Annales de l'institut Fourier

Georges de Rham

Solution élémentaire d'opérateurs différentiels du second ordre

Annales de l'institut Fourier, tome 8 (1958), p. 337-366

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1958__8__337_0>

SOLUTION ÉLÉMENTAIRE D'OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS DU SECOND ORDRE

Par Georges de RHAM

Les numéros 1, 2 et 3 de cet article reproduisent un exposé fait au Colloque Henri Poincaré, à Paris, en octobre 1954, sous le titre « Solution élémentaire d'équations aux dérivées partielles du second ordre à coefficients constants ». J'y ai ajouté, dans le n° 4, une autre représentation des mêmes solutions.

1. — Énoncé du problème et du résultat.

Le but de cet exposé est de déterminer une solution élémentaire relative à l'opérateur

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_p^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_{p+1}^2} - \cdots - \frac{\partial^2}{\partial x_n^2},$$

c'est-à-dire une distribution E satisfaisant dans R^n à l'équation $\square E = \delta_O$, où δ_O est la distribution de Dirac représentant une masse $+1$ placée à l'origine des coordonnées O dans R^n. [1]

Pour $p = n$, cette solution élémentaire est, à un facteur près, le potentiel de δ_O. Pour $p = 1$, elle est également connue et intervient comme on sait dans la solution du problème de Cauchy pour l'équation des ondes. Je considère ici le cas

[1] Cette définition d'une solution élémentaire se trouve dans L. SCHWARTZ, *Théorie des distributions I* (Paris, Hermann et Cie, 1950), p. 133.

général où p et $q = n - p$ sont deux entiers positifs quelconques. La méthode suivie, utilisée récemment par P.D. Methée (²) dans le cas où $p = 1$, est basée sur deux principes très élémentaires.

Le premier consiste en l'introduction de la forme quadratique

$$u = x_1^2 + \cdots + x_q^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_n^2.$$

En désignant par f l'application de R^n dans R^1 qui envoie le point $x = (x_1, ..., x_n)$ de R^n sur le point d'abscisse $\xi = u$ de R^1, à toute fonction $\psi = \psi(\xi)$ définie dans R^1 correspond dans R^n la fonction $f^*\psi(x) = \psi(u)$, qui est appelée image transposée de ψ(³). On démontre (⁴) que, grâce au fait que O est le seul point critique de l'application f, à toute distribution S définie dans R^1 correspond de même une distribution f^*S, qui est définie dans $R^n - O$, mais en général pas dans R^n. Toutefois, si le support de S ne contient pas le point $\xi = 0$, le point O n'adhère pas au support de f^*S dans $R^n - O$, et la distribution f^*S est alors définie dans R^n en convenant qu'elle est nulle dans le voisinage de O.

A la distribution de Dirac δ_ε dans R^1, représentant une masse $+1$ placée au point $\xi = \varepsilon$, correspond ainsi dans R^n une distribution $H_\varepsilon = f^*\delta_\varepsilon$, qui est définie dans R^n tout entier pour $\varepsilon \neq 0$ et dont le support est l'hyperboloïde $u = \varepsilon$. A la dérivée k-ième $\delta_\varepsilon^{(k)}$ de δ_ε correspond de même une distribution $H_\varepsilon^k = f^*\delta_\varepsilon^{(k)}$, ayant pour support le même hyperboloïde. Soit Y (ξ) la fonction d'Heaviside, égale à 1 pour $\xi > 0$ et à 0 pour $\xi < 0$; à la distribution $Y_\varepsilon = Y(\xi - \varepsilon)$ correspond la distribution $f^*Y_\varepsilon = Y(u - \varepsilon)$ égale à la fonction valant 1 dans la région $u > \varepsilon$ de R^n et 0 dans la région $u < \varepsilon$. Les formules connues

$$\frac{dY_\varepsilon}{d\varepsilon} = -\delta_\varepsilon \qquad \text{et} \qquad \frac{d\delta_\varepsilon^{(k)}}{d\varepsilon} = -\delta_\varepsilon^{(k+1)}$$

(²) P.-D. Methée, *sur les distributions invariantes dans le groupe des rotations de Lorentz* (Thèse), Commentarii Mathematici Helvetici 28 (1954), p. 225-269. Ce travail est désigné dans la suite par (M).

