ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

FRANÇOIS TRÈVES

Opérateurs différentiels hypoelliptiques

Annales de l'institut Fourier, tome 9 (1959), p. 1-73

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1959__9__1_0>

OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS HYPOELLIPTIQUES

par François TRÈVES

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

On dit qu'un opérateur différentiel ([1]) P, défini sur une variété indéfiniment différentiable V, est *hypoelliptique* (dans V) si toute distribution T sur V est une fonction indéfiniment différentiable dans tout ouvert de V où il en est ainsi de PT. Dans le chapitre III du présent article se trouvent énoncés et démontrées des conditions suffisantes d'hypoellipticité.

Jusqu'à une date récente, les démonstrations d'hypoellipticité étaient limitées aux catégories classiques : preuves de la « régularité à l'intérieur » des solutions, « faibles » ou « fortes », des équations elliptiques ou paraboliques ([2]). Mais la très belle caractérisation, par M. L. Hörmander, des opérateurs différentiels hypoelliptiques à coefficients constants dans R^n, a conduit naturellement à envisager la possibilité de résultats généraux. Guidés par ce genre de préoccupation, MM. Hörmander et Malgrange ont démontré, à l'aide de méthodes différentes, le même critère d'hypoellipticité. Les conditions suffisantes qu'ils établissent ([3]) englobent le cas elliptique, le cas p-parabolique (au sens de Pétrowski) et celui des opérateurs hypoelliptiques à coefficients constants. Y échappent certains systèmes différentiels, comme l'a remarqué L. Hörmander ([4]). Nous-mêmes exhibons ici (proposition 3. 4) *une* équation hypoelliptique qui ne remplit pas les conditions de

([1]) Par opérateur différentiel sur la variété V, il faut entendre ici une application linéaire continue de l'espace $\mathfrak{D}(V)$ des fonctions C^∞ dans V, à support compact, dans lui-même [$\mathfrak{D}(V)$ est muni de la topologie de Schwartz], application qui diminue le support; cette définition correspond au fait que P est à coefficients indéfiniment différentiables dans tout système de coordonnées locales.

([2]) En ce qui concerne la régularité à l'intérieur des solutions faibles, dans le cas elliptique ou parabolique, on pourra consulter Lax [1], Mizohata ([1], [2]), Schwartz ([6], [7]).

([3]) M. F. E. Browder a démontré, dans Browder [1], des conditions suffisantes plus restrictives.

([4]) Ces systèmes ont été exhibés par A. Douglis et L. Nirenberg (*Comm. pures and appl. Math.*, t. 8, 1955, p. 503).

Hörmander et Malgrange, et qu'aucun changement de coordonnées ne peut amener à les remplir.

Comme les travaux précédents, le nôtre a sa source dans la caractérisation des opérateurs hypoelliptiques à coefficients constants. Pour établir le critère d'hypoellipticité du chapitre III, nous avons adapté la méthode par laquelle M. S. Mizohata a prouvé l'hypoellipticité des opérateurs elliptiques et paraboliques (Mizohata [1], [2]). Cette adaptation entraîne des modifications qui, sans être révolutionnaires, nous ont semblé mériter une publication. Ceci s'ajoute au fait, que le critère d'hypoellipticité que nous obtenons est strictement plus large que celui de Hörmander et Malgrange.

L'un des caractères spécifiques, et sans doute un inconvénient, de la voie que nous avons choisie, réside en l'usage systématique des solutions élémentaires. Cela nous a poussés à étudier les polynômes différentiels $P(\nu, D_x)$ sur R^n, dont les coefficients (constants par rapport à la variable x de R^n) sont des fonctions indéfiniment différentiables du point ν d'une variété V. Cette étude occupe tout le chapitre II. Le résultat principal en a été déjà énoncé, avec une précision moindre, dans Trèves [1] (théorème 2). Nous en publions ici la démonstration complète, qui n'est d'ailleurs que l'adaptation naturelle d'un raisonnement de M. L. Hörmander ([1], preuve du théorème 3. 4). Voici, *grosso modo*, quel est ce résultat. Faisons les hypothèses suivantes :

A) $P(\nu, D)$ est hypoelliptique pour tout $\nu \in V$.

B) Quels que soient les points ν_1 et ν_2 de V, $P(\nu_1, D)$ et $P(\nu_2, D)$ sont équivalents (au sens d'Hörmander; voir notre déf. 2. 1).

Il existe alors une solution élémentaire $E(x, \nu)$ de $P(\nu, D)$ qui a les propriétés suivantes :

C) Pour toute fonction $\alpha(x)$ indéfiniment dérivable, à support compact contenu dans le complémentaire de l'origine, $\alpha(x)E(x, \nu)$ est une fonction C^∞ de (x, ν) (dans $R^n \times V$).

D) L'opérateur de convolution (en x) $E(x, \nu) *$ est une fonction C^∞ de ν, dans V, à valeurs dans l'espace des applications linéaires continues de L^2_c dans L^2_{loc} (espace muni de la topologie de la convergence uniforme sur les bornés de L^2_c).

Par L^2_c nous entendons l'espace des fonctions de carré sommable à support compact; par L^2_{loc}, l'espace des fonctions localement de carré sommable.

La nouveauté de l'étude du chapitre II réside en ce que le problème de la réciproque du résultat précédent s'y trouve pratiquement résolu. Ce problème peut se concevoir ainsi : en faisant, bien entendu, l'hypothèse que la variété V est connexe, est-ce que les propriétés (C) et (D) entrainent (A) et (B)? Un exemple très simple (un opérateur différentiel du second ordre sur la droite réelle, dépendant d'un paramètre réel) montre qu'il n'en est rien sans hypothèse supplémentaire. Ce même exemple suggère d'ailleurs l'hypothèse convenable, qu'on peut énoncer de la façon suivante : toute combinaison linéaire des coefficients de $P(\nu, D)$ ayant un zéro d'ordre infini en un point de V doit être partout nulle dans V. La démonstration du fait que, moyennant cette condition, les deux conjonctions (A) & (B) et (C) & (D) sont équivalentes, occupe presque entièrement la deuxième partie du chapitre II. En dehors de cette condition, tout devient possible, comme on s'en convainc en étudiant l'exemple mentionné, et c'est dans ce sens que notre résultat (théorème 2. 2) constitue un optimum.

L'auteur tient à remercier MM. HORMANDER, MALGRANGE, MIZOHATA et SCHWARTZ pour les enseignements qu'il a pu tirer de leurs travaux et de leur conversation.

NOTATIONS

Les opérateurs différentiels, les fonctions, les distributions, etc., seront définis dans R^n, dont la variable sera le plus souvent notée $x = (x_1, ..., x_n)$. La transformée de Fourier sera supposée opérer ainsi

$$\hat{f}(y) = \int f(x) \exp(-2i\pi \langle x, y \rangle)\, dx$$

par exemple pour $f(x)$ continue à support compact;

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n;$$

x sera systématiquement la variable coté objet, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ la variable coté image; la distance euclidienne dans R^n sera notée $|x|$, $|y|$, etc.

Nous désignerons par N l'ensemble des entiers $\geqslant 0$, par N^n celui des systèmes $(p_1, \ldots p_n)$ de n tels entiers; N et N^n sont munis de la loi additive usuelle et $p \in N^n$, $p = 0$, signifie

$p_1 = p_2 = \cdots = p_n = 0$. Comme c'est la coutume, nous écrirons $|p|$ pour $p_1 + \cdots + p_n$, $p!$ pour $p_1! \ldots p_n!$, z^p ($z \in \mathrm{C}^n$) pour $z_1^{p_1} \ldots z_n^{p_n}$, etc.

Un polynôme différentiel P(D) est un opérateur différentiel sur R^n à coefficients constants, obtenu en substituant, dans un polynôme P(X) à n indéterminées $X_1, \ldots, X_n$ et à coefficients complexes, la dérivation $\dfrac{1}{2i\pi}\dfrac{\partial}{\partial x_j}$ à l'indéterminée X_j pour chaque $j = 1, \ldots, n$. Conformément à cette règle, D^p désignera le monôme de dérivation $\left(\dfrac{1}{2i\pi}\dfrac{\partial}{\partial x_n}\right)^{p_n} \cdots \left(\dfrac{1}{2i\pi}\dfrac{\partial}{\partial x_n}\right)^{p_n}$; et $P^{(p)}(D)$ sera l'opérateur associé au polynôme

$$\left(\frac{\partial}{\partial X_1}\right)^{p_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial X_n}\right)^{p_n} P(X).$$

En ce qui concerne les espaces de fonctions ou de distributions, nous nous conformerons aux définitions et notations de L. SCHWARTZ. Pour les distributions scalaires (voir SCHWARTZ [1]), bornons-nous à signaler que si Ω est une variété C^∞, $\mathcal{D}(\Omega)$ est l'espace des fonctions indéfiniment différentiables dans Ω, à support compact, $\mathcal{E}(\Omega)$ celui des fonctions indéfiniment différentiables à support quelconque, $\mathcal{D}'(\Omega)$ est l'espace des distributions (ou, si l'on préfère, des courants de degré 0) sur Ω, $\mathcal{E}'(\Omega)$ celui des distributions sur Ω à support compact. Nous ne mentionnerons pas Ω lorsque $\Omega = \mathrm{R}^n$; ainsi $\mathcal{S}$ sera l'espace des fonctions indéfiniment dérivables dans R^n, à décroissance rapide à l'infini, $\mathcal{S}'$, celui des distributions tempérées sur R^n. Tous ces espaces seront munis des topologies que leur a assignées Schwartz.

Une remarque en passant : on sait que la transformation de Fourier définit un isomorphisme vectoriel topologique de $\mathcal{S}'_x$ sur $\mathcal{S}'_y$; l'image de $T(x) \in \mathcal{S}'_x$ par cet isomorphisme sera notée $\hat{T}(y)$.

Nous utiliserons la notation fonctionnelle pour les distributions (5) : nous écrirons par exemple $T(x) \in \mathcal{D}'_x$ et la dualité entre $\mathcal{D}_x$ et $\mathcal{D}'_x$ sera exprimée par l' « intégrale » $\int T(x)\,\varphi(x)\,dx$ ($T \in \mathcal{D}'$, $\varphi \in \mathcal{D}$).

(5) Exception faite parfois de la mesure de Dirac à l'origine, qui sera tantôt notée δ_x, tantôt $\delta(x)$, et quelques fois δ tout court.

Nous ferons intervenir aussi des fonctions et des distributions à valeurs vectorielles, c'est-à-dire à valeurs dans un espace vectoriel topologique. Sur ce sujet, le lecteur pourra se reporter à Schwartz [3] et [4] (ou à Schwartz [2]). Si E est un espace vectoriel topologique et $\mathcal{H}(\Omega)$ un espace de fonctions ou de distributions dans la variété Ω, on peut, dans certains cas, définir un espace $(\mathcal{H}(\Omega))(E)$ de fonctions ou de distributions à valeurs dans E qui soit la généralisation du cas scalaire $\mathcal{H}(\Omega)$. Par exemple, $(\mathcal{E}(\Omega))(E)$ désignera l'espace des fonctions indéfiniment différentiables dans Ω, à valeurs dans E; $(\mathcal{D}'(\Omega))(E)$ sera (par définition) l'espace des applications linéaires continues de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans E (pour ceci, on suppose que E est localement convexe séparé quasi-complet), etc...

Nous utiliserons souvent la notation suivante : si E et F sont deux espaces vectoriels topologiques, $L_b(E; F)$ désignera l'espace des applications linéaires continues de E dans F, muni de la topologie de la convergence uniforme sur les ensembles bornés de F.

CHAPITRE I

DE CERTAINS ESPACES FONCTIONNELS

§ 1. — Espaces A^s, A^s_c, A^s_{loc}.

Définition 1. 1. — *Soit s un nombre réel quelconque. Nous désignerons par A^s l'espace des distributions tempérées $T(x)$ sur R^n, dont la transformée de Fourier $\hat{T}(y)$ est une fonction telle que $(1 + |y|^2)^{s/2}\,\hat{T}(y) \in L^\infty_y$.*

Nous munirons A^s de la norme $N_s(f) = \|(1 + |y|^2)^{s/2}\,\hat{f}(y)\|_{L^\infty}$ qui en fait un espace de Banach (non réflexif !). Si $s' \leqslant s$, on a les plongements continus $\mathcal{S} \subset A^s \subset A^{s'} \subset \mathcal{S}'$; A^s est dense dans $\mathcal{S}'$ mais $\mathcal{S}$ ne l'est pas dans A^s. En particulier, le dual de A^s n'est, pour aucun s, un espace de distributions.

Si $P(D)$ est un polynôme différentiel d'ordre m, $P(D)\delta \in A^{-m}$; en particulier, $\delta \in A^0$.

Soient deux nombres réels s, t; on peut définir la convolution $S * T$ d'un élément S de A^s et d'un élément T de A^t comme étant la transformée de Fourier réciproque du produit $\hat{S}(y)\,\hat{T}(y)$. Le résultat suivant est évident :

Proposition 1. 1. — *$(f, g) \to f * g$ est une application bilinéaire continue de $A^s \times A^t$ dans A^{s+t}.*

Corollaire 1. — *Soit $P(D)$ un opérateur différentiel d'ordre m, à coefficients constants; $f \to P(D)\,f$ est une application linéaire continue de A^s dans A^{s-m}.*

Soient $f \in A^s$, $g \in A^{|s|+n+1}$; posons :

$$\hat{f} * \hat{g}(y) = \int (1 + |u|^2)^{s/2}\hat{f}(u)\,(1 + |y - u|^2)^{(n+1)/2}$$
$$(1 + |u|^2)^{-s/2}\hat{g}(y - u)\,(1 + |y - u|^2)^{-(n+1)/2}\,du,$$

intégrale qui a un sens, car il existe $C_s < +\infty$ tel que, pour tous u, $y \in R^n$,

$$(1+|u|^2)^{-s/2} \leqslant C_s(1+|y|^2)^{-s/2}(1+|y-u|^2)^{|s|/2},$$

d'où résulte aussi :

$$(1+|y|^2)^{s/2}|\hat{f}*\hat{g}(y)| \leqslant C_s \int (1+|y-u|^2)^{-(n+1)/2}\,du \times N_s(f) \times N_{|s|+n+1}(g).$$

La transformée de Fourier réciproque de $\hat{f}*\hat{g}(y)$ sera, par définition, le produit multiplicatif fg de f et de g. Nous avons prouvé :

Proposition 1. 2. — *$(f, g) \to fg$ est une application bilinéaire continue de* $A^s \times A^{|s|+n+1}$ *dans* A^s.

Comme $\mathcal{S}$ est plongé continûment dans $A^{|s|+n+1}$ quel que soit s, on a :

Corollaire 1. — *$(f, \varphi) \to f\varphi$ est une application bilinéaire continue de* $A^s \times \mathcal{S}$ *dans* A^s.

Définition 1. 2. — *Nous appellerons* A^∞ *l'intersection de tous les espaces* A^s *(s parcourant* R) *et* A *leur réunion.*

Proposition 1. 3. — *Pour toute $g \in A^\infty$, $f \to gf$ est une application linéaire continue de* A^s *dans lui-même.*

Notons, avec Schwartz ([1], t. II, p. 55) $\mathcal{D}_{L^p}$ l'espace des fonctions indéfiniment dérivables dont toutes les dérivées appartiennent à L^p.

Proposition 1. 4. — $\mathcal{D}_{L^1} \subset A^\infty \subset \mathcal{D}_{L^2}$.

Les inclusions n'ont ici qu'une signification vectorielle, pour la bonne raison que nous n'avons pas défini de topologie sur A^∞.

D'abord, $A^\infty \subset \mathcal{D}_{L^2}$. En effet, les éléments de A^∞ sont manifestement indéfiniment dérivables; d'autre part, A^∞ est stable par dérivation (comme il résulte du corollaire 1 de la proposition 1. 1). Il suffit donc de prouver que $A^\infty \subset L^2$. Mais si $f \in A^\infty$, il est visible que $\hat{f} \in L^2$, d'où le résultat.

Enfin, $\mathcal{D}_{L^1} \subset A^\infty$; car soit $f \in \mathcal{D}_{L^1}$. Quel que soit l'entier $k \geqslant 0$, $\left(1-\frac{\Delta}{4\pi^2}\right)^k f \in L^1$ et donc sa transformée de Fourier, qui est $(1+|y|^2)^k \hat{f}(y)$, appartient à L^∞, d'où le résultat.

La proposition 1. 1 montre que la convolution définit sur A une structure d'algèbre commutative, avec unité (la mesure de Dirac δ). Le réel s définit une sorte de filtration décroissante sur A (i.e. $A^s \subset A^{s'}$ si $s' \leqslant s$ et $A^s * A^t \subset A^{s+t}$). Pour $k \geqslant 0$, les A^k sont donc des sous-algèbres de A; parmi celles-ci, la seule qui soit unitaire est A^0. L'intersection A^∞ des A^s est un idéal de A.

La proposition 1. 2. montre que la multiplication est une loi de composition partiellement définie sur A; elle est partout définie sur A^∞. Dans A^∞, il n'y a d'élément unité, ni pour la multiplication, ni pour la convolution.

Définition 1. 3. — *Soit* F *un fermé de* R^n. *Nous désignerons par* A^s_F *le sous-espace de* A^s *formé des* f *qui ont leur support dans* F.

A^s_F sera muni de la topologie induite par A^s; A^s_F est un espace de Banach.

Définition 1. 4. — *Nous désignerons par* A^s_c *la limite inductive (au sens vectoriel-topologique) des espaces* A^s_K, K *parcourant la famille de tous les compacts de* R^n.

A^s_c est une limite inductive dénombrable stricte d'espaces de Banach; c'est donc un espace $\mathcal{LF}$ (non réflexif !). Si $s' \leqslant s$, on a les plongements continus: $\mathcal{D} \subset A^s_c \subset A^{s'}_c \subset \mathcal{E}'$.

Proposition 1. 5. — *L'intersection des espaces* A^s_c *est identique à* $\mathcal{D}$; *leur réunion est identique à* $\mathcal{E}'$.

Si f appartient à l'intersection des A^s_c, f est à support compact, et indéfiniment dérivable d'après la proposition 1. 4.

Soit maintenant $T \in \mathcal{E}'$; d'après le théorème XXVI de Schwartz [1], t. I (1re édition, p. 90), il existe r n-uplets $p \in N^n$ et r fonctions continues à support compact g_p tels que $T = \Sigma D^p g_p$. Il suffit de prouver qu'un terme de la forme $D^p g_p$ appartient à la réunion des A^s. Or $g_p \in L^1$, donc $\hat{g}_p(y) \in L^\infty$ et par conséquent, $(1 + |y|^2)^{-|p|/2}(2i\pi y)^p \hat{g}_p(y) \in L^\infty$ ce qui prouve que $D^p g_p \in A^{-|p|}$.

Définition 1. 5. — *Nous désignerons par* A^s_{loc} *l'espace vectoriel des distributions* $f(x)$ *sur* R^n *telles que, pour tout* $\alpha \in \mathcal{D}$, $\alpha f \in A^s$.

Nous munirons A^s_{loc} de la topologie la moins fine rendant continues toutes les applications $f \to \alpha f$ de A^s_{loc} dans A^s_c (α parcourant $\mathcal{D}$). Alors A^s_{loc} est un espace de Fréchet (non réflexif). Si $s' \leqslant s$, on a les plongements continus : $\mathcal{E} \subset A^s_{loc} \subset A^{s'}_{loc} \subset \mathcal{D}'$; $A^s_c \subset A^s \subset A^s_{loc}$. Les derniers plongements résultent banalement de la proposition 1. 3 et de ce que $\mathcal{D} \subset A^\infty$.

Proposition 1. 6. — *L'intersection des espaces* A^s_{loc} *est identique à* $\mathcal{E}$; *leur réunion est l'espace des distributions d'ordre fini.*

Démonstration aisée à partir de la proposition 1. 5.

Proposition 1. 7. — *Soit* K *un compact de* R^n; $(f, g) \to f * g$ *est une application bilinéaire continue de* $A^s_K \times A^t_{loc}$ *dans* A^{s+t}_{loc}.

Si E, F, G sont trois espaces de Fréchet, toute application bilinéaire séparément continue de E $\times$ F dans G est continue (Dieudonné-Schwartz [1], théorème 8). Par conséquent, il nous suffira de prouver que $f * g$ est séparément continue. Mais grâce au théorème du graphe fermé, il suffit même de prouver que si $f \in A^s_c$ et $g \in A^t_{loc}$, alors $f * g \in A^{s+t}_{loc}$. Soit alors $\alpha \in \mathcal{D}$ quelconque, dont nous noterons H le support (K désignant celui de f). Soit $\beta \in \mathcal{D}$, égale à 1 sur H — K; on a :

$$\alpha(f * g) = \alpha[f * (\beta g)] \qquad \text{et} \qquad \beta g \in A^t_c.$$

Comme $f \in A^s_c$, on a bien, d'après la proposition 1. 1, $f * (\beta g) \in A^{s+t}$ d'où le résultat en appliquant la proposition 1. 3.

Corollaire 1. — *Soient* H, K *deux compacts de* R^n; $(f, g) \to f * g$ *est une application bilinéaire continue de* $A^s_H \times A^t_K$ *dans* A^{s+t}_{H+K}.

Proposition 1. 8. — $(f, g) \to fg$ *est une application bilinéaire continue de* $A^s_{loc} \times A^{|s|+n+1}_{loc}$ *dans* A^s_{loc}.

Puisque tous les espaces qui interviennent sont des Fréchets, il suffit (cf preuve de la proposition 1. 7) de montrer que $fg \in A^s_{loc}$; mais ceci résulte banalement des définitions et de la proposition 1. 2.

Corollaire 1. — $(\varphi, f) \to \varphi f$ *est une application bilinéaire continue de* $\mathcal{E} \times A^s_{loc}$ *dans* A^s_{loc}.

En effet, $\mathcal{E}$ est plongé continûment dans $A^{|s|+n+1}_{loc}$.

§ 2. — Espaces $A^{s,d}$, $A_c^{s,d}$, $A_{loc}^{s,d}$.

DÉFINITION 1. 6. — *Nous désignerons par* $A^{s,d}$ (s, d *nombres réels*) *le sous-espace de* A^s *formé des* f *telles que, pour tout* $p \in N^n$, $x^p f \in A^{s+|p|d}$.

La topologie sur $A^{s,d}$ sera la moins fine de toutes celles rendant continues toutes les applications $f \to x^p f$ de $A^{s,d}$ dans $A^{s+|p|d}$ (p parcourant N^n); $A^{s,d}$ est ainsi un espace de Fréchet.

DÉFINITION 1. 7. — *Soit* F *un fermé de* R^n. *Nous noterons* $A_F^{s,d}$ *le sous-espace de* $A^{s,d}$ *constitué par les* f *qui ont leur support dans* F.

$A_F^{s,d}$ sera muni de la topologie induite par $A^{s,d}$; c'est alors un espace de Fréchet.

DÉFINITION 1. 8. — *Nous désignerons par* $A_c^{s,d}$ *la limite inductive (au sens vectoriel-topologique) des espaces* $A_K^{s,d}$, K *parcourant la famille des compacts de* R^n.

$A_c^{s,d}$ est un espace $\mathfrak{LF}$. On a les plongements continus suivants : si $s' \leqslant s$ et $d' \leqslant d$, $\mathfrak{D} \subset A_c^{s,d} \subset A_c^{s',d'} \subset \mathfrak{D}'$.

Il faut bien souligner que $\mathfrak{D}$ n'est pas dense dans $A_c^{s,d}$ et que donc, pour aucun s ni d, le dual de $A_c^{s,d}$ n'est un espace de distributions. Lorsque d reste fixe et que s parcourt la droite réelle, l'intersection des $A_c^{s,d}$ (contenue dans celle des A_c^s) est identique à $\mathfrak{D}$.

DÉFINITION 1. 9. — *Nous désignerons par* $A_{loc}^{s,d}$ *l'espace des distributions* $f(x)$ *sur* R^n *telles que, pour toute* $\alpha \in \mathfrak{D}$, $\alpha f \in A^{s,d}$.

Nous munirons $A_{loc}^{s,d}$ de la topologie la moins fine rendant continues toutes les applications $f \to \alpha f$ de $A_{loc}^{s,d}$ dans $A_c^{s,d}$ ($\alpha \in \mathfrak{D}$); $A_{loc}^{s,d}$ devient alors un espace de Fréchet. On peut aussi définir $A_{loc}^{s,d}$ comme étant le sous-espace de A_{loc}^s formé des f telles que, pour tout $p \in N^n$, $x^p f \in A_{loc}^{s+|p|d}$, sa topologie étant la moins fine de celles qui rendent continues toutes les applications $f \to x^p f$ de $A_{loc}^{s,d}$ dans $A_{loc}^{s+|p|d}$. On a les plongements continus :

$$\mathcal{E} \subset A_{loc}^{s,d} \subset A_{loc}^{s',d'} \subset \mathfrak{D}' \ (s' \leqslant s,\ d' \leqslant d); \quad A_c^{s,d} \subset A^{s,d} \subset A_{loc}^{s,d}.$$

L'intersection des $A_{loc}^{s,d}$ (d fixe, s parcourant R) est identique à $\mathcal{E}$.

Voici maintenant une propriété qui éclaire un peu, du moins dans le cas $d > 0$, la nature des éléments de $A^{s,d}_{\text{loc}}$.

PROPOSITION 1. 9. — *Soient d un nombre > 0, s un réel quelconque. Si $\alpha \in \mathfrak{D}$ a son support dans le complémentaire de l'origine, $f \to \alpha f$ est une application linéaire continue de $A^{s,d}_{\text{loc}}$ dans $\mathfrak{D}$.*

Soit $f \in A^{s,d}_{\text{loc}}$. Pour tout entier $k \geqslant 0$, $|x|^{2k} f \in A^{s+2dk}_{\text{loc}}$. Soit alors $\beta \in \mathfrak{D}$ ayant son support dans $\complement \{0\}$, égale à $|x|^{-2k}$ sur le support de α. On a $\beta(\alpha|x|^{2k} f) = \alpha f \in A^{s+2dk}$ et comme k est arbitraire, ceci exige $\alpha f \in \mathfrak{D}$ (proposition 1. 5). La continuité de l'application $f \to \alpha f$ résulte ensuite, par exemple, du théorème du graphe fermé.

COROLLAIRE 1. — *Les distributions qui appartiennent à $A^{s,d}_{\text{loc}}(d > 0)$ sont indéfiniment dérivables dans le complémentaire de 0.*

COROLLAIRE 2. — *Si K est un compact contenu dans $\complement \{0\}$ et si d est > 0, $A^{s,d}_{K} = \mathfrak{D}_K$* (espace des fonctions indéfiniment dérivables sur R^n, à support contenu dans K).

