa compréhension n'est pas indispensable pour la suite. Il est donc possible de la sauter en première lecture. Pour la commodité du lecteur, nous procéderons en trois étapes.

a) *Réduction au cas où* T *est un courant à support compact dans un ouvert de* $\mathbf{C}^N$.

En remplaçant T par $\Sigma\chi_\nu T$, où (χ_ν) est une partition de l'unité, on voit que le problème est local. Pour tout point $x\in X$, il existe un voisinage ouvert U de x dans X, un plongement $j: U\to\Omega$ dans un ouvert de $\mathbf{C}^N$, une fonction $\psi\in\mathscr{C}^2(\Omega,\mathbf{R})$ telle que $\varphi|_U = \psi\circ j$.

On a donc $\beta = j^*(i\partial\bar{\partial}\varphi)$, $\alpha = j^*(i\partial\bar{\partial}\log\psi)$. Au courant T (supposé à support compact dans U) est associé par (1) un courant θ à support compact dans Ω, vérifiant les mêmes propriétés que T. En utilisant (1), on est donc ramené à démontrer la proposition 1 lorsque $X = \Omega \subset \mathbf{C}^N$, $\varphi \in \mathscr{C}^2(\Omega)$, et T courant à support compact dans Ω.

b) *Régularisation de* T.

Puisque les deux membres de (2) sont des fonctions continues à gauche en r_1 et r_2, il suffit de démontrer (2) pour les valeurs r_1, r_2 de r tels que la « sphère » $S(r)$ soit négligeable pour la mesure $|T| + |dT| + |i\partial\bar{\partial}T|$ (les valeurs exceptionnelles formant un ensemble dénombrable D).

Soit $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ une famille de noyaux régularisants dans $\mathbf{C}^N$. Remplaçons T par $T * \rho_\varepsilon$ dans la formule (2); tous les termes de (2) passent alors à la limite quand ε tend vers 0, dès que $r_1 \notin D$, $r_2 \notin D$. Raisonnons par exemple pour le premier terme, en notant $\chi_{B(t)}$ la fonction caractéristique de l'ensemble $B(t)$:

$$\int_{B(t)} i\partial\bar{\partial}(T * \rho_\varepsilon) \wedge \beta^p = \int i\partial\bar{\partial}T \wedge [\rho_\varepsilon * (\chi_{B(t)}\beta^p)] \to \int i\partial\bar{\partial}T \wedge \chi_{B(t)}\beta^p \quad \text{si} \quad t \notin D$$

car $\rho_\varepsilon * (\chi_{B(t)}\beta^p)$ reste borné et converge simplement vers $\chi_{B(t)}\beta^p$ sur le complémentaire de l'ensemble $|i\partial\bar{\partial}T|$-négligeable $S(t)$. Les autres termes se traitent de même.

c) *Démonstration de la formule* (2) *pour* $T \in \mathscr{D}^\infty_{N-p,N-p}(\Omega)$.

On peut également supposer que φ est une fonction de classe C^∞ *sans points critiques dégénérés* (sinon écrire $\varphi = \lim_{\nu \to +\infty} \downarrow \varphi_\nu$ où φ_ν est une suite décroissante de telles fonctions, et appliquer le théorème de convergence dominée). Il en résulte que la formule de Stokes s'applique au domaine à bord éventuellement singulier $B(t)$, le bord $\partial B(t) = S(t)$ étant orienté par la normale extérieure $d\varphi$. Désignons par $i_t (t > 0)$ l'injection $S(t) \hookrightarrow X$. Il est clair que

$$i_t^* \partial\varphi + i_t^* \bar{\partial}\varphi = i_t^* d\varphi = d(\varphi \circ i_t) = 0.$$

Un calcul immédiat fournit d'autre part

$$\alpha = \frac{i\partial\bar{\partial}\varphi}{\varphi} - \frac{i\partial\varphi \wedge \bar{\partial}\varphi}{\varphi^2},$$

d'où $i_t^*\alpha = \dfrac{i_t^*\beta}{t}$; on obtient donc d'après la formule de Stokes :

$$\int_{B(t)} i\partial\bar\partial T \wedge \beta^{p-1} = \int_{B(t)} d(i\bar\partial T \wedge \beta^{p-1}) = \int_{S(t)} i\bar\partial T \wedge \beta^{p-1}$$
$$= t^{p-1} \int_{S(t)} i\bar\partial T \wedge \alpha^{p-1}.$$

Le théorème de Fubini montre que

$$(3) \quad \int_{r_1}^{r_2} \frac{dt}{t^p} \int_{B(t)} i\partial\bar\partial T \wedge \beta^{p-1} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dt}{t} \int_{S(t)} i\bar\partial T \wedge \alpha^{p-1}$$
$$= \int_{B(r_1,r_2)} d\,\mathrm{Log}\,\varphi \wedge i\bar\partial T \wedge \alpha^{p-1}.$$

Comme les formes de bidegré $(n-1, n+1)$ et $(n+1, n-1)$ sont nulles, on a sur $B(r_1,r_2)$:

$$\begin{aligned} d\,\mathrm{Log}\,\varphi \wedge i\bar\partial T \wedge \alpha^{p-1} &= \partial\,\mathrm{Log}\,\varphi \wedge i\bar\partial T \wedge \alpha^{p} \\ &= \partial\,\mathrm{Log}\,\varphi \wedge i\,dT \wedge \alpha^{p} \\ &= -\,d(T \wedge \alpha^{p-1} \wedge i\partial\,\mathrm{Log}\,\varphi) - T \wedge \alpha^{p}. \end{aligned}$$

En utilisant à nouveau la formule de Stokes et les égalités

$$i_t^*\alpha = \frac{i_t^*\beta}{t}, \qquad i_t^*\,\partial\varphi = -\,i_t^*\bar\partial\varphi,$$

l'intégrale (3) devient :

$$-\int_{\partial B(r_1,r_2)} T \wedge \alpha^{p-1} \wedge i\partial\log\varphi - \int_{B(r_1,r_2)} T \wedge \alpha^{p}$$
$$= \frac{1}{r_2^p}\int_{S(r_2)} T \wedge \beta^{p-1} \wedge i\bar\partial\varphi - \frac{1}{r_1^p}\int_{S(r_1)} T \wedge \beta^{p-1} \wedge i\bar\partial\varphi - \int_{B(r_1,r_2)} T \wedge \alpha^{p}.$$

On obtient précisément le second membre de la formule (2). □

Dans toute la suite de ce paragraphe, on désignera par T un courant faiblement positif, fermé (i.e. $dT=0$), de bidimension (p,p) sur X. Un cas particulier fondamental sera le cas où la fonction $\mathrm{Log}\,\varphi$ est plurisousharmonique (en abrégé p.s.h.). De façon précise, nous choisirons φ dans la classe LP(X, Supp T) définie comme suit.

DÉFINITION 1. — *Soit* A *une partie de* X. *On dira qu'une fonction* φ *de classe* C^2 *sur* X *est dans la classe* $LP(X)$ [*resp.* $LP(X,A)$] *si*

(4) φ *est logarithmiquement p.s.h. au sens suivant : pour tout point* $x \in X$, *il existe un voisinage* U *de* x *dans* X, *un plongement* $j : U \to \Omega \subset \mathbf{C}^N$ *et une fonction* $\psi \geqslant 0$ *de classe* C^2 *sur* Ω, *prolongeant* φ (*i.e.* $\varphi|_U = \psi \circ j$), *dont le logarithme* $\operatorname{Log} \psi$ *est p.s.h.*

(5) *Il existe un nombre* $R = R(\varphi) > 0$ *tel que l'ensemble* $B(R)$ [*resp.* $A \cap B(R)$] *soit relativement compact dans* X.

On a dans ce contexte le théorème fondamental suivant, qui va nous permettre d'introduire une définition généralisée des nombres de Lelong.

THÉORÈME 3. — *Soient* $\varphi \in LP(X, \operatorname{Supp} T)$, $\beta = i\partial\bar{\partial}\varphi$, $\alpha = i\partial\bar{\partial} \operatorname{Log} \varphi$. *Alors pour tous réels* r_1, r_2 *tels que* $0 < r_1 < r_2 \leqslant R = R(\varphi)$, *on a*

$$(6) \qquad \frac{1}{r_2^p}\int_{B(r_2)} T \wedge \beta^p - \frac{1}{r_1^p}\int_{B(r_1)} T \wedge \beta^p = \int_{B(r_1,r_2)} T \wedge \alpha^p .$$

L'expression $\displaystyle\frac{1}{r^p}\int_{B(r)} T \wedge \beta^p$ *est fonction croissante de* r *sur l'intervalle* $]0,R]$.