(³) Je m'écarte légèrement des notations de (M), et dans la suite une fonction de u sera toujours considérée comme une fonction ou une distribution dans R^n (ou $R^n - O$) et une fonction de ξ comme une fonction ou une distribution dans R^1.

(⁴) C'est un cas particulier, vérifié directement plus loin, d'un théorème général qui se trouve dans *G. de Rham, Variétés différentiables* (Paris, Hermann et Cie, 1955), p. 63-64. Cet ouvrage est désigné dans la suite par (R).

entraînent

$$(1) \qquad \frac{d}{d\varepsilon} Y(u-\varepsilon) = -H_\varepsilon, \qquad \frac{d}{d\varepsilon} H_\varepsilon^k = -H_\varepsilon^{k+1}.$$

Pour $\varepsilon = 0$, les distributions H_ε^k ne sont définies que dans $R^n - O$ et ces relations n'ont pour l'instant de sens que dans $R^n - O$ (nous verrons que, considérée comme fonction de ε, la distribution $Y(u - \varepsilon)$ est indéfiniment dérivable pour $\varepsilon \neq 0$ mais pas pour $\varepsilon = 0$).

On peut toutefois étendre la définition de ces distributions H_0^k dans R^n en faisant appel à la notion de partie finie, notion qui est précisément le second principe de la méthode employée ici. Étant donnée une fonction $g(\varepsilon)$ définie pour $\varepsilon > 0$, on vérifie aisément qu'il ne peut exister plus d'une combinaison linéaire $I(\varepsilon)$ de fonctions de la forme $\varepsilon^\lambda \log^\mu \varepsilon$, où μ est un entier ≥ 0 et λ un nombre dont la partie réelle est ≤ 0, la valeur $\lambda = 0$ étant exclue si $\mu = 0$, telle que $g(\varepsilon) - I(\varepsilon)$ tende vers une limite finie pour $\varepsilon \to +0$. Cette combinaison linéaire $I(\varepsilon)$, si elle existe, est appelée la *partie infinie* de $g(\varepsilon)$ pour $\varepsilon \to +0$ et la limite en question est appelée la *partie finie de* $g(\varepsilon)$ *pour* $\varepsilon \to +0$ et désignée par

$$\underset{\varepsilon \to +0}{\mathrm{P}f}\; g(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to +0} g(\varepsilon) - I(\varepsilon).$$

S'il n'existe pas de telle combinaison linéaire $I(\varepsilon)$, on dit que $\underset{\varepsilon \to +0}{\mathrm{P}f}\; g(\varepsilon)$ n'a pas de sens.

Si $g(\varepsilon)$ est définie pour $\varepsilon < 0$, on définit de même $\underset{\varepsilon \to -0}{\mathrm{P}f}\; g(\varepsilon)$, partie finie de $g(\varepsilon)$ pour $\varepsilon \to -0$.

Cette notion s'applique à des fonctions de ε dont la valeur est une distribution. Considérons par exemple $Y(u - \varepsilon)u^h$. Pour $\varepsilon \to +0$, cette fonction converge vers la fonction $Y(u)u^h$, mais si la partie réelle de h est $\leqslant -1$, cette fonction n'est pas sommable au voisinage des points du cône $u = 0$, elle ne représente pas une distribution, et pour $\varepsilon \to +0$ la distribution $Y(u - \varepsilon)u^h$ ne converge pas dans R^n. Mais on peut montrer que $\underset{\varepsilon \to +0}{\mathrm{P}f}\; Y(u - \varepsilon)u^h$ existe toujours et représente par suite une distribution bien définie dans R^n. Il en est de même de $\mathrm{P}f\; Y(\varepsilon - u)|u|^h$. Nous verrons aussi que, si

$k < \frac{n-2}{2}$, la distribution H_ε^k tend vers une limite pour $\varepsilon \to 0$, tandis que si $k \geqslant \frac{n-2}{2}$, il n'y a pas de limite, mais les parties finies $\underset{\varepsilon \to +0}{\mathrm{P}f}\ \mathrm{H}_\varepsilon^k$ et $\underset{\varepsilon \to -0}{\mathrm{P}f}\ \mathrm{H}_\varepsilon^k$ existent toujours.