L'identité, dans ce corollaire, doit s'entendre au sens vectoriel-topologique, puisqu'il s'agit de deux espaces de Fréchet et que la topologie de $\mathfrak{D}_K$ est plus fine que celle de $A^{s,d}_K$.

PROPOSITION 1. 10. — *Soient s, t, d, e quatre nombres réels quelconques; $(f, g) \to f * g$ est une application bilinéaire continue de $A^{s,d} \times A^{t,e}$ dans $A^{s+t,\,\inf(d,e)}$.*

Il suffit (cf. preuve de la proposition 1. 7) d'établir que si $f \in A^{s,d}$ et $g \in A^{t,e}$ alors $f * g \in A^{s+t,\,\inf(d,e)}$. Soit $p \in N^n$; on a :

$$x^p(f * g) = \sum_{q_j \leqslant p_j,\, j=1,\dots,n} \binom{p_1}{q_1} \cdots \binom{p_n}{q_n} (x^q f) * (x^{p-q} g).$$

Or $x^q f \in A^{s+|q|d}$ *et* $x^{p-q} g \in A^{t+|p-q|e}$; d'après la proposition 1. 1, ceci implique $(x^q f) * (x^{p-q} g) \in A^{s+t+|q|d+|p-q|e}$ d'où le résultat puisque $|q|\,d + |p-q|\,e \geqslant |p| \inf(d, e)$.

COROLLAIRE 1. — *Soient H, K deux compacts de R^n; $(f, g) \to f*g$ est une application bilinéaire continue de $A^{s,d}_H \times A^{t,e}_K$ dans $A^{s+t,\,\inf(d,e)}_{H+K}$.*

Corollaire 2. — *Soit* K *un compact de* R^n; $(f, g) \to f * g$ *est une application bilinéaire continue de* $A_K^{s,d} \times A_{loc}^{t,e}$ *dans* $A_{loc}^{s+t, \inf(d, e)}$.

Il suffit d'appliquer la proposition 1. 10 en faisant la remarque suivante : si $f \in A_K^{s,d}$, $g \in A_{loc}^{t,e}$ et $\alpha \in \mathcal{D}_H$ (H : compact arbitraire de R^n), alors pour toute fonction $\beta \in \mathcal{D}$, égale à 1 sur H — K, on a : $\alpha[f*(\beta g)] = \alpha(f*g)$.

Corollaire 3. — *Soit* P(D) *un polynôme différentiel sur* R^n, *d'ordre* m; $f \to P(D)\, f$ *est une application linéaire continue de* $A_{loc}^{s,d}$ *dans* $A_{loc}^{s-m, \inf(d, 1)}$.

Il suffit, d'après le corollaire 2, de prouver que $P(D)\,\delta \in A^{-m,1}$. Nous savons déjà que $P(D)\delta \in A^{-m}$. Remarquons alors que $[x_j, P(D)]$ est un polynôme différentiel d'ordre $m - 1$; or $x_jP(D)\delta = [x_j, P(D)]\delta$ qui appartient donc à A^{-m+1}; on conclut en raisonnant par récurrence sur m.

Proposition 1. 11. — $(\alpha, f) \to \alpha f$ *est une application bilinéaire continue de* $\mathcal{E} \times A_{loc}^{s,d}$ *dans* $A_{loc}^{s,d}$.

Il suffit, ici encore, de montrer que $\alpha f \in A_{loc}^{s,d}$. Or on a, pour chaque $p \in N^n$, $x^p(\alpha f) = \alpha(x^p f)$ et $x^p f \in A_{loc}^{s+|p|d}$; le résultat découle alors du corollaire 1 de la proposition 1. 8.

Corollaire 1. — *Soit* $P(x, D)$ *un opérateur différentiel d'ordre* m *sur* R^n, *à coefficients indéfiniment dérivables;* $f \to P(x, D)f$ *est une application linéaire continue de* $A_{loc}^{s,d}$ *dans* $A_{loc}^{s-m, \inf(d,1)}$. *Même énoncé, avec* A_c, *(resp.* A_K, *K compact arbitraire de* R^n*) à la place de* A_{loc}.

Voici une conséquence triviale des définitions :

Proposition 1. 12. — *Soit* $p \in N^n$ *(soit* K *un compact de* R^n*)*; $f \to x^p f$ *est une application linéaire continue de* $A_{loc}^{s,d}$ *(resp.* $A_K^{s,d}$*) dans* $A_{loc}^{s+|p|d,d}$ *(resp.* $A_K^{s+|p|d,d}$*)*.

Définition 1. 10. — *Nous désignerons par* $\mathcal{E}_0$ *le sous-espace de* $\mathcal{E}$ *formé des* α *qui vérifient* $\alpha(0) = 0$.

$\mathcal{E}_0$ est un sous-espace fermé de $\mathcal{E}$; il sera muni de la topologie induite par $\mathcal{E}$, qui en fait un espace de Fréchet; soit $\varphi \in \mathcal{E}_0$; pour chaque $j = 1, \ldots, n$ définissons $\varphi_j \in \mathcal{E}$ par :

$$x_j\varphi_j(x_1, \ldots, x_n) = \varphi(x_1, \ldots, x_j, 0, \ldots, 0) - \varphi(x_1, \ldots, x_{j-1}, 0, \ldots, 0).$$

Puisque $\varphi(0) = 0$, on a : $\varphi(x) = x_1\varphi_1(x) + \cdots + x_n\varphi_n(x)$.

Nous noterons N l'application $\varphi \to (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ de $\mathcal{E}_0$ dans $\overbrace{\mathcal{E} \times \cdots \times \mathcal{E}}^{m}$.

Proposition 1. 13. — N *est un isomorphisme vectoriel-topologique de* $\mathcal{E}_0$ *dans* $\overbrace{\mathcal{E} \times \cdots \times \mathcal{E}}^{m}$.

1° N est biunivoque, car si tous les φ_j sont nuls, il en est de même de φ.

2° $N(\mathcal{E}_0)$ est fermé dans $\overbrace{\mathcal{E} \times \cdots \times \mathcal{E}}^{m}$. Car supposons que les φ_j convergent, pour chaque $j = 1, \ldots, n$, dans $\mathcal{E}$ vers une fonction ψ_j. Il est évident que ψ_j n'est fonction que des seules variables $x_1, \ldots, x_j$; posons :

$$\psi = x_1\psi_1 + \cdots + x_n\psi_n.$$

On a $\psi(x_1, \ldots, x_j, 0, \ldots, 0) = x_1\psi_1(x) + \cdots + x_j\psi_j(x)$ et donc :

$$x_j\psi_j(x) = \psi(x_1, \ldots, x_j, 0, \ldots, 0) - \psi(x_1, \ldots, x_{j-1}, 0, \ldots, 0).$$

Autrement dit, $(\psi_1, \ldots, \psi_n) = N(\psi)$.

3° L'application $(\chi_1, \ldots, \chi_n) \to x_1\chi_1 + \cdots + x_n\chi_n$ de $\overbrace{\mathcal{E} \times \cdots \times \mathcal{E}}^{m}$ dans $\mathcal{E}_0$ est continue. Sa restriction à $N(\mathcal{E}_0)$ est l'application réciproque de N. Le théorème de Banach entraîne donc immédiatement le résultat.

Corollaire 1. — $(\alpha, f) \to \alpha f$ *est une application bilinéaire continue de* $\mathcal{E}_0 \times A^{s,d}_{\mathrm{loc}}$ *dans* $A^{s+d,d}_{\mathrm{loc}}$.

On applique la proposition 1. 13, la proposition 1. 12 et la proposition 1. 11.

§ 3. — Espaces $\mathcal{E}_v(k; E_s)$.

Rappelons que si V est une variété C^∞, dont le point courant est noté v, et si E est un espace vectoriel topologique (sur le corps C des complexes), on désigne par $\mathcal{E}^q_v(E)$ (q : entier $\geqslant 0$) l'espace des fonctions q fois continûment différentiables dans

V, à valeurs dans E, muni de la topologie de la convergence uniforme, pour les fonctions et toutes leurs dérivées d'ordre $\leqslant q$, sur chaque compact de V. L'intersection de tous les $\mathcal{E}_v^q(E)$, q parcourant N, est notée $\mathcal{E}_v(E)$; c'est l'espace des fonctions C^∞ de v à valeurs dans E; nous le supposerons muni de la topologie intersection des topologies induites par les $\mathcal{E}_v^q(E)$.

Donnons-nous, pour chaque $r \in R$, un sous-espace vectoriel E_r de E que nous supposerons muni d'une topologie (compatible avec la structure vectorielle) plus fine que celle induite par E. Nous ferons l'hypothèse suivante :

(Φ) *Si* $s \leqslant r$, E_r *est plongé continûment dans* E_s.

Définition 1. 11. — *Soient s réel,* $k \geqslant 0$. *Nous désignerons par* $\mathcal{E}_v(k; E_s)$ *l'espace des fonctions* C^∞ *dans* V, *à valeurs dans* E, *qui, pour tout entier* $p \geqslant 0$, *sont des fonctions* C^p *de* v, *à valeurs dans* E_{s-kp}.

On voit que, pour tout entier $p \geqslant 0$, $\mathcal{E}_v(k; E_s)$ peut être considéré comme un sous-espace de $\mathcal{E}_v^p(E_{s-kp})$; nous le munirons de la topologie intersection des topologies induites par les $\mathcal{E}_v^p(E_{s-kp})$. Si $k' \geqslant k$ et $r' \leqslant r$, $\mathcal{E}_v(k; E_r)$ est plongé continûment dans $\mathcal{E}_v(k'; E_{r'})$; et $\mathcal{E}_v(0; E_s) = \mathcal{E}_v\ (E_s)$ (au sens vectoriel-topologique).

Considérons maintenant un espace vectoriel topologique M (sur C) et, pour chaque $r \in R$, l'espace $L_b(M; E_r)$ (espace des applications linéaires continues de M dans E_r, muni de la topologie de la convergence uniforme sur les bornés de M). Les $L_b(M; E_r)$ sont plongés continûment dans $L_b(M; E_r)$ et il est clair qu'ils vérifient (Φ) (car les E_r vérifient (Φ)). Nous avons donc le droit de considérer les espaces $\mathcal{E}_v(k; L(M; E))$ des fonctions C^∞ dans V, à valeurs dans $L_b(M; E)$, qui sont, pour tout entier $p \geqslant 0$, des fonctions C^p de v, à valeurs dans $L_b(M; E_{s-kp})$. Si nous avons à considérer, au lieu d'un seul espace M, une famille $\{M_r\}$ ($r \in R$) d'espaces vectoriels topologiques (vérifiant (Φ) ou non), pour r et s fixés, la notation $\mathcal{E}_v(k; L_b(M_r; E_s))$ sera conforme à la définition précédente (on substitue M_r à M).

Proposition 1. 14. — *Soient, pour chaque réel r, deux espaces vectoriels topologiques* E_r *et* F_r; *on suppose qu'il existe un espace vectoriel topologique* E *(resp.* F) *tel que tous les* E_r *(resp.* F_r)

soient plongés continûment dans E (*resp.* F), *et que les* E_r (*resp.* F_r) *vérifient* (Φ).

Soit, pour tout $v \in V$, *une application linéaire continue* $u(v)$ *de* E *dans* F, *ayant la propriété suivante : il existe un nombre réel a et un nombre* $k \geqslant 0$ *tels que, pour tout réel* r, $u(v) \in \mathcal{E}_v(k; L_b(E_r; F_{r-a}))$. *Alors, quels que soient le réel s et l'élément* $f(v)$ *de* $\mathcal{E}_v(k; E_s)$, *on a* $u(v)f(v) \in \mathcal{E}_v(k; F_{s-a})$.

Il suffit de prouver cette proposition pour $a = 0$; car posons $F'_r = F_{r-a}$; il est clair que la famille $\{F'_r\}$ vérifie aussi (Φ) et que $\mathcal{E}_v(k; F'_s) = \mathcal{E}_v(k; F_{s-a})$ et $\mathcal{E}_v(k; L_b(E_r; F'_r)) = \mathcal{E}_v(k; L_b(E_r; F_{r-a}))$.

Soit un opérateur différentiel quelconque D_v sur V, d'ordre q; $D_v[u(v)f(v)]$ est une somme de termes de la forme $(D'_v u(v))\, D''_v f(v))$, où D'_v et D''_v sont des opérateurs différentiels sur V, d'ordre q' et q'' respectivement, avec $q' + q'' \leqslant q$. Par hypothèse, $D''_v f(v)$ est une fonction C^0 de v à valeurs dans $E_{s-kq''}$ et $D'_v u(v)$ est une fonction C^0 de v, à valeurs dans $L_b(E_{s-kq}; F_{s-kq''-kq'})$. Il s'ensuit que $(D'_v u(v))\,(D''_v f(v))$ est une fonction continue de v, à valeurs dans F_{s-kq}.

Le rôle des espaces E_r sera tenu, pour nous, par A^r, A^r_K, A^r_{loc}, $A^{r,d}_{\text{loc}}$, etc. (K*:* compact de R^n; d*:* nombre > 0 fixe), relatifs à la variable x de R^n. Nous aurons besoin du résultat suivant :

PROPOSITION 1. 15. — *Soient deux nombres réels* s, t, *un nombre* $k \geqslant 0$ *et un compact* K *de* R^n. *Soient* $\alpha(x, v) \in \mathcal{E}_{x,v}$, $f(x, v) \in \mathcal{E}_v(k; A^s_{\text{loc}})$, $g(x, v) \in \mathcal{E}_v(k; A^t_K)$ *arbitaires. Alors* $f(x, v) * g(x, v) \in \mathcal{E}_v(k; A^{s+t}_{\text{loc}})$ et $\alpha(x, v)f(x, v) \in \mathcal{E}_v(k; A^s_{\text{loc}})$.

Résulte directement des propositions 1. 14, 1. 7 et du corollaire 1 de la proposition 1. 8.

PROPOSITION 1. 16. — *Soient un nombre* $k \geqslant 0$ *et un entier* $p \geqslant 0$ *quelconques. Tout élément de* $\mathcal{E}_v(k; A^{(k+1)p+n+1}_{\text{loc}})$ *est une fonction* C^p *de* (x, v) *dans* $R^n \times V$.

Un tel élément est une fonction C^p de v à valeurs dans A^{p+n+1}_{loc}. Il suffira donc de prouver que A^{p+n+1} est plongé continûment dans l'espace des fonctions C^p de x (muni de la topologie usuelle : convergence uniforme, sur chaque compact de R^n, de toutes les dérivées d'ordre $\leqslant p$).

Soit $q \in N^n$, $|q| \leqslant q$. Si $f(x)$ est une distribution tempérée, la transformée de Fourier de $D^q f(x)$ (D^q opérant au sens des distributions) est $y^q \hat{f}(y)$. Si $f(x) \in A^{p+n+1}$, $y^q \hat{f}(y)$ est sommable sur R^n et par conséquent, $D^q f(x)$ est une fonction continue sur R^n, tendant vers 0 lorsque $|x| \to \infty$. On a, de plus :

$$\|D^q f(x)\|_{L_x^\infty} \leqslant \int (1+|y|)^{-n-1} dy\, N_{p+n+1}(f).$$

c.q.f.d.

Proposition 1. 17. — *Soient s réel, $k \geqslant 0$ et $d > 0$. Si $\alpha(x) \in \mathcal{D}$ a son support dans le complémentaire de l'origine, $f(x, \nu) \to \alpha(x) f(x, \nu)$ est une application linéaire continue de $\mathcal{E}_\nu(k; A_{loc}^{s,d})$ dans $\mathcal{E}_\nu(\mathcal{D}_x)$.*

Appelons K le support de $\alpha(x)$. Quel que soit l'entier $p \geqslant 0$, $\alpha(x) f(x, \nu)$ est une fonction C^p de ν à valeurs dans $(A_K^{s-kp,d})_x$, espace qui est identique, d'après le corollaire 2 de la proposition 1. 9 à $(\mathcal{D}_K)_x$.

Corollaire 1. — *Les éléments de $\mathcal{E}_\nu(k; A_{loc}^{s,d})$ $(d > 0)$ sont indéfiniment différentiables par rapport à (x, ν) dans $(\complement \{0\}) \times V$.*

Corollaire 2. — *Si K est un compact contenu dans $\complement \{0\}$ et si $d > 0$, $\mathcal{E}_\nu(k; A_K^{s,d}) = \mathcal{E}_\nu((\mathcal{D}_K)_x)$ (identité au sens vectoriel topologique).*

L'un des avantages de l'introduction des espaces $\mathcal{E}_\nu(k; E_r)$ est lié à la généralisation d'un résultat de Mizohata ([2], p. 173 et 174).

Le rôle de la variété V va être tenu par un ouvert Ω de R^n, dont le point variable sera noté ξ. Tous les espaces indiciés par ξ seront relatifs à cet ouvert; ainsi par exemple $\mathcal{E}_\xi(k; A_K^s)$.

Soit $T(x)$ une distribution sur R^n. Suivant Schwartz, appelons $T(x - x_0)$ ($x_0 \in R^n$ fixe) la distribution définie par $\int T(x - x_0)\varphi(x)\, dx = \int T(x)\varphi(x + x_0)\, dx$, $\varphi \in \mathcal{D}_x$. Si $T(x, \xi) \in \mathcal{E}_\xi(\mathcal{D}'_x)$, on a évidemment aussi $T(x - \xi, \xi) \in \mathcal{E}_\xi(\mathcal{D}'_x)$. Sous certaines conditions, on peut affirmer que l'on a aussi

$$T(x - \xi, \xi) \in \mathcal{E}_x(\mathcal{D}'_\xi) = \mathcal{D}'_\xi(\mathcal{E}_x) = L_b(\mathcal{D}_\xi; \mathcal{E}_x) \ (^6).$$

Mizohata a montré que c'est le cas s'il existe un réel s tel que $T(x, \xi) \in \mathcal{E}_\xi(A_{loc}^s)$. Cet espace étant identique à $\mathcal{E}_\xi(k; A_{loc}^s)$ avec $k = 0$, on peut se demander s'il n'est pas possible d'étendre la propriété précédente à des valeurs > 0 de k. On ne peut

(6) Pour les définitions et les propriétés de ces espaces, voir Schwartz [2], [3]

espérer l'étendre à $k \geqslant 1$, comme le prouve l'exemple de $\delta(x+\xi) \in \mathcal{E}_\xi(1; A^0)$, car $\delta(x+\xi-x) = \delta_x \notin \mathcal{E}_x(\mathcal{D}'_\xi)$. Compte tenu de ceci, le résultat suivant constitue une sorte d'optimum :

Proposition 1. 18. — *Soient s réel, $k \geqslant 0$, et un compact* K *de* R^n *arbitraires. Si $k < 1$, pour toute $f(x, \xi) \in \mathcal{E}_\xi(k;\ A^s_K)$, $\varphi(\xi) \to \int f(x-\xi, \xi)\varphi(\xi)\, d\xi$ est une application linéaire continue de $\mathcal{D}_\xi$ dans $\mathcal{D}_x$.*

Notons $\hat{f}(y, \xi)$ la transformée de Fourier de $f(x, \xi)$; celle de $f(x-\xi, \xi)$ est $\hat{f}(y, \xi) \exp(2i\pi\langle y, \xi\rangle)$. En particulier, d'après la définition de $\mathcal{E}_\xi(k;\ A^s_H)$, c'est une fonction indéfiniment dérivable de ξ à valeurs dans $\mathcal{S}'_x$. Si donc $\varphi \in \mathcal{D}_\xi$,

$$\Phi(x) = \int f(x-\xi, \xi)\ \varphi(\xi) d\xi$$

est une distribution tempérée, dont la transformée de Fourier est

$$\hat{\Phi}(y) = \int e^{2i\pi\langle y, \xi\rangle}\ \hat{f}(y, \xi)\varphi(\xi) d\xi.$$

Soit alors $p \in N^n$ arbitraire; nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} y^p\hat{\Phi}(y) &= \int D^p_\xi(e^{2i\pi\langle y, \xi\rangle})\hat{f}(y, \xi)\varphi(\xi) d\xi \\ &= (-1)^{|p|} \int e^{2i\pi\langle y, \xi\rangle} D^p_\xi[\hat{f}(y, \xi)\varphi(\xi)] d\xi \\ &= \sum_{\substack{q_j \leqslant p_j \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \binom{p_1}{q_1} \cdots \binom{p_n}{q_n} (-1)^{|p|} \int e^{2i\pi\langle y, \xi\rangle} [D^q_\xi \hat{f}(y, \xi)] D^{p-q}_\xi \varphi(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Or $D^q_\xi f(x, \xi)$ est une fonction continue de ξ à valeurs dans $A^{s-k|p|}_k$. Il existe donc une constante finie M_q telle que, pour tout point ξ du support de φ et tout $y \in R^n$:

$$(1 + |y|^2)^{s-k|q|/2} |D^q_\xi \hat{f}(y, \xi)| \leqslant M_q.$$

De la résulte qu'il existe $M'_p < +\infty$ telle qu'on ait, pour tout $y \in R^n$:

$$(1 + |y|^2)^{s-k|p|/2}\, |y^p| |\hat{\Phi}(y)| \leqslant M'_p \sup_{\substack{q_j \leqslant p_j \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \| D^q\varphi(\xi) \|_{L^1}.$$

En particulier, on voit, en prenant $p = 0$, que $\Phi(y)$ est bornée sur tout compact; il en résulte que, pour tout entier

$m \geqslant 0$, il existe une constante finie M'_m telle que, pour tout $y \in R^n$:

$$(1 + |y|^2)^{s+(1-k)m/2}|\hat{\Phi}(y)| \leqslant M'_m \sup_{|p| \leqslant m} \| D^p \varphi(\xi) \|_{L^1}.$$

Comme $k < 1$, $s + (1 - k)m$ peut être rendu arbitrairement grand en prenant m suffisamment grand; ceci prouve que $\Phi(x) \in A^r$ pour tout réel r; autrement dit, $\Phi(x) \in A^\infty$. D'autre part, lorsque ξ reste dans le support de φ, $f(x - \xi, \xi)$ garde son support dans un compact fixe de R^n; par conséquent, $\Phi(x)$ est à support compact, autrement dit $\Phi(x) \in \mathcal{D}_x$.

La continuité de l'application $\varphi(\xi) \to \Phi(x)$ de $\mathcal{D}_\xi$ dans $\mathcal{D}_x$ résulte, si l'on veut, du théorème du graphe fermé.

Corollaire 1. — *Si $k < 1$, pour toute $f(x, \xi) \in \mathcal{E}_\xi(k; A^s_{loc})$, $\varphi(\xi) \to \int f(x - \xi, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi$ est une application linéaire continue de $\mathcal{D}_\xi$ dans $\mathcal{E}_x$.*

CHAPITRE II

OPÉRATEURS HYPOELLIPTIQUES A COEFFICIENTS CONSTANTS DÉPENDANT DE PARAMÈTRES

§ 1. Opérateurs hypoélliptiques à coefficients constants.

Les opérateurs hypoelliptiques à coefficients constants ont été caractérisés par Hörmander (dans [1], chap. III; voir aussi Ehrenpreis [1]). A leur sujet, nous aurons besoin de l'équivalence suivante (Malgrange [2], p. 291 et 292) :

Proposition 2. 1. — *Soit* P(D) *un opérateur différentiel à coefficients constants sur* R^n. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) P(D) *est hypoelliptique.*

b) *Il existe un nombre* $s > 0$ *et une constante finie* A *tels que, pour tout* $p \in N^n$, $p \neq 0$ *et tout* $y \in R^n$, *on ait :*

$$(1 + |y|^2)^{s/2}\, |P^{(p)}(y)| \leqslant A(1 + |P(y)|).$$

Deux conséquences directes de cette proposition :

Corollaire 1. — *Soit* P(D) *hypoelliptique d'ordre* $\geqslant 1$. *Il existe un nombre* $s > 0$ *et une constante finie* A' *tels que, pour tout* $y \in R^n$, *on ait :*

$$(1 + |y|^2)^{s/2} \leqslant A' \,(1 + |P(y)|).$$

En effet, si le degré de $P(y)$ est $\geqslant 1$, il existe $p \in N^n$, $p \neq 0$, tel que $P^{(p)}(y)$ soit une constante non nulle.

Corollaire 2. — *Soit* P(D) *hypoelliptique d'ordre* $\geqslant 1$. *Notons pour chaque* $j = 1, \ldots, n$, m_j *l'ordre de* P(D) *par rapport à* x_j. *Alors le coefficient de* $y_j^{m_j}$ *dans* $P(y)$ *est une constante.*

Raisonnons par l'absurde : supposons que

$$P(y) = Q(y_2, \ldots, y_n)y_1^{m_1} + R(y)$$

avec $\deg_{y_1} R(y) \leqslant m_1 - 1$ et $\deg Q(y_2, \ldots, y_n) \geqslant 1$. Alors il existe $p \in N^n$, $p \neq 0$ et $p_1 = 0$, tel que $Q^{(p)}$ soit une constante non nulle. Donc $P(y_1, 0, \ldots, 0)$ et $P^{(p)}(y_1, 0, \ldots, 0)$ sont deux polynômes en y_1 de degré $\leqslant m_1$, le second étant effectivement de degré m_1. On voit tout de suite que la condition (*b*) de la proposition 2. 1 ne peut être vérifiée.

L'hypoellipticité est invariante par changement de variables linéaire dans R^n, comme il est manifeste d'après la proposition 2. 1 : le raisonnement précédent appliqué à

$$P_j(y) = P(y_j, y_2, \ldots, y_{j-1}, y_1, y_{j+1}, \ldots, y_n)$$

pour chaque $j = 2, \ldots, n$, achève d'établir le corollaire 2.

Nous aurons besoin de la notion suivante due à Hörmander :

Définition 2. 1. — *Soient* P(D) *et* Q(D) *deux polynômes différentiels sur* R^n. *Supposons* P(D) *hypoelliptique. Nous dirons que* P(D) *est plus fort que* Q(D)) *ou bien que* Q(D) *est plus faible que* P(D)) *s'il existe une constante finie* A *telle qu'on ait, pour tout* $y \in R^n$:

$$|Q(y)| \leqslant A(1 + |P(y)|).$$

Si de plus Q(D) *est hypoelliptique et plus fort que* P(D), *nous dirons que* P(D) *et* Q(D) *sont équivalents.*

D'après cette définition, l'énoncé suivant est évident :

Proposition 2. 2. — *Soient deux opérateurs différentiels à coefficients constants* P(D), Q(D). *Supposons* P(D) *hypoelliptique et* Q(D) *plus faible que* P(D). *Soit* y_0 *un point quelconque de* R^n. *Si* X *représente une indéterminée, le degré en* X *de* $Q(Xy_0)$ *est inférieur ou égal à celui de* $P(Xy)_0$.