DÉFINITION 2. — *On désignera par nombre de Lelong du courant* T *relativement au poids* φ *le réel positif ou nul*

$$\nu(T;\varphi) = \lim_{r>0,\, r\to 0} \frac{1}{(2\pi r)^p} \int_{\varphi(z)<r} T \wedge \beta^p .$$

Démonstration. — La formule (6) résulte aussitôt de la proposition 1 puisque $dT = 0$ et $i\partial\bar{\partial}T = i\partial dT = 0$. D'autre part, comme $\operatorname{Log}\varphi$ est p.s.h., φ est aussi p.s.h., donc les (1,1)-formes α et β sont positives. L'hypothèse que T est un courant faiblement positif entraîne

$$\int_{B(r_1,r_2)} T \wedge \alpha^p \geqslant 0, \qquad \frac{1}{r^p}\int_{B(r)} T \wedge \beta^p \geqslant 0,$$

ce qui achève de prouver toutes nos affirmations. □

Considérons le cas particulier où X est un voisinage de 0 dans $\mathbf{C}^n$, et posons $\varphi(z) = |z|^2 = |z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2$. β coïncide alors avec la métrique hermitienne naturelle de $\mathbf{C}^n$ (multipliée par le facteur 2), de sorte qu'on retrouve la définition classique, après remplacement de r par r^2 :

$$\nu(T;\varphi) = \lim_{r\to 0} \frac{1}{(2\pi)^p r^{2p}} \int_{|z|<r} T \wedge \beta^p = \lim_{r\to 0} \frac{\sigma(r)}{\dfrac{\pi^p}{p\,!} r^{2p}} = \nu(T;0),$$

où $\sigma = T \wedge \dfrac{\beta^p}{2^p p\,!}$ est la mesure trace de T, et où $\sigma(r) = \displaystyle\int_{|z|<r} d\sigma(z)$. Nous allons maintenant examiner quelques propriétés générales simples des nombres de Lelong $\nu(T;\varphi)$.

PROPOSITION 2. — *Soit* $\varphi \in LP(X; \operatorname{Supp} T)$ *et* k *un réel* > 0 *tel que* $\psi = \varphi^k$ *soit de classe* C^2 *(ce qui a lieu dès que* $k \geqslant 2$*). On pose* $\beta = i\partial\bar\partial\varphi$, $\gamma = i\partial\bar\partial\psi$. *Alors* $\psi \in LP(X, \operatorname{Supp} T)$ *et pour tout* $r \in]0,R(\varphi)]$ *on a :*

$$(7) \qquad \frac{1}{r^{kp}} \int_{\psi(z)<r^k} T \wedge \gamma^p = \frac{k^p}{r^p} \int_{\varphi(z)<r} T \wedge \beta^p.$$

De plus

$$(8) \qquad \nu(T;\varphi^k) = k^p \nu(T;\varphi).$$

Démonstration. — Il suffit évidemment d'établir l'égalité (7), et ce, pour $k \geqslant 2$. En effet si $k < 2$, on pourra appliquer deux fois la formule (7) en substituant à (φ,ψ) les couples (φ,φ^4) et (φ^k,φ^4).

Remplaçons maintenant φ par $\varphi_\varepsilon = \varphi + \varepsilon$, ψ par $\psi_\varepsilon = (\varphi+\varepsilon)^k$, où $k \geqslant 2$. Il vient

$$i\partial\bar\partial\psi_\varepsilon = ik(\varphi+\varepsilon)^{k-2}[(\varphi+\varepsilon)\partial\bar\partial\varphi + (k-1)\partial\varphi \wedge \bar\partial\varphi],$$

et $i\partial\bar\partial\psi_\varepsilon$ converge uniformément vers γ sur $B(r)$ quand $\varepsilon \to 0$, $\varepsilon > 0$. Le théorème de convergence dominée montre que l'égalité (7) passe à la limite. On peut donc finalement supposer que $\inf\limits_{z\in X} \varphi(z) > 0$. Appliquons alors la formule (6) du théorème 3 avec $r_2 = r$, $r_1 < \inf\limits_{z\in X} \varphi(z)$. On obtient

$$\frac{1}{r^p} \int_{\varphi(z)<r} T \wedge \beta^p = \int_{\varphi(z)<r} T \wedge \alpha^p,$$

$$\frac{1}{r^{kp}} \int_{\psi(z)<r^k} T \wedge \gamma^p = \int_{\psi(z)<r^k} T \wedge (i\partial\bar\partial \operatorname{Log} \psi)^p.$$

L'égalité (7) résulte de ce que $i\partial\bar\partial \operatorname{Log} \psi = k\alpha$. □

Il nous est maintenant facile de prouver l'invariance des nombres $\nu(T;\varphi)$ annoncée dans l'introduction.

THÉORÈME 4. — *Soient* φ, ψ *deux fonctions de* LP(X, Supp T), *et* ℓ *un réel* $\geqslant 0$ *tels que*

$$\liminf_{z \in \mathrm{Supp}\, T,\, \varphi(z) \to 0} \frac{\mathrm{Log}\, \psi(z)}{\mathrm{Log}\, \varphi(z)} \geqslant \ell .$$

Alors $\nu(T;\psi) \geqslant \ell^p \nu(T;\varphi)$.

En particulier si $\mathrm{Supp}\, T \cap \psi^{-1}(0) = \mathrm{Supp}\, T \cap \varphi^{-1}(0)$ *et si* $\mathrm{Log}\, \psi(z)$ *est équivalent à* $\ell\, \mathrm{Log}\, \varphi(z)$ *lorsque* $z \in \mathrm{Supp}\, T$ *et* $\varphi(z) \to 0$, *alors*

$$\nu(T;\psi) = \ell^p \nu(T,\varphi).$$

Démonstration. — Quitte à remplacer ψ par ψ^k et ℓ par $(k-1)\ell$ où k est un réel $\geqslant 2$ assez grand, la proposition 2 permet de supposer que

$$\liminf \frac{\mathrm{Log}\, \psi}{\mathrm{Log}\, \varphi} > \ell \geqslant 2 .$$

On a donc $\lim \dfrac{\psi(z)}{\varphi(z)^\ell} = 0$ quand $z \in \mathrm{Supp}\, T$ et $\varphi(z) \to 0$, de sorte que la fonction $\psi_\varepsilon = \psi + \varepsilon\varphi^\ell$ est équivalente à $\varepsilon\varphi^\ell$ pour tout $\varepsilon > 0$. Puisque $\ell \geqslant 2$, ψ_ε est de classe C^2 et appartient à LP(X; Supp T) comme somme de fonctions dont le logarithme est p.s.h. Posons $\beta = i\partial\bar\partial(\varphi^l)$, $\gamma = i\partial\bar\partial\psi$, $\gamma_\varepsilon = i\partial\bar\partial\psi_\varepsilon$ et soit r tel que $0 < r < R = R(\psi)$. Le théorème de convergence dominée montre que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{(2\pi r)^p} \int_{\psi_\varepsilon(z) < r} T \wedge \gamma_\varepsilon^p = \frac{1}{(2\pi r)^p} \int_{\psi(z) < r} T \wedge \gamma^p .$$

Il suffit donc de vérifier que pour tout $r < R$ et tout $\varepsilon > 0$ on a

$$\frac{1}{(2\pi r)^p} \int_{\psi_\varepsilon(z) < r} T \wedge \gamma_\varepsilon^p \geqslant \ell^p \nu(T;\varphi) = \nu(T;\varphi^\ell); \tag{9}$$

la dernière égalité résulte ici de la prop. 2. Comme $\psi_\varepsilon \in$ LP(X; Supp T) et comme $\psi_\varepsilon \sim \varepsilon\varphi^l$, le théorème 3 entraîne

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi r)^p} \int_{\psi_\varepsilon(z) < r} T \wedge \gamma_\varepsilon^p &\geqslant \lim_{\rho \to 0} \frac{1}{(2\pi\rho)^p} \int_{z \in \mathrm{Supp}\, T,\, \psi_\varepsilon(z) < \rho} T \wedge \gamma_\varepsilon^p \\ &= \lim_{\rho \to 0} \frac{1}{(2\pi\rho)^p} \int_{z \in \mathrm{Supp}\, T,\, \varphi^l(z) < \rho/\varepsilon} T \wedge \gamma_\varepsilon^p . \end{aligned}$$

Mais ψ est p.s.h., donc on a $\gamma_\varepsilon \geqslant \varepsilon\beta$ et

$$T \wedge \gamma_\varepsilon \geqslant \varepsilon^p T \wedge \beta^p$$

puisque T est positif. On obtient bien finalement la conclusion désirée (9) en substituant $\varepsilon\rho$ à ρ dans la limite. □

Le théorème 1, qui fait l'objet du prochain paragraphe, sera une conséquence simple du théorème 4.

2. Nombres de Lelong de l'image directe d'un courant positif fermé.

Soient X et Y deux espaces analytiques, $F : X \to Y$ un morphisme de X dans Y. Soit Y un courant faiblement positif fermé de bidimension (p,p) sur X, tel que la restriction à $\operatorname{Supp} T$ du morphisme F soit *propre.* On définit alors le courant image directe $F_* T$ par

$$\langle F_* T, v\rangle = \langle T, F^* v\rangle \tag{10}$$

pour toute forme $v \in \mathscr{D}^\infty_{p,p}(Y)$. Le support de $F_* T$ est contenu dans $F(\operatorname{Supp} T)$, et on démontre que $F_* T$ est un courant faiblement positif fermé de bidimension (p,p) sur Y.

Il existe entre les nombres de Lelong généralisés de T et de $F_* T$ un lien direct, exprimé par la proposition suivante.

Proposition 3. — *Étant donné une fonction* $\psi \in LP(Y, F(\operatorname{supp} T))$, *on pose* $\varphi = \psi \circ F$, $\beta = i\partial\bar\partial\varphi$, $\gamma = i\partial\bar\partial\psi$. *Alors* $\varphi \in LP(X, \operatorname{Supp} T)$ *et pour tout* $r < R(\psi)$ *on a*

$$\int_{\substack{z \in X \\ \varphi(z) < r}} T \wedge \beta^p = \int_{\substack{w \in Y \\ \psi(w) < r}} F_* T \wedge \gamma^p ; \tag{11}$$

de plus $\nu(F_* T ; \psi) = \nu(T ; \psi \circ F)$.