Pour donner l'expression de la solution élémentaire relative à $\square$, il convient de distinguer trois cas, selon la parité de p, q et $n = p + q$.

1er *cas:* n impair, p impair, q pair > 0;
2e *cas:* n pair, p et q pairs > 0;
3e *cas:* n pair > 2, p et q impairs.

Posons encore, *pour n impair* $\geqslant 3$,

$$\mathrm{T}_1 = \underset{\varepsilon \to +0}{\mathrm{P}f}\ \mathrm{Y}(u-\varepsilon)u^{\frac{2-n}{2}}, \qquad \mathrm{T}_2 = \underset{\varepsilon \to -0}{\mathrm{P}f}\ \mathrm{Y}(\varepsilon-u)|u|^{\frac{2-n}{2}},$$

et *pour n pair* $\geqslant 4$,

$$\mathrm{T}_1 = \underset{\varepsilon \to +0}{\mathrm{P}f}\ \mathrm{Y}(u-\varepsilon)u^{\frac{2-n}{2}} + \underset{\varepsilon \to -0}{\mathrm{P}f}\ \mathrm{Y}(\varepsilon-u)u^{\frac{2-n}{2}}, \qquad \mathrm{T}_2 = \lim_{\varepsilon=0} \mathrm{H}_\varepsilon^{\frac{n-4}{2}}.$$

Cela étant, *dans le* 1er *et dans le* 2e *cas,*

$$\mathrm{E} = (-1)^{\frac{q}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{(4-2n)\pi^{\frac{n}{2}}} \mathrm{T}_1$$

est une solution élémentaire, $\square\mathrm{E} = \delta_0$ *et* $\square\mathrm{T}_2 = 0$, tandis que *dans le* 3e *cas*

$$\mathrm{E} = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \frac{1}{4\pi^{\frac{n-2}{2}}} \mathrm{T}_2$$

est une solution élémentaire, $\square\mathrm{E} = \delta_0$, *et* $\square\mathrm{T}_1 = 0$.

On remarquera que, dans le 1er cas, le support de la solution élémentaire E est la région $u \geqslant 0$ de R^n limitée par la surface du cône $u = 0$; dans le 2e cas, le support de E est l'espace R^n tout entier et dans le 3e cas c'est la surface du cône $u = 0$. L'équation des ondes, pour $p = 1$, illustre le 1er cas si n est impair et le 3e cas si n est pair.

Il est inutile de considérer le cas où p est pair et q impair, qui se ramène au 1er cas en changeant $\square$ en $-\square$ et u en

— u. Pour $q = 0$, la méthode s'applique aussi et l'on retrouve la solution élémentaire bien connue (pour $n > 2$)

$$E = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{(4-2n)\pi^{\frac{n}{2}}} u^{\frac{2-n}{2}}.$$

Elle s'applique également dans les cas où $n = 2$, cas qui peuvent être laissés au lecteur comme exercice.

Les calculs qui conduisent à ces résultats, indiqués au nº 3, utilisent un développement asymptotique de H_ε, déjà considéré par P.D. Methée dans le cas où $p = 1$, qui sera établi en toute généralité au nº 2.

Pour terminer, on examinera dans quelle mesure les solutions élémentaires ici obtenues sont caractérisées par leur propriété évidente d'être invariantes vis-à-vis de tout homéomorphisme C^∞ de R^n en lui-même laissant u invariante.

2. — Développement asymptotique de H_ε.

En utilisant la terminologie de (R), nous appelons distribution tout courant de degré 0. Un courant de degré n dans R^n est le produit d'une distribution dans R^n par l'élément de volume $dx_1 \ldots dx_n$, et un courant de degré 1 dans R^1 est le produit d'une distribution dans R^1 par $d\xi$.

Si T est un courant de degré n à support compact dans R^n, son image par f est le courant fT de degré 1 dans R^1, défini par la formule

$$fT[\psi] = T[f^*\psi], \tag{2}$$

où $\psi = \psi(\xi)$ désigne toujours une fonction C^∞ à support compact dans R^1.