Corollaire 1. — *Sous les hypothèses de la proposition* 2. 2, *le degré par rapport à* $y_j (j = 1, \ldots, n)$ *de* $Q(y)$ *est inférieur ou égal à celui de* $P(y)$.

§ 2. Familles formellement hypoelliptiques.

Soit J un ensemble d'indices quelconques. Donnons-nous, pour chaque $j \in J$, un polynôme différentiel $P_j(D)$ sur R^n.

Définition 2. 2. — *Nous dirons que la famille* $\{P_j(D)\}$ $(j \in J)$ *est d'ordre borné s'il existe un entier* $m \geqslant 0$ *tel que, pour tout* $j \in J$, *l'ordre de* $P_j(D)$ *est* $\leqslant m$. *Nous dirons que la famille* $\{P_j(D)\}$ *est d'ordre m si, pour tout* $j \in J$, $P_j(D)$ *est effectivement d'ordre m.*

Soit $\{P_j(D)\}$ $(j \in J)$ une famille d'ordre borné; soit $P(D)$ un opérateur quelconque de la famille. Il existe r opérateurs $P_k(D)$ $(k = 1, \ldots, r < +\infty)$ de la famille et $(r + 1)$ fonctions $a_0(j)$, $a_k(j)$ $(k = 1, \ldots, r)$ ayant les propriétés suivantes :

1° les opérateurs $P(D)$, $P_k(D)$ $(1 \leqslant k \leqslant r)$ sont linéairement indépendants.

2° Pour tout $j \in J$, $P_j(D) = a_0(j)\,P(D) + \sum_{k=1}^{r} a_k(j)\ \ P_k(D)$.

En effet, puisque la famille est d'ordre borné, les $P_j(D)$ $(j \in J)$ engendrent (avec C comme corps des scalaires) un espace vectoriel (de polynômes différentiels sur R^n) de dimension finie. Il existe une base de cet espace extraite de la famille $\{P_j(D)\}$ et comprenant $P(D)$.

Définition 2. 3. — *Soit* $\{P_j(D)\}$ $(j \in J)$ *une famille d'ordre borné. Toute décomposition des* $P_j(D)$ *du type ci-dessus sera appelée une décomposition interne des* $P_j(D)$.

Dans la décomposition interne précédente, si $P(D)$ correspond à l'indice j_0, on aura nécessairement : $a_0(j_0) = 1$, $a_k(j_0) = 0$ pour $k = 1, \ldots, r$.

Définition 2. 4. — *Nous dirons que la famille* $\{P_j(D)\}$ $(j \in J)$ *est formellement hypoelliptique si, pour tout* $j \in J$, $P_j(D)$ *est hypoelliptique et si, pour tout* $(i, j) \in J \times J$, $P_i(D)$ *et* $P_j(D)$ *sont équivalents.*

Si la famille $\{P_j(D)\}$ $(j \in J)$ est formellement hypoelliptique, tous les $P_j(D)$ ont le même ordre m : la famille $\{P_j(D)\}$ est d'ordre m. En particulier, elle est d'ordre borné.

Dans la suite, l'ensemble d'indices sera une variété différentiable que nous appellerons V; les indices seront les points de V, dont le point courant sera noté v. Au lieu d'écrire $P_v(D)$, nous écrirons $P(v, D)$; les coefficients (constants sur R^n) de $P(v, D)$ seront des fonctions de v.

Définition 2. 5. — *Soit* V *une variété différentiable de classe* q $(0 \leqslant q \leqslant +\infty)$. *Soit* $\{P(v, D)\}$ $(v \in V)$ *une famille de polynômes différentiels sur* R^n *d'ordre borné. Nous dirons que* *c'est une famille* C^q *sur* V *si les coefficients de* $P(v, D)$ *sont des fonctions* C^q *sur* V.

Nous dirons toujours « famille continue » au lieu de « famille C^0 ». Nous aurions pu définir des familles analytiques, holomorphes, etc. Par coefficients de P(D), nous entendons les composantes de P(D) relatives à la base de l'espace vectoriel de tous les polynômes différentiels sur R^n constituée par les monômes de dérivation $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{p_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{p_n} (p \in N^n)$. Si $\{P(v, D)\}$ est une famille C^q sur V, les fonctions $a_0(v)$, $a_k(v)$ d'une décomposition interne quelconque des $P(v, D)$ sont de classe C^q qur V.

Nous allons maintenant étudier les familles formellement hypoelliptiques; l'énoncé suivant est fondamental :

PROPOSITION 2. 3. — *Soient* V *une variété de classe* C^0, $\{P(v, D)\}(v \in V)$ *une famille continue sur* V, *formellement hypoelliptique. Pour tout* $v_0 \in V$ *et tout compact* K *de* V, *il existe deux constantes finies* $C_1(v_0, K)$, $C_2(v_0, K)$ *telles qu'on ait, pour tout* $y \in R^n$ *et tout* $v \in K$:

$$1 + |P(v_0, y)| \leqslant C_1(v_0, K)(1 + |P(v, y)|) \leqslant C_2(v_0, K)(1 + |P(v_0, y)|).$$

Considérons une décomposition interne des $P(v, D)$:

$$P(v, D) = a_0(v)P_0(D) + \sum_{k=1}^{r} a_k(v)P_k(D) \quad \text{avec} \quad P_0(D) = P(v_0, D).$$

On a : $a_0(v_0) = 1$ et $a_k(v_0) = 0$ pour tout $k = 1, \ldots, r$. Les $P_k(D)$ sont plus faibles que $P_0(D)$; il esiste donc $A < +\infty$ tel que $|P_k(y)| \leqslant A(1 + |P_0(y)|)$ pour tout $y \in R^n$ et tout $k = 1, \ldots, r$. Soit $U(v_0)$ un voisinage ouvert de v_0 dans V tel que $|a_0(v)| \geqslant \frac{2}{3}$, $|a_k(v)| \leqslant \frac{1}{3Ar}$ pour tout $v \in U(v_0)$ et tout $k = 1, \ldots, r$ (ceci est possible parce que les $a_j(v)$ sont continues) On a alors :

$$1 + |P(v, y)| \geqslant |a_0(v)||P_0(y)| + 1 - \sum_{k=1}^{r} |a_k(v)||P_k(y)| \geqslant \frac{1}{3}(1 + |P_0(y)|)$$

soit, pour tout $y \in R^n$ et tout $v \in U(v_0)$:

$$1 + |P(v_0, y)| \leqslant 3(1 + |P(v, y)|).$$

Appliquons d'abord ce résultat pour ν_0 parcourant le compact K; on obtient un recouvrement de K par les ouverts $U(\nu_0)$, dont on peut extraire un recouvrement fini $U(\nu_1), \ldots, U(\nu_s)$. On a donc, pour tout $i = l, \ldots s$, tout $\nu \in U(\nu_i)$ et tout $y \in R^n$:

$$1 + |P(\nu_i, y)| \leqslant 3(1 + |P(\nu, y)|).$$

Redonnons à ν_0 la signification de point arbitraire de V; puisque la famille $\{P(\nu, D)\}$ est formellement hypoelliptique, il existe une constante finie A telle qu'on ait, pour tout $i = l, \ldots, s$ et tout $y \in R^n$:

$$1 + |P(\nu_0, y)| \leqslant A(1 + |P(\nu_i, y)|).$$

En combinant les deux derniers systèmes d'inégalités, on obtient la 1re partie de l'inégalité de l'énoncé.

Pour la deuxième partie, reprenons la décomposition interne des $P(\nu, D)$ introduite au début. Posons $B(K) = \sup_{\nu \in K} \sup_{0 \leqslant j \leqslant r} |a_j(\nu)|$. On a :

$$|P(\nu, y)| \leqslant AB(K)\ (1 + |P(\nu_0, y|).$$

pour tout $\nu \in K$ et tout $y \in R^n$. D'où aussitôt le résultat.

Corollaire 1. — *Soient une variété* V *de classe* C^q, $\{P(\nu, D)\}$ $(\nu \in V)$ *une famille formellement hypoelliptique,* C^q *sur* V. *Pour tout compact* K *de* V *et tout opérateur différentiel* D_v *sur* V, *d'ordre* $\leqslant q$, *il existe une constante finie* $C(K, D_v)$ *telle qu'on ait, pour tout* $\nu \in K$ *et tout* $y \in R^n$:

$$|D_v P(\nu, y)| \leqslant C(K, D_v)\ (1 + |P(\nu, y)|).$$

Prenons en effet une décomposition interne quelconque des $P(\nu, D)$:

$$P(\nu, D) = \sum_{j=0}^{r} a_j(\nu)\ P_j(D)$$

et posons $B(K, D_v) = \sup_{v \in K} \sup_{0 \leqslant j \leqslant r} |D_v a_j(\nu)|$. On a évidemment :

$$|D_v P(\nu, y)| \leqslant B(K, D_v) \sum_{j=0}^{r} |P_j(y)|.$$

Mais d'après la proposition 2. 3, il existe $C_j(K)$ $0 \leqslant j \leqslant r)$ finie telle qu'on ait :

$$|P_j(y)| \leqslant C_j(K)\ (1 + |P(\nu, y)|)$$

pour tout $v \in K$, tout $y \in R^n$ et tout $j = 0, 1, \ldots, r$, d'où le corollaire.

Corollaire 2. — *Mêmes hypothèses que dans le corollaire 1. Il existe un nombre $s > 0$ tel que, pour tout opérateur différentiel D_v sur V d'ordre $\leqslant q$ et tout compact K de V, il existe une constante finie $C(K, D_v)$ telle que, pour tout $v \in K$, tout $p \in N^n$, $p \neq 0$, et tout $y \in R^n$, on ait :*

$$(1 + |y|^2)^{s/2} |D_v P^{(p)}(v, y)| \leqslant C(K, D_v)\,(1 + |P(v, y)|).$$

Soit $P(v, D) = \sum_{j=0}^{r} a_j(v) P_j(D)$ une décomposition interne quelconque de $P(v, D)$. D'après la proposition 2. 1, il existe $s > 0$ et $A < +\infty$ tels que, pour tout $p \in N^n$, $p \neq 0$, tout $y \in R^n$ et tout $j = 0, 1, \ldots, r$:

$$(1 + |y|^2)^{s/2} |P_j^{(p)}(y)| \leqslant A(1 + |P_j(y)|).$$

Posons maintenant $B(K, D_v) = \sup_{v \in K} \sup_{0 \leqslant j \leqslant r} |D_v a_j(v)|$. On a évidemment :

$$(1 + |y|^2)^{s/2} |D_v P^{(p)}(v, y)| \leqslant AB(K, D_v) \sum_{j=0}^{r} (1 + |P_j(y)|)$$

pour tout $y \in R^n$, tout $v \in K$ et tout $p \in N^n$, $p \neq 0$. On conclut comme pour le corollaire 1.

Corollaire 3. — *Soient V une variété C^0, $\{P(v, D)\}(v \in V)$ une famille formellement hypoelliptique sur V, continue, d'ordre $\geqslant 1$. Il existe un nombre $s > 0$ tel qu'il existe, pour tout compact K de V, une constante finie A(K) telle qu'on ait, pour tout $v \in K$ et tout $y \in R^n$:*

$$(1 + |y|^2)^{s/2} \leqslant A(K)\,(1 + |P(v, y)|).$$

Prenons un point $v_0 \in V$ quelconque; il existe $s > 0$ et $A < +\infty$ tels que

$$(1 + |y|^2)^{s/2} \leqslant A(1 + |P(v_0, y)|)$$

pour tout $y \in R^n$; ceci résulte du corollaire de la 1 proposition 2. 1. Le corollaire 3 résulte alors de la première inégalité de la proposition 2. 3.

DÉFINITION 2. 6. — *Soient* M, H *deux nombres* $\geqslant 0$ *finis. Nous désignerons par* $h(\mathrm{M}, \mathrm{H}, y)$ *la fonction sur* R^n *définie ainsi :*

$$h(\mathrm{M}, \mathrm{H}; y) = 0 \text{ si } y_2^2 + \cdots + y_n^2 > \mathrm{M}^2;$$
$$h(\mathrm{M}, \mathrm{H}; y) = 0 \text{ si } y_2^2 + \cdots + y_n^2 \leqslant \mathrm{M}^2 \text{ et } y_1^2 \geqslant \mathrm{H}^2;$$
$$h(\mathrm{M}, \mathrm{H}; y) = \sqrt{\mathrm{H}^2 - y_1^2} \text{ si } y_2^2 + \cdots + y_n^2 \leqslant \mathrm{M}^2 \text{ et si } y_1^2 \leqslant \mathrm{H}^2.$$

Cette définition, et la construction qui va suivre, sont directement inspirées de Hörmander ([1], p. 223 et 224).

PROPOSITION 2. 4. — *Soient une variété* V *de classe* C^0, $\{\mathrm{P}(v, \mathrm{D})\}$ $(v \in \mathrm{V})$ *une famille formellement hypoelliptique, continue sur* V, *d'ordre* $\geqslant 1$. *Pour tout compact* K *de* V, *il existe deux constantes positives finies* M, H *telles qu'on ait, pour tout* $v \in \mathrm{K}$ *et tout* $y \in \mathrm{R}^n$:

$$|\mathrm{P}(v, y_1 + ih(\mathrm{M}, \mathrm{H}; y), y_2, \ldots, y_n)| \geqslant 1.$$

Pour obtenir une borne inférieure de H, appliquons le corollaire 3 de la proposition 2. 3 : il existe $\mathrm{M}_0 < +\infty$ tel que si $v \in \mathrm{K}$ et $|y| \geqslant \mathrm{M}_0$, $|\mathrm{P}(v, y)| \geqslant 1$.

Pour obtenir une borne inférieure de M, remarquons que tous les $\mathrm{P}(v, y)$ $(v \in \mathrm{V})$ ont même degré $m_1 \geqslant 1$ par rapport à y_1 (corollaire 1 de la proposition 2. 2) et que le coefficient de $y_1^{m_1}$ dans $\mathrm{P}(v, y)$ est une fonction continue dans V, ne s'annulant jamais, donc uniformément minorée en valeur absolue sur K. Si $v \in \mathrm{K}$ et si $y_2^2 + \ldots + y_n^2 \leqslant \mathrm{M}^2$, les racines du polynôme en Z_1 $\mathrm{P}(v, \mathrm{Z}_1, y_2, \ldots, y_n)$ restent dans un compact (dépendant de M et de K) du plan complexe. Il existe $\mathrm{H}_0 < +\infty$ tel que si $|z_1| \geqslant \mathrm{H}_0$, pour ces v et ces $y_2, \ldots, y_n$, $|\mathrm{P}(v, z_1, y_2, \ldots, y_n)| \geqslant 1$. En prenant $\mathrm{H}_0 \geqslant \mathrm{M}$, on vérifie sans peine que $h(\mathrm{M}, \mathrm{H}; y)$ satisfait pour tous $\mathrm{H} \geqslant \mathrm{H}_0$, $\mathrm{M} \geqslant \mathrm{M}_0$, aux conditions de l'énoncé.

Dans les corollaires qui suivent, $h(\mathrm{M}, \mathrm{H}; y)$ désignera la fonction qui vient d'être construite (relativement à un compact K donné arbitrairement dans V); $\mathrm{S}(h)$ désignera le support de cette fonction.

COROLLAIRE 1. — *Mêmes hypothèses que dans la proposition 2. 4. Pour tout* $v_0 \in \mathrm{V}$, *il existe une constante finie* $\mathrm{A}(v_0)$ *telle que, pour tout* $v \in \mathrm{K}$ *et tout* $y \in \complement\, \mathrm{S}(h)$, *on ait :* $|\mathrm{P}(v_0, y)| \leqslant \mathrm{A}(v_0)|\mathrm{P}(v, y)|$.

On applique les propositions 2. 3 et 2. 4, compte tenu de ce que, si $y \in \complement S(h)$, $P(v, y) = P(v, y_1 + ih(M, H; y), y_2, \ldots, y_n)$ et donc $|P(v, y)| \geqslant 1$.

Corollaire 2. — *Mêmes hypothèses que dans la proposition 2. 4. Il existe un nombre $s > 0$, indépendant du compact* K, *et une constante finie* A *tels qu'on ait, pour tout $v \in K$ et tout $y \in \complement S(h)$:*

$$(1 + |y|^2)^{s/2} \leqslant A|P(v, y)|.$$

On applique la proposition 2. 4 et le corollaire 3 de la proposition 2. 3. La constante A de l'énoncé dépend du compact K.

Corollaire 3. — *On suppose que la variété* V *est de classe* C^q *et que la famille* $\{P(v, D)\}$ $(v \in V)$ *est* C^q *sur* V; *par ailleurs, on fait les mêmes hypothèses que dans la proposition* 2. 4. *Pour tout opérateur différentiel* D_v *sur* V, *d'ordre* $\leqslant q$, *il existe une constante finie* $C(D_v)$ *telle qu'on ait, pour tout* $v \in K$ *et tout* $y \in \complement S(h)$:

$$|D_v P(v, y)| \leqslant C(D_v)\, |P(v, y)|.$$

Résulte de la proposition 2. 4 et du corollaire 1 de la proposition 2. 3. La constante $C(D_v)$ dépend de K.

Corollaire 4. — *Mêmes hypothèses que dans le corollaire* 3. *Il existe un nombre $s > 0$, indépendant du compact* K, *tel que, pour tout opérateur différentiel* D_v *sur* V, *d'ordre* $\leqslant q$, *il existe une constante finie* $C(D_v)$ *telle qu'on ait, pour tout* $v \in K$, *tout* $p \in N^n$, $p \neq 0$, *et tout* $y \in \complement S(h)$:

$$(1 + |y|^2)^{s/2}\, |D_v P^{(p)}(v, y)| \leqslant C(D_v)\, |P(v, y)|.$$

Résulte de la proposition 2. 4 et du corollaire 2 de la proposition 2. 3. La constante $C(D_v)$ dépend de K.

Nous avons maintenant tout en main pour démontrer le théorème principal de ce chapitre.

§ 3. Le théorème principal.

Théorème 2. 1. — *Soient une variété indéfiniment différentiable* V, $\{P(v, D)\}$ *une famille formellement hypoelliptique, d'ordre* $m \geqslant 1$, C^∞ *sur* V. *Il existe deux nombres* > 0 s, d *tels* *qu'il existe une application indéfiniment différentiable* $\nu \to E(x, \nu)$ *de* V *dans* $A_{\mathrm{loc}}^{s,d}$ *telle qu'on ait, pour tout* $\nu \in V$, $P(\nu, D)E(x, \nu) = \delta_x$.

Principe de la démonstration.

Étant donné un ouvert relativement compact U quelconque de V, nous allons construire, pour tout $\nu \in U$, une solution élémentaire $E_U(x, \nu)$ de $P(\nu, D)$, sous forme d'une somme $F_U(x, \nu) + G_U(x, \nu)$ où $F_U(x, \nu)$ sera une fonction analytique de x, prolongeable aux valeurs complexes des variables $x_1, \ldots, x_n$ en une fonction analytique entière de type exponentiel; de plus, $F_U(x, \nu)$ sera une fonction indéfiniment différentiable de ν dans U à valeurs dans $\mathcal{E}_x$. Quant à $G_U(x, \nu)$, ce sera, pour deux nombres s, $d > 0$ convenablement choisis, une fonction indéfiniment différentiable de ν dans U à valeurs dans $A_{\mathrm{loc}}^{s,d}$.

Ceci aura prouvé le théorème 2. 1 pour U à la place de V. A partir de là, il suffira de se donner un recouvrement localement fini de V par des ouverts U_i ($i \in J$) relativement compacts, et une partition de l'unité $\{\alpha_i\}$ ($i \in J$) dans $\mathcal{D}(V)$, subordonnée à ce recouvrement, et de poser:

$$E(x, \nu) = \sum_{i \in J} \alpha_i(\nu) E_{U_i}(x, \nu);$$

$E(x, \nu)$ remplira manifestement les conditions de l'énoncé.

Notations.

Nous noterons K l'adhérence de l'ouvert relativement compact U. La proposition 2. 4 attache à la famille $\{P(\nu, D)\}$ et au compact K une fonction $h(M, H; y)$ dont nous appellerons $S(h)$ le support (compact); nous appellerons h le vecteur $(h(M, H; y), 0, \ldots, 0)$ de R^n. L'image de $S(h)$ par l'application $y \to y + ih$ est un compact de C^n; nous le noterons $L(h)$: précisément, c'est l'ensemble des $z \in C^n$ qui vérifient les conditions:

$$z_2^2 + \ldots + z_n^2 \leqslant M^2, |z_1| = H, \operatorname{Im} z_1 \geqslant 0 \qquad \text{(déf. 2. 6)}.$$

A part cela, nous écrirons plutôt $E(x, \nu)$, $F(x, \nu)$, $G(x, \nu)$ à la place respectivement de $E_U(x, \nu)$, $F_U(x, \nu)$, $G_U(x, \nu)$.

Enfin, m désignera l'ordre des opérateurs $P(\nu, D)$ et s le plus petit des nombres ainsi notés dans les corollaires 2 et 3 de la proposition 2. 3, et attachés par ces corollaires à la famille $\{P(\nu, D)\}$.

1° *Construction de* $F(x, \nu)$.

Appelons $\hat{F}(z, \nu)$ (pour $\nu \in U$) la fonction sur $L(h)$ égale à $\dfrac{1}{P(\nu, z)}$; en vertu de la proposition 2. 4, $|\hat{F}(z, \nu)| \leqslant 1$ pour tout $\nu \in K$ et tout $z \in L(h)$. Posons :

$$F(x, \nu) = \int_{L(h)} \hat{F}(z, \nu) \exp(2i\pi \langle x, z \rangle)\, dz$$

(dz est la mesure image par $y \to y + ih$ de la mesure dy sur $S(h)$). On voit immédiatement que $\hat{F}(z, \nu)$ est une fonction indéfiniment différentiable de ν dans U à valeurs dans $L^\infty_{L(h)}$ (espace L^∞ pour dz). De ce que $L(h)$ est compact résulte que $F(x, \nu)$ est une fonction analytique de x, prolongeable aux valeurs complexes de $x_1, \ldots, x_n$ en une fonction entière de type exponentiel, et $\nu \to F(x, \nu)$ est une fonction indéfiniment différentiable de ν dans U, à valeurs dans $\mathcal{E}_x$; il en résulte, en particulier, que, quel que soit le polynôme différentiel $Q(D)$ sur R^n et les nombres réels σ, τ, $\nu \to Q(D)\, F(x, \nu)$ est une fonction indéfiniment différentiable de ν dans U à valeurs dans $A^{\sigma, \tau}_{loc}$.

Ceci dit, si $\varphi \in \mathcal{D}_x$, on a :

$$\int F(x, \nu)\varphi(-x)\, dx = \int_{L(h)} \hat{F}(z, \nu)\hat{\varphi}(z)\, dz = \int_{S(h)} \frac{\hat{\varphi}(y + ih)}{P(\nu, y + ih)}\, dy.$$

Si (pour $\nu \in U$ fixé), $\varphi(x) = P(\nu, D)\psi(x)$, $\psi \in \mathcal{D}_x$, on aura :

$$\int F(x, \nu)\varphi(-x)\, dx = \int_{L(h)} \hat{\psi}(z)\, dz = \int_{S(h)} \hat{\psi}(y)\, dy,$$

la dernière égalité provenant du fait que $L(h)$ et $S(h)$ sont homotopes dans C^n et compacts et que $\hat{\psi}(z)$ est une fonction entière. Enfin, comme $\varphi(-x) = P(\nu, -D)\ (\psi(-x))$ et que le transposé de $P(\nu, -D)$ est $P(\nu, D)$, on voit que :

$$(2.\ 1) \qquad \int [P(\nu, D)\, F(x, \nu)]\ \psi(-x)\, dx = \int_{S(h)} \hat{\psi}(y)\, dy.$$

2° *Construction de* $G(x, \nu)$.

Appelons $\hat{G}(y, \nu)$ ($\nu \in U$) la fonction sur R^n égale à 0 pour $y \in S(h)$ et à $\dfrac{1}{P(\nu, y)}$ ailleurs. Le corollaire 2 de la proposition 2. 4 montre que $(1 + |y|^2)^{s/2}\ \hat{G}(y, \nu)$ est, pour tout $\nu \in U$, une fonction bornée sur R^n. Si donc $G(x, \nu)$ désigne la transformée de Fourier réciproque de $\hat{G}(y, \nu)$, on voit que $G(x, \nu) \in A^s$ pour tout $\nu \in U$. Si $\varphi \in \mathcal{D}_x$:

$$\langle G(x, \nu), \varphi(-x)\rangle = \int_{R^n} \hat{G}(y, \nu)\hat{\varphi}(y)\, dy,$$

et si $\varphi = P(\nu, D)\psi$, avec $\psi \in \mathcal{D}_x$:

$$(2.\ 2)\quad \langle G(x, \nu), \varphi(-x)\rangle = \langle P(\nu, D)G(x, \nu), \psi(-x)\rangle = \int_{\complement S(h)} \hat{\psi}(y)\, dy.$$

Il nous faut maintenant étudier $G(x, \nu)$. Pour obtenir un peu plus que le théorème 2. 1, nous allons faire intervenir un polynôme différentiel $Q(D)$ sur R^n qui possède la propriété suivante :

(W) *Il existe $\nu_0 \in V$, un nombre $a \geqslant 0$, un nombre $r > 0$ tel qu'on ait, pour tout $y \in R^n$* :

$$(1 + |y|^2)^{a/2}\, |Q(y)| \leqslant A(1 + |P(\nu_0, y)|),$$
$$(1 + |y|^2)^{r/2}\, |Q^{(p)}(y)| \leqslant A(1 + |P(\nu_0, y)|)$$

pour tout $p \in N^n$, $p \neq 0$, A étant une constante positive finie, indépendante de p et de y.

Il découle du corollaire 1 de la proposition 2. 4 que (W) est équivalente à :

(W′) *Il existe un nombre $a \geqslant 0$, un nombre $r > 0$ et, pour chaque compact H de V, une constante $A(H)$, $0 \leqslant A(H) < +\infty$, tels que, pour tout $y \in \complement S(h)$ et tout $\nu \in H$*

$$(1 + |y|^2)^{a/2}\, |Q(y)| \leqslant A(H)\, |P(\nu, y)|,$$
$$(1 + |y|^2)^{r/2}\, |Q^{(p)}(y)| \leqslant A(H)\, |P(\nu, y)|$$

pour tout $p \in N^n$, $p \neq 0$.

Remarque. — Supposons que $Q(y) = 1$; alors $Q(D)$ vérifie (W) où l'on peut choisir $a = s$ et pour r, n'importe quel nombre > 0. Si $Q(D) = P(\nu_0, D)$ ($\nu_0 \in V$), $Q(D)$ vérifie aussi (W) et l'on peut prendre $a = 0$ et $r = s$.