Démonstration. — Le fait que $\varphi \in LP(X ; \operatorname{Supp} T)$ résulte de l'hypothèse que la restriction à $\operatorname{Supp} T$ du morphisme F est propre. Pour établir (11), il suffit d'appliquer la relation (10) à une suite $v_\nu \in \mathscr{D}^\infty_{p,p}(\psi^{-1}([0,r[))$ convergeant ponctuellement vers γ^p dans $\psi^{-1}([0,r[)$. □

Si $x \in \mathrm{X}$, on désigne par $\mathcal{O}_{\mathrm{X},x}$ l'anneau local des germes de fonctions analytiques sur X au point x, et par $\mathcal{M}_{\mathrm{X},x}$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{\mathrm{X},x}$. Soit $g_1, g_2, \ldots, g_{\mathrm{N}}$ un système générateur de $\mathcal{M}_{\mathrm{X},x}$. Posons

$$\varphi = \sum_{\lambda=1}^{\mathrm{N}} |g_\lambda|^2 .$$

Il existe un voisinage ouvert U de x tel que $\varphi \in \mathrm{LP(U)}$ (cf. définition 1) et tel que $\mathrm{U} \cap \varphi^{-1}(0) = \{x\}$.

Définition 3. — *On appelle nombre de Lelong du courant* T *au point* x *le réel* $\geqslant 0$

$$\nu(\mathrm{T};x) = \nu(\mathrm{T}|_{\mathrm{U}};\varphi)$$

où $\mathrm{T}|_{\mathrm{U}}$ *est la restriction de* T *à* U.

Cette définition est cohérente, car le théorème 4 montre que $\nu(\mathrm{T};\varphi)$ ne dépend pas du choix des générateurs $g_1, g_2, \ldots, g_{\mathrm{N}}$ de $\mathcal{M}_{\mathrm{X},x}$. D'autre part, on retrouve bien la définition classique lorsque x est un point régulier de X (voir les remarques qui suivent la définition 2).

Proposition 4. — *Supposons que* X *soit un sous-espace fermé de* Y, *et soit* $j : \mathrm{X} \hookrightarrow \mathrm{Y}$ *l'inclusion. Alors pour tout* $x \in \mathrm{X}$, *on a*

$$\nu(\mathrm{T};x) = \nu(j_*\mathrm{T};j(x)).$$

Démonstration. — Immédiate grâce au théorème 4 : soient $g_1, g_2, \ldots, g_{\mathrm{N}}$ des générateurs de $\mathcal{M}_{\mathrm{Y},j(x)}$, $\psi = \sum_{\lambda=1}^{\mathrm{N}} |g_\lambda|^2 \in \mathrm{LP(V)}$ où $\mathrm{V} \subset \mathrm{Y}$ est un voisinage de $j(x)$ tel que $\psi^{-1}(0) = \{j(x)\}$, et soit $\mathrm{U} = \mathrm{X} \cap \mathrm{V}$. Alors

$$\nu(j_*\mathrm{T};j(x)) = \nu(j_*\mathrm{T}|_{\mathrm{V}};\psi) = \nu(\mathrm{T}|_{\mathrm{U}};\psi \circ j) = \nu(\mathrm{T};x),$$

car les germes $g_\lambda \circ j$ engendrent $\mathcal{M}_{\mathrm{X},x}$. □

En particulier, les nombres de Lelong sont invariants par isomorphisme analytique local. De plus, si $j : \mathrm{U} \to \Omega$ est un plongement d'un voisinage U de x dans un ouvert Ω de $\mathbf{C}^{\mathrm{N}}$, et si $\theta = j_*\mathrm{T}$ est le courant défini par (1), on obtient

$$\nu(\mathrm{T};x) = \nu(\theta;j(x));$$

on peut donc aussi définir les nombres de Lelong de T comme étant ceux de θ dans l'ouvert $\Omega \subset \mathbf{C}^N$.

Ces préliminaires étant établis, nous sommes maintenant prêts pour démontrer le théorème 1.

Démonstration du théorème 1. — On se donne un point $y \in Y$ tel que l'ensemble $A = \operatorname{Supp} T \cap F^{-1}(y)$ soit totalement discontinu. Cela signifie par définition que tout point $x \in A$ possède dans A un système fondamental de voisinages ouverts et fermés. Soient $h_1, h_2, \ldots, h_N$ des générateurs de l'idéal $\mathcal{M}_{Y,y}$ et V un voisinage de y dans Y tel que la fonction

$$\psi = \sum_{\lambda=1}^{N} |h_\lambda|^2$$

appartienne à LP(V) et tel que $V \cap \psi^{-1}(0) = \{y\}$. D'après la proposition 3, on a pour tout $r < R(\psi)$

$$\int_{\psi(w)<r} F_* T \wedge \gamma^p = \int_{\varphi(z)<r} T \wedge \beta^p \tag{12}$$

où $\varphi = \psi \circ F$, $\beta = i\partial\bar{\partial}\varphi$ et $\gamma = i\partial\bar{\partial}\psi$. Le théorème 1 sera prouvé si l'on montre que pour toute partie finie $\{x_1, \ldots, x_m\}$ de A et tout r assez petit, on a

$$\frac{1}{(2\pi r)^p} \int_{\varphi(z)<r} T \wedge \beta^p \geqslant \sum_{q=1}^{m} \nu(T; x_q). \tag{13}$$

Soit $(g_{q,\lambda})\lambda = 1, 2, \ldots, N_q$, un système de générateurs de l'idéal $\mathcal{M}_{X,x_q}$. Comme A est totalement discontinu, il existe des voisinages ouverts U_q de x_q dans X, deux à deux disjoints, tels que $A \cap U_q = A \cap \bar{U}_q$. On choisit de plus $\bar{U}_q$ compact et U_q assez petit pour que $(g_{q,\lambda})$ définisse un plongement de U_q; la fonction $\sum_\lambda |g_{q,\lambda}|^2$ appartient donc à $LP(U_q)$. De plus, la famille de parties compactes $\operatorname{Supp} T \cap \varphi^{-1}([0,r]) \cap \bar{U}_q$ est croissante en r, et admet pour intersection

$$\operatorname{Supp} T \cap \varphi^{-1}(0) \cap \bar{U}_q = \operatorname{Supp} T \cap F^{-1}(y) \cap \bar{U}_q = A \cap \bar{U}_q \subset U_q.$$

Il existe donc $r_0 > 0$ tel que

$$\operatorname{Supp} T \cap \varphi^{-1}([0,r_0]) \cap \bar{U}_q \subset U_q, \quad q = 1, 2, \ldots, m,$$

par conséquent $\varphi \in \mathrm{LP}(\mathrm{U}_q, \operatorname{Supp} \mathrm{T}|_{\mathrm{U}_q})$. Pour tout $r \leqslant r_0$ on obtient

$$(14) \qquad \int_{z \in \mathrm{X}, \varphi(z)<r} \mathrm{T} \wedge \beta^p \geqslant \sum_{q=1}^{m} \int_{z \in \mathrm{U}_q, \varphi(z)<r} \mathrm{T} \wedge \beta^p .$$

Comme $\varphi = \sum_{\lambda=1}^{\mathrm{N}} |h_\lambda \circ \mathrm{F}|^2$ où $h_\lambda \circ \mathrm{F} \in \mathscr{M}_{\mathrm{X},x_q}$, on a

$$\liminf_{z \to x_q} \frac{\operatorname{Log} \varphi(z)}{\operatorname{Log} \Sigma |g_{q,\lambda}(z)|^2} \geqslant 1 ,$$

et les théorèmes 3 et 4 montrent que

$$(15) \qquad \frac{1}{(2\pi r)^p} \int_{z \in \mathrm{U}_q, \varphi(z)<r} \mathrm{T} \wedge \beta^p \geqslant \nu(\mathrm{T}|_{\mathrm{U}_q};\varphi) \geqslant \nu(\mathrm{T};x_q);$$

(13) résulte donc de (14) et (15). □

Lorsque l'hypothèse de totale discontinuité de l'ensemble $\operatorname{Supp} \mathrm{T} \cap \mathrm{F}^{-1}(y)$ est supprimée, le théorème 1 devient trivialement faux.

Contre-exemple. — Soit $\mathrm{F} : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ un morphisme ayant une fibre $\mathrm{F}^{-1}(y)$ compacte et non discrète. Soit Z une composante irréductible de $\mathrm{F}^{-1}(y)$ de dimension > 0. On choisit pour T le courant d'intégration $[\mathrm{Z}]$ sur l'ensemble analytique Z. Alors $\mathrm{F}_*\mathrm{T} = \mathrm{F}_*[\mathrm{Z}] = 0$ par raison de dimension, bien que $\nu(\mathrm{T};x) \geqslant 1$ en tout point $x \in \mathrm{Z}$. □

Nous allons maintenant décrire une situation naturelle dans laquelle les nombres de Lelong généralisés seront des entiers.