Désignons par $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ une fonction C^∞ à support compact dans R^n, quelconque, et posons

$$\alpha = \varphi(x_1, \ldots x_n)\, dx_1 \ldots dx_n \tag{3}$$

et

$$f\alpha = F(\xi)\, d\xi. \tag{4}$$

Le fait que O est le seul point critique de l'application f

entraîne que $F(\xi)$ est C^∞ pour $\xi \neq 0$, et même pour $\xi = 0$ lorsque le support de φ ne contient pas le point O. Nous montrerons que les dérivées d'ordre $\leqslant \frac{n-3}{2}$ de $F(\xi)$ sont toujours continues pour $\xi = 0$; cela résultera d'un développement asymptotique de $F(\xi)$ au voisinage de $\xi = 0$, que l'on va établir, dont on pourra déduire par simple dérivation le développement asymptotique de toute dérivée $F^{(k)}(\xi)$.

Pour $T = \alpha$, la formule (2) peut s'écrire $\psi[f\alpha] = f^*\psi[\alpha]$. En supposant que le support de α ne contient pas le point O, $f\alpha$ étant alors C^∞, on est conduit à poser, en remplaçant ψ par une distribution quelconque S dans R^1,

$$f^*S[\alpha] = S[f\alpha], \tag{5}$$

ce qui définit f^*S dans $R^n - O$. Si le support de S ne contient pas le point $\xi = 0$, cette formule conserve un sens lorsque le support de α contient O et définit la distribution f^*S dans R^n, distribution qui est alors nulle au voisinage du cône $u = 0$.

Pour $S = \delta_\varepsilon$, il vient en particulier

$$H_\varepsilon[\alpha] = f^*\delta_\varepsilon[\alpha] = \delta_\varepsilon[f\alpha] = \delta_\varepsilon[F(\xi)\, d\xi] = F(\varepsilon),$$

d'où, en vertu de (1),

$$H_\varepsilon^k[\alpha] = (-1)^k F^{(k)}(\varepsilon).$$

La détermination du développement asymptotique de H_ε au voisinage de $\varepsilon = 0$ revient donc à celle du développement asymptotique de $F(\xi)$ au voisinage de $\xi = 0$.

Partons de la formule (2), qui s'écrit, pour $T = \alpha$,

$$f\alpha[\psi] = \int \psi(u)\varphi(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n.$$

Posons $v = x_1^2 + \cdots + x_p^2$, $w = x_{p+1}^2 + \cdots + x_n^2$, de sorte que $u = v - w$. Désignons par R^p et R^q les sous-espaces de R^n définis respectivement par $x_{p+1} = \cdots = x_n = 0$ et $x_1 = \cdots = x_p = 0$, de sorte que $R^n = R^p \times R^q$, et soient x' et x'' les projections du point $x = (x_1, \ldots, x_n)$ sur R^p et R^q respectivement. Soit S'_v la sphère à $p - 1$ dimensions de centre O et de rayon $\sqrt{v}$ dans R^p, σ' le point d'intersection avec S'_1 de la demi-droite issue de O passant par x'; le point x' est alors déterminé par ses coordonnées polaires σ' et v, et en désignant par $d\sigma'$ l'élément d'aire (à $p-1$ dimensions) de S'_1, l'élément de volume de R^p prend la forme

$$dx_1 \ldots dx_p = \frac{1}{2} v^{\frac{p-2}{2}} d\sigma' dv.$$

On définit d'une manière analogue la sphère à $q-1$ dimensions S''_w dans R^q, les coordonnées polaires σ'' et w de x'', et, l'élément d'aire (à $q-1$ dimensions) de S''_1 étant désigné par $d\sigma''$, l'élément de volume de R^q prend la forme

$$dx_{p+1} \ \ldots \ dx_n = \frac{1}{2} w^{\frac{q-2}{2}} d\sigma'' dw.$$

En posant $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \tilde{\varphi}(v, w; \sigma', \sigma'')$, la formule ci-dessus devient alors

$$f\alpha[\psi] = \frac{1}{4} \int \psi(v - w) v^{\frac{p-2}{2}} w^{\frac{q-2}{2}} \tilde{\varphi}(v, w; \sigma', \sigma'') d\sigma' d\sigma'' dv\, dw,$$

l'intégration devant être étendue à S'_1 par rapport à σ', à S''_1 par rapport à σ'', de 0 à ∞ par rapport à v et de 0 à ∞ par rapport à w.