Ceci dit, soit $p \in N^n$ arbitraire, D_v un opérateur différentiel quelconque sur V, dont l'ordre sera noté ω. La transformée de Fourier de $x^p D_v[Q(D)\, G(x, \nu)]$ est $D_y^p D_v[Q(y)\, \hat{G}(y, \nu)]$ (D_y^p opérant au sens des distributions). D'après la définition de $\hat{G}(y, \nu)$, $D_v[Q(y)\, \hat{G}(y, \nu)]$ est une fonction indéfiniment différentiable de y dans $\complement S(h)$ et nulle dans $S(h)$. Par conséquent,

$D_y^p D_v[Q(y)\,\hat{G}(y, v)]$ est la somme d'une distribution $f(y, v)$ portée par la frontière $\dot{S}(h)$ de $S(h)$ et de la fonction $\hat{g}(y, v)$ nulle sur $S(h)$ et égale, pour $y \in \complement S(h)$, à $D_y^p D_v\left[\dfrac{Q(y)}{P(v, y)}\right]$

Comme $\dot{S}(h)$ est compacte, la transformée de Fourier réciproque de $\hat{f}(y, v)$ est une fonction analytique $f(x, v)$ de x; on vérifierait sans peine que $v \to f(x, v)$ est une application continue de U dans $\mathcal{E}_x$.

Pour $y \in \complement S(h)$ (et $v \in U$), $\hat{g}(y, v)$ est de la forme $R(v, y)/[P(v, y)]^{|p|+\omega+1}$, où $R(v, y)$ est une somme (finie) de termes de la forme :

$$(2.\ 3)\qquad [D_y^{q_0}Q(y)][D_y^{q_1}(D_v)_1 P(v, y)] \ldots [D_y^{q_k}(D_v)_k P(v, y)].$$

Les $(D_v)_j (1 \leqslant j \leqslant k)$ sont des opérateurs différentiels sur V, dont la somme des ordres est égale à ω; $q_j \in N^n (0 \leqslant j \leqslant k)$ et $q_0 + q_1 + \cdots + q_n = p$; $k = |p| + \omega$. Remarquons que, du fait que $\deg P(v, y) = m$ (et donc $\deg Q \leqslant m$), tous les $|q_j| (0 \leqslant j \leqslant k)$ sont $\leqslant m$.

Appelons $i(h)$ la fonction, définie et à valeurs dans N, égale à 0 si $h = 0$ et à $\left[\dfrac{h-1}{m}\right] + 1$ si $h \geqslant 1$. Je dis que le nombre d'indices $j = 1, \ldots, k$ pour lesquels $q_j \neq 0$ est au moins égal à $i(|p-q_0|)$. En effet, supposons que ce nombre soit $\leqslant i(|p-q_0|)-1$. Cela signifierait que $|q_1 + \cdots + q_k| \leqslant m\big(i(|p-q_0|)\big) - m$. Mais d'après la définition, $m(i(h)-1) \leqslant h-1$, donc $|q_1 + \cdots + q_k|$ devrait être $\leqslant |p-q_0| - 1$, contrairement au fait que $q_0 + q_1 + \cdots + q_k = p$.

Appliquons maintenant le corollaire 4 de la proposition 2. 4 : il existe une constante finie B telle que, pour tout $v \in K (= \overline{U})$, tout $y \in \complement S(h)$, et tout $j = 1, \ldots, k$ pour lequel $q_j \neq 0$, on ait :

$$|D_y^{q_j}(D_v)_j P(v, y)| \leqslant B(1 + |y|^2)^{-s/2}\,|P(v, y)|.$$

Supposons d'abord $q_0 = 0$. Tenons compte de (W'), de l'inégalité précédente, et du corollaire 3 de la proposition 2.4 appliqué aux $(D_v)_j P(v, y)$ d'indices j $(1 \leqslant j \leqslant k)$ pour lesquels $q_j = 0$. Nous obtenons : pour tout $v \in K$, et tout $y \in \complement S(h)$, le terme (2. 3) est majoré, en valeur absolue, par :

$$C(1 + |y|^2)^{-\frac{s}{2}i(|p|)-\frac{a}{2}}\,|P(v, y)|^{k+1} \qquad (C < \infty).$$

Supposons maintenant $q_0 \neq 0$, et d'abord $p = q_0$. Appliquons (W') et le corollaire 3 de la proposition 2. 4, cette fois pour tous les $(D_v)_j P(\nu, y)$ $(1 \leqslant j \leqslant k)$. Le terme (2. 3) est majoré, en valeur absolue, quels que soient $\nu \in K$ et $y \in \complement S(h)$, par :

$$C(1 + |y|^2)^{-r/2} |P(\nu, y)|^{k+1} \qquad (C < \infty).$$

Remarquons que $|q_0| \leqslant m$, donc $\frac{|p|}{m} \leqslant 1$ dans ce cas. La quantité précédente peut être majorée par

$$C(1 + |y|^2)^{-\frac{1}{2}(r-s)-\frac{s}{2}\frac{|p|}{m}} |P(\nu, y)|^{k+1}.$$

Supposons enfin $q_0 \neq 0$ et $|p| \geqslant |q_0| + 1$; il en résulte que $i(|p - q_0|) \geqslant |p|/m$ et donc que le terme (2. 3) est majoré, en valeur absolue, pour les mêmes ν et y que précédemment, par :

$$C(1 + |y|^2)^{-\frac{s}{2}\frac{|p|}{m}-\frac{r}{2}} |P(\nu, y)|^{k+1}.$$

En prenant la réunion des trois possibilités ci-dessus, en tenant compte (pour la première) de ce que $i(|p|) \geqslant \frac{|p|}{m}$, on voit qu'il existe une constante finie $B \geqslant 0$ telle que, pour tout $\nu \in U$ et tout $y \in R^n$, on ait :

$$|\hat{g}(y, \nu)| \leqslant B(1 + |y|^2)^{-\frac{1}{2}\inf(a, r-s, r)-\frac{s}{2}\frac{|p|}{m}}.$$

Ceci implique que la transformée de Fourier réciproque $g(x, \nu)$ de $\hat{g}(y, \nu)$ appartient à $A^{\inf(a, r-s, r)+|p|s/m}$ (et reste bornée dans cet espace lorsque ν parcourt U). Comme

$$x^p D_v[Q(D)\, G(x, \nu)] = f(x, \nu) + g(x, \nu)$$

et que $p \in N^n$ et D_v sont arbitraires, ceci prouve que $Q(D)\, G(x, \nu)$ est une fonction C^∞ de ν, dans U, à valeurs dans $(A_{\text{loc}}^{\inf(a, r-s, r), s/m})_x$.

3° *La solution élémentaire.*

Posons donc, pour $\nu \in U$, $E(x, \nu) = F(x, y) + G(x, \nu)$.

Tout d'abord, en vertu des formules (2. 1) et (2. 2), si $\psi \in \mathcal{D}_x$:

$$< P(\nu, D)\, E(x, \nu), \psi(-x) > = \int_{R^n} \hat{\psi}(y)\, dy = \psi(0),$$

ce qui signifie que $P(\nu, D)\, E(x, \nu) = \delta_x$ pour tout $\nu \in U$.

D'autre part, si Q(D) est un polynôme différentiel vérifiant (W) (avec la signification de a et de r qui s'y trouve), alors Q(D) E(x, ν) est une fonction C^∞ de ν dans U, à valeurs dans $(A_{\mathrm{loc}}^{\inf(a,\, r-s,\, r),\, s/m})_x$.

Pour obtenir le théorème 2. 1, on choisit Q(D) = 1 et, par exemple, $r = 2s$; a est pris égal à s ; ceci donne $\inf(a, r-s, r) = s$. On constate que le nombre d de l'énoncé peut être pris égal à s/m. Signalons cependant que, dans de nombreux cas, par exemple celui des opérateurs elliptiques ou paraboliques, on peut améliorer cette estimation de d. Pour les elliptiques, par exemple, on peut prendre $d = 1$.

Lorsque Q(D) n'est plus forcément égal à 1, on obtient les précisions suivantes (dont la dernière partie nous sera nécessaire au chapitre III) :

Scholie. — *Soit un polynôme différentiel* Q(D) *sur* R^n *tel qu'il existe* $\nu_0 \in V$, *un nombre* $a \geqslant 0$, *un nombre* $r > 0$ *et une constante positive finie* A *tels qu'on ait, pour tout* $y \in R^n$ *et tout* $p \in N^n$, $p \neq 0$:

$$(1 + |y|^2)^{a/2}\, |Q(y)| \leqslant A(1 + |P(\nu_0, y)|),$$
$$(1 + |y|^2)^{r/2}\, |Q^{(p)}(y)| \leqslant A(1 + |P(\nu_0, y)|).$$

Soit, pour chaque $\nu \in V$, E(x, ν) *la solution élémentaire de* P(ν, D) *construite dans la preuve du théorème* 2. 1. *Alors* Q(D) E(x, ν) *est une fonction* C^∞ *de* ν *dans* V, *à valeurs dans* $(A_{\mathrm{loc}}^{\inf(a,r-s,r),\, s/m})_x$.

En particulier, si Q(D) = P(ν_0, D), *les conditions précédentes sont satisfaites pour* $a = 0$, $r = s$. *Ainsi* P(ν_0, D) E(x, ν) *est une fonction* C^∞ *de* ν, *dans* V, *à valeurs dans* $(A_{\mathrm{loc}}^{0,\, s/m})_x$.

§ 4. Le problème de la réciproque du théorème principal.

Soient une variété V indéfiniment différentiable et une famille $\{P(\nu, D)\}$ d'opérateurs différentiels à coefficients constants sur R^n, d'ordre borné et C^∞ sur V. Supposons que, pour chaque $\nu \in V$, il existe une solution élémentaire E(x, ν) de P(ν, D) telle que, lorsque ν varie, ce soit une fonction indéfiniment différentiable de ν à valeurs dans un certain espace $A_{\mathrm{loc}}^{s,\, d}$ avec $d > 0$. A condition de supposer V connexe, on peut légitimement se demander si alors la famille $\{P(\nu, D)\}$ n'est pas nécessairement formellement hypoelliptique.

La fin de ce chapitre sera presque entièrement consacrée à apporter une réponse aussi complète que possible à cette question.

Dans le présent paragraphe, nous commencerons par exhiber un contre-exemple simple, lequel montrera que, sans hypothèses supplémentaires, la réponse est négative. Ce contre-exemple suggèrera la nature de l'hypothèse à faire. Le paragraphe suivant sera entièrement consacré à la formulation précise de cette hypothèse, et à montrer qu'elle équivaut à la possibilité d'écrire les $P(\nu, D)$ sous une forme remarquable. Le paragraphe final contiendra la preuve que, sous cette hypothèse (qui concerne la dépendance par rapport à ν des $P(\nu, D)$), la réponse à notre question initiale est positive.

Nous terminerons ce § 4 en établissant deux critères qui permettent de décider si un opérateur $P(D)$ est plus fort (définition 1. 2) qu'un autre opérateur $Q(D)$. Nous aurons besoin des deux pour la preuve du théorème final.

1. Le contre-exemple.

Nous prendrons, comme variété V (avec bord !), l'intervalle fermé $(0,1)$ muni de sa structure différentiable usuelle. Nous noterons x ou y la variable dans R^1 (suivant que nous serons côté objet ou côté image pour la transformation de Fourier). Le contre-exemple sera fourni par :

$$P\left(t, \frac{d}{dx}\right) = e^{-1/t} \frac{-1}{4\pi^2} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{-1}{2\pi} \frac{d}{dx} + 1,$$

opérateur différentiel auquel se trouve associé le polynôme $P(t, y) = e^{-1/t} y^2 + iy + 1$. Pour chaque $t \in (0, 1)$, la transformée de Fourier réciproque $E(x, t)$ de $\dfrac{1}{P(t, y)}$ est une solution élémentaire de $P\left(t, \dfrac{d}{dx}\right)$; lorsque t varie, il est visible que c'est une fonction continue de t à valeurs dans A^1. Notre propos est de prouver que c'est une fonction indéfiniment dérivable de t dans $(0, 1)$ (bord compris) à valeurs dans $A^{1/2, 1}$. Pour cela, nous nous appuierons essentiellement sur le fait que $e^{-1/t}$ a un zéro d'ordre infini en $t = 0$; et l'hypothèse qui sera formulée au § 5 aura précisément pour but d'éviter ce genre d'accidents.

Soient m et p deux entiers $\geqslant 0$ quelconques. La transformée de Fourier de $(-2i\pi x)^p \frac{d^m}{dt^m} \mathrm{E}(x, t)$ est $\frac{d^p}{dy^p}\frac{d^m}{dt^m}\frac{1}{\mathrm{P}(t, y)}$. Notons $\mathrm{P}'(t, y)$ la dérivée première de $\mathrm{P}(t, y)$ par rapport à y. En tenant compte de ce que la dérivée seconde de $\mathrm{P}(t, y)$ par rapport à y est $2e^{-1/t}$, c'est-à-dire est une fonction indéfiniment dérivable de t sur $(0, 1)$, on voit qu'il existe $m+1$ polynômes $\mathrm{Q}_q(\mathrm{X})$ à une variable $(q=0, 1, \ldots, m)$ et des fonctions $\mathrm{B}_{q;\, r,\, s_r}(t)$ indéfiniment dérivables de t sur $(0, 1)$, tels qu'on puisse écrire :

$$(2.\ 4) \quad \frac{d^p}{dy^p}\frac{d^m}{dt^m}\frac{1}{\mathrm{P}(t, y)} = \sum_{q=0}^{m} \mathrm{Q}_q\left(\frac{1}{t}\right) e^{-q/t} \sum_{r=0}^{\inf(p,\, 2q)} \frac{y^{3q-r}}{\mathrm{P}(t, y)^{q+1+p-r}} \sum_{s_r} \mathrm{B}_{q;\, r,\, s_r}(t)\, [\mathrm{P}'(t, y)]^{s_r}$$

où la sommation par rapport à s_r porte sur un certain ensemble d'entiers $\leqslant p-r$. De plus, si $m=0$, $\mathrm{Q}_0(\mathrm{X})=1$; si $m=1$, $\mathrm{Q}_0(\mathrm{X})=0$. Ceci implique que les $\mathrm{Q}_q\left(\frac{1}{t}\right)e^{-q/t}$ sont, pour tout $q=0, 1, \ldots, m$, des fonctions continues de t sur $(0, 1)$. Si l'on se rappelle que $|\mathrm{P}(t, y)| \geqslant 1$ pour tout y réel et tout $t \in (0, 1)$, on tire de cela deux conclusions :

1° Pour tout y réel fixé, le premier membre de l'égalité (2. 4) est une fonction continue de t sur l'intervalle fermé $(0, 1)$.

2° Il existe une constante finie $\mathrm{M}(p, m)$ telle que, pour tout y réel, $|y| \leqslant 1$, et tout $0 \leqslant t \leqslant 1$,

$$(2.\ 5) \qquad \left|\frac{d^p}{dy^p}\frac{d^m}{dt^m}\frac{1}{\mathrm{P}(t, y)}\right| \leqslant \mathrm{M}(p, m).$$

Supposons maintenant $|y| \geqslant 1$. On a, quel que soit t, $0 \leqslant t \leqslant 1$, et quel que soit $|y| \geqslant 1$, $|\mathrm{P}'(t, y)| \leqslant \frac{2}{|y|}|\mathrm{P}(t, y)|$. En appliquant la formule (2. 4) pour $m=0$, on voit que, pour ces mêmes t et y, on a :

$$(2.\ 6) \quad \left|\frac{d^p}{dy^p}\frac{1}{\mathrm{P}(t, y)}\right| \leqslant \frac{\mathrm{A}(p)}{|y|^p}\frac{1}{|\mathrm{P}(t, y)|} \qquad (\mathrm{A}(p) < +\infty).$$

D'autre part, quels que soient y réel et $t \in (0, 1)$, on a $e^{-1/t}y^2 \leqslant |P(t, y)|$. On déduit alors de (2. 4) qu'il existe, si $m \geqslant 1$, un entier $\mu(m)$ et une constante finie $A(p, m)$ tels qu'on ait, pour tout y réel, $|y| \geqslant 1$, et tout $t > 0$:

$$(2.\ 7) \qquad \left|\frac{d^p}{dy^p}\frac{d^m}{dt^m}\frac{1}{P(t, y)}\right| \leqslant A(p, m)\frac{1}{t^{\mu(m)}}\frac{1}{|y|^p}\frac{e^{-1/t}y^2}{|P(t, y)|^2}.$$

Je dis que, quel que soit l'entier $\mu \geqslant 0$, il existe une constante finie $B(\mu)$ telle que, pour tout $0 < t \leqslant 1$ et tout y réel, $|y| \geqslant 1$, on ait :

$$(2.\ 8) \qquad e^{-1/t}y^2 \leqslant B(\mu)\, t^{\mu}|P(t, y)|^{3/2}.$$

Raisonnons par l'absurde, c'est-à-dire supposons que, pour tout entier k, il existe y_k réel, $|y_k| \geqslant 1$, et $t_k \in (0, 1)$, tels que $e^{-1/t}y_k^2 \geqslant kt_k^{\mu}\,|P(t_k, y_k)|^{3/2}$. On peut supposer que les t_k convergent vers 0, car si on avait $t_k \geqslant c > 0$ pour tout k, cette inégalité impliquerait $|P(t_k, y_k)| \geqslant kc^{\mu}\,|P(t_k, y_k)|^{3/2}$, donc

$$1 \geqslant kc^{\mu}\,|P(t_k, y_k)|^{1/2} \geqslant kc^{\mu},$$

ce qui est absurde. Tenons alors d'abord compte du fait que $|P(t, y)| \geqslant |y|$ (quels que soient y et t). On en déduit, pour tout k :

$$|y_k|^{1/2} \geqslant kt_k^{\mu}e^{1/t_k}.$$

Tenons maintenant compte de ce que $|P(t, y)| \geqslant e^{-1/t}\,y^2$ (pour tous y et t). On en déduit, pour tout k :

$$1 \geqslant kt_k^{\mu}e^{-\frac{1}{2t_k}}|y_k|.$$

Or, pour k assez grand (et donc t_k assez petit), ces deux inégalités sont incompatibles.

En tenant compte de (2. 8) dans l'inégalité (2. 7), on voit qu'il existe une constante $A'(p, m)$ finie, telle que, pour tout $t > 0$ et tout y réel, $|y| \geqslant 1$,

$$(2.\ 9) \qquad |P(t, y)|^{1/2}\,|y|^p\left|\frac{d^p}{dy^p}\frac{d^m}{dt^m}\frac{1}{P(t, y)}\right| \leqslant A'(p, m).$$

Mais d'après la continuité du 1^er^ membre par rapport à t, sur $(0, 1)$, lorsqu'on fixe y, cette inégalité reste vraie pour tout $t \in (0, 1)$. D'autre part, en tenant compte de (2. 6), moyennant éventuellement un nouveau choix de $A'(m, p)$, on voit qu'elle est vraie aussi lorsque $m = 0$. Enfin, en tenant compte de (2. 5), et du fait que si $|y| \leqslant 1$, $|P(t, y)| \leqslant 3$ (quel que soit t, $0 \leqslant t \leqslant 1$), on voit qu'on peut choisir $A'(m, p)$ de sorte que (2. 9) soit vraie aussi pour tout $|y| \leqslant 1$, autrement dit on peut faire ce choix de sorte que (2. 9) soit vraie pour tout y réel et tout $t \in (0, 1)$. Comme enfin $|P(t, y)|^{1/2} \geqslant (1 + y^2)^{1/4}$, ceci prouve exactement que $E(x, t)$ est une fonction indéfiniment dérivable de t sur $(0, 1)$ à valeurs dans $A^{1/2, 1}$.

2. Les critères de comparaison de deux polynômes différentiels.

Lemme 2. 1. — *Soient* $P(D)$, $Q(D)$ *deux polynômes différentiels sur* R^n. *On suppose* $P(D)$ *hypoelliptique et qu'il existe un ouvert* Ω *non vide de* R^n *ayant la propriété suivante : il existe une constante finie* M *telle que, pour toute* $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, *on ait :* $\|Q(D)\varphi\|_{L^2} \leqslant M\|P(D)\varphi\|_{L^2}$. *Alors* $Q(D)$ *est plus faible que* $P(D)$.

Résulte immédiatement du théorème 2. 2 et du lemme 3. 5 de Hörmander [1].

Pour le deuxième critère de comparaison, nous nous appuierons encore sur un résultat d'Hörmander ([2], théorème 3. 2), dont voici l'énoncé :

Soient $P(D)$, $Q(D)$ deux polynômes différentiels sur R^n; $P(D)$ est hypoelliptique. L'ensemble des nombres positifs q possédant la propriété suivante : il existe une constante finie C_q telle que, pour tout $y \in R^n$, $|Q(y)| \leqslant C_q(1 + |P(y)|)^q$, cet ensemble n'est pas vide et possède un élément minimal (pour l'ordre naturel sur l'ensemble des nombres positifs).

Nous pouvons alors énoncer notre deuxième critère :

Lemme 2. 2. — *Soient* $P(D)$, $Q(D)$ *deux polynômes différentiels sur* R^n. *On suppose que* $P(D)$ *est hypoelliptique et qu'il existe deux suites strictement croissantes d'entiers positifs* $\{n_k\}$, $\{m_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ *avec les propriétés suivantes : pour tout* k, $Q(D)^{n_k}$ *est plus faible que* $P(D)^{m_k}$ *et, lorsque* $k \to +\infty$, n_k/m_k *tend vers* 1. *Dans ces conditions,* $Q(D)$ *est plus faible que* $P(D)$.

En effet, nos conditions impliquent que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante finie C_ε telle que, pour tout $y \in R^n$, $|Q(y)| \leqslant C_\varepsilon(1 + |P(y)|)^{1+\varepsilon}$.

§ 5. Familles de type analytique.

Dans tout ce paragraphe, V sera supposée *connexe.* Comme de coutume, $\mathcal{E}_v$ est l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur V (à valeurs complexes).

Définition 2. 7. — *Un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}_v$ sera dit de type analytique si toute fonction appartenant à ce sous-espace et admettant un zéro d'ordre infini en un point de* V *est identiquement nulle sur* V.

Si V est analytique réelle, tout espace de fonctions analytiques ou quasi-analytiques sur V est de type analytique. Mais il faut insister sur le fait suivant : la définition 2. 7 ne concerne pas seulement les éléments d'un espace de type analytique pris individuellement, mais aussi le fait, pour ceux-ci d'appartenir simultanément au dit espace. Plus précisément, deux fonctions de $\mathcal{E}_v$ peuvent appartenir séparément à deux espaces de type analytique différents, sans qu'il existe d'espace de type analytique qui les contienne toutes les deux. Par exemple, le sous espace vectoriel à une dimension de $\mathcal{E}_v$ engendré par la fonction $1 + \exp(-1/t^2)$ (ici V est la droite réelle) est de type analytique, de même, évidemment, que celui engendré par la fonction 1. Mais tout espace vectoriel contenant à la fois 1 et $1 + \exp(-1/t^2)$ contient aussi la fonction $\exp(-1/t^2)$ donc n'est en aucun cas de type analytique. Cet exemple montre aussi que les éléments d'un espace de type analytique peuvent n'avoir aucune propriété d'analyticité ou de quasi-analyticité. Mais, dans l'espace de type analytique dans lequel on les considère, la donnée de toutes leurs dérivées en un point quelconque les détermine complètement ; c'est sur ce fait que nous allons nous appuyer.

Définition 2. 8. — *Soient un espace vectoriel de dimension finie* E *et une fonction $\vec{f}(v)$ définie sur* V, *à valeurs dans* E. *Nous dirons que $\vec{f}(v)$ est de type analytique sur* V *si, lorsque $\overleftarrow{e'}$ parcourt le dual de* E, *l'ensemble des fonctions scalaires $\langle \vec{f}(v), \overleftarrow{e'} \rangle$ constitue un espace de type analytique.*

Nous dirons que $\vec{f}(v)$ est de type analytique en un point v_0

de V s'il existe un voisinage ouvert de ce point sur lequel $\vec{f}(v)$ soit de type analytique.

Dire que $\vec{f}(v)$ est de type analytique équivaut à dire, manifestement, que les composantes de $\vec{f}(v)$ par rapport à une base quelconque de E engendrent un espace de type analytique. Remarquons qu'une fonction scalaire de type analytique est tout simplement une fonction indéfiniment différentiable sans zéro d'ordre infini (à moins que ce ne soit la fonction 0 !).

Nous pouvons maintenant parler de familles d'opérateurs différentiels sur R^n à coefficients constants, de type analytique sur V, pourvu qu'il s'agisse de familles d'ordre borné. Ce sera précisément là notre hypothèse :

(TA) $\{P(v, D)\}$ *est une famille d'ordre borné et de type analytique sur* V.

Toute la suite de la démonstration va montrer l'intérêt de cette condition.

LEMME 2. 3. — *Soient r suites $\beta_j = (b_{j,\mu})$ $(j = 1, \ldots, r;$ $\mu = 0, 1, \ldots)$ de nombres complexes, linéairement indépendantes sur* C. *On peut trouver r entiers $\geqslant 0$ $\mu_1, \ldots, \mu_r$ tels que la matrice (b_{j,μ_i}) $(i, j = 1, \ldots, r)$ soit inversible.*

Nous raisonnerons par récurrence sur r, le résultat étant trivial pour $r = 1$. Supposons-le vrai pour $r - 1$. Comme les suites $\beta_j(1 \leqslant j \leqslant r - 1)$ sont linéairement indépendantes, il existe une matrice $(r - 1) \times (r - 1)$ (b_{j,μ_i}) $(i, j = 1, \ldots, r - 1)$ inversible. Considérons alors la matrice :

$$B_k = \begin{pmatrix} b_{1,\mu_1} & \ldots & b_{1,\mu_{r-1}} & b_{1,k} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ b_{r-1,\mu_1} & \ldots & b_{r-1,\mu_{r-1}} & b_{r-1,k} \\ b_{r,\mu_1} & \ldots & b_{r,\mu_{r-1}} & b_{r,k} \end{pmatrix}$$

où k peut prendre toutes les valeurs entières $\geqslant 0$. Si dét $B_k = 0$, c'est qu'il existe une combinaison linéaire non triviale des lignes qui est nulle; dans cette combinaison linéaire, le coefficient de la dernière ligne ne peut être nul, sinon il existerait une combinaison linéaire non triviale des $r - 1$ premières lignes nulle, contrairement au fait que la matrice (b_{j,μ_i}) $(i, j = 1, \ldots, r - 1)$ est inversible. Autrement dit, si dét $B_k = 0$, il existe $r - 1$ nombres complexes c_k^j non tous nuls tels que $b_{r,\mu_i} = \sum_{j=1}^{r-1} c_k^j b_{j,\mu_i}$ pour tout $i = 1, \ldots, r$ (avec $\mu_r = k$). Mais il existe certainement au moins deux entiers k et k' tels que les systèmes (c_k^j) et $(c_{k'}^j)$ soient distincts, sinon cela voudrait dire que la suite β_r est combinaison linéaire des suites β_j $(1 \leqslant j \leqslant r-1)$, contrairement à l'hypothèse. Si donc on avait dét $B_k =$ dét $B_{k'} = 0$, on devrait avoir notamment pour tout $i = 1, \ldots, r-1$:

$$b_{r,\mu_i} = \sum_{j=1}^{r-1} c_k^j\, b_{j,\mu_i} = \sum_{j=1}^{r-1} c_{k'}^j\, b_{j,\mu_i}.$$

Mais le fait que la matrice (b_{j,μ_i}) $(i, j = 1, \ldots, r-1)$ soit inversible exige $c_k^j = c_{k'}^j$ pour tout $j = 1, \ldots, r-1$. Par conséquent, on ne peut avoir dét $B_k = 0$ et dét $B_{k'} = 0$.