PROPOSITION 5. — *Soit* (Z_q) *une famille localement finie de sous-variétés irréductibles de dimension* p *de* X, *et soit* $\mathrm{T} = \Sigma n_q[\mathrm{Z}_q]$ *un cycle analytique à coefficients entiers positifs. On se donne des applications holomorphes* $\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2, \ldots, \mathrm{F}_\mathrm{N}$ sur X *telles que*

$$\varphi = \sum_{\lambda=1}^{\mathrm{N}} |\mathrm{F}_\lambda|^2 \in \mathrm{LP}(\mathrm{X};\operatorname{Supp} \mathrm{T}).$$

Alors $\nu(\mathrm{T};\varphi)$ *est entier.*

Démonstration. — On peut se borner à considérer le cas $\mathrm{T} = [\mathrm{Z}]$, où Z est irréductible. Puisque $\varphi \in \mathrm{LP}(\mathrm{X};\operatorname{Supp}\mathrm{T})$, il existe un réel $\mathrm{R} > 0$ tel que $\mathrm{Z}_\mathrm{R} = \{z \in \mathrm{Z};\ \varphi(z) < \mathrm{R}\} \subset\subset \mathrm{X}$. Soit $\mathrm{F}_\mathrm{R} : \mathrm{Z}_\mathrm{R} \to \mathrm{B}$ la restriction à Z_R du morphisme $(F_1, F_2, \ldots, F_N)$, à valeurs dans la boule $B = \{w \in \mathbf{C}^N, |w|^2 < R\}$. F_R est donc une application propre, et on a

$$\nu(T;\varphi) = \nu(F_{R*}[Z_R];0)$$

d'après la proposition 3. Quitte à décomposer encore Z_R, on peut supposer Z_R irréductible. Deux cas peuvent alors se présenter.

a) F_R *est de rang* $< p$ *en tout point régulier de* Z_R.

Dans ce cas la mesure de Hausdorff $H_{2p}(F_R(Z_R))$ est nulle (théorème de Sard). Comme $\operatorname{Supp}(F_{R*}[Z_R]) \subset F_R(Z_R)$, le théorème du support pour les courants localement plats entraîne que

$$F_{R*}[Z_R] = 0$$

(cf. H. Federer [4], 4.1.15.).

b) F_R *est de rang maximum* p.

Puisque le morphisme F_R est propre, l'image $F_R(Z_R)$ est une sous-variété irréductible W de dimension p de B (théorème de R. Remmert [9], [10]); en outre $F_R : Z_R \to W$ est un revêtement ramifié à un nombre fini s de feuillets (voir par exemple R. Narasimhan [8]). Il en résulte que $F_{R*}[Z_R] = s[W]$, par suite

$$\nu(F_{R*}[Z_R];0) = s\nu([W];0),$$

et on sait que $\nu([W];0)$ est un entier (cf. R. Harvey [5]). □

3. Rôle des multiplicités du morphisme F.

On considère ici encore un morphisme $F : X \to Y$ et un (p,p)-courant positif fermé T sur X tel que la restriction de F au support de T soit propre.

Le théorème 5 ci-dessous généralise à la fois les théorèmes 1 et 2. Pour pouvoir donner un énoncé simple et intrinsèque, nous aurons besoin d'introduire la notion de p-multiplicité du morphisme F en un point $x \in X$.

DÉFINITION 4. — *Soient* $x \in X$, $y = F(x)$, *et* $j = (j_1, j_2, \ldots, j_N)$ *un système de générateurs de l'idéal* $\mathcal{M}_{Y,y}$; *posons* $F_\lambda = j_\lambda \circ F$. *On dira que*

F_λ s'annule au point x à l'ordre s_λ (s_λ entier $\geqslant 1$) si le germe $F_{\lambda,x}$ appartient à $\mathcal{M}_{X,x}^{s_\lambda}\backslash\mathcal{M}_{X,x}^{s_\lambda+1}$, et à l'ordre $s_\lambda = \infty$ si $F_{\lambda,x} = 0$. On note alors $\mu_p(F;x)$ la borne supérieure (éventuellement infinie) des entiers $s_1 s_2 \ldots s_p$ pour tout système $j = (j_\lambda)_{1\leqslant\lambda\leqslant N}$ de générateurs de $\mathcal{M}_{Y,y}$, tel que $N \geqslant p$ et $s_1 \leqslant s_2 \leqslant \ldots \leqslant s_N < \infty$.

Il est clair que $\mu_p(F;x) = \infty$ dès qu'il existe un plongement $j = (j_1, j_2, \ldots, j_N)$ d'un voisinage V du point $y = F(x) \in Y$ dans $\mathbf{C}^N$, tel que $N < p$, autrement dit si la dimension de Zariski de Y au point $y = F(x)$ est $< p$.

THÉORÈME 5. — *Soit $y \in Y$. On note $Z(y)$ l'ensemble des points $x \in F^{-1}(y)$ tels que $\nu(T;x) > 0$ et tels que la composante connexe de x dans $\operatorname{Supp} T \cap F^{-1}(y)$ soit réduite à $\{x\}$. Alors pour tout point $x \in Z(y)$ on a $\mu_p(F;x) < \infty$ et*

$$\nu(F_*T;y) \geqslant \sum_{x\in Z(y)} \mu_p(F;x)\nu(T;x).$$

Démonstration. — Il suffit de démontrer que pour toute partie finie $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ de $Z(y)$ on a

$$\nu(F_*T;y) \geqslant \sum_{q=1}^{m} \mu_p(F;x_q)\nu(T;x_q).$$

Comme $\operatorname{Supp} T \cap F^{-1}(y)$ est compact, les hypothèses entraînent que chaque point x_q admet dans $\operatorname{Supp} T \cap F^{-1}(y)$ un système fondamental de voisinages à la fois ouverts et fermés (cf. Bourbaki [2], chap. 2, § 4, n° 4, prop. 6). On peut alors répéter la démonstration du théorème 1 (cf. (12) et (14)) pour voir que

$$\int_{\psi(w)<r} F_*T \wedge \gamma^p = \int_{\varphi(z)<r} T \wedge \beta^p \geqslant \sum_{q=1}^{m} \int_{\substack{z\in U_q \\ \varphi(z)<r}} T \wedge \beta^p$$

(avec les mêmes notations). Il suffit donc de montrer que

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{(2\pi r)^p} \int_{\substack{z\in U_q \\ \varphi(z)<r}} T \wedge \beta^p \geqslant \mu_p(F;x_q)\nu(T;x_q),$$

ou encore (en supprimant l'indice q pour simplifier) :

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{(2\pi r)^p} \int_{\substack{z\in U \\ \varphi(z)<r}} T \wedge \beta \geqslant s_1 s_2 \ldots s_p \nu(T;x) \tag{16}$$

pour tout système $j = (j_1, j_2, \ldots, j_N)$ de générateurs de $\mathcal{M}_{Y,y}$ vérifiant les hypothèses de la définition 4 ($N \geqslant p$ et $s_1 \leqslant s_2 \leqslant \ldots \leqslant s_N < \infty$). Comme la limite (16) ne dépend que de la classe d'équivalence de $\varphi = \psi \circ F$ (théorème 4), on peut remplacer les générateurs (h_λ) de $\mathcal{M}_{Y,y}$ par $(j_\lambda)_{1 \leqslant \lambda \leqslant N}$, de sorte qu'on a maintenant

$$\psi = \sum_{\lambda=1}^{N} |j_\lambda|^2, \qquad \varphi = \sum_{\lambda=1}^{N} |F_\lambda|^2.$$

La famille croissante de compacts $\operatorname{Supp} T \cap \varphi^{-1}([0,r]) \cap \bar{U}$ a pour intersection $\operatorname{Supp} T \cap F^{-1}(0) \cap \bar{U} \subset U$, donc il existe $r_0 > 0$ tel que

$$\operatorname{Supp} T \cap \varphi^{-1}([0,r_0]) \cap \bar{U} \subset U.$$

Si l'on pose $U_0 = U \cap \varphi^{-1}([0,r_0[)$ et $B(r_0) = \{z \in \mathbf{C}^N ;\ |z|^2 < r_0\}$, on voit que l'application

$$\Phi = j \circ F = (F_1, F_2, \ldots, F_N) : U_0 \to B(r_0)$$

a une restriction au support de T qui est propre. En vertu de la proposition 3, l'inégalité (16) équivaut à

$$\nu(\Phi_* T ; 0) \geqslant s_1 s_2 \ldots s_p \nu(T ; x).$$

Posons $s = s_1 s_2 \ldots s_N$, $\sigma_\lambda = \dfrac{s}{s_\lambda}$ pour $1 \leqslant \lambda \leqslant N$, et soit

$$G : B(r_0) \to G(B(r_0))$$

l'application propre qui à $z = (z_1, z_2, \ldots, z_N)$ fait correspondre $G(z) = (z_1^{\sigma_1}, z_2^{\sigma_2}, \ldots, z_N^{\sigma_N})$. On observe que

$$G \circ \Phi = (F_1^{\sigma_1}, F_2^{\sigma_2}, \ldots, F_N^{\sigma_N})$$

et que $F_\lambda^{\sigma_\lambda} \in \mathcal{M}_{X,x}^{s_\lambda \sigma_\lambda} = \mathcal{M}_{X,x}^{s}$; le théorème 4 et la proposition 3 montrent aussitôt que

$$\nu(G_* \Phi_* T ; 0) \geqslant s^p \nu(T ; x).$$

Il nous suffira donc de montrer l'inégalité

$$\nu(G_* \Phi_* T ; 0) \leqslant \sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_p \nu(\Phi_* T ; 0).$$

Cette inégalité résultera de la proposition 6 ci-dessous, qui est intéressante par elle-même (poser $\theta = \Phi_* T$).

PROPOSITION 6. — *Soit* $\mathbf{B} \subset \mathbf{C}^N$ *une boule ouverte de centre* O, *et* θ *un courant positif fermé de bidimension* (p,p) *sur* $\mathbf{B}$. *Soit*

$$G : \mathbf{B} \to G(\mathbf{B})$$

l'application holomorphe (et propre) qui à tout $z = (z_1, z_2, \ldots, z_N)$ *associe*

$$G(z) = (z_1^{\sigma_1}, z_2^{\sigma_2}, \ldots, z_N^{\sigma_N}),$$

où $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_N$ *sont des entiers tels que* $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \ldots \geqslant \sigma_N \geqslant 1$. *Alors*

$$\nu(G_*\theta; 0) \leqslant \sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_p \nu(\theta; 0).$$

Avant de donner une preuve de la proposition 6, nous aurons besoin d'établir quelques résultats préliminaires. Si $a = (a_1, a_2, \ldots, a_N)$ est un N-uplet de nombres réels > 0, on note a^{-1} l'application de $\mathbf{C}^N$ dans $\mathbf{C}^N$ qui à $z = (z_1, z_2, \ldots, z_N)$ associe $\left(\frac{z_1}{a_1}, \frac{z_2}{a_2}, \ldots, \frac{z_N}{a_N}\right)$.