En désignant par $\Phi(v, w)$ la *valeur moyenne de* $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ sur $S'_v \times S''_w$ et par $s_{k-1} = \dfrac{2\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma\left(\dfrac{k}{2}\right)}$ l'aire à $k-1$ dimensions de la sphère de rayon 1 dans R^k, on a

$$\int \tilde{\varphi}(v, w; \sigma', \sigma'') d\sigma' d\sigma'' = s_{p-1} s_{q-1} \Phi(v, w),$$

et il vient

$$f\alpha[\psi] = \frac{s_{p-1} s_{q-1}}{4} \int_0^\infty \int_0^\infty \psi(v - w)\, \Phi(v, w)\, v^{\frac{p-2}{2}} w^{\frac{q-2}{2}} dv\, dw.$$

Décomposons cette intégrale double en la somme de deux intégrales étendues respectivement aux régions $v > w$ et $v < w$ du quadrant $v > 0$, $w > 0$. En substituant à v la variable $u = v - w$, la première devient

$$\int_0^\infty \psi(u)\, du \int_0^\infty \Phi(u + w, w)\, (u + w)^{\frac{p-2}{2}} w^{\frac{q-2}{2}} dw,$$

et en substituant $u = v - w$, la seconde devient

$$\int_{-\infty}^{0} \psi(u)du \int_{0}^{\infty} \Phi(v, v-u) v^{\frac{p-2}{2}} (v - u)^{\frac{q-2}{2}} dv.$$

En posant

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} &F_1(\xi) = \int_0^\infty \Phi(\xi + w, w)\,(\xi + w)^{\frac{p-2}{2}} w^{\frac{q-2}{2}} dw, \\ &F_2(\xi) = \int_0^\infty \Phi(v, v - \xi)\, v^{\frac{p-2}{2}} (v - \xi)^{\frac{q-2}{2}} dv, \\ &F(\xi) = \begin{cases} \dfrac{s_{p-1} s_{q-1}}{4} F_1(\xi) & \text{pour } \xi > 0, \\ \dfrac{s_{p-1} s_{q-1}}{4} F_2(\xi) & \text{pour } \xi < 0, \end{cases} \end{aligned} \right.$$

il vient alors

$$f\alpha[\psi] = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\xi) F(\xi)\, d\xi$$

et l'on a bien $f\alpha = F(\xi)\, d\xi$.

C'est l'expression de $F(\xi)$ donnée par (6) qui va nous fournir son développement asymptotique. Il convient tout d'abord d'établir quelques propriétés de la fonction $\Phi(v, w)$, valeur moyenne de $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ sur $S'_v \times S''_w$.

Cette fonction est définie pour $v \geqslant 0$ et $w \geqslant 0$, et il est clair que $\Phi(0, 0) = \varphi(0, \ldots, 0)$, ou, ce qui est la même chose, $\Phi(0, 0) = \delta_0[\alpha]$. Le support de φ étant compact, il existe un nombre R (dépendant de φ) tel que $\varphi = 0$ sur $S'_v \times S''_w$ pour $v + w > R^2$; par suite $\Phi(v, w) = 0$ pour $v + w > R^2$. Vérifions encore que *toutes les dérivées de* $\Phi(v, w)$ *sont continues pour* $v \geqslant 0$ *et* $w \geqslant 0$. Soient t' et t'' des transformations orthogonales quelconques des variables $x_1, \ldots, x_p$ et $x_{p+1}, \ldots, x_n$ respectivement. La fonction $\varphi(x;\ t',\ t'')$ transformée de $\varphi(x) = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ par t' et t'' est, comme φ, une fonction C^∞ de $x_1, \ldots, x_n$ et elle a la même valeur moyenne $\Phi(v, w)$ sur $S'_v \times S''_w$. La valeur moyenne $\overline{\varphi}(x) = \overline{\varphi}(x_1, \ldots, x_n)$ de $\varphi(x;\ t',\ t'')$ par rapport à t' et à t'', calculée en intégrant sur les groupes orthogonaux à p et q variables, est encore une fonction C^∞ de $x_1, \ldots, x_n$ et a sur $S'_v \times S''_w$ la valeur constante $\Phi(v, w)$. Il en résulte