C.Q.F.D.

Lemme 2. 4. — *Supposons* V *connexe. Soient* E *un espace vectoriel de dimension finie et* $\vec{f}(v)$ *une fonction définie dans* V, *à valeurs dans* E. *Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) $\vec{f}(v)$ *est de type analytique sur* V.

b) *Pour tout point* $v_0 \in V$, *il existe une famille finie d'opérateurs différentiels* $(D_v)_j$ *opérant au voisinage de* v_0 *et une famille finie de fonctions* $a_j(v) \in \mathcal{E}_v$ $(j = 1, \ldots, r)$ *tels qu'on ait, pour tout* $v \in V$:

$$\vec{f}(v) = \sum_{j=1}^{r} a_j(v)\left[(D_v)_j \vec{f}\right](v_0).$$

De plus, si l'on choisit les $(D_v)_j$ *de manière à ce que les vecteurs* $[(D_v)_j\vec{f}](v_0)$ *soient linéairement indépendants et que les fonctions* $a_j(v)$ *soient linéairement indépendantes, le nombre* r *est indépendant du point* v_0 (et évidemment, il existe un espace de type analytique qui contient toutes les a_j).

Supposons $\vec{f}(v)$ de type analytique sur V. Il existe μ vecteurs $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_\mu$ de E et μ fonctions $b_1(v), \ldots, b_\mu(v)$ de $\mathcal{E}_v$ tels que

$$\vec{f}(v) = \sum_{j=1}^{\mu} b_j(v)\vec{e}_j,$$

et il existe un espace de type analytique qui contient toutes les $b_j(v)$; on peut évidemment s'arranger pour que les vecteurs $\vec{e}_j$ et, d'autre part, les fonctions b_j, soient linéairement indépendants; dans ce cas, l'entier μ prend sa valeur minimum, que nous noterons r. Soit v_0 arbitraire dans V; donnons-nous un système de coordonnées locales au voisinage de v_0, ce qui nous permet de manipuler les monômes de dérivation D_v^p par rapport à ces coordonnées (p parcourt un certain espace N^ν, que nous ordonnerons totalement d'une façon arbitraire). Appelons β_j la suite $(D_v^p b_j(v_0))$ ($p \in N^\nu$) pour chaque $j = 1, \ldots, r$. Puisque les fonctions b_j sont linéairement indépendantes dans un même espace de type analytique, les suites β_j doivent être linéairement indépendantes. Nous pouvons appliquer le lemme 2. 3 : il existe r indices $p_1, \ldots, p_r$ tels que la matrice $r \times r$ $(D_v^{p_i} b_j(v_0))$ $(i, j = 1, \ldots, r)$ soit inversible. Or on a :

$$D_v^{p_i}\vec{f}(v_0) = \sum_{j=1}^{r} D_v^{p_i} b_j(v_0)\vec{e}_j \qquad (i = 1, \ldots, r).$$

Ceci permet d'exprimer les $\vec{e}_j$ en fonction des $D_v^{p_i}\vec{f}(v_0)$ (lesquels sont linéairement indépendants : cela montre qu'alors r ne dépend pas de v_0). On conclut aussitôt à (b).

Supposons maintenant (b) vérifié et, en même temps, que $\vec{f}(v)$ ne soit pas de type analytique, c'est-à-dire qu'il existe une forme linéaire $\overleftarrow{e'}$ sur E telle que $< \vec{f}(v), \overleftarrow{e'} >$ admette un zéro d'ordre infini en un point v_0 de V, sans être nulle en tout point de V. Prenons alors l'expression de $\vec{f}(v)$ qui figure dans (b), relativement au point v_0 en question. Elle permet d'écrire :

$$< \vec{f}(v), \overleftarrow{e'} > = \sum_{j=1}^{r} a_j(v) < (D_v)_j\vec{f}(v_0), \overleftarrow{e'} >$$
$$= \sum_{j=1}^{r} a_j(v)[(D_v)_j < \vec{f}(v), \overleftarrow{e'} >]_{v=v_0} = 0$$

et ceci est vrai quel que soit $v \in V$. Nous avons abouti à une contradiction.

§ 6. Démonstration et énoncé de la réciproque partielle du théorème principal.

Notre hypothèse sera donc que la famille $\{P(v, D)\}$ vérifie (TA). Nous servant de ceci et du lemme 2. 4, nous pourrons écrire, pour tout point v_0 de V :

$$P(v, D) = \sum_{j=1}^{r} a_j(v)\,[(D_v)_j P(v, D)]_{v=v_0},$$

où les $a_j(v) \in \mathcal{E}_v$ et où les $(D_v)_j$ sont des opérateurs différentiels sur un voisinage de v_0. Nous utiliserons ensuite l'existence d'une solution élémentaire $E(x, v)$ de $P(v, D_x)$ de classe C^∞ en v, à valeurs dans un espace $A^{s,d}_{\mathrm{loc}}$ $(d > 0)$, et les lemmes 2. 1, 2. 2, 2. 4, pour prouver que les $(D_v)_j P(v_0, D)$ sont plus faibles que $P(v_0, D)$, D'après l'expression précédente, cela entraîne que, pour tout $v \in V$, $P(v, D)$ est plus faible que $P(v_0, D)$ et donc, puisque v_0 est arbitraire dans V, que la famille $\{P(v, D)\}$ est formellement hypoelliptique.

1. Hypothèses provisoires.

Outre à (TA), nous ferons l'hypothèse suivante :

Il existe un élément $G(x, v)$ de $\mathcal{E}_v(\mathcal{D}'_x)$ pourvu des propriétés suivantes :

1° *Il existe un compact* K *de* R^n *tel que, pour tout* $v \in V$, *la distribution en* x $G(x, v)$ *ait son support dans* K.

Il résulte aussitôt de ceci que $T(x) \to G(x, v) * T(x)$ ($*$ désigne la convolution par rapport à x) est (pour chaque $v \in V$) une application linéaire continue de $\mathcal{D}'_x$ dans lui-même, et, lorsque v varie dans V, c'est une fonction C^∞ de v à valeurs dans $L_b(\mathcal{D}'_x; \mathcal{D}'_x)$. On a, pour toute $T(x) \in \mathcal{D}'_x$ et tout opérateur différentiel D_v sur V :

$$D_v[G(x, v) * T(x)] = [D_v G(x, v)] * T(x).$$

Nous supposerons que $G(x, v)$ possède aussi la propriété suivante :

2° *Pour tout ouvert borné* Ω *de* R^n, $f(x) \to G(x, v) * f(x)$ *définit un opérateur borné, que nous noterons* $G(v)$, *de* $L^2(\Omega)$ *dans* $L^2(R^n)$, *et* $G(v)$ *est une fonction* C^∞ *de* v *à valeurs dans* $L_b(L^2(\Omega); L^2(R^n))$. *Si* D_v *est un opérateur différentiel sur* V, *on a, pour toute* $f \in L^2(\Omega)$ $D_v G(v).f = [D_v G(x, v)] * f(x)$.

Enfin, $G(x, v)$ vérifiera la condition suivante :

3° $P(v, D_x)\, G(x, v) - \delta_x$ *est une fonction* $L(x, v)$ C^∞ *de* v *à valeurs dans* $(\mathcal{D}_K)_x$.

2. Construction de l'algèbre $\mathcal{C}$.

Considérons $\mathcal{E}_v(L_b(\mathcal{D}'_x; \mathcal{D}'_x))$ comme muni de sa structure naturelle d'algèbre sur le corps des complexes. Nous appellerons $\mathcal{A}$ la sous-algèbre de $\mathcal{E}_v(L_b(\mathcal{D}'_x; \mathcal{D}'_x))$ engendrée par l'application identique de $\mathcal{D}'_x$ sur lui-même, et par l'ensemble des opérateurs de convolution $D_v G(x, \nu) *$, D_v parcourant l'ensemble de tous les opérateurs différentiels sur V. Il est manifeste que $\mathcal{A}$ est une algèbre commutative, avec unité.

Soit Ω un ouvert borné quelconque de R^n.

I. *On peut identifier* $\mathcal{A}$ *à un sous-espace vectoriel de*

$$\mathcal{E}_v(L_b(L^2(\Omega);\ L^2(R^n))).$$

En effet, donnons-nous une famille finie quelconque

$$\{(D_v)_i\}\ (i = 1, 2, \ldots, s)$$

d'opérateurs différentiels sur V. Les propriétés de $G(x, \nu)$ font qu'on peut trouver s ouverts bornés Ω_i de R^n, avec $\Omega_1 = \Omega$, tels que, pour chaque $i \leqslant s - 1$,

$$(D_v)_i G(\nu) \in \mathcal{E}_v(L_b(L^2(\Omega_i);\ L^2(\Omega_{i+1})))$$

et que $(D_v)_s G(\nu) \in \mathcal{E}_v(L_b(L^2(\Omega_s);\ L^2(R^n)))$ de sorte que la composée $[(D_v)_s G(\nu)] \circ [(D_v)_{s-1} G(\nu)] \circ \cdots \circ [(D_v)_1 G(\nu)]$ définit un élément de $\mathcal{E}_v(L_b(L^2(\Omega);\ L^2(R^n)))$.

Considérons maintenant les $D'_v P(\nu, D)$ (D'_v : opérateur différentiel sur V); ce sont des éléments de $\mathcal{E}_v(L_b(\mathcal{D}'_x;\ \mathcal{D}'_x))$. Lorsque D'_v parcourt l'ensemble des opérateurs différentiels sur V, la réunion de l'ensemble des $D'_v P(\nu, D)$ et de $\mathcal{A}$ engendre une sous-algèbre $\mathcal{B}$ de $\mathcal{E}_v(L_b(\mathcal{D}'_x;\ \mathcal{D}'_x))$. Il est clair que $\mathcal{B}$ est une algèbre commutative (sur C), avec unité; $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{B}$.

Soit de nouveau Ω un ouvert borné quelconque de R^n.

II. *On peut identifier* $\mathcal{B}$ *à un sous-espace vectoriel de*

$$\mathcal{E}_v(L_b(\mathcal{D}(\Omega);\ L^2(R^n))).$$

En effet, donnons-nous deux familles finies quelconque $\{(D_v)_i\}$, $\{(D'_v)_j\}$ ($i = 1, \ldots, s$; $j = 1, \ldots, s'$) d'opérateurs différentiels sur V. Il est évident que

$$[(D'_v)_{s'} P(\nu, D)] \circ \cdots \circ [(D'_v)_1 P(\nu, D)]$$

définit un élément de $\mathcal{E}_v(L_b(\mathcal{D}(\Omega);\ \mathcal{D}(\Omega)))$. Il résulte alors de (I) que

$$[(D_v)_s G(\nu)] \circ \cdots \circ [(D_v)_1 G(\nu)] \circ [(D'_v)_{s'} P(\nu, D)] \circ \cdots \circ [(D_v)_1 P(\nu, D)]$$

définit bien un élément de $\mathcal{E}_v(L_b(\mathcal{D}(\Omega);\ L^2(R^n)))$.

Soit $\tilde{\mathfrak{D}}_x(\mathcal{E}_v)$ l'espace des fonctions indéfiniment dérivables de x, à support compact, à valeurs dans l'espace des fonctions C^∞ de v. Insistons sur le fait suivant : si $g(x, v) \in \tilde{\mathfrak{D}}_x(\mathcal{E}_v)$, il existe un compact H de R^n (dépendant de g) tel que $g(x, v)$ ait (en tant que fonction de x), pour tout $v \in V$, son support dans H.

Faisons opérer $\tilde{\mathfrak{D}}_x(\mathcal{E}_v)$ par convolution (en x) sur $\mathfrak{D}'_x$, ce qui le plonge dans $\mathcal{E}_v(L_b(\mathfrak{D}'_x; \mathfrak{D}'_x))$. On voit immédiatement que $\tilde{\mathfrak{D}}_x(\mathcal{E}_v) \cap \mathcal{B}$ est un idéal de $\mathcal{B}$. Nous noterons $\mathcal{C}$ l'algèbre quotient $\mathcal{B}/[\tilde{\mathfrak{D}}_x(\mathcal{E}_v) \cap \mathcal{B}]$ et $B \to \dot{B}$ la projection canonique de $\mathcal{B}$ sur $\mathcal{C}$. Évidemment, $\mathcal{C}$ est une algèbre (sur C), commutative, avec unité (notée $\dot{I}$). L'image $\dot{\mathcal{A}}$ de $\mathcal{A}$ par la projection canonique de $\mathcal{B}$ sur $\mathcal{C}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{C}$ contenant l'unité.

Tout opérateur différentiel D_v sur V applique l'idéal $\tilde{\mathfrak{D}}_x(\mathcal{E}_v) \cap \mathcal{B}$ dans lui-même, car il applique $\tilde{\mathfrak{D}}_x(\mathcal{E}_v)$ (resp. $\mathcal{B}$) dans lui-même. Par conséquent, D_v définit, par passage au quotient, une application linéaire $\dot{D}_v$ de $\mathcal{C}$ dans lui-même.

Pour simplifier, nous écrirons G au lieu de $G(x, v) *$ (opérateur de convolution sur $\mathfrak{D}'_x$) et P au lieu de $P(v, D)$; G et P sont des éléments de $\mathcal{B}$.

$$\text{(III)} \qquad \dot{G}\dot{P} = \dot{I}.$$

Cela résulte trivialement de la propriété 3° de $G(x, v)$. Il s'ensuit que si L_v est un champ de dérivations C^∞ sur V, on aura, pour tout entier $p \geqslant 1$:

$$\text{(IV)} \qquad \sum_{q=0}^{p} \binom{p}{q} (\dot{L}_v^{p-q}\dot{G})(\dot{L}_v^q\dot{P}) = 0.$$

3. L'algèbre $\mathcal{C}_0$.

Soit v_0 un point arbitraire de V. A tout $U(v) \in \mathcal{E}_v(L_b(\mathfrak{D}'_x; \mathfrak{D}'_x))$ nous pouvons faire correspondre sa valeur $U(v_0)$ en v_0 qui est un élément de $L_b(\mathfrak{D}'_x; \mathfrak{D}'_x)$ et $U(v) \to U(v_0)$ est homomorphisme, pour les structures d'algèbres sur C, de $\mathcal{E}_v(L_b(\mathfrak{D}'_x; \mathfrak{D}'_x))$ sur $L_b(\mathfrak{D}'_x; \mathfrak{D}'_x)$. Appelons-le « valeur en v_0 ». Il applique $\tilde{\mathfrak{D}}_x(\mathcal{E}_v)$ sur $\mathfrak{D}_x$ (ces deux espaces opérant convolutivement sur $\mathfrak{D}'_x$).

Nous noterons $\mathcal{A}_0$ (resp. $\mathcal{B}_0$) l'image de $\mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{B}$) par l'homomorphisme valeur en v_0. Il est clair que $\mathcal{A}_0$ et $\mathcal{B}_0$ sont deux algèbres commutatives avec unité. De (I) et de (II) résulte naturellement :

(I_0) *On peut identifier* $\mathcal{A}_0$ *à un sous-espace vectoriel de* $\mathrm{L}_b(\mathrm{L}^2(\Omega);\ \mathrm{L}^2(\mathrm{R}^n))$.

(II_0) *On peut identifier* $\mathcal{B}_0$ *à un sous-espace vectoriel de* $\mathrm{L}_b(\mathcal{D}(\Omega);\ \mathrm{L}^2(\mathrm{R}^n))$.

Les faits suivants sont triviaux : $\mathcal{D}_x \cap \mathcal{B}_0$ est l'image par la valeur en v_0 de $\tilde{\mathcal{D}}_x(\mathcal{E}_v) \cap \mathcal{B}$ et est donc un idéal de $\mathcal{B}_0$; appelons $\mathcal{C}_0$ l'algèbre quotient $\mathcal{B}_0/(\mathcal{D}_x \cap \mathcal{B}_0)$; l'homomorphisme « valeur en v_0 » induit un homomorphisme de $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{C}_0$ que nous noterons $\dot{\mathrm{B}} \to \dot{\mathrm{B}}_0$. Bien entendu, $\mathcal{C}_0$ est une algèbre commutative, avec unité (notée $\dot{\mathrm{I}}_0$) ; $\dot{\mathcal{A}}_0$, image de $\mathcal{A}$ par l'homomorphisme $\dot{\mathrm{B}} \to \dot{\mathrm{B}}_0$ ou bien image de $\mathcal{A}_0$ par la projection canonique de $\mathcal{B}_0$ sur $\mathcal{C}_0$, est une sous-algèbre de $\mathcal{C}_0$ qui contient l'unité.

De (III) et (IV) résulte qu'on a, dans $\mathcal{C}_0$, les équations suivantes :

$$(\mathrm{E}_0) \qquad \dot{\mathrm{G}}_0\dot{\mathrm{P}}_0 = \dot{\mathrm{I}}_0.$$

$$(\mathrm{E}_p) \qquad \sum_{q=0}^{p} \binom{p}{q} (\dot{\mathrm{L}}_v^{p-q}\dot{\mathrm{G}})_0(\dot{\mathrm{L}}_v^q\dot{\mathrm{P}})_0 = 0, \quad p = 1, 2, \ldots.$$

Dans $\mathcal{C}_0$ se produit un fait important (qui en général n'a pas d'équivalent dans $\mathcal{C}$) ; c'est le suivant :

(V) *Lorsque* D_v *parcourt l'ensemble des opérateurs différentiels sur* V, *les éléments* $(\dot{\mathrm{D}}_v\dot{\mathrm{P}})_0$ *engendrent un sous-espace vectoriel de* $\mathcal{C}_0$ *dont la dimension est finie.*

Cela résulte de l'hypothèse (TA). En effet, d'après la formule du début de ce paragraphe, on a :

$$[\mathrm{D}_v\mathrm{P}(v, \mathrm{D})]_{v=v_0} = \sum_{j=1}^{r} [\mathrm{D}_v a_j(v)]_{v=v_0}[(\mathrm{D}_v)_j\mathrm{P}(v, \mathrm{D})]_{v=v_0},$$

et ceci signifie que le sous-espace vectoriel engendré par les $[\mathrm{D}_v\mathrm{P}(v, \mathrm{D})]_{v=v_0}$ dans $\mathcal{B}_0$ admet les $[(\mathrm{D}_v)_j\mathrm{P}(v, \mathrm{D})]_{v=v_0}$ $(j = 1, \ldots, r)$ comme générateurs et est donc de dimension finie. Il doit en être de même du sous-espace engendré dans $\mathcal{C}_0$ par les $(\dot{\mathrm{D}}_v\dot{\mathrm{P}})_0$.

En particulier, si l'on se donne un champ de dérivations C^∞ L_v sur V, le sous-espace vectoriel engendré dans $\mathcal{C}_0$ par les $(\dot{\mathrm{L}}_v^k\dot{\mathrm{P}})_0$ $(k = 0, 1, \ldots)$ est de dimension finie. C'est ce fait que nous allons maintenant chercher à exploiter. Cela nous sera possible grâce au lemme algébrique du numéro suivant.

4. Un lemme algébrique.

Soit $\mathfrak{C}$ une algèbre sur le corps des complexes, commutative, avec unité (notée 1).

Lemme 2. 5. — *Considérons deux suites d'éléments de* $\mathfrak{C}$, (a_h), (b_k) $(h,\ k = 0, 1, \ldots)$, *vérifiant les relations suivantes:*

$$(e_0) \qquad a_0 b_0 = 1;$$

$$(e_p) \qquad \sum_{q=0}^{p} \binom{p}{q} a_{p-q} b_q = 0, \quad p = 1, 2, \ldots$$

Désignons par $\mathfrak{A}$ *la sous-algèbre de* $\mathfrak{C}$ *engendrée par* 1 *et par les* $a_h (h = 0, 1, \ldots)$ *et supposons que le sous-espace vectoriel de* $\mathfrak{C}$ *engendré par les* $b_k (k = 0, 1, \ldots)$ *soit de dimension finie.*

Dans ces conditions, il existe un entier $m \geqslant 0$ *qui jouit des propriétés suivantes:*

Pour tout entier $n > 0$ *et tout élément* $(r_1, \ldots, r_{m+n})$ *de* N^{m+n} *et tout élément* $(s_1, \ldots, s_n)$ *de* N^n, *l'élément* $a_{r_1} \ldots a_{r_{m+n}} b_{s_1} \ldots b_{s_n}$ *de* $\mathfrak{C}$ *appartient à* $\mathfrak{A}$.

La démonstration de ce lemme étant assez longue et parfaitement hétérogène au reste de ce travail, il nous a paru préférable de la renvoyer en appendice (voir Appendice I). En réalité, nous utiliserons le corollaire suivant du lemme 2. 5 (corollaire plus simple que le lemme 2. 5 mais que nous avons été incapable de démontrer directement) :

Corollaire 1. — *Avec les mêmes notations et sous les mêmes conditions que pour le lemme* 2,5, *et si* m *est l'entier qui figure dans le lemme* 2,5, *on a, pour tout entier* $k \geqslant 0$, *et tout entier* $n \geqslant 1$, $a_0^m b_k^n \in \mathfrak{A}$.

5. Utilisation du lemme algébrique.

Il est clair que nous allons appliquer le lemme 2. 5, en prenant: pour l'algèbre $\mathfrak{C}$, $\mathcal{C}_0$; pour éléments $a_h (h = 0, 1, \ldots)$, les $(\dot{\mathrm{L}}_v^h \dot{\mathrm{G}})_0$; pour éléments $b_k (k = 0, 1, \ldots)$, les $(\dot{\mathrm{L}}_v^k \dot{\mathrm{P}})_0$. Des équations (E_0) et (E_p) $(p = 1, 2, \ldots)$ et de la propriété (V), résulte que toutes les hypothèses du lemme 2. 5 sont satisfaites. Nous pouvons donc en appliquer le corollaire 1 :

(VI). *Il existe un entier* $m \geqslant 0$ *tel que, pour tous* $k, r \in \mathrm{N}$, $\dot{\mathrm{G}}_0^{m+r} (\dot{\mathrm{L}}_v^k \dot{\mathrm{P}})_0^r \in \dot{\mathcal{A}}_0$.

Remontons de C_0 à $\mathcal{B}_0$; (VI) signifie que $G_0^{m+r}(L_v^k P)_0^r \in \mathfrak{A}_0$ mod $\mathfrak{D}_x \cap \mathcal{B}_0$, ou encore, qu'il existe $A_{k,r} \in \mathfrak{A}_0$ et $\varphi_{k,r} \in \mathfrak{D}_x$ tels que $\mathcal{C}_0^{m+r}(L_v^k P)_0^r = A_{k,r} + \varphi_{k,r} *$.

Reprenons l'ouvert Ω (borné, non vide) dans R^n; il est clair que $\varphi_{k,r}*$ définit (par prolongement de $\mathfrak{D}(\Omega)$ à $L^2(\Omega)$) un opérateur borné de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(R^n)$. En vertu de (I_0), $A_{k,r} \in L_b(L^2(\Omega); L^2(R^n))$. Ces deux faits impliquent que $G_0^{m+r}(L_v^k P)_0^r$, *a priori* dans $L_b(\mathfrak{D}(\Omega); L^2(R^n))$ d'après (II), définit en réalité un opérateur borné de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(R^n)$, c'est-à-dire qu'il existe une constante finie $M_{k,r}$ telle que, pour toute $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$, on ait :

$$(2.10) \qquad \|G_0^{m+r}(L_v^k P)_0^r \varphi\|_{L^2} \leqslant M_{k,r}\|\varphi\|_{L^2}.$$

Prenons $\varphi = P_0^{m+r}\psi$; puisque $\dot{P}_0\dot{G}_0 = \dot{I}_0$, il existe $\varphi_r \in \mathfrak{D}_x$ tel que $G_0^{m+r}P_0^{m+r} = I_0 + \varphi_r *$, soit $G_0^{m+r}\varphi = \psi + \varphi_r * \psi$, et donc, d'après (2.10) :

$$(2.11) \qquad \|(L_v^k P)_0^r \psi\|_{L^2} \leqslant M_{k,r}\|P_0^{m+r}\psi\|_{L^2} + \|\chi * \psi\|_{L^2}, \qquad \chi \in \mathfrak{D}_x,$$

ceci étant vrai pour toute $\psi \in \mathfrak{D}(\Omega)$. Mais puisque Ω est borné (et que P_0 n'est pas nul) il existe (cf. lemme 2.7 de Hörmander [1]) une constante finie M'_r telle que, pour toute $\psi \in \mathfrak{D}(\Omega)$, $\|\chi * \psi\|_{L^2} \leqslant M'_r\|P_0^{m+r}\psi\|_{L^2}$. Compte tenu de ceci et de (2.11), on voit qu'il existe une constante finie $M'_{k,r}$ telle que, pour toute $\psi \in \mathfrak{D}(\Omega)$, on ait :

$$\|(L_v^k P(v_0, D))^r \psi\|_{L^2} \leqslant M'_{k,r}\|P(v_0, D)^{m+r}\psi\|_{L^2}.$$

Alors l'application du lemme 2.1 permet de déduire de cette majoration que $(L_v^k P(v_0, D))^r$ est plus faible que $P(v_0, D)^{m+r}$. Comme ceci est vrai pour tout $r \in N$, le lemme 2.2 permet d'affirmer que $L_v^k P(v_0, D)$ est plus faible que $P(v_0, D)$. Ceci est vrai pour tout entier $k \geqslant 0$, et aussi pour tout champ de dérivations $C^\infty L_v$ sur V.