L'idée directrice de la démonstration est « d'aplatir » le courant θ le long des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{C}^N$ qui sont somme de p facteurs $\mathbf{C}$. Dans ce but, on remplacera θ par $a_*^{-1}\theta$ et on passera à la limite faible en faisant tendre convenablement a vers 0.

LEMME 1. — *Soit* T_k *une suite de* (p,p)*-courants (faiblement) positifs et fermés sur un espace analytique* X, *convergeant faiblement vers un courant* T_∞ *au sens de la dualité entre* $\mathcal{D}^0_{p,p}(X)$ *et* $(\mathcal{D}^0_{p,p}(X))'$. *Alors* T_∞ *est un* (p,p)*-courant faiblement positif, fermé. Soient* $\varphi \in LP(X)$ *et* $\beta = i\partial\bar{\partial}\varphi$. *On a quel que soit* $r \in]0, R(\varphi)[$

$$\int_{\varphi(z)<r} T_\infty \wedge \beta^p \leqslant \liminf_{k \to +\infty} \int_{\varphi(z)<r} T_k \wedge \beta^p$$
$$\leqslant \limsup_{k \to +\infty} \int_{\varphi(z)<r} T_k \wedge \beta^p \leqslant \int_{\varphi(z)\leqslant r} T_\infty \wedge \beta^p.$$

De plus $\nu(T_\infty; \varphi) \geqslant \limsup_{k \to +\infty} (T_k; \varphi)$.

Démonstration. — Les premières inégalités s'obtiennent en approximant la fonction caractéristique $\chi_{B(r)}$ de l'ensemble $B(r) = \{z \in X ; \varphi(z) < r\} \subset\subset X$ par des fonctions continues $\geqslant 0$ à support compact qui encadrent $\chi_{B(r)}$. D'autre part, il est clair que

$$\nu(T_\infty;\varphi) = \lim_{r\to 0} \frac{1}{(2\pi r)^p} \int_{\varphi(z)\leqslant r} T_\infty \wedge \beta^p, \text{ et que}$$

$$\frac{1}{(2\pi r)^p} \int_{\varphi(z)\leqslant r} T_\infty \wedge \beta^p \geqslant \limsup_{k\to+\infty} \frac{1}{(2\pi r)^p} \int_{\varphi(z)<r} T_k \wedge \beta^p$$

$$\geqslant \limsup_{k\to+\infty} \nu(T_k;\varphi). \qquad \square$$

Soit maintenant θ un (p,p)-courant positif fermé défini sur un voisinage de 0 dans $\mathbf{C}^N$.

LEMME 2. — *On suppose que pour une suite $a_k \to 0$ les courants $a_{k*}^{-1}\theta$ convergent faiblement vers un courant θ_0 sur $\mathbf{C}^N$. Alors θ_0 est tel que*

$$\nu(G_*\theta;0) \leqslant \nu(G_*\theta_0;0).$$

Démonstration. — L'énoncé a bien un sens puisque les courants $a_{k*}^{-1}\theta$ sont définis sur toute boule de $\mathbf{C}^N$ dès que k est assez grand. D'après la proposition 3 et le lemme 1 on a

$$\nu(G_*\theta_0,0) = \nu(\theta_0;|G|^2) \geqslant \limsup_{k\to+\infty} \nu(a_{k*}^{-1}\theta;\ |G|^2).$$

Comme la fonction $\operatorname{Log}|G\circ a_k^{-1}(z)|^2$ est équivalente à $\operatorname{Log}|G(z)|^2$ quand $z\to 0$, les théorèmes 3 et 4 montrent que

$$\nu(a_{k*}^{-1}\theta;|G|^2) = \nu(\theta;|G\circ a_k^{-1}|^2) = \nu(\theta;|G|^2) = \nu(G_*\theta;0)$$

pour tout indice k. $\square$

La première étape consistera à remplacer θ par son « cône tangent » θ_0.

LEMME 3. — *Il existe une suite (ρ_k) de nombres réels tendant vers 0 telle que la suite $\rho_{k*}^{-1}\theta$ converge faiblement vers un courant θ_0 sur $\mathbf{C}^N$ (ρ_k^{-1} étant l'homothétie de rapport $1/\rho_k$ dans $\mathbf{C}^N$). De plus, chacune des limites faibles θ_0 vérifie les conditions*

$$\nu(\theta_0;0) = \nu(\theta;0),$$

$$\theta_0 \wedge \alpha^p \equiv 0 \quad \text{sur} \quad \mathbf{C}^N\setminus\{0\},$$

où $\alpha = i\partial\bar\partial(\operatorname{Log}|z|^2)$.

Démonstration. — Étant donné deux réels positifs r et ρ (ρ suffisamment petit) et $\beta = i\partial\bar{\partial}|z|^2$, on a

$$(17) \qquad \frac{1}{(2\pi r)^p}\int_{|z|^2<r} \rho_*^{-1}\theta \wedge \beta^p = \frac{1}{(2\pi r\rho)^p}\int_{|z|^2<r\rho} \theta \wedge \beta^p .$$

Le théorème 3 montre que la famille $\rho_*^{-1}\theta$ est uniformément bornée sur tout compact pour la norme de la masse (lorsque ρ tend vers 0) ; on peut donc bien en extraire une limite faible $\theta_0 = \lim_{\rho_k\to 0} \rho_{k*}^{-1}\theta$. Il découle du lemme 1 et de (17) que pour tout $r > 0$

$$\frac{1}{(2\pi r)^p}\int_{|z|^2<r} \theta_0 \wedge \beta^p = \nu(\theta ; 0).$$

On a donc $\nu(\theta_0 ;0) = \nu(\theta ;0)$ et comme θ_0 est faiblement positif sur $\mathbf{C}^N$, la relation (6) du théorème 3 montre que

$$\theta_0 \wedge \alpha^p \equiv 0 \qquad \text{sur} \qquad \mathbf{C}^N\backslash\{0\} . \qquad \square$$

Pour établir la proposition 6, nous sommes donc ramenés à prouver que

$$\nu(G_*\theta_0 ; 0) \leqslant \sigma_1\sigma_2 \ldots \sigma_p \nu(\theta_0 ; 0),$$

ce qui se fera en « aplatissant » θ_0.

LEMME 4. — *Soit* θ_0 *un courant positif fermé sur* $\mathbf{C}^N$ *tel que* $\theta_0 \wedge \alpha^p \equiv 0$ *sur* $\mathbf{C}^N\backslash\{0\}$. *Alors pour toute suite* $a_k \to 0$, *on peut extraire de la suite des courants* $a_{k*}^{-1}\theta_0$ *une sous-suite convergeant faiblement. La limite* θ_1 *vérifie*

$$\nu(\theta_1 ; 0) = \nu(\theta_0 ; 0) \qquad \text{et} \qquad \theta_1 \wedge \alpha^p \equiv 0 \qquad \text{sur} \qquad \mathbf{C}^N\backslash\{0\} .$$

Démonstration. — Il est clair qu'il existe pour tout N-uplet $a = (a_1, a_2, \ldots, a_N)$ de réels > 0 une constante $C = C(a) \geqslant 1$ telle que

$$\frac{1}{C}\alpha \leqslant a^{-1*}\alpha \leqslant C\alpha ;$$

en effet, la forme $\alpha = i\partial\bar{\partial} \operatorname{Log}|z|^2$ est issue d'une forme définie > 0 sur $\mathbf{P}_{N-1}$ (qui est précisément la métrique kählérienne standard de $\mathbf{P}_{N-1}$). Comme $\theta_0 \geqslant 0$ il vient

$$(18) \qquad \begin{cases} \theta_0 \wedge a^{-1*}\alpha^p \equiv 0 \quad \text{sur} \quad \mathbf{C}^N\backslash\{0\}, \\ a_*^{-1}\theta_0 \wedge \alpha^p = a_*^{-1}(\theta_0 \wedge a^{-1*}\alpha^p) \equiv 0 . \end{cases}$$

D'après les théorèmes 3 et 4, on en déduit quel que soit $r > 0$:

$$\frac{1}{(2\pi r)^p}\int_{|z|^2<r} a_*^{-1}\theta_0 \wedge \beta^p = \nu(a_*^{-1}\theta_0;0) = \nu(\theta_0;0),$$

d'où la conclusion grâce au lemme 1. □

Démonstration de la proposition 6. — Pour tout N-uplet $\sigma = (\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_N)$ d'entiers positifs, et tout réel $\rho > 0$, soit $\rho^{-1/\sigma}$ l'application de $\mathbf{C}^N$ dans $\mathbf{C}^N$ qui à $z = (z_1,z_2,\ldots,z_N)$ associe $(\rho^{-1/\sigma_1}z_1, \rho^{-1/\sigma_2}z_2,\ldots,\rho^{-1/\sigma_N}z_N)$.