$$\Phi(v, w) = \overline{\varphi}(\pm\sqrt{v}, 0, \ldots, 0, \pm\sqrt{w}, 0, \ldots, 0)$$

où $\pm\sqrt{w}$ est mis à la place de x_{p+1}, ce qui montre que $\Phi(v, w)$ est égale à une fonction C^∞ de $s=\sqrt{v}$ et $t=\sqrt{w}$, paire par rapport à s, et paire par rapport à t, $\Phi(v,w)=\chi(s,t)$.

Cela entraîne

$$\frac{\partial\Phi(v, w)}{\partial v}=\chi_1(s, t) \qquad \text{avec} \qquad \chi_1(s, t)=\frac{1}{2s}\frac{\partial\chi(s, t)}{\partial s}.$$

Comme $\frac{\partial\chi(s, t)}{\partial s}$ est C^∞, impaire en s et paire en t, donc nulle pour $s=0$, $\chi_1(s, t)$ est C^∞, paire en s et paire en t, de sorte que $\frac{\partial\Phi(v, w)}{\partial v}$ est continue pour $v\geqslant 0$ et $w\geqslant 0$, comme $\Phi(v, w)$. En raisonnant par récurrence, on voit par la même argumentation que toute dérivée de $\Phi(v, w)$ est égale à une fonction C^∞ de s et t, paire en s et paire en t, ce qui établit notre assertion.

En tenant compte de (6), il résulte immédiatement de là que toutes les dérivées de $F(\xi)$ sont continues pour $\xi\neq 0$, qu'elles sont continues pour $\xi\leqslant 0$ si q est pair ($q\geqslant 2$), le point $\xi=0$ devant toutefois être présumé point de discontinuité de 1re espèce dans le cas où p et q sont pairs. Par contre, nous allons montrer que pour $\xi\to+0$ si p est impair et pour $\xi\to-0$ si q est impair, $F^{(h)}(\xi)$ a une partie infinie, que nous déterminerons à l'aide du lemme suivant, petite variante de celui qu'on trouve dans (M), p. 240.

Lemme. — Soit $F(x, y)$ une fonction des deux variables réelles x et y, définie et continue pour $x\geqslant 0$ et $y\geqslant 0$ ainsi que toutes ses dérivées, et soient a un nombre positif, m un entier $\geqslant -1$ et d un entier $\geqslant 0$. L'intégrale

$$J(\xi)=J(m, d, F)=\int_0^a F(w+\xi, w)\, w^{\frac{m}{2}}(w+\xi)^{\frac{-m-2-d}{2}}\,dw$$

a, pour $\xi\to+0$, une partie infinie qui est de la forme

$$Q_{\frac{d}{2}}(\xi)=a_{\frac{d}{2}}\xi^{-\frac{d}{2}}+a_{\frac{d-2}{2}}\xi^{-\frac{d-2}{2}}+\cdots+a_{\frac{1}{2}}\xi^{-\frac{1}{2}}$$

si d est impair, et de la forme

$$P_{\frac{d}{2}}(\xi)=b_{\frac{d}{2}}\xi^{-\frac{d}{2}}+b_{\frac{d-2}{2}}\xi^{-\frac{d-2}{2}}+\cdots+b_1\xi^{-1}+b_0\log\xi$$

si d est pair.

Les coefficients a_i et b_i de ces expressions ne dépendent ni de ξ ni de a, et l'on a en particulier

$$\begin{array}{ll} \text{pour } d \text{ impair,} & a_{\frac{d}{2}} \\ \text{pour } d \text{ pair} \geqslant 2, & b_{\frac{d}{2}} \end{array} \Bigg\} = \frac{\Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+d+2}{2}\right)} F(0, 0),$$

$$\text{pour } d = 0, \qquad b_0 = -F(0, 0).$$

Démonstration. — Commençons par le cas où $d = 0$. Si $m > 0$, on a, en intégrant par parties,