Nous sommes maintenant en mesure d'utiliser le lemme suivant :

LEMME 2.6. — *Soit un voisinage ouvert* $U(v_0)$ *quelconque de* $v_0 \in V$; *soit* D_v *un opérateur différentiel sur* $U(v_0)$. *Il existe une famille finie* $\{(L_v)_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots, M)$ *de champs de dérivations* C^∞ *sur* V, *un nombre égal d'entiers* $\geqslant 0$, $k_1, \ldots, k_M$, *un nombre égal de fonctions de* $\mathcal{E}(V)$, $g_1(v), \ldots, g_M(v)$, *et un voisi-*

nage ouvert $U'(v_0)$ *de* v_0, *inclus dans* $U(v_0)$, *tels qu'on ait, sur* $U'(v_0)$:

$$D_v = \sum_{i=1}^{M} g_i(v)\,(L_v)_i^{k_i}.$$

Bornons-nous à esquisser la démonstration. Le résultat est purement local et nous pouvons donc nous ramener à un voisinage ouvert de l'origine dans R^ν (ν étant la dimension de V). Étant donné un système de coordonnées cartésiennes $x_1, \ldots, x_\nu$ dans R^ν, il suffit de démontrer le résultat pour les monômes de dérivation $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{p_1}, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x_\nu}\right)^{p_\nu}$. Il suffit de démontrer que tout monôme $X_1^{p_1} \ldots X_\nu^{p_\nu}$ (en ν indéterminées) peut se mettre sous la forme $\sum_{i=1}^{M} g_i L_i^{k_i}(X_1, \ldots, X_\nu)$, où ici les g_i sont des nombres réels et les L_i des formes linéaires réelles sur R^ν. Ce résultat est trivial pour $|p| = p_1 + \cdots + p_\nu = 0$ ou 1 (les k_i peuvent être nuls !). En raisonnant par récurrence sur $|p|$, on est immédiatement ramené à prouver le résultat pour $\nu = 2$ et pour le monôme $X_1 X_2^{m-1}$. Il est possible de déterminer $m+1$ nombres réels ξ^j $(j = 0, 1, \ldots, m)$ tels que $X_1 X_2^{m-1} = \sum_{j=0}^{m} \xi^j (X_1 + jX_2)^m$. En effet, les ξ^j doivent alors vérifier le système d'équations linéaires

$$\sum_{j=0}^{M} j^p \xi^j = \begin{cases} 0 \text{ si } p = 0, 1, \ldots, m-2, m \text{ (on convient que } 0^0 = 1). \\ \dfrac{1}{m} \text{ si } p = m-1. \end{cases}$$

On vérifie facilement que le déterminant de ce système d'équations est non nul (c'est le déterminant de Vandermonde $V(0, 1, \ldots, m)$).

Du lemme 2. 6 et de la conclusion à laquelle nous étions parvenus juste avant ce lemme, on conclut que pour tout opérateur différentiel D_v défini au voisinage de v_0, $D_v P(v_0, D)$ est plus faible que $P(v_0, D)$ ce qui démontre ce que nous désirions (sous nos hypothèses provisoires).

6. Espaces H^s, H^s_c, H^s_{loc}.

Afin d'obtenir une généralité satisfaisante dans l'énoncé du théorème que nous avons en vue, nous sommes obligés d'introduire de nouveaux espaces fonctionnels, d'ailleurs presque classiques dans la littérature. Soit $r \in \mathrm{R}$ quelconque. Voici, en bref, les définitions dont nous avons besoin :

H^r : espace des distributions tempérées $f(x)$ dont la transformée de Fourier $\hat{f}(y)$ est une fonction de carré sommable pour la mesure $(1+|y|^2)^r dy$; H^r est muni du produit hermitien $\int \hat{f}(y)\,\overline{\hat{g}(y)}\,(1+|y|^2)^r dy$, qui en fait un espace hilbertien.

H^r_K : espace formé des éléments de H^r qui ont leur support dans le compact K de R^n, muni de la topologie induite par H^r.

H^r_c : limite inductive (au sens vectoriel-topologique) des espaces H^r_K lorsque K parcourt la famille de tous les compacts de R^n.

$\mathrm{H}^r_{\mathrm{loc}}$: espace des distributions $f(x)$ sur R^n telles que $\alpha f \in \mathrm{H}^r$ pour toute $\alpha \in \mathcal{D}$; $\mathrm{H}^r_{\mathrm{loc}}$ est muni de la topologie la moins fine rendant continues toutes les applications $f \to \alpha f$ (α parcourant $\mathcal{D}$) de $\mathrm{H}^r_{\mathrm{loc}}$ dans H^r_c.

Pour une étude détaillée de ces espaces, voir par exemple Malgrange [2]. Nous aurons besoin du lemme suivant :

LEMME 2. 7. — *Soient deux réels quelconques r, s; $(f, g) \to f * g$ est une application bilinéaire continue de* $\mathrm{A}^r \times \mathrm{H}^s$ *dans* H^{r+s}.

Preuve directe très simple. Notons $\| \, \|_\sigma$ la norme dans H^σ. On a :

$$\|f * g\|_{r+s} = \|(1+|y|^2)^r f(y)\,(1+|y|^2)^s \hat{g}(y)\|_{\mathrm{L}^2_y} \leqslant$$
$$\|(1+|y|^2)^r \hat{f}(y)\|_{\mathrm{L}^\infty_y} \times \|(1+|y|^2)^s \hat{g}(y)\|_{\mathrm{L}^2_y} = \mathrm{N}_r(f)\|g\|_s.$$

Nous laissons au lecteur la preuve des corollaires suivants :

COROLLAIRE 1. — *Soit* K *un compact de* R^n; $(f, g) \to f * g$ *est une application bilinéaire continue de* $\mathrm{A}^r_{\mathrm{loc}} \times \mathrm{H}^s_\mathrm{K}$ *dans* $\mathrm{H}^{r+s}_{\mathrm{loc}}$.

COROLLAIRE 2. — *L'application qui, à chaque $f \in \mathrm{A}^r_{\mathrm{loc}}$, fait correspondre l'opérateur de convolution $f *$ de H^s_c dans $\mathrm{H}^{r+s}_{\mathrm{loc}}$ est une application linéaire continue de $\mathrm{A}^r_{\mathrm{loc}}$ dans $\mathrm{L}_b(\mathrm{H}^s_c; \mathrm{H}^{r+s}_{\mathrm{loc}})$.*

7. Énoncé et fin de la preuve du théorème.

Considérons une variété $\mathrm{C}^\infty \mathrm{V}$ et une famille $\{\mathrm{P}(\nu, \mathrm{D}_x)\}$ $(\nu \in \mathrm{V})$ de polynômes différentiels sur R^n, d'ordre borné et C^∞ sur V.

THÉORÈME 2. 2. — *On suppose que la variété* V *est connexe et que la famille* $\{P(\nu, D_x)\}$ *est de type analytique sur* V. *On fait en outre l'hypothèse suivante :*

(P) *Il existe une fonction indéfiniment différentiable de* ν, *dans* V, $E(x, \nu)$, *à valeurs dans* $\mathcal{D}'_x$ *qui possède les propriétés suivantes :*

(I) *Il existe un réel s tel que l'opérateur de convolution (en* x*)* $E(x, \nu)*$ *soit une fonction indéfiniment différentiable de* ν, *dans* V, *à valeurs dans* $L_b(H^0_c; H^s_{loc})$.

(II) *Pour toute fonction* $\alpha(x) \in \mathcal{D}_x$ *ayant son support dans le complémentaire de l'origine,* $\alpha(x)\,E(x, \nu)$ *est une fonction indéfiniment différentiable de* ν, *dans* V, *à valeurs dans* $\mathcal{D}_x$.

(III) *Pour tout* $\nu \in V$, $P(x, D_x)\, E(x, \nu) = \delta_x$.

Dans ces conditions, la famille $\{P(\nu, D_x)\}$ *est formellement hypoelliptique.*

Choisissons un entier $k \geqslant 0$ tel que $2k + s \geqslant 0$. Nous allons montrer que, sous les conditions de l'énoncé, la famille $\{(1 - \Delta_x)^k P(\nu, D_x)\}$ est formellement hypoelliptique. Des définitions 2. 1 et 2. 4 résulte immédiatement qu'il en sera de même de la famille $\{P(\nu, D)_x\}$.

Il est d'abord clair, en vertu de (II) (cf par exemple théorème 3. 4 et remarque 2, et théorème 3. 7, Hörmander [1]), que, pour chaque $\nu \in V$, $P(\nu, D_x)$ et donc aussi $(1 - \Delta_x)^k\, P(\nu, D_x)$ sont hypoelliptiques.

Soit $\omega \in \mathcal{D}_x$, de support S, égale à 1 sur un voisinage de 0. Appelons $E_k(x)$ la transformée de Fourier réciproque de $(1 + 4\pi^2|y|^2)^{-k}$. Posons alors :

$$G(x, \nu) = [\omega(x)E_k(x)] * [\omega(x)E(x, \nu)].$$

Nous allons montrer que $G(x, \nu)$ vérifie chacune de nos trois hypothèses provisoires (n° 1 du présent paragraphe) relativement à la famille $\{(1 - \Delta)^k P(\nu, D)\}$.

C'est trivial pour 1° : il suffit de prendre $K = S + S$.

Vérifions 2°. Soit Ω un ouvert borné de R^n. En remarquant que H^0 n'est pas autre chose que $L^2(R^n)$, il résulte des propriétés de $E(x, \nu)$ que l'opérateur de convolution $[\omega(x)E(x, \nu)]*$ est une fonction C^∞ de ν à valeurs dans $L_b(L^2(\Omega); H^s)$. Mais il est manifeste que $E_k(x)*$ applique continûment H^s dans H^{s+2k} et, *a fortiori*, puisque $2k + s \geqslant 0$, dans $H^0 = L^2(R^n)$. De là aussitôt 2°.

Vérifions enfin 3°. Posons $L(x, \nu) = (1-\Delta)^k P(\nu, D) G(x, \nu) - \delta_x$. Comme $(1-\Delta)^k E_k(x) = \delta_k$, il existe $\alpha \in \mathcal{D}_x$ ayant son support dans $\complement \{0\}$ telle que :

$$L(x, \nu) = (1-\Delta)^k P(\nu, D) [\alpha(x) G(x, \nu)].$$

Comme $E_k(x)$ est indéfiniment différentiable dans le complémentaire de l'origine, il résulte immédiatement de la propriété (II) de $E(x, \nu)$ que $L(x, \nu)$ est une fonction C^∞ de ν à valeurs dans $\mathcal{E}_x$ et, en réalité, à valeurs dans $(\mathcal{D}_K)_x$.

C.Q.F.D.

Remarque. — Il est clair, d'après la preuve, que nous aurions pu remplacer la propriété (I) par la suivante :

(I′) *Il existe un réel s et un voisinage compact* L *de* 0 *dans* R^n *tels que* $E(x, \nu) *$ *soit une fonction* C^∞ *de* ν *à valeurs dans* $L_b(H^0_L; H^s_{loc})$.

En fait, on aurait pu «localiser» entièrement la propriété (P).

Proposition 2. 5. — *Supposons la variété* V *connexe et la famille* $\{P(\nu, D)_x\}$ *de type analytique sur* ν. *La propriété* (P) *du théorème* 2. 2 *est équivalente à chacune des propriétés suivantes :*

(FHE) *La famille* $\{P(\nu, D_x)\}$ *est formellement hypoelliptique.*

(P′) *Il existe deux nombres* > 0, s, d, *et une fonction* $E(x, \nu)$ C^∞ *de* ν *dans* V, *à valeurs dans* $(A^{s,d}_{loc})_x$, *tels que* $P(\nu, D_x) E(x, \nu) = \delta_x$ *pour tout* $\nu \in V$.

(P″) *Il existe* s *réel,* $d > 0$, *et une fonction* $E(x, \nu)$ C^∞ *de* ν *dans* V, *à valeurs dans* $(A^{s,d}_{loc})_x$, *tels que* $P(\nu, D_x) E(x, \nu) = \delta_x$ *pour tout* $\nu \in V$.

(P′) $\Longrightarrow$ (P″) trivialement. Puisque nous supposons V connexe et la famille $\{P(\nu, D)\}$ de type analytique sur V, (P) $\Longrightarrow$ (FHE) d'après le théorème 2. 2 Et (FHE) $\Longrightarrow$ (P′) d'après le théorème 2. 1.

Reste donc à prouver que (P″) $\Longrightarrow$ (P). Pour cela, remarquons que $A^{s,d}_{loc}$ est plongé continûment dans A^s_{loc}. Le corollaire 2 du lemme 2. 7 montre alors que $f(x) \to f(x) *$ applique continûment $A^{s,d}_{loc}$ dans $L_b(H^0_c; H^s_{loc})$. Par conséquent, $E(x, \nu) *$ est une fonction C^∞ de ν à valeurs dans $L_b(H^0_c; H^s_{loc})$, ce qui prouve la partie (I) de (P). La partie (II) résulte du corollaire 2 de la proposition 1. 9. Enfin, (III) est trivialement vérifiée.

§ 7. Autres familles de polynômes différentiels hypoelliptiques.

Soit $u \in L(R^n; R^n)$, représenté par la matrice (u_j^i) dans le système de coordonnées (x_i). Nous noterons $P(uD_x)$ le polynôme différentiel associé au polynôme $P(u_1^1 y_1 + \cdots + u_1^n y_n, \ldots, u_n^1 y_1 + \cdots + u_n^n y_n)$. Reprenons maintenant la variété V et considérons une famille $\{P(v, D_x)\}$ de polynômes différentiels sur R^n, C^∞ et d'ordre borné sur V.

DÉFINITION 2. 9. — *Nous dirons que la famille* $\{P(v, D)\}$ *est quasi formellement hypoelliptique s'il existe une fonction* C^∞ *de* v, *à valeurs dans* $L(R^n; R^n)$, $u(v)$, *qui soit, pour chaque* $v \in V$, *un automorphisme de* R^n, *et telle que la famille* $\{P(v, u(v) D)\}$ *soit formellement hypoelliptique.*

On peut démontrer, au sujet de ces familles, le résultat suivant :

THÉORÈME 2. 3. — *Soient une variété* $C^\infty V$, $\{P(v, D)\}$ *une famille quasi formellement hypoelliptique, d'ordre* $m \geqslant 1$, *sur* V. *Il existe deux nombres* > 0 s, d, *et un nombre* k, $0 \leqslant k < 1$, *enfin un élément* $E(x, v)$ *de* $\mathcal{E}_v(k; A_{loc}^{s,d})$ (⁷) *tel qu'on ait, pour tout* $v \in V$, $P(v, D_x) E(x, v) = \delta_x$.

La preuve suit pas-à-pas celle du théorème 2. 1, avec les adaptations qui s'imposent. Bornons-nous à signaler que l'une des articulations essentielles du raisonnement est constituée par le fait suivant :

Il existe $s > 0$, $0 \leqslant k < 1$, tels que, pour tout opérateur différentiel D_v sur V (dont l'ordre est noté μ) et tout compact K de V, il existe une constante finie $A(D_v, K)$ telle que, pour tous $v \in K$ et $y \in R^n$, on ait (en posant $\omega = \inf(m, \mu)$) :

$$|D_v P(v, y)| \leqslant A(D_v, K)\,(1 + |y|)^{k\omega}\,(1 + |P(v, y)|)$$

et, pour tout $p \in N^n$, $p \neq 0$:

$$(1 + |y|)^s |D_v P^{(p)}(v, y)| \leqslant A(D_v, K)\,(1 + |y|)^{k\omega}\,(1 + |P(v, y)|).$$

(⁷) Le rôle des espaces E_r (voir chap. I, § 3) est tenu ici par les espaces $A_{loc}^{r,d}$, $d > 0$ étant fixe et r parcourant R.

La propriété du théorème 2. 3 n'est pas un apanage des familles quasi formellement hypoelliptiques :

Considérons, pour t réel, $|t| \leqslant 1$,

$$\mathrm{P}(t, y) = 1 + y_1^2 + y_2 + ity_1y_2^3 :$$

1° *la famille* $\{\mathrm{P}(t, \mathrm{D}_x)\}$ *n'est pas quasi formellement hypoelliptique*; 2° *il existe* $s > 0$, $d > 0$ *et* $k < 1$ $(k \geqslant 0)$, *tels qu'on ait, pour un élément* $\mathrm{E}(x, t)$ *de* $\mathcal{E}_t(k; \mathrm{A}^{s,d}_{\mathrm{loc}})$, *pour tout* $t \in (-1, 1)$, $\mathrm{P}(t, \mathrm{D}_x)\, \mathrm{E}(x, t) = \delta_x$.

Preuve de 1°.

Posons $\mathrm{P}_0(y) = 1 + y_1^2 + y_2^4$, $\mathrm{P}_1(y) = y_1y_2^3$. On a :

$$\mathrm{P}(t, y) = \mathrm{P}_0(y) + it\mathrm{P}_1(y).$$

Soient alors deux automorphismes u_0 et u de R^2. Nous aurons prouvé 1° si nous prouvons que $\mathrm{P}_0(u_0y)$ et $\mathrm{P}(t, uy)$, pour $t \neq 0$, ne peuvent être équivalents. Remarquons que s'ils l'étaient, alors $\mathrm{P}_0(y)$ et $\mathrm{P}(t, uu_0^{-1}\, y)$ seraient équivalents, et réciproquement. Ceci signifie que nous pouvons supposer $u_0 =$ automorphisme identique de R^2. Prouvons d'abord que si l'un des deux polynômes $\mathrm{P}_0(y)$, $\mathrm{P}_0(uy)$, est plus faible que l'autre, ils sont alors nécessairement équivalents. Si, par exemple, $\mathrm{P}_0(uy)$ est plus fort que $\mathrm{P}_0(y)$, on doit avoir $u_2^1 = 0$ (rappelons que $uy = (u_1^1y_1 + u_1^2y, u_1^2y_2 + u_2^2y_2)$, sinon, pour $y_2 = r \geqslant 0$ et $y_1 = (u_2^1)^{-1}u_2^2y_2$, $|\mathrm{P}_0(uy)|$ serait de l'ordre de r^2 alors que $|\mathrm{P}_0(y)|$ serait de l'ordre de r^4. Mais puisque $u_2^1 = 0$, $\mathrm{P}_0(uy)$ est de la forme $1 + (ay_1 + by_2)^2 + y_2^4$, avec $a \neq 0$ (car u est un automorphisme), manifestement équivalent à $1 + y_1^2 + y_2^4$.

Prouvons maintenant 1°. Première possibilité : $\mathrm{P}_0(uy)$ est équivalent à $\mathrm{P}_0(y)$. Prenons alors $y_1 = r^2$ $(t \in \mathrm{R})$, $y_2 = r$. On a : $\mathrm{P}_0(y) = 1 + 2r^4$; $\mathrm{P}_1(y) = r^5$; lorsque $r \to \infty$, $|\mathrm{P}_1(y)|/|\mathrm{P}_0(y)|$ tend vers $+\infty$. Ceci entraîne bien que $\mathrm{P}(t, uy)$ n'est pas, pour $t \neq 0$, plus faible que $\mathrm{P}_0(y)$. Deuxième possibilité : $\mathrm{P}_0(uy)$ n'est pas équivalent à $\mathrm{P}_0(y)$. Mais alors $\mathrm{P}_0(uy)$ n'est pas plus faible que $\mathrm{P}_0(y)$; il y a donc une suite $\{y_k\}$ dans R^2 telle que, si $k \to \infty$, $|\mathrm{P}_0(uy_k)|/|\mathrm{P}_0(y_k)|$ tend vers l'infini. Comme $|\mathrm{P}(t, uy)| \geqslant |\mathrm{P}_0(uy)|$, ceci prouve bien que $\mathrm{P}(t, uy)$ n'est pas plus faible que $\mathrm{P}_0(y)$.

Preuve de 2°.

Pour tout $p \in \mathrm{N}^2$, $p \neq 0$, et tout $y \in \mathrm{R}^2$, on a :

$$|\mathrm{P}_0^{(p)}(y)| \leqslant \mathrm{A}_0(1 + |y|)^{-1}|\mathrm{P}_0(y)| \quad (\mathrm{A}_0 < +\infty).$$

Il existe d'autre part une constante finie A_1 telle qu'on ait, pour tout $y \in R^2$ et tout $t \in (-1, 1)$:

$$|tP_1^{(p)}(y)| \leqslant A_1(1 + |y|)^{-1} |P(t, y) \qquad \text{si} \qquad p_1 \geqslant 1;$$

et si $p_1 = 0$, $p_2 \geqslant 1$:

$$|tP_1^{(p)}(y)| \leqslant A_1(1 + |y_2|)^{-1} |P(t, y)|,$$
$$|tP_1^{(p)}(y)| \leqslant A_1(1 + |y_1|)^{-1/3} |P(t, y)|.$$

Ceci prouve qu'il existe une constante finie A telle que, pour tous $y \in R^2$, $t \in (-1, 1)$ et $p \in N^2$, $p \neq 0$:

$$(2.\ 12) \qquad |P^{(p)}(t, y)| \leqslant A(1 + |y|)^{-1/3} |P(t, y)|.$$

Ces inégalités prouvent d'abord que $P(t, D_x)$ est hypoelliptique, pour tout $t \in (-1, 1)$.

Remarquons, d'autre part, que, pour tous $y \in R^2$, $t \in (-1,1)$:

$$(2.\ 13) \quad |P_1(y)| \leqslant \sqrt{|y_1|}\, |P_0(y)| \leqslant (1 + |y|)^{1/2} |P(t, y)|.$$

Si enfin $p \in N^2$, $p \neq 0$, on a, pour ces y et ces t :

$$|P_1^{(p)}(y)| \leqslant 3\,!\, |P_0(y)| \leqslant 3\,!\, |P(t, y)|,$$

et donc, *a fortiori :*

$$(2.\ 14) \quad |P_1^{(p)}(y)| \leqslant 3\,!(1 + |y|)^{-1/3} (1 + |y|)^{1/2} |P(t, y)|.$$

Nommons $E(x, t)$ la transformée de Fourier réciproque de $\dfrac{1}{P(t, y)}$. La dérivée première de $P(t, y)$ par rapport à t est $iP_1(y)$; les dérivées ultérieures sont toutes nulles. Il s'ensuit que la transformée de Fourier de $\left(\dfrac{\partial}{\partial t}\right)^r E(x, t)$ est $F_r(t, y) = (-i)^r r\,! \,[P_1(y)]^r/[P(t, y)]^{r+1}$. La transformée de Fourier de $(-2i\pi x)^p \left(\dfrac{\partial}{\partial t}\right)^r E(x, t)$ est $D_y^p F_r(t, y)$ $(p \in N^2)$, c'est-à-dire une combinaison linéaire (finie !) de fractions de la forme :

$$[P_1^{(q_1)}(y) \ldots P_1^{(q_r)}(y) P^{(q'_1)}(t, y) \ldots P^{(q'_{r'})}(t, y)]/[P(t, y)]^{r+r'+1},$$

r' pouvant prendre toutes valeurs entières entre 0 et $|p|$. On peut démontrer (cf preuve du théorème 2. 1, partie 2°)

que cette fraction est majorée, pour tout $y \in \mathrm{R}^2$ et tout $t \in (-1, 1)$, par :

$$A'(1+|y|)^{r/2}(1+|y|)^{-\frac{1}{3}\frac{|p|}{4}}/|P(t, y)| \quad (A' < +\infty).$$

Pour cela, on détermine le nombre maximum d'indices q_j $(1 \leqslant j \leqslant r)$ pouvant être nuls, compte tenu de la valeur de r' et de ce que $|q_j| \leqslant 4$, $|q'_{j'}| \leqslant 4$ $(1 \leqslant j' \leqslant r'$; se rappeler que $\deg P(t, y) = \deg P_1(y) = 4)$. On applique ensuite les inégalités (2. 12), (2. 13), (2. 14).

Comme $(1+|y|^2) \leqslant |P(t, y)|$, on en conclut que

$$(-2i\pi x)^p\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^r E(x, t)$$

appartient à $\left(A^{2-\frac{r}{2}+\frac{|p|}{12}}\right)_x$ pour tout $t \in (-1, 1)$ et, comme on le vérifie sans peine, est une fonction continue de t à valeurs dans cet espace. Puisque r et p sont arbitraires, cela signifie que $E(x, t) \in \mathcal{E}_t(1/2; A^{2, 1/12})$. C.Q.F.D.

Cet exemple et les résultats le concernant, que nous venons d'établir, nous seront utiles plus loin. Nous aurons aussi besoin de l'inégalité suivante :

Pour tout $y \in \mathrm{R}^2$ et tout $t \in (-1, 1)$, on a :

$$(2.\ 15) \quad |P_1^{(1, 0)}(y)| \leqslant 3(1+|y_1|^{1/2}+|y_2|)^{-1}|P(t, y)|.$$

En effet :

$$|P_1^{(1, 0)}(y)| = |y_2^3| = (1+|y_1|^{1/2}+|y_2|)^{-1}(|y_2^3|+|y_1|^{1/2}|y_2^3|+|y_2^4|).$$

Mais

$$|y_2^3|+|y_2^4| \leqslant 2(1+|y_2^4|) \leqslant 2|P_0(y)| \quad \text{et} \quad |y_1|^{1/2}|y_2^3| \leqslant y_1^2+y_2^4 \leqslant |P_0(y)|,$$

d'où l'inégalité (2. 15).

CHAPITRE III

OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS A COEFFICIENTS VARIABLES UN CRITÈRE D'HYPOELLIPTICITÉ

Dans ce chapitre, nous ferons intervenir deux espaces R^n, notés respectivement R^n_x et R^n_ξ (ce qui indique la notation des variables et des coordonnées cartésiennes dans chacun d'eux). Le second, R^n_ξ, ou l'un des sous-ensembles ouverts de R^n_ξ, jouera le rôle de la variété V des chapitres précédents. Ceci veut dire que nous manipulerons des familles $\{P(\xi, D_x)\}$ d'opérateurs différentiels à coefficients constants sur R^n_x dépendant de ξ; la dépendance par rapport à ξ sera toujours telle que la famille soit d'ordre borné et C^∞ sur R^n_ξ (définition 2. 2 et 2. 5), même lorsque nous ne mentionnerons pas ces hypothèses.

Soit Ω un ouvert de R^n; la donnée d'une telle famille

$$\{P(\xi, D_x)\}\,(\xi \in \Omega)$$

définit un opérateur différentiel sur Ω, c'est-à-dire une application linéaire continue de $\mathfrak{D}(\Omega)$ dans lui-même qui diminue le support, de la façon suivante : on pose, pour toute $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$, $\psi(x, \xi) = P(\xi, D_x)\varphi(x)$, puis $P\varphi(x) = \psi(x, x)$. On vérifie aussitôt que P est un opérateur différentiel sur Ω. Mais plutôt qu'à P lui-même, nous nous intéresserons à l'expression de P dans le système de coordonnées cartésiennes initialement donné dans R^n_x, expression qu'il est raisonnable de noter $P(x, D_x)$ ou, si aucune confusion n'est à craindre, $P(x, D)$ (Hörmander [1]). C'est que les propriétés dont nous allons nous servir ne sont pas invariantes par changement de coordonnées dans R^n_x (ou dans Ω) et sont plutôt associées à la famille $\{P(\xi, D_x)\}$ qu'à l'opérateur intrinsèque P.