On ordonne les éléments de $(\mathbf{N}^*)^N$ en une suite $\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3, \ldots$, et on extrait successivement des suites faiblement convergentes

$$\theta_1 = \lim_{k\to+\infty} (\rho_k^{-1/\sigma^1})_*\theta_0, \ \theta_2 = \lim_{k\to+\infty} (\rho_k^{-1/\sigma^2})_*\theta_1, \ldots,$$

$$\theta_\infty = \lim_{k\to+\infty} \theta_{\nu_k}.$$

Les lemmes 2 et 4 montrent que

$$(19)\qquad \begin{cases} \nu(G_*\theta_0;0) \leqslant \nu(G_*\theta_k;0), \\ \nu(\theta_k;0) = \nu(\theta_0;0) \qquad \text{et} \qquad \theta_k \wedge \alpha^p \equiv 0. \end{cases}$$

De plus

$$\begin{aligned} G_{\nu *}\theta_\nu &= \lim_{k\to+\infty} (G_\nu \circ \rho_k^{-1/\sigma^\nu})_*\theta_{\nu-1} \\ &= \lim_{k\to+\infty} \rho_{k*}^{-1}(G_{\nu *}\theta_{\nu-1}), \end{aligned}$$

où G_ν est l'application G associée à $\sigma = \sigma^\nu$. Le lemme 3 entraîne que $(G_{\nu *}\theta_\nu) \wedge \alpha^p = G_{\nu *}(\theta_\nu \wedge G_\nu^*\alpha^p) \equiv 0$ sur $\mathbf{C}^N\backslash\{0\}$ et donc la mesure positive $\theta_\nu \wedge G_\nu^*\alpha^p$ est nulle elle aussi. En raisonnant comme pour (18) on en déduit que $a_*^{-1}\theta_\nu \wedge G_\nu^*\alpha^p \equiv 0$ pour tout N-uplet a, d'où $\theta_{\nu+1} \wedge G_\nu^*\alpha^p \equiv 0$, et plus généralement $\theta_k \wedge G_\nu^*\alpha^p \equiv 0$ lorsque $k \geqslant \nu$. Un dernier passage à la limite fournit (cf. 19))

$$(20)\qquad \begin{cases} \nu(G_*\theta_0;0) \leqslant \nu(G_*\theta_\infty;0), \\ \nu(\theta_\infty;0) = \nu(\theta_0;0), \end{cases}$$

$$(21)\qquad \theta_\infty \wedge G^*\alpha^p \equiv 0 \qquad \text{sur} \qquad \mathbf{C}^N\backslash\{0\},$$

pour toute application G associée à un N-uplet $\sigma = (\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_N)$ quelconque. Il en résulte (lemme 5 ci-dessous) que θ_∞ est une combinaison linéaire des courants d'intégration sur les plans vectoriels

$$\mathbf{C}_L = \mathbf{C}_{\ell_1} \oplus \mathbf{C}_{\ell_2} \oplus \ldots \oplus \mathbf{C}_{\ell_p} \subset \mathbf{C}^N$$

(somme des p facteurs $\mathbf{C}$ d'indices respectifs $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_p$) :

$$\theta_\infty = \sum_L \varepsilon_L[\mathbf{C}_L], \tag{22}$$

avec $L = \{\ell_1,\ell_2,\ldots,\ell_p\} \subset \{1, 2, \ldots, N\}$, $\varepsilon_L \geqslant 0$. On a donc

$$\nu(\theta_\infty ;0) = \sum_L \varepsilon_L,$$

et comme la restriction de G à $\mathbf{C}_L$ est un revêtement ramifié de $\mathbf{C}_L$ à $\sigma_{\ell_1}\sigma_{\ell_2}\ldots\sigma_{\ell_p}$ feuillets, on obtient

$$G_*[\mathbf{C}_1] = \sigma_{\ell_1}\sigma_{\ell_2}\ldots\sigma_{\ell_p}[\mathbf{C}_1],$$

$$\nu(G_*\theta_\infty ;0) = \sum_L \sigma_{\ell_1}\sigma_{\ell_2}\ldots\sigma_{\ell_p}\varepsilon_L.$$

Si l'on combine ces égalités avec (20), (21) et les lemmes 2-3, on trouve l'estimation de la proposition 6. □

Il ne nous reste plus qu'à établir l'existence de la décomposition (22); c'est l'objet du lemme 5 qui suit.

LEMME 5. — *Soit* θ *un* (p,p)*-courant faiblement positif et fermé dans* $\mathbf{C}^N$. *On suppose que* $\theta \wedge G^*\alpha^p \equiv 0$ *sur* $\mathbf{C}^N\setminus\{0\}$, *où* $\alpha = i\partial\bar\partial \operatorname{Log}|z|^2$, *pour toute application* $G(z) = (z_1^{\sigma_1}, z_2^{\sigma_2},\ldots, z_N^{\sigma_N})$ *associé à un* N*-uplet* $\sigma = (\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_N) \in (\mathbf{N}^*)^N$ *quelconque. Alors il existe des constantes réelles* $\varepsilon_L \geqslant 0$ *telles que*

$$\theta = \sum_{|L|=p} \varepsilon_L[\mathbf{C}_L].$$

Démonstration. — Grâce au théorème du support (cf. H. Federer [4] ou R. Harvey [5], théorème 1.7 et lemme 1.9), on peut se contenter de vérifier que

$$\operatorname{Supp}\theta \subset \bigcup_{|L|=p} \mathbf{C}_L.$$

Il suffira de montrer que le cône convexe engendré par les formes $G^*\alpha^p$ contient une (p,p)-forme fortement > 0 de $\Lambda^{p,p}T_z^*\mathbf{C}^N$ (i.e. une forme fortement minorée par $C(i\partial\bar{\partial}|\zeta|^2)^p$, $C > 0$) en tout point $z \notin \bigcup_{L} C_L$. Quitte à permuter les coordonnées et à appliquer un automorphisme a^{-1} (compte tenu que $\frac{1}{C}\alpha \leqslant a^{-1*}\alpha \leqslant C\alpha$), on peut supposer que $z = (1,\ldots,1,0,\ldots,0)$ est un N-uplet formé de q fois l'entier $1 (q > p)$ suivi de N-q zéros. Prenons $\sigma = (\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_q,1,\ldots,1)$ et posons :

$$\alpha_{q,\sigma} = i \sum_{\lambda=1}^{q} \sigma_\lambda^2\, dz_\lambda \wedge d\bar{z}_\lambda - \frac{i}{q} \sum_{\lambda=1}^{q} \sigma_\lambda\, dz_\lambda \wedge \sum_{\mu=1}^{q} \sigma_\mu\, d\bar{z}_\mu.$$

Un calcul élémentaire montre qu'on a au point z :

$$G^*\alpha = \frac{1}{q}\,(\alpha_{q,\sigma} + i \sum_{\lambda=q+1}^{N} dz_\lambda \wedge d\bar{z}_\lambda). \tag{23}$$

En élevant (23) à la puissance p, on voit que les formes $(G^*\alpha)^p$ engendreront une (p,p)-forme fortement > 0 si et seulement si les formes $\alpha_{q,\sigma}^m$ engendrent elles-mêmes un élément fortement > 0 de $\Lambda^{m,m}T^*\mathbf{C}^q$ pour tout $m \leqslant p < q$. En approximant les réels par des rationnels, on peut étendre l'ensemble des formes $\alpha_{q,\sigma}$ considérées à tous les q-uplets $(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_q)$ de réels $\geqslant 0$. En choisissant certains σ_λ nuls et en permutant les coordonnées on se ramène au cas $q = m + 1$ (car les conditions $q > m$ et $\sigma_{m+2} = \cdots = \sigma_q = 0$ entraînent $\alpha_{q,\sigma} \geqslant \alpha_{m+1,\sigma}$). Nous sommes donc réduits à montrer que les éléments $\alpha_{m+1,\sigma}^m$ engendrent une (m,m)-forme fortement > 0. La formule de Lagrange permet d'écrire

$$\alpha_{m+1,\sigma} = \frac{i}{m+1} \sum_{1 \leqslant \lambda < \mu \leqslant m+1} (\sigma_\lambda\, dz_\lambda - \sigma_\mu\, dz_\mu) \wedge (\sigma_\lambda\, d\bar{z}_\lambda - \sigma_\mu\, d\bar{z}_\mu).$$

Lorsque $\sigma_1\sigma_2 \ldots \sigma_{m+1} > 0$, on voit donc que la forme $\alpha_{m+1,\sigma}$, considérée comme forme hermitienne sur $\mathbf{C}^{m+1}$, est positive de rang m, et qu'elle admet pour noyau la droite complexe engendrée par le vecteur $1/\sigma = (1/\sigma_1, 1/\sigma_2,\ldots,1/\sigma_{m+1})$. Choisissons des $(m+1)$-uplets $\sigma^1, \sigma^2, \ldots, \sigma^{m+1}$ tels que les éléments $1/\sigma^1, 1/\sigma^2, \ldots, 1/\sigma^m$ constituent une base de $\mathbf{C}^{m+1}$. Il est clair que la (m,m)-forme

$$\sum_{k=1}^{m+1} (\alpha_{m+1,\sigma^k})^m$$

est un élément fortement > 0 de $\Lambda^{m,m}T^*\mathbf{C}^{m+1}$. □

La proposition 6 fournit dans un cas particulier une minoration des nombres de Lelong de l'image directe du courant T. Pour étendre cette minoration à une situation plus générale (comprenant le cas des morphismes à fibres finies) nous poserons la définition suivante.

Soient $x \in X$, $y = F(x) \in Y$ tels que x soit un point isolé de la fibre $F^{-1}(y)$. On se fixe un système générateur (g_λ) de $\mathcal{M}_{X,x}$ et on considère une famille d'éléments quelconques $(h_\lambda)_{1\leqslant\lambda\leqslant N}$ de $\mathcal{M}_{Y,y}$, telle que $N \geqslant p$.

DÉFINITION 5. — *La p-multiplicité supérieure du morphisme* F *au point* x, *notée* $\bar{\mu}_p(F;x)$, *est la borne inférieure des produits* $\sigma_1\sigma_2 \ldots \sigma_p$ *étendue aux familles* $(h_\lambda)_{1\leqslant\lambda\leqslant N}$ *d'éléments de* $\mathcal{M}_{Y,y}$ *et aux famille* $(\sigma_\lambda)_{1\leqslant\lambda\leqslant N}$ *de réels tels que*

$$\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \cdots \geqslant \sigma_N > 0,$$

$$\limsup_{z\to x} \frac{\operatorname{Log} \sum_{\lambda=1}^{N} |h_\lambda \circ F(z)|^{1/\sigma\lambda}}{\operatorname{Log} \sum_\lambda |g_\lambda(z)|} \leqslant 1. \tag{24}$$

Lorsque $(h_\lambda)_{1\leqslant\lambda\leqslant N}$ est un système générateur de $\mathcal{M}_{Y,y}$, l'inégalité de S. Lojasiewicz (voir B. Malgrange [7]) ou le théorème des zéros de Hilbert montrent qu'il existe une constante $\sigma > 0$ telle que

$$\sum_{\lambda=1}^{N} |h_\lambda \circ F(z)|^2 \geqslant \left(\sum |g_\lambda(z)|^2\right)^\sigma$$

au voisinage de x (en effet x est isolé dans $F^{-1}(F(x))$). Il existe donc bien des familles $(h_\lambda)_{1\leqslant\lambda\leqslant N}$, $(\sigma_\lambda)_{1\leqslant\lambda\leqslant N}$ vérifiant les hypothèses de la définition 5, de sorte que $\bar{\mu}_p(F;x) < \infty$, mais nous ignorons si $\bar{\mu}_p(F;x)$ est toujours un entier. D'autre part, on voit aisément que $\bar{\mu}_p(F;x) = 0$ si p excède la dimension du germe $\underline{X}_x$.

THÉORÈME 6. — *Soit* y *un point de* Y *tel que la fibre* $F^{-1}(y)$ *soit finie. Alors on a*

$$\nu(F_*T;y) \leqslant \sum_{x\in F^{-1}(y)} \bar{\mu}_p(F;x)\nu(T;x).$$

Démonstration. — En choisissant des voisinages 2 à 2 disjoints des points de la fibre $F^{-1}(y)$, et en tronquant X et Y, on se ramène au cas où $F^{-1}(y) = \{x\}$. Soient $(h_\lambda)_{1\leqslant\lambda\leqslant N}$, $(\sigma_\lambda)_{1\leqslant\lambda\leqslant N}$ deux familles vérifiant les hypothèses de la définition 5. On peut supposer (quitte à accroître N) que $(h_\lambda)_{1\leqslant\lambda\leqslant N}$ est un système générateur de $\mathcal{M}_{Y,y}$, de sorte que $h = (h_1,h_2,\ldots,h_N)$ est un plongement local de Y dans $\mathbf{C}^N$. Soient

$$\frac{s}{s_1}, \quad \frac{s}{s_2},\ldots, \frac{s}{s_N}$$

des approximations rationnelles de $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_N$ avec des entiers s, $s_1 \leqslant s_2 \leqslant \ldots \leqslant s_N$ tels que $\dfrac{s}{s_\lambda} \geqslant \sigma_\lambda$, et soit

$$G : Y \to \mathbf{C}^N$$

l'application qui à tout $w \in Y$ associe $(h_\lambda(w)^{s_\lambda})_{1\leqslant\lambda\leqslant N}$. Le théorème 5 montre que

$$\nu(G_*F_*T;0) \geqslant s_1 s_2 \ldots s_p \nu(F_*T;y).$$

Par ailleurs, le théorème 4 donne

$$\nu(T;x) = \nu(T;\sum_\lambda |g_\lambda|^2) \geqslant s^{-p}\nu(G_*F_*T;0),$$

car d'après l'hypothèse (24) on a

$$\liminf_{z\to x} \frac{\operatorname{Log}\sum_\lambda |g(z)|^2}{\operatorname{Log}|G\circ F(z)|^2} = \liminf_{z\to x} \frac{\operatorname{Log}\sum_\lambda |g_\lambda(z)|^2}{\operatorname{Log}\sum_\lambda |h_\lambda \circ F(z)|^{2s_\lambda}} \geqslant \frac{1}{s}.$$

Il vient donc :

$$\nu(F_*T;y) \leqslant \frac{s}{s_1}\cdot\frac{s}{s_2} \cdots \frac{s}{s_n}\nu(T;x).$$

Le théorème 6 s'obtient en passant à la limite dans les approximations rationnelles, puis en prenant la borne inférieure des produits $\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_p$. □

Les théorèmes 5 et 6 entraînent la conséquence suivante, qui ne paraît pas tout à fait claire *a priori*.

COROLLAIRE. — *Soit* $x \in X$ *tel que* x *soit un point isolé de la fibre* $F^{-1}(F(x))$. *Alors pour tout* $p \leqslant \dim \underline{X}_x$ *on a*

$$\mu_p(F\,;x) \leqslant \bar{\mu}_p(F\,;x).$$

Démonstration. — Il existe des voisinages U de x dans X et V de y dans Y, arbitrairement petits, tels que $F(U) \subset V$, $U \cap F^{-1}(y) = \{x\}$, et tels que la restriction $F_{|U} : U \to V$ soit propre (voir R. Narasimhan [8]). Soit Z un ensemble analytique de dimension p dans U, contenant le point x, et soit $T = [Z]$ le courant d'intégration sur Z. On sait que $\nu(T\,;x) \geqslant 1$, et on observe d'autre part que

$$\mu_p(F\,;x)\nu(T\,;x) \leqslant \nu(F_*T\,;y) \leqslant \bar{\mu}_p(F\,;x)\nu(T\,;x)$$

d'après les théorèmes 5 et 6. □

Pour terminer ce paragraphe, nous allons montrer qu'il n'est pas possible d'améliorer l'encadrement de $\nu(F_*T\,;x)$ fourni par les théorèmes 5 et 6.

Exemple. — Soit $F : \mathbf{C}^N \to \mathbf{C}^N$ l'application définie par

$$F(z_1,z_2,\ldots,z_N) = (z_1^{s_1}, z_2^{s_2},\ldots,z_N^{s_N})$$

avec des entiers $s_1 \leqslant s_2 \leqslant \ldots \leqslant s_N$. Pour tout multi-indice $L = \{\ell_1,\ell_2,\ldots,\ell_p\}$, on a comme on l'a vu

$$\nu([C_L]\,;0) = 1, \qquad \nu(F_*[C_1]\,;0) = s_{\ell_1}s_{\ell_2}\ldots s_{\ell_p}.$$

D'autre part, il est clair sur les définitions que

$$\mu_p(F\,;0) \geqslant s_1s_2\ldots s_p,\quad \bar{\mu}_p(F\,;0) \leqslant s_Ns_{N-1}\ldots s_{N-p+1} \quad \text{pour} \quad p \leqslant N,$$
$$\mu_p(F\,;0) = +\infty, \qquad \bar{\mu}_p(F\,;0) = 0 \qquad \text{pour} \qquad p > N.$$

On en déduit pour $p \leqslant N$:

$$\mu_p(F\,;0) = \nu(F_*[C_1\oplus C_2\oplus\ldots\oplus C_p]\,;0) = s_1s_2\ldots s_p,$$
$$\bar{\mu}_p(F\,;0) = \nu(F_*[C_{N-p+1}\oplus\ldots\oplus C_N]\,;0) = s_Ns_{N-1}\ldots s_{N-p+1}.$$

En choisissant pour T une combinaison linéaire des $[C_L]$, on voit que le rapport $\dfrac{\nu(F_*T\,;0)}{\nu(T\,;0)}$ est un réel quelconque compris entre $\mu_p(F\,;0)$ et $\bar{\mu}_p(F\,;0)$.

Enfin, même lorsque T est le courant d'intégration sur un germe irréductible en 0, le nombre rationnel $\dfrac{\nu(F_*T;0)}{\nu(T;0)}$ n'est pas nécessairement entier. Prenons par exemple $N = 2$, $s_1 = 1$, $s_2 = 2$, et soit Z la courbe d'équation $z_1^3 + z_2^4 = 0$. L'image $W = F(Z)$ a pour équation $w_1^3 + w_2^2 = 0$, de sorte qu'on a classiquement

$$\nu([Z];0) = 3, \qquad \nu([W];0) = 2.$$

Comme la restriction $F : Z \to W$ est un revêtement ramifié à 2 feuillets, on obtient

$$F_*[Z] = 2[W], \qquad \nu(F_*[Z];0) = 4,$$
$$\mu_1(F;0) = 1 < \frac{\nu(F_*[Z];0)}{\nu([Z];0)} = \frac{4}{3} < \bar{\mu}_1(F;0) = 2.$$

4. Théorie « duale » : degré d'un courant positif fermé.

Jusqu'à présent, nous avons étudié le comportement du courant positif fermé T au voisinage de tout point $x \in X$ (ou plus généralement sur la base de filtre des ensembles $\varphi^{-1}([0,r[)$, r tendant vers 0). Il est possible de développer une théorie entièrement analogue pour étudier le comportement du courant T à « l'infini », l'espace X étant supposé *non compact.* La classe des poids φ qui interviennent de manière naturelle est la classe $LP_\infty(X; \mathrm{Supp}\, T)$ ainsi définie.