Nous définirons le transposé ${}^t\mathrm{P}(x, \mathrm{D})$ de $\mathrm{P}(x, \mathrm{D})$ (non de P) par la formule :

$$\int [{}^t\mathrm{P}(x,\ \mathrm{D})\varphi(x)]\ \psi(x)dx = \int \varphi(x)[\mathrm{P}(x,\ \mathrm{D})\psi(x)]dx, \quad \varphi,\ \psi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

L'expression de ${}^t\mathrm{P}(x, \mathrm{D})$ à partir de celle de $\mathrm{P}(x, \mathrm{D})$ est suffisamment classique pour que nous ne la rappelions pas ici. Bien entendu, ${}^t\mathrm{P}(x, \mathrm{D})$ définit un opérateur différentiel sur Ω ayant d'étroits rapports avec le transposé intrinsèque de P; mais rappelons que celui-ci agit sur les courants de degré n.

Nous utiliserons aussi la notation :

$$\mathrm{RP}(x,\ \xi,\ \mathrm{D}_x) = \mathrm{P}(\xi,\ \mathrm{D}_x) - \mathrm{P}(x + \xi,\ \mathrm{D}_x),$$

qui aura un sens chaque fois que ξ et $x + \xi$ appartiendront à Ω, par exemple pour $\xi \in \mathrm{U}$ ouvert, $\overline{\mathrm{U}}$ compact, $\overline{\mathrm{U}} \subset \Omega$, et $x \in \Omega - \mathrm{U}$. Alors $\mathrm{RP}(x, \xi, \mathrm{D}_x)$ sera un opérateur différentiel sur $\Omega - \mathrm{U}$, à coefficients C^∞ en (x, ξ) dans $(\Omega - \mathrm{U}) \times \mathrm{U}$, ces coefficients étant tous nuls pour $x = 0$ quel que soit $\xi \in \mathrm{U}$.

Soit une variété C^∞ W (point courant : w; $\mathcal{D}'_w$: espace des distributions sur W).

Définition 3. 1. — *Une application f d'un sous-ensemble de $\mathcal{D}'_w$ dans lui-même sera dite progressive en un élément* T *de ce sous-ensemble si, pour tout entier $q \geqslant 0$, il existe un entier $p \geqslant 0$ tel que $f^p(\mathrm{T})$ soit une fonction de classe C^q sur* W.

Par f^p, nous entendons la composée $\overbrace{f \circ \cdots \circ f}^{p}$.

Définition 3. 2. — *Soient Ω un ouvert de R^n et $\mathrm{P}(x, \mathrm{D})$ un opérateur différentiel sur Ω. Nous dirons que $\mathrm{P}(x, \mathrm{D})$ est de type progressif sur Ω s'il existe une distribution $\mathrm{E}(x, \xi)$ sur $\mathrm{R}^n_x \times \Omega_\xi$, telle que $\mathrm{P}(\xi, \mathrm{D}_x)\,\mathrm{E}(x, \xi) = \delta_x 1(\xi)$ et qui possède les propriétés suivantes :*

(P_1) *Il existe un nombre réel s, un nombre $d > 0$ et un nombre k, $0 \leqslant k < 1$, tels que $\mathrm{E}(x, \xi) \in (\mathcal{E}_\xi(\Omega))\ (k; \underline{\mathrm{A}}^{s,d}_{\mathrm{loc}})$.*

(P_2) *Pour tout ouvert borné $\mathrm{U} \subset \overline{\mathrm{U}} \subset \Omega$, il existe une fonction $\omega(x) \in \mathcal{D}_x$ de support dans $\Omega - \mathrm{U}$, égale à 1 au voisinage de 0, telle que l'application linéaire*

$$\mathrm{T}(x,\ \xi) \to \omega(x)\,\mathrm{RP}(x,\ \xi,\ \mathrm{D}_x)\,[\mathrm{E}(x,\ \xi) * \mathrm{T}(x,\ \xi)]$$

de $(\mathcal{E}_\xi(\mathrm{U}))\ (\mathcal{E}'_x)$ dans lui-même soit progressive en $\delta_x 1(\xi)$.

Remarques sur les notations : $1(\xi)$ désigne la fonction définie dans l'ouvert que l'on considère, par exemple Ω ou U, et égale à 1 partout sur cet ouvert; si U est un ouvert de R^n, $(\mathcal{E}_\xi(U))(k;\ A^{s,d}_{loc})$ désigne l'espace $\mathcal{E}_v(k;\ E_s)$ relatif à la variété $V = U$ (et donc $v = \xi$) et aux espaces $E_r = A^{r,d}_{loc}(r \in R;\ d$ reste fixe); par $*$, nous désignerons toujours les convolutions en x; enfin, $(\mathcal{E}_\xi(U))(\mathcal{E}'_x)$ désigne l'espace des fonctions C^∞ de ξ dans U, à valeurs dans l'espace $\mathcal{E}'_x$ des distributions en x (sur R^n) à support compact.

Nous allons maintenant établir, dans les deux propositions qui suivent, l'indépendance, en quelque sorte, de la définition 3. 2 par rapport au choix de la solution élémentaire $E(x, \xi)$ et des fonctions $\omega(x)$ qui figurent dans (P_2).

Proposition 3. 1. — *Supposons* $P(x, D)$ *de type progressif sur* Ω *et soit* $F(x, \xi)$ *une fonction* C^∞ *de* ξ *dans* Ω, *à valeurs dans* $\mathcal{D}'_x$, *telle que* $P(\xi, D_x)\ F(x, \xi) = \delta_x$ *pour tout* $\xi \in \Omega$. *Alors* $F(x, \xi)$ *vérifie les conditions* (P_1) *et* (P_2) *de la définition* 3. 2.

Nous nous appuierons sur le lemme suivant :

Lemme 3. 1. — *Soient une variété* C^∞ V (*point courant :* v) *et une famille* $\{P(v, D_x)\}$ *de polynômes différentiels sur* R^n_x, *d'ordre borné et* C^∞ *sur* V (voir définition 2. 2 et définition 2. 5). *Supposons qu'il existe une fonction* $E(x, v)$ C^∞ *dans* V, *à valeurs dans* $\mathcal{D}'_x$, *telle que, pour tout* $v \in V$, $P(v, D_x)\ E(x, v) = \delta_x$ *et que, pour toute fonction* $\alpha(x) \in \mathcal{D}_x$ *ayant son support dans* $\complement \{0\}$, $\alpha(x)\ E(x, v) \in \mathcal{E}_x(\mathcal{E}_v)$.

Dans ces conditions, quel que soit l'ouvert U *de* R^n, *si*

$$T(x, v) \in [\mathcal{D}'_x(U)]\ (\mathcal{E}_v)$$

et si $P(v, D_x)\ T(x, v) \in (\mathcal{E}_x(U))\ (\mathcal{E}_v)$, *en particulier si*

$$P(v, D_x)\ T(x, v) = 0,$$

alors $T(x, v) \in (\mathcal{E}_x(U))\ (\mathcal{E}_v)$.

Nous ne ferons pas la preuve de ce lemme, entièrement calquée sur celle du cas classique, c'est-à-dire du cas d'un seul polynôme différentiel $P(D_x)$ possédant une solution élémentaire $E(x)$ indéfiniment différentiable dans $\complement \{0\}$, solution que l'on utilise pour établir l'hypoellipticité de $P(D_x)$ (voir par exemple Schwartz [5], 4-05, proposition 3).

Noter que les conditions du lemme 3. 1 exigent que $P(\nu, D_x)$ soit hypoelliptique pour chaque $\nu \in V$.

Démontrons la proposition 3. 1. Soit $E(x, \xi)$ une distribution sur $R^n_x \times \Omega_\xi$ remplissant toutes les conditions de la définition 3. 2 relativement à $P(x, D)$. C'est une conséquence immédiate de (P_1) que $E(x, \xi)$ est une fonction C^∞ de ξ dans Ω à valeurs dans $\mathcal{D}'_x$; et il résulte de la proposition 1. 17, que, pour toute $\alpha(x) \in \mathcal{D}_x(\complement \{0\})$, on a $\alpha(x)E(x, \xi) \in (\mathcal{E}_\xi(\Omega))(\mathcal{E}_x)$.

Ceci dit, posons $\Phi(x, \xi) = F(x, \xi) - E(x, \xi)$. En vertu de ce qui vient d'être dit, et des hypothèses sur $F(x, \xi)$, on a $\Phi(x, \xi) \in (\mathcal{E}_\xi(\Omega))(\mathcal{D}'_x) = \mathcal{D}'_x(\mathcal{E}_\xi(\Omega))$; et il est évident que $P(\xi, D_x)\Phi(x, \xi) = 0$ pour tout $\xi \in \Omega$. Du lemme 3.1 résulte alors immédiatement que $\Phi(x, \xi) \in (\mathcal{E}_\xi(\Omega))(\mathcal{E}_x)$.

$F(x, \xi)$ *vérifie* (P_1); car $(\mathcal{E}_x(\Omega))(\mathcal{E}_x) \subset (\mathcal{E}_\xi(\Omega))(k; A^{s,d}_{loc})$ quels que soient s, d, k, et donc $F(x, \xi) = E(x, \xi) + \Phi(x, \xi)$ appartient à $(\mathcal{E}_\xi(\Omega))(k; A^{s,d}_{loc})$ si $E(x, \xi)$ appartient à cet espace.

$F(x, \xi)$ *vérifie* (P_2). En effet, soient un ouvert borné $U \subset \overline{U} \subset \Omega$ et $\omega(x)$ pouvant figurer dans (P_2) associée à U. Posons, pour $S(x, \xi) \in (\mathcal{E}_\xi(U))(\mathcal{D}'_x)$ et $T \in (\mathcal{E}_\xi(U))(\mathcal{E}'_x)$:

$$f_S(T) = \omega(x)RP(x, \xi, D_x)\,[S(x, \xi) * T(x, \xi)].$$

On a évidemment $f_F - f_\Phi = f_E$ et $f_\Phi(T) \in (\mathcal{E}_\xi(U))(\mathcal{D}_x)$ pour tout $T \in (\mathcal{E}_\xi(U))(\mathcal{E}'_x)$. Cela permet de prouver sans peine que, pour ces mêmes T, et tout entier $p \geqslant 0$:

$$(f_F)^p(T) \equiv (f_E)^p(T) \quad \text{modulo} \quad (\mathcal{E}_\xi(U))(\mathcal{D}_x).$$

Ceci implique visiblement la proposition 3. 1, après le choix $T(x, \xi) = \delta_x 1(\xi)$.

Proposition 3. 2. — *Supposons* $P(x, D)$ *de type progressif sur* Ω *et soit* $E(x, \xi)$ *une fonction* C^∞ *de* ξ *dans* Ω, *à valeurs dans* $\mathcal{D}'_x$, *qui possède toutes les propriétés de la définition* 3. 2 (relativement à $P(x, D)$).

Soit un ouvert borné $U \subset \overline{U} \subset \Omega$. *Pour toute fonction* $\overline{\omega}(x) \in \mathcal{D}_x$ *de support dans* $\Omega - U$, *égale à* 1 *au voisinage de* 0, *l'application* $T(x, \xi) \to \overline{\omega}(x)\ RP(x, \xi, D_x)\,[E(x, \xi) * T(x, \xi)]$ de $(\mathcal{E}_\xi(U))(\mathcal{E}'_x)$ *dans lui-même est progressive en* $\delta_x 1(\xi)$.

Posons, pour $\alpha(x) \in \mathcal{D}_x(\Omega - U)$ et $T(x, \xi) \in (\mathcal{E}_\xi(U))(\mathcal{E}'_x)$:

$$g_\alpha(T) = \alpha(x)RP(x, \xi, D_x)\,[E(x, \xi) * T(x, \xi)].$$

Soient alors $\omega(x) \in \mathcal{D}_x$ pouvant figurer dans (P_2) (relativement à U) et $\varpi(x) \in \mathcal{D}_x$ quelconque, à support dans $\Omega - U$ et égale à 1 au voisinage de 0. Pour prouver la proposition 3. 2, il suffit de montrer que, pour tout entier $p \geqslant 0$:

$$(g_{\varpi})^p(\delta_x 1(\xi)) \equiv (g_\omega)^p(\delta_x 1(\xi)) \quad \text{modulo}\, (\mathcal{E}_\xi(U))\,(\mathcal{D}_x).$$

Pour cela, nous raisonnerons par récurrence sur p. Posons $\alpha = \varpi - \omega$; on a $g_\alpha = g_{\varpi} - g_\omega$, et $\alpha(x)$ a son support dans $\complement \{0\}$. D'après le corollaire 1 de la proposition 1. 17, $E(x, \xi)$ est une fonction C^∞ de (x, ξ) dans $\left(\complement \{0\}\right)_x \times \Omega_\xi$. De cela résulte que notre assertion est vraie pour $p = 1$, puisque :

$$g_\alpha(\delta_x 1(\xi)) = \alpha(x) R P(x, \xi, D_x) E(x, \xi).$$

Supposons notre assertion établie jusqu'à $p - 1$ $(p \geqslant 2)$; on a donc :

$$(g_{\varpi})^p(\delta_x 1(\xi)) = g_{\varpi}[(g_\omega)^{p-1}(\delta_x 1(\xi))] + g_{\varpi}[\varphi_p(x, \xi)],$$

où $\varphi_p(x, \xi) \in (\mathcal{E}_\xi(U))\,(\mathcal{D}_x)$. Mais $E(x, \xi) * \varphi_p(x, \xi) \in (\mathcal{E}_\xi(U))\,(\mathcal{E}_x)$ et donc $g_{\varpi}[\varphi_p(x, \xi)] \in (\mathcal{E}_\xi(U))\,(\mathcal{D}_x)$.

Reste à prouver que

$$g_\alpha[(g_\omega)^{p-1}(\delta_x 1(\xi))] = g_{\varpi}[(g_\omega)^{p-1}(\delta_x 1(\xi))] - (g_\omega)^p(\delta_x 1(\xi))$$

appartient aussi à $(\mathcal{E}_\xi(U))\,(\mathcal{D}_x)$. Pour cela, on utilise le fait que, pour tout entier $q \geqslant 0$ (et donc pour $q = p - 1$), $(g_\omega)^q(\delta_x 1(\xi))$ est une fonction C^∞ de (x, ξ) dans $\left(\complement \{0\}\right)_x \times \Omega_\xi$, ce qui résulte du corollaire 1 de la proposition 17. Comme $\alpha(x)$ a son support dans $\complement \{0\}$, on en déduit bien ce qu'on désirait.

Définition 3. 3. — *Soient* Ω *un ouvert de* R^n *et* $P(x, D)$ *un opérateur différentiel sur* Ω. *Nous dirons que* $P(x, D)$ *est formellement hypoelliptique sur* Ω *si la famille* $\{P(\xi, D_x)\}$ $(\xi \in \Omega)$ *est formellement hypoelliptique.*

Proposition 3. 3. — *Si* $P(x, D)$ *est formellement hypoelliptique sur* Ω, *il en est de même de* ${}^tP(x, D)$.

Immédiat en utilisant l'expression de ${}^tP(x, D)$ et la proposition 2. 1.

Théorème 3. 1. — *Si* $P(x, D)$ *est formellement hypoelliptique sur* Ω, $P(x, D)$ *est de type progressif sur* Ω.

Puisque la famille $\{P(\xi, D_x)\}$ ($\xi \in \Omega$) est formellement hypoelliptique, il existe, en vertu du théorème 2. 1, $s > 0$, $d > 0$ et $E(x, \xi) \in (\mathcal{E}_\xi(\Omega))((A_{\text{loc}}^{s,d})_x)$ tels que, pour tout $\xi \in \Omega$, $P(\xi, D_x)\, E(x, \xi) = \delta_x$. Il s'ensuit trivialement que $E(x, \xi)$ vérifie la condition (P_1) de la définition 3. 2; tout revient à montrer que $E(x, \xi)$ vérifie aussi (P_2).

Considérons une décomposition interne de la famille $\{P(\xi, D)\}$ (définition 2. 3) :

$$P(\xi, D) = \sum_{j=1}^{r} a_j(\xi) P_j(D),$$

c'est-à-dire que les $a_j(\xi) \in \mathcal{E}_\xi(\Omega)$ et que les $P_j(D)$ sont des éléments de la famille $\{P(\xi, D)\}$ ($\xi \in \Omega$).

Soient un ouvert borné $U \subset \overline{U} \subset \Omega$ et $\omega(x) \in \mathcal{D}_x$ une fonction de support $K \subset \Omega - U$ et égale à 1 au voisinage de 0. Pour $T(x, \xi) \in (\mathcal{E}_\xi(U))(\mathcal{D}'_x)$, posons :

$$f(T) = \omega(x)\, RP(x, \xi, D_x)\, [E(x, \xi) * T(x, \xi)].$$

Nous allons prouver ceci : quel que soit $r \in R$, pour tout entier $p \geqslant 0$, f^p définit un élément de $(\mathcal{E}_\xi(U))\,(L_b(A_K^{r,d};\, A_K^{r+pd,\,d}))$. Ceci entraînera que, pour tout $p \geqslant 0$, $f^p(\delta_x 1(\xi)) \in (\mathcal{E}_\xi(U))\,((A_K^{pd}))$, d'où la progressivité de f en $\delta_x 1(\xi)$ par application de la proposition 1. 16.

Pour $x \in K$ et $\xi \in U$, posons

$$b_j(x, \xi) = a_j(\xi) - a_j(x + \xi) \quad (1 \leqslant j \leqslant r).$$

On a :

$$f(T) = \sum_{j=1}^{r} \omega(x) b_j(x, \xi) \{[P_j(D) E(x, \xi)] * T(x, \xi)\}.$$

Appliquons d'abord la dernière partie du scholie du théorème 2. 1 : pour tout $j = 1, \ldots, r$, $P_j(D)E(x, \xi) \in (\mathcal{E}_\xi(\Omega))(A_{\text{loc}}^{0,d})$ et donc l'opérateur $P_j(D)E(x, \xi)\, *$ appartient à

$$(\mathcal{E}_\xi(\Omega))\,(L_b(A_K^{r,d};\, A_{\text{loc}}^{r,d})),$$

en vertu du corollaire 2 de la proposition 1. 10.

D'autre part, $b_j(x, \xi) \in (\mathcal{E}_\xi(U))\,((\mathcal{E}_0)_x)$ (pour $\mathcal{E}_0$, voir définition 1. 10) et donc définissent, d'après le corollaire 1 de la proposition 1. 13, en tant qu'opérateurs de multiplication, des éléments de $(\mathcal{E}_\xi(U))\,(L(A_{\text{loc}}^{r,d};\, A_{\text{loc}}^{r+d,\,d}))$. Enfin, il est clair que la multiplication par $\omega(x)$ appartient à

$$(\mathcal{E}_\xi(U))\,(L_b(A_{\text{loc}}^{r+d,\,d};\, A_k^{r+d,\,d})$$

de sorte qu'au total, $f \in (\mathcal{E}_\xi(\mathrm{U}))(\mathrm{L}_b(\mathrm{A}_k^{r,d};\ \mathrm{A}_k^{r+d,d}))$. Comme r est un réel arbitraire, en itérant ce résultat, on démontre notre assertion.

Proposition 3. 4. — *Soit* $\mathrm{P}(x, \mathrm{D})$

$$1 - \frac{1}{4\pi^2}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \left(\frac{1}{4\pi^2}\right)^2 \frac{\partial^4}{\partial x_2^4} + ix_1\left(\frac{1}{4\pi^2}\right)^2 \frac{\partial^4}{\partial x_1 \partial x_2^3}.$$

(I) $\mathrm{P}(x, \mathrm{D})$ *n'est formellement hypoelliptique sur aucun voisinage ouvert de l'origine dans* R^2 *et il n'existe pas de voisinage ouvert* U *de* 0 *qui possède la propriété suivante: il existe un homéomorphisme* C^∞ *de* U *sur un ouvert* Ω *de* R^2 *tel que le transformé de* $\mathrm{P}(x, \mathrm{D})$ *par cet homéomorphisme soit formellement hypoelliptique sur* Ω.

(II) $\mathrm{P}(x, \mathrm{D})$ *est de type progressif sur* R^2.

Soit U un voisinage ouvert de 0 dans R^2 et soit $x \to x' = x'(x)$ un homéomorphisme C^∞ de U sur un ouvert Ω de R^2; nous noterons $x' \to x = x(x')$ l'homéomorphisme réciproque. Le transformé $\mathrm{Q}(x', \mathrm{D}')$ de $\mathrm{P}(x, \mathrm{D})$ par cet homéomorphisme se définit ainsi :

$$\mathrm{Q}(x', \mathrm{D}')\varphi(x') = \{\mathrm{P}(x, \mathrm{D})\,[\varphi(x'(x))]\}_{x=x(x')}, \quad \varphi(x') \in \mathcal{E}(\Omega).$$

Preuve de (I).

Nous supposerons, pour plus de simplicité, que $x'(0) = 0$, de sorte que Ω est lui-même un voisinage de 0. Comme, dans le complémentaire de l'origine, $\mathrm{P}(x, \mathrm{D})$ est formellement hypoelliptique, nous pouvons supposer U contenu dans la bande verticale $|x_1| < 1$. Nous noterons $u(x_0)$ la jacobienne de l'homéomorphisme $x \to x'$ au point $x = x_0$; $u(\xi)$ est une fonction C^∞ de ξ dans U, à valeurs dans $\mathrm{L}(\mathrm{R}^2; \mathrm{R}^2)$; c'est un automorphisme pour tout $\xi \in \mathrm{U}$.

A la famille $\{\mathrm{P}(\xi, \mathrm{D}_x)\}$ $(\xi \in \mathrm{U})$ se trouve associée la famille de polynômes $\mathrm{P}(\xi, y) = 1 + y_1^2 + y_2^4 + i\xi_1 y_1 y_2^3$ que nous avons étudiée, pour $|\xi_1| < 1$, à la fin du chapitre II. Posons, comme là, $\mathrm{P}_0(y) = 1 + y_1^2 + y_2^4$, $\mathrm{P}_1(y) = y_1 y_2^3$.

Il est aisé de vérifier que l'on a, pour tout $\xi' \in \Omega$:

$$\mathrm{Q}(\xi', y) = \mathrm{P}(\xi(\xi'), u(\xi')y) + \mathrm{R}(\xi', y),$$

avec :

$$\mathrm{R}(\xi', u^{-1}(\xi')y) = ay_2^3 + by_2^2y_1 + a'y_2^2 + b'y_2y_1 + a''y_2 + b''y_1,$$

a, b, a', b', a'', b'' étant des nombres complexes (qui dépendent de ξ').

De ce fait, on peut déduire deux conclusions :

1) Il existe, pour chaque $\xi' \in \Omega$, une constante $C(\xi') > 0$ telle qu'on ait, pour tout $y \in R^2$:

$$C(\xi')\,|R(\xi', u^{-1}(\xi')y)| \leqslant |P_0(y)|,$$

et donc :

$$C(\xi')\,|R(\xi', y)| \leqslant |P_0(u(\xi')y)|.$$

En particulier, prenons $\xi' = 0$, ce qui entraîne $\xi_1(\xi') = 0$. Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $y \in R^2$: $C\,|Q(0, y)| \leqslant |P_0(u(0)y)|$.

2) Pour tout $\xi' \in \Omega$, et tout nombre $c > 0$, il existe une constante $A(\xi') > 0$ telle que, pour tout $y \in R^2$, on ait :

$$A(\xi')\,|R(\xi', u^{-1}(\xi')y)| \leqslant (1 + |y|)^{-1/3}(|P_0(y)| + c|P_1(y)|).$$

Ceci résulte facilement de l'expression de $R(\xi', u^{-1}(\xi')y)$ et de l'inégalité (2. 12). Or tout voisinage de l'origine contient un point ξ' tel que $\xi_1(\xi')$ soit $\neq 0$. Il résulte aussitôt de l'inégalité précédente que, pour un tel point $\xi' \in \Omega$, il existe $A_1 > 0$ telle que, pour tout $y \in R^2$:

$$A_1\,|R(\xi', y)| \leqslant (1 + |y|)^{-1/3}\,|P(\xi(\xi'), u(\xi')y)|.$$

Mais de cela on déduit que $Q(\xi', y)$ est équivalent à

$$P(\xi(\xi'), u(\xi')y).$$

Or nous avons vu, à la fin du chapitre II, que si u et v sont deux automorphismes de R^2, et si $t \neq 0$, on pouvait trouver une suite de point y_ν dans R^2 telle que

$$\lim_{\nu \to \infty} P(0, uy_\nu)\,[|P(t, vy_\nu)|^{-1}] = 0.$$

En prenant $t = \xi_1(\xi')$, $u = u(0)$ et $v = v(\xi')$, et en utilisant les conclusions de 1) et de 2), on voit que $Q(\xi', y)$ ne saurait être plus faible que $Q(0, y)$.

Preuve de (II).

Appelons $E(x, \xi)$ la transformée de Fourier réciproque de $\dfrac{1}{P(\xi, y)}$. Nous avons déjà prouvé que $E(x, \xi) \in (\mathcal{E}_\xi(U))\,(1/2\,; A^{2,1/12})$. Il s'ensuit que $E(x, \xi)$ vérifie la condition (P_1) de la définition 3. 2; reste à prouver que $E(x, \xi)$ vérifie (P_2).

On a : $RP(x, \xi, D_x) = ix_1 P_1(D)$. Remarquons que nous n'avons pas à nous préoccuper de définir les ouverts où varient x et ξ, car $RP(x, \xi, D_x)$ a un sens pour tous x et ξ dans R^2. Supposons que le voisinage ouvert U de 0 soit relativement compact, et soit $\omega(x) \in \mathcal{D}$, égale à 1 au voisinage de 0; nous noterons K le support de $\omega(x)$. Posons, pour $T(x, \xi) \in (\mathcal{E}_\xi(U))\,(\mathcal{E}'_x)$:

$$f(T) = i\omega(x)x_1 \{[P_1(D)\, E(x, \xi)] * T(x, \xi)\}.$$

Il nous faut prouver que f est progressive en $\delta_x 1(\xi)$. Posons $S_p = f^p(\delta_x 1(\xi))$ (p entier $\geqslant 0$). Pour tout entier q, on a, si $p \geqslant 1$:

$$x_1^q S_p = i\omega(x) \sum_{r=0}^{q+1} \binom{q+1}{r} [x_1^r P_1(D) E(x, \xi)] * (x_1^{q+1-r} S_{p-1})$$

Étude de $x_1^m P_1(D)\, E(x, \xi)$.

Remarquons que $(2i\pi x_1)^m P_1(D) E(x, \xi)$ est la transformée de Fourier réciproque de $\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)^m \left[\frac{P_1(y)}{P(\xi, y)}\right]$, qui est une somme finie de termes de la forme :

$$(3.\ 1) \qquad [P_1^{(m_0, 0)}(y) P^{(m_1, 0)}(\xi, y), \ldots, P^{(m_j, 0)}(\xi, y)] / [P(\xi, y)]^{j+1}$$

où nous pouvons toujours supposer $m_0 = 0$ ou 1 et, si $j \geqslant 1$, $m_i = 1$ ou 2, ($i = 1, \ldots, j$), car le degré par rapport à y_1 de $P_1(y)$ est 1 et celui de $P(\xi, y)$ est 2. On a : $m_0 + m_1 + \cdots + m_j = m$.

Il est facile de voir (cf. fin du chapitre II) qu'il existe $B < +\infty$ telle que, pour tout $\xi_1 \in (-1, 1)$ et tout $y \in R^n$:

$$|P^{(h, 0)}(\xi, y)| \leqslant B(1 + |y|)^{-h} |P(\xi, y)|.$$

Il en résulte que le terme (3. 1) est majoré, en valeur absolue, pour ces ξ et ces y, par :

$$(3.\ 2) \qquad B^j(1 + |y|)^{-m+m_0} |P_1^{(m_0, 0)}(y)| / |P(\xi, y)|$$

Si $m_0 = 0$, la quantité (3. 2) est majorée par :

$$(3.\ 3) \qquad B^j(1 + |y|)^{-m+1/2}.$$

Cela résulte immédiatement de l'inégalité (2. 13). Si $m_0 = 1$, on applique l'inégalité (2. 15) et l'on trouve que (3. 2) est, dans ce cas aussi, majoré par (3. 3).

Ceci prouve que, pour chaque $\xi \in \mathrm{U}$, $x_1^m \mathrm{P}_1(\mathrm{D})\,\mathrm{E}(x, \xi) \in \mathrm{A}^{m-1/2}$. Par un raisonnement tout à fait analogue au précédent et à celui qui nous a servi, à la fin du chapitre II, à prouver que $\mathrm{E}(x, \xi) \in (\mathcal{E}_\xi(\mathrm{U}))(1/2;\ \mathrm{A}^{2, 1/12})$, on peut prouver que $x_1^m \mathrm{P}_1(\mathrm{D})\,\mathrm{E}(x, \xi) \in (\mathcal{E}_\xi(\mathrm{U}))(1/2;\ \mathrm{A}^{m-1/2,\, 1/12})$.

Preuve de progressivité de f en $\delta_x 1(\xi)$.

On voit que, pour tout entier $q \geqslant 0$:

$$x_1^q \mathrm{S}_1 = i\omega(x)\, x_1^{q+1} \mathrm{P}_1(\mathrm{D})\ \mathrm{E}(x, \xi) \in (\mathcal{E}_\xi(\mathrm{U}))\,(1/2;\ \mathrm{A}_\mathrm{K}^{q+1/2,\, 1/12}).$$

Prouvons, par récurrence sur p, que

$$x_1^q \mathrm{S}_p \in (\mathcal{E}_\xi(\mathrm{U}))\ (1/2;\ \mathrm{A}_\mathrm{K}^{q+p/2,\, 1/12})$$

pour tout entier $p \geqslant 1$. Pour cela, utilisons l'expression de $x_1^q \mathrm{S}_p$ écrite au début. On a, en vertu de la récurrence sur p :

$$x_1^{q+1-r} \mathrm{S}_{p-1} \in (\mathcal{E}_\xi(\mathrm{U}))\,(1/2;\ \mathrm{A}_\mathrm{K}^{q+1-r+(p-1)/2,\, 1/12}),$$

et d'après ce que nous avons démontré plus haut :

$$x_1^r \mathrm{P}_1(\mathrm{D})\ \mathrm{E}(x, \xi) \in (\mathcal{E}_\xi(\mathrm{U}))\,(1/2;\ \mathrm{A}^{r-1/2,\, 1/12}).$$

Appliquons alors la proposition 1. 10 et la proposition 1. 14, et tenons compte du fait que

$$q + 1 - r + (p - 1)/2 + (r - 1/2) = q + p/2 :$$

on obtient exactement le résultat voulu.

En particulier, $\mathrm{S}_p \in (\mathcal{E}_\xi(\mathrm{U}))\,(1/2;\ \mathrm{A}_\mathrm{K}^{p/2})$; la progressivité de f en $\delta_x 1(\xi)$ résulte alors de la proposition 1. 16.

c. q. f. d.

L'intérêt de la définition 3. 2 provient du résultat suivant :

THÉORÈME 3. 2. — *Soient Ω un ouvert de R^n et $\mathrm{P}(x, \mathrm{D})$ un opérateur différentiel sur Ω. Si ${}^t\mathrm{P}(x, \mathrm{D})$ est de type progressif sur Ω, $\mathrm{P}(x, \mathrm{D})$ est hypoelliptique sur Ω.*

Pour simplifier les écritures, nous échangerons les rôles de $\mathrm{P}(x, \mathrm{D})$ et de ${}^t\mathrm{P}(x, \mathrm{D})$. Nous supposerons $\mathrm{P}(x, \mathrm{D})$ de type progressif et prouverons que ${}^t\mathrm{P}(x, \mathrm{D})$ est hypoelliptique.

Soient alors $\mathrm{E}(x, \xi)$ une distribution en (x, ξ), sur $\mathrm{R}_x^n \times \Omega_\xi$, pouvant figurer dans la définition 3. 2 (associée à $\mathrm{P}(x, \mathrm{D})$), un ouvert borné $\mathrm{U} \subset \overline{\mathrm{U}} \subset \Omega$ quelconque. Soit $\omega(x) \in \mathcal{D}_x(\Omega - \mathrm{U})$ égale à 1 au voisinage de 0. Posons, pour $\mathrm{T} \in (\mathcal{E}_\xi(\mathrm{U}))\ (\mathcal{E}'_x)$:

$$f(\mathrm{T}) = \omega(x)\, \mathrm{RP}(x,\ \xi,\ \mathrm{D}_x)\ [\mathrm{E}(x,\ \xi) * \mathrm{T}(x,\ \xi)] ;$$

ensuite : $S_0(x, \xi) = \delta_x 1(\xi)$, $S_p(x, \xi) = f(S_{p-1}(x, \xi))$ pour $p = 1, 2, \ldots$; et :

$$E_q(x, \xi) = \sum_{j=0}^{q} S_j(x, \xi) * E(x, \xi), \qquad q = 0, 1, \ldots$$

Remarquons alors que $P(x + \xi, D) = P(\xi, D) - RP(x, \xi, D)$. Par conséquent :

$$\omega(x)P(x + \xi, D)E_q(x, \xi) = \sum_{p=0}^{q} S_p(x, \xi) - S_{p+1}(x, \xi)$$
$$= S_0(x, \xi) - S_{q+1}(x, \xi) = \delta_x 1(\xi) - S_{q+1}(x, \xi).$$

Nous poserons

$$N_q(x, \xi) = E_q(x - \xi, \xi) \qquad \text{et} \qquad L_q(x, \xi) = S_{q+1}(x - \xi, \xi).$$

On a alors :

$$\omega(x - \xi)P(x, D)N_q(x, \xi) = \delta(x - \xi) - L_q(x, \xi).$$

D'après les propriétés de $\omega(x)$, tout point x_0 de U possède un voisinage ouvert $V(x_0)$ tel que $\omega(x)$ soit égale à 1 sur $V(x_0) - V(x_0)$. Fixons arbitrairement $x_0 \in U$ et posons $V = V(x_0)$. Pour $(x, \xi) \in V_x \times V_\xi$, on a $\omega(x - \xi) = 1$ et donc :

$$(3.4) \qquad P(x, D)N_q(x, \xi) = \delta(x - \xi) - L_q(x, \xi).$$

(I) Pour tout entier $\mu \geqslant 0$, on peut trouver un entier $q \geqslant 0$ tel que $L_q(x, \xi)$ soit une fonction C^μ de (x, ξ) dans $V_x \times V_\xi$.

En effet, puisque f est progressive en $\delta_x 1(\xi)$, pour tout $\mu \in N$, on peut trouver $q \in N$ tel que $S_{q+1}(x, \xi)$ soit une fonction $C^{2\mu}$ de (x, ξ) dans $R^n_x \times U_\xi$.

Utilisons maintenant la propriété (P_1) (définition 3. 2) de $E(x, \xi)$ et toutes les propriétés (maintes fois appliquées) des espaces $A^{r, d}$ et $\mathcal{E}_v(k; E_s)$: on voit qu'il existe un nombre $d > 0$ et un nombre $0 \leqslant k < 1$ et, pour chaque entier $q \geqslant 0$, un réel s_q tels que $E_q(x, \xi) \in (\mathcal{E}_\xi(U))\ (k; A^{s_q, d}_{loc})$. Ce fait a trois conséquences :

Pour tout $q \in N$, $E_q(x, \xi)$ est une fonction C^∞ de ξ dans U, à valeurs dans $\mathcal{D}'_x$, et donc :

(II) Pour tout entier $q \geqslant 0$, $N_q(x, \xi)$ est une fonction C^∞ de ξ dans V à valeurs dans $\mathcal{D}'_x(V)$.

D'après le corollaire 1 de la proposition 1. 17, $E_q(x, \xi)$ est une fonction C^∞ de (x, ξ) dans $\left(\complement \{0\}\right)_x \times U_\xi$, et donc :

(III) Pour tout entier $q \geqslant 0$, $N_q(x, \xi)$ est une fonction C^∞ de (x, ξ) dans le complémentaire de la diagonale, dans $V_x \times V_\xi$.

Enfin, par application du corollaire 1 de la proposition 1. 18 :

(IV) Pour tout entier $q \geqslant 0$, $N_q(x, \xi) \in \mathcal{E}_x(V)\ (\mathcal{D}'_\xi(V))$, c'est-à-dire que $\varphi(\xi) \rightarrow \int N_q(x, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi$ est une application linéaire continue de $\mathcal{D}_\xi(\nu)$ dans $\mathcal{D}_x(V)$.

Un raisonnement bien connu, dû à Schwartz (voir [1], T. I, 2e édition, p. 137), permet de déduire l'hypoellipticité, dans V, de $P(x, D)$ à partir de l'équation (3. 4) et des faits (I), (II), (III) et (IV). Comme U est un ouvert borné arbitraire, tel que $\overline{U} \subset \Omega$, et comme ν_0 est un point arbitraire de U, ceci prouve l'hypoellipticité de $P(x, D)$ dans Ω.

APPENDICE

DÉMONSTRATION DU LEMME 2.5

1. Le nombre m.

Désignons par $\mathfrak{B}$ le sous-espace vectoriel de $\mathfrak{C}$ engendré par les $b_0, b_1, \ldots, b_k, \ldots$. Puisque $\mathfrak{B}$ par hypothèse est de dimension finie, il existe un entier $\mu \geqslant 0$ tel que les $b_0, \ldots, b_\mu$ engendrent $\mathfrak{B}$ (remarquer que si on remplace « engendrent » par « constituent une base de », il se peut qu'il n'y ait aucun tel entier μ). Nous désignerons par m le plus petit entier μ ayant cette propriété. Alors, pour tout entier $k \geqslant 0$, il existe $m+1$ constantes complexes $c_k^j (j = 0, 1, \ldots, m)$ telles que $b_k = \sum_{j=0}^{m} c_k^j b_j$.

2. Plan de la démonstration.

La preuve va consister essentiellement en une cascade de récurrences. Les raisonnements seront tous parfaitement élémentaires; nous devons simplement nous préoccuper d'ordonner de façon correcte les récurrences.

Première récurrence.

Sur l'entier n, bien entendu. Bien que le résultat à démontrer ne soit énoncé, dans le lemme 2. 5, que pour $n \geqslant 1$, nous débuterons la récurrence à $n = 0$, avec la convention suivante, que si $n = 0$, l'ensemble d'indices $(s_1, \ldots, s_n)$ est vide et qu'alors $b_{s_1} \ldots b_{s_n} = 1$. La propriété s'énonce dans ce cas : $a_{r_1} \ldots a_{r_m} \in \mathfrak{A}$. Si m est lui aussi nul, nous conviendrons que l'ensemble d'indices $(r_1, \ldots, r_m)$ est vide et que $a_{r_1} \ldots a_{r_m} = 1$. Dans tous les cas, pour $n = 0$, le résultat est trivial.

Deuxième récurrence.

Le résultat à démontrer étant que, pour tout h, tous $r_2, \ldots, r_{m+n}$ et tous $s_1, \ldots, s_n$, on a $a_h a_{r_2} \ldots a_{r_{m+n}} b_{s_1} \ldots b_{s_n} \in \mathfrak{A}$ (en supposant désormais $n \geqslant 1$), nous raisonnerons par récurrence sur h. Pour cela, il nous faudra démontrer cette appartenance lorsque $h = 0$.

Pour les références ultérieures, nous appellerons $(\mathrm{A}_{n,h})$ cette même appartenance dans le cas général (*i.e.* pour h quelconque).

Troisième récurrence.

Au lieu de démontrer directement $(\mathrm{A}_{n,h})$ nous démontrerons, pour tout $\mathrm{M} = 1, \ldots, m$, le fait suivant :

$(\mathrm{A}_{n,h,\mathrm{M}})$ On a, pour tous $r_{\mathrm{M}+1}, \ldots, r_{m+n}$ et tous $s_1, \ldots, s_n$,

$$a_h^{\mathrm{M}} a_{r_{\mathrm{M}+1}} \ldots a_{r_{m+n}} b_{s_1} \ldots b_{s_n} \in \mathfrak{A}.$$

On a $(\mathrm{A}_{n,h,1}) \equiv (\mathrm{A}_{n,h})$. Nous raisonnerons par récurrence *descendante* sur M ; il nous faudra donc établir d'abord le résultat pour $\mathrm{M} = m$. Pour cela, à titre de résultat préliminaire, il nous faudra établir, pour tout $j = 0, 1, \ldots, m$, le fait suivant :

$(\mathrm{A}_{n,h;j})$ On a, pour tous $r_{j+2}, \ldots, r_{m+n}$ et tous $s_2, \ldots, s_n$,

$$a_h^{j+1} a_{r_{j+2}} \ldots a_{r_{m+n}} b_j b_{s_2} \ldots b_{s_n} \in \mathfrak{A}.$$

Quatrième récurrence.

Nous démontrerons $(\mathrm{A}_{n,h;j})$ par récurrence (ascendante) sur j ; il nous faudra donc commencer par prouver $(\mathrm{A}_{n,h;0})$.

Plan de la démonstration.

Nous prouverons, dans l'ordre : $(\mathrm{A}_{n,0;j})$, $j = 0, 1, \ldots, m$; $(\mathrm{A}_{n,0;\mathrm{M}})$, $\mathrm{M} = 1, \ldots, m$, ce qui donnera, pour $\mathrm{M} = 1$, $(\mathrm{A}_{n,0})$. Puis, pour $h \geqslant 1$, $(\mathrm{A}_{n,h;0})$; $(\mathrm{A}_{n,h;j})$, $j = 1, 2, \ldots, m$; $(\mathrm{A}_{n,h,\mathrm{M}})$, $\mathrm{M} = 1, \ldots, m$, ce qui donnera, pour $\mathrm{M} = 1$, $(\mathrm{A}_{n,h})$.

3. Preuve de $(\mathrm{A}_{n,0;j})$ ($j = 0, 1, \ldots, m$).

$(\mathrm{A}_{n,0;0})$ est vrai. En effet, il s'exprime ainsi : pour tous $r_2, \ldots, r_{m+n}$ et tous $s_2, \ldots, s_n$, $a_0 b_0 a_{r_2} \ldots a_{r_{m+n}} b_{s_2} \ldots b_{s_n} \in \mathfrak{A}$. Or, d'après l'équation (e_0), $a_0 b_0 = 1$; donc la récurrence sur n s'applique.

Prouvons $(A_{n,0;j})$ pour $j \geqslant 1$. Multiplions l'équation (e_j) par $a_0^j a_{r_{j+1}} \dots a_{r_{m+n}} b_{s_2} \dots b_{s_n}$, ce qui donne

$$\sum_{q=0}^{j} \binom{j}{q} a_{j-q} a_0^j a_{r_{j+1}} \dots a_{r_{m+n}} b_q b_{s_2} \dots b_{s_n} = 0.$$

Dans la somme, le terme correspondant à q peut s'écrire, si $q \leqslant j-1$, $\binom{j}{q} a_0^{q+1} a_{r_{q+2}} \dots a_{r_{m+n}} b_q b_{s_2} \dots b_{s_n}$ où certains des a_{r_α} $(\alpha \geqslant q+2)$ peuvent être égaux à a_0. D'après la récurrence sur j, ce terme appartient à $\mathfrak{A}$. Il en résulte que le terme correspondant à $q = j$, doit, lui aussi, appartenir à $\mathfrak{A}$. Or ce terme est $a_0^{j+1} a_{r_{j+1}} \dots a_{r_{m+n}} b_j b_{s_2} \dots b_{s_n}$.

4. **Preuve de $(A_{n,0,M})$ pour $M = m$.**

Il suffit de prouver que, pour tous $r_{m+1}, \dots, r_{m+n}$ et tous $s_2 \dots s_n$, on a $a_0^m a_{r_{m+1}} \dots a_{r_{m+n}} b_m b_{s_2} \dots b_{s_n} \in \mathfrak{A}$. En effet, d'après $(A_{n,0;j})$, on a pour tout $j = 0, 1, \dots, m-1$,

$$a_0^m a_{r_{m+1}} \dots a_{r_{m+n}} b_j b_{s_2} \dots b_{s_n} \in \mathfrak{A}.$$

On aura donc, pour tout s_1 :

$$a_0^m a_{r_{m+1}} \dots a_{r_{m+n}} b_{s_1} b_{s_2} \dots b_{s_n} = \sum_{j=0}^{m} c_{s_1}^j a_0^m a_{r_{m+1}} \dots a_{r_{m+n}} b_j b_{s_2} \dots b_{s_n} \in \mathfrak{A}.$$

Multiplions $(e_{m+r_{m+1}})$ par $a_0^m a_{r_{m+2}} \dots a_{r_{m+n}} b_{s_2} \dots b_{s_n}$. Nous obtenons :

$$\sum_{q=0}^{m+r_{m+1}} \binom{m+r_{m+1}}{q} a_{m+r_{m+1}-q} a_0^m a_{r_{m+2}}, \dots, a_{r_{m+n}} b_q b_{s_2}, \dots, b_{s_n} = 0.$$

Nous raisonnerons par récurrence sur r_{m+1} ; les faits $(A_{n,0;j})$ impliquent que pour $r_{m+1} = 0$ et pour tous $r_{m+2}, \dots, r_{m+n}$ et tous $s_1, \dots, s_n$, $a_0^m a_{r_{m+1}} \dots a_{r_{m+n}} b_{s_1} \dots b_{s_n} \in \mathfrak{A}$ (en effet, $(A_{n,0;j})$ implique que cela est vrai pour $s_n = j$, $j = 0, 1, \dots, m$; cela est vrai alors pour tout s_n car les b_j, $j = 0, 1, \dots, m$, engendrent $\mathfrak{B}$). Supposons donc cette appartenance vérifiée jusqu'à $r_{m+1} \leqslant r-1$ et prouvons-la pour $r_{m+1} = r$.

Dans la somme précédente, les termes correspondant à des indices $q \leqslant m-1$ sont dans $\mathfrak{A}$ en vertu de $(A_{n,0;q})$. Quant aux termes correspondant à $q \geqslant m+1$, ils sont aussi dans $\mathfrak{A}$

du fait que $m + r_{m+1} - q \leqslant r - 1$ (ici $r_{m+1} = r$) et que donc la récurrence sur r_{m+1} s'applique. Il s'ensuit que le terme correspondant à $q = m$ est aussi dans $\mathfrak{A}$. Ce terme est $\binom{m+r}{m} a_0^m a_{r_{m+1}} \ldots a_{r_{m+n}} b_m b_{s_2} \ldots b_{s_n}$.

5. **Preuve de** $(A_{n,o,M})$ **pour** $1 \leqslant M \leqslant m - 1$.

Nous raisonnerons par récurrence sur s_1; remarquons que pour $s_1 \leqslant M - 1$, le résultat découle de $(A_{n,o;j})$.

Nous raisonnerons aussi par récurrence sur r_{M+1}; d'après la récurrence descendante sur M, le résultat est vrai si $r_{M+1} = 0$.

Multiplions $(e_{s_1 + r_{M+1}})$ par $a_o^M a_{r_{M+2}} \ldots a_{r_{m+n}} b_{s_2} \ldots b_{s_n}$. Nous obtenons :

$$\sum_{q=0}^{s_1 + r_{M+1}} \binom{s_1 + r_{M+1}}{q} a_o^M a_{s_1 + r_{M+1} - q} a_{r_{M+2}} \ldots a_{r_{m+n}} b_q b_{s_2} \ldots b_{s_n} = 0.$$

Les termes correspondant à $q \leqslant s_1 - 1$ sont dans $\mathfrak{A}$ en vertu de la récurrence sur s_n; ceux correspondant à $q \geqslant s_1 + 1$ sont dans $\mathfrak{A}$ car alors $s_1 + r_{M+1} - q \leqslant r_{M+1} - 1$ et la récurrence sur r_{M+1} s'applique. Il s'ensuit que le terme correspondant à $q = s_1$ est dans $\mathfrak{A}$, et c'est ce que nous désirions.

6. **Preuve de** $(A_{n,h;0})$ **pour** $h \geqslant 1$.

Multiplions (e_h) par $a_{r_2} \ldots a_{r_{m+n}} b_{s_2} \ldots b_{s_n}$. Il vient :

$$a_h a_{r_2} \ldots a_{r_{m+n}} b_0 b_{s_2} \ldots b_{s_n} + \sum_{q=1}^{h} \binom{h}{q} a_{h-q} a_{r_2} \ldots a_{r_{m+n}} b_q b_{s_2} \ldots b_{s_n} = 0.$$

Mais la somme du premier membre de cette équation est dans $\mathfrak{A}$ en vertu de la récurrence sur h dans $(A_{n,h})$; donc le premier terme aussi est dans $\mathfrak{A}$.

7. **Preuve de** $(A_{n,h;j})$ **pour** $j = 1, \ldots, m$.

Multiplions (e_{j+h}) par $a_h^j a_{r_{j+2}} \ldots a_{r_{m+n}} b_{s_2} \ldots b_{s_n}$. Nous obtenons :

$$\sum_{q=0}^{j+h} \binom{j+h}{q} a_{j+h-q} a_h^j a_{r_{j+2}} \ldots a_{r_{m+n}} b_q b_{s_2} \ldots b_{s_n} = 0.$$

Les termes correspondant à $q \leqslant j - 1$ sont dans $\mathfrak{A}$ en vertu de la récurrence sur j; ceux correspondant à $q \geqslant j + 1$ sont dans $\mathfrak{A}$ en vertu de la récurrence sur h dans $(A_{n,h})$. Il en résulte que le terme correspondant à $q = j$ est dans $\mathfrak{A}$ et c'est ce que nous désirions.

8. **Preuve de $(A_{n,h,M})$ pour $M = m$.**

En raisonnant comme au n° 4, mais en s'appuyant ici sur $(A_{n,h;j})$, on voit qu'il suffit de prouver que

$$a_h^m \, a_{r_{m+1}} \dots a_{r_{m+n}} \, b_m \, b_{s_2} \dots b_{s_n} \in \mathfrak{A}.$$

Ici comme au n° 4 on raisonne par récurrence sur r_{m+1} et la marche des raisonnements est identique à celle suivie dans le n° 4, avec a_h à la place de a_0, à ce détail près que le résultat pour $r_{m+1} = 0$ découle maintenant de $(A_{n,0,1})$ (identique à $(A_{n,0})$).

9. **Preuve de $(A_{n,h,M})$ pour $1 \leqslant M \leqslant m - 1$.**

On raisonne exactement comme au n° 5 en substituant a_h à a_0 et en utilisant $(A_{n,h;j})$ $(j = 0, 1, \dots, m)$ au lieu de $(A_{n,0;j})$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] F. E. Browder, Regularity theorems for solutions of partial differential equations. *Proc. Nat. Acad. Sc.*, t. 43, n° 2, 1956, p. 234.

[1] J. Dieudonné et L. Schwartz, La dualité dans les espaces $(\mathscr{F})$ et $(\mathscr{L}\mathscr{F})$ *Ann. Inst. Fourier*, 1949, p. 61.

[1] L. Ehrenpreis, General theory of elliptic equations. *Proc. Nat. Acad. Sc.*, t. 42, n° 1, 1956, p. 39.

[1] L. Hörmander, On the theroy of general partial differential operators. *Acta Math.*, t. 94, 1955, p. 160.

[2] L. Hörmander, On Interior Regularity of the Solutions of Partial Differential Equations. *Comm. pures and appl. Math.*, n° 2, 1958, p. 197.

[1] P. D. Lax, On Cauchy problem for hyperbolic equations... *Comm. pure and appl. Math.*, 1955, p. 615.

[1] B. Malgrange, Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles. *Ann. Inst. Fourier*, t. 6, 1955-1956, p. 271.

[2] B. Malgrange, Sur une classe d'opérateurs différentiels hypoelliptiques. *Bull. Soc. Math. France*, 85, 1957, 283.

[1] S. Mizohata, Hypoellipticité des équations paraboliques. *Bull. Soc. Math. France*, 85, 1957, p. 15.

[2] S. Mizohata, Hypoellipticité des opérateurs différentiels elliptiques. *Nancy, C. R. du Colloque sur les Eq. Der. Part., C.N.R.S.*, p. 165.

[1] L. SCHWARTZ Théorie des distributions, t. I et II, Hermann, 2e éd., Paris, 1958.
[2] L. SCHWARTZ, Seminaire 1953-1954, Inst. H. Poincaré, Paris.
[3] L. SCHWARTZ, Espaces de fonctions différentiables à valeurs vectorielles. *Journal d'Analyse Math.*, Jérusalem, t. 4, 1954-1955, p. 88-148.
[4] L. SCHWARTZ, Théorie des Distributions à valeurs vectorielles. *Ann. Inst. Fourier*, 1957, t. 7, p. 1.
[7] L. SCHWARTZ, Séminaire 1954-1955, Inst. H. Poincaré, Paris.
[6] L. SCHWARTZ, Ecuaciones diferenciales parciales elipticas, Bogota, Colombia, 1956.
[7] L. SCHWARTZ, Su alcuni problemi della teoria delle equazioni differenziali lineari di tipo ellittico. *Inst. Mat. Univ. di Genova*, 1957.
[1] F. TRÈVES, Domination et opérateurs paraboliques. *C. R. Acad. des Sc.*, t. 246, 1958.