DÉFINITION 6. — *Soit* A *une partie de* X. *On dira que* $\varphi \in LP_\infty(X;A)$ *si* φ *est une fonction* $\geqslant 0$ *de classe* C^2 *sur* X, *dont le logarithme est p.s.h., et exhaustive sur* A, *c'est-à-dire que pour tout réel* $r > 0$, $A \cap \varphi^{-1}([0,r[)$ *est relativement compact dans* X.

Si $\varphi \in LP_\infty(X; \mathrm{Supp}\, T)$, *on définit le degré du* (p,p)-*courant* T, *relativement à* φ, *comme la limite (finie ou infinie)*

$$\delta(T;\varphi) = \lim_{r\to+\infty}\uparrow \frac{1}{(2\pi r)^p}\int_{\varphi(z)<r} T \wedge (i\partial\bar\partial\varphi)^p.$$

Lorsque T est le courant d'intégration sur une hypersurface algébrique A de $\mathbf{C}^n$, et lorsque $\varphi(z) = |z|^2$, on vérifie que $\delta(T;\varphi)$ coïncide avec le degré de A.

Tous les principaux résultats des paragraphes 1, 2 et 3 (théorèmes 4, 5 et 6) admettent des énoncés duaux dans la présente situation. Le théorème 4 devient ainsi le

THÉORÈME 7. — *Soit* φ,ψ *deux éléments de* $\mathrm{LP}_\infty(\mathrm{X}\,;\mathrm{Supp}\,\mathrm{T})$, *tels que*

$$\liminf_{z\in\mathrm{Supp}\,\mathrm{T},z\to\infty}\frac{\mathrm{Log}\,\psi(z)}{\mathrm{Log}\,\varphi(z)}\geqslant\ell\geqslant 0\,.$$

Alors $\delta(\mathrm{T}\,;\psi)\geqslant\ell^p\delta(\mathrm{T}\,;\varphi)$.

Démonstration. — Tout à fait semblable à celle du théorème 4, en dehors d'une modification technique dans la construction de la fonction auxiliaire ψ_ε.

Il est clair que $\delta(\mathrm{T}\,;\varphi)=\delta(\mathrm{T}\,;\varphi+1)$, donc on peut supposer $\varphi\geqslant 1$, $\psi\geqslant 1$, et (de même que dans le théorème 4)

$$\liminf_{z\in\mathrm{Supp}\,\mathrm{T},z\to\infty}\frac{\mathrm{Log}\,\psi(z)}{\mathrm{Log}\,\varphi(z)}>\ell\geqslant 2\,. \tag{25}$$

Soit $\chi\geqslant 0$ une fonction de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$, à support dans l'intervalle $[1,2]$, telle que $\int_1^2\chi(t)\,\mathrm{d}t=1$. On pose

$$\psi_\varepsilon(z)=\int_1^2\sup\,(\varphi^\ell(z),\ \varepsilon t\psi(z))\chi(t)\,dt\,,\qquad \varepsilon>0\,.$$

Grâce au changement de variable $u=\varphi^\ell(z)-\varepsilon t\psi(z)$ on voit que

$$\psi_\varepsilon(z)=\varepsilon\psi(z)\int_1^2 t\chi(t)\,dt+\int_0^{+\infty}u\chi\left(\frac{\varphi^\ell(z)-u}{\varepsilon\psi(z)}\right)\frac{du}{\varepsilon\psi(z)},$$

donc ψ_ε est de classe C^2. Comme $\psi_\varepsilon\geqslant\varphi^\ell$ on en déduit que $\psi_\varepsilon\in\mathrm{LP}$ $(\mathrm{X}\,;\mathrm{Supp}\,\mathrm{T})$. Soit $r>0$ quelconque ; choisissons

$$\varepsilon<\frac{1}{2}\inf_{z\in\mathrm{Supp}\,\mathrm{T}\,\cap\varphi^{-1}([0,r[)}\frac{\varphi^\ell(z)}{\psi(z)}\,.$$

On a alors $\psi_\varepsilon(z)=\varphi^\ell(z)$ au voisinage de l'ensemble $\mathrm{Supp}\,\mathrm{T}\cap\varphi^{-1}([0,r[)$, d'où (proposition 2)

$$\frac{\ell^p}{(2\pi r)^p}\int_{\varphi(z)<r}\mathrm{T}\wedge(i\partial\bar\partial\varphi)^p=\frac{1}{(2\pi)^p r^{\ell p}}\int_{\psi_\varepsilon(z)<r^\ell}\mathrm{T}\wedge(i\partial\bar\partial\psi_\varepsilon)^p\leqslant\delta(\mathrm{T}\,;\psi_\varepsilon)\,.$$

Mais $\psi_\varepsilon(z) = C\varepsilon\psi(z)$ (avec $C = \int_1^2 t\chi(t)\,dt$) au voisinage de l'ensemble $\{z \in \operatorname{Supp} T\,;\, \varepsilon\psi(z) > \varphi'(z)\}$. Le complémentaire de cet ensemble dans $\operatorname{Supp} T$ est compact, en vertu de l'hypothèse (25), par suite $\delta(T\,;\psi_\varepsilon) = \delta(T\,;\psi)$. $\square$

On suppose désormais que T est un courant faiblement positif et fermé, de bidimension (p,p) sur $\mathbf{C}^n$. On définit le degré de T par

$$\delta(T) = \delta(T\,;|z|^2) = \lim_{r \to +\infty}\uparrow \frac{1}{(2\pi)^p r^{2p}} \int_{|z|<r} T \wedge (i\partial\bar{\partial}|z|^2)^p.$$

Grâce au théorème 7, le nombre $\delta(T)$ ne dépend que de la structure d'espace affine de $\mathbf{C}^n$ (mais pas de sa structure d'espace vectoriel hermitien). On obtient alors le résultat suivant, avec une démonstration presque identique à celle du théorème 5, mais plus simple techniquement.

THÉORÈME 8. — *Soit* $Q = (Q_1,Q_2,\ldots,Q_N)$ *un morphisme de* $\mathbf{C}^n$ *dans* $\mathbf{C}^N$, *où* Q_λ *est un polynôme de degré* d_λ, *avec* $d_1 \geqslant d_2 \geqslant \ldots \geqslant d_N$. *On suppose que la restriction de* Q *à* $\operatorname{Supp} T$ *est propre. Alors si* $T \neq 0$, *on a* $N \geqslant p$ *et*

$$\delta(Q_* T) \leqslant d_1 d_2 \ldots d_p\, \delta(T).$$

Il est possible de transcrire de même le théorème 6.

THÉORÈME 9. — *Soit* $Q = (Q_1,Q_2,\ldots,Q_N)$ *un morphisme propre de* $\mathbf{C}^n$ *dans* $\mathbf{C}^N$ $(N \geqslant n)$. *On définit le réel* $\eta_p(Q)$ *comme la borne supérieure des produits* $\delta_1\delta_2 \ldots \delta_p$ *pour tous les* N-*uplets* $(\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_N) \in \mathbf{R}^N$ *tels que*

$$0 < \delta_1 \leqslant \delta_2 \leqslant \ldots \leqslant \delta_N \quad \text{et} \quad \liminf_{z \to \infty} \frac{\operatorname{Log} \sum_{\lambda=1} |Q_\lambda(z)|^{1/\delta_\lambda}}{\operatorname{Log} |z|} \geqslant 1.$$

Alors $\delta(Q_* T) \geqslant \eta_p(Q)\, \delta(T)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] E. BOMBIERI, Algebraic values of meromorphic maps, *Inventiones Math.*, t. 10 (1970), 267-287 et t. 11 (1970), 163-166.

[2] N. BOURBAKI, *Éléments de Mathématiques;* Topologie générale: Chap. 1 à 4, nouvelle édition, Paris, Hermann, 1971.

[3] J.-P. DEMAILLY, Formules de Jensen en plusieurs variables et applications arithmétiques; soumis au *Bulletin de la Société Mathématique de France.*

[4] H. FEDERER, *Geometric Measure Theory*, Springer Verlag, Band 153, Berlin, Heidelberg, New-York, 1969.

[5] R. HARVEY, Holomorphic chains and their boundaries, *Proceedings of Symposia in pure Mathematics of the Amer. Math. Soc.*, held at Williamstown, Vol. 30, Part 1, p. 309-382.

[6] P. LELONG, *Fonctions plurisousharmoniques et formes différentielles positives*, Gordon and Breach, New-York, et Dunod, Paris, 1969.

[7] B. MALGRANGE, Séminaire Schwartz; 4e année 1959-1960, Unicité du problème de Cauchy, Division des distributions, exposé 22.

[8] R. NARASIMHAN, Introduction to analytic spaces, *Lecture Notes in Math., n° 25*, Springer Verlag, 1966.

[9] R. REMMERT, Projectionen analytischer Mengen, *Math. Annalen*, 130 (1956), 410-441.

[10] R. REMMERT, Holomorphe und meromorphe Abbildungen komplexer Raüme, *Math. Annalen*, 133 (1957), 328-370.

[11] Y. T. SIU, Analyticity of sets associated to Lelong numbers and the extension of closed positive currents, *Inventiones Math.*, t. 27 (1974), 53-156.

Manuscrit reçu le 2 juillet 1981.

Jean-Pierre DEMAILLY,
Université de Paris VI
Analyse Complexe et Géométrie
4, place Jussieu
(Tour 45-46, 5e étage)
75230 Paris Cedex 05.