$$J(m, 0, F) = -\frac{2}{m}\int_0^a F(w + \xi, w) w^{\frac{m}{2}} d(w + \xi)^{-\frac{m}{2}}$$
$$= J(m-2, 0, F) + \cdots,$$

les termes non écrits ayant une limite finie pour $\xi \to +0$. Ainsi $J(m, 0, F)$ a la même partie infinie que $J(m-2, 0, F)$, donc que $J(0, 0, F)$ si m est pair et que $J(-1, 0, F)$ si m est impair. On a ensuite, en intégrant encore par parties,

$$J(0, 0, F) = \int_0^a F(w + \xi, w)\, d\log(w + \xi) = -F(0, 0)\log\xi + \cdots,$$
$$J(-1, 0, F) = \int_0^a F(w + \xi, w)\, d\log\left(w + \frac{\xi}{2} + \sqrt{w^2 + w\xi}\right)$$
$$= -F(0, 0)\log\xi + \cdots,$$

les termes non écrits ayant encore une limite finie pour $\xi \to +0$. Cela prouve l'affirmation dans le cas où $d = 0$.

Supposons maintenant $d > 0$. Les fonctions $F'(x, y)$ et et $F''(x)$ définies par

$$F'(x, y) = \frac{F(x, y) - F(x, 0)}{y} \quad \text{et} \quad F''(x) = \frac{F(x, 0) - F(0, 0)}{x}$$

sont continues ainsi que toutes leurs dérivées pour $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$, et l'on a

$$F(w + \xi, w) = F(0, 0) + (w + \xi) F''(w + \xi) + wF'(w + \xi, w),$$

d'où résulte

$$J(m, d, F) = F(0, 0)\, J(m, d, 1) + J(m, d-2, F'')$$
$$+ J(m+2, d-2, F').$$

On a d'autre part

$$J(m, d, 1) = \int_0^\infty w^{\frac{m}{2}} (w + \xi)^{\frac{-m-2-d}{2}} dw - \int_a^\infty w^{\frac{m}{2}} (w + \xi)^{\frac{-m-2-d}{2}} dw,$$

et comme le dernier terme a une limite finie pour $\xi \to +0$, la partie infinie de $J(m, d, 1)$ est

$$\int_0^\infty w^{\frac{m}{2}} (w + \xi)^{\frac{-m-2-d}{2}} dw = \xi^{-\frac{d}{2}} \int_0^\infty \rho^{\frac{m}{2}} (\rho + 1)^{\frac{-m-2-d}{2}} d\rho$$

$$= \xi^{-\frac{d}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+d+2}{2}\right)}$$

en vertu de la formule bien connue

$$\int_0^\infty \frac{y^{a-1}}{(1+y)^{a+b}} dy = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

L'affirmation du lemme se déduit alors immédiatement de ce qui précède, en raisonnant par récurrence sur d et tenant compte (si d est pair) du résultat établi pour $d = 0$ et (si d est impair) du fait évident que $J(m, -1, F)$ a une limite finie pour $\xi \to +0$.

Pour déterminer la partie infinie de $F_1^{(h)}(\xi)$ pour $\xi \to +0$ dans le cas où p est impair, partons de (6). On obtient

$$(7) \quad F_1^{(h)}(\xi) = \sum_{i=0}^{h} c_i \int_0^\infty \Phi^{(i,0)}(\xi + w, w)(\xi + w)^{\frac{p-2}{2} - h + i} w^{\frac{q-2}{2}} dw,$$

où l'on a posé $\Phi^{(i,0)}(x, y) = \dfrac{\partial^i \Phi(x, y)}{\partial x^i}$ et où les c_i sont des coefficients numériques qu'il est inutile de calculer pour l'instant. L'intégrale figurant dans le terme général de cette expression est de la même forme que celle du lemme, avec $m = q - 2$ et $d = 2h + 2 - n - 2i$. On voit que d est de même parité que n et sa plus grande valeur, atteinte pour $i = 0$, est $2h + 2 - n$. Il en résulte que, si $h \geqslant \dfrac{n-2}{2}$, *$F_1^{(h)}(\xi)$ et par suite $F^{(h)}(\xi)$ a pour $\xi \to +0$ une partie infinie de la forme $P_{h+\frac{2-n}{2}}(\xi)$ si n est pair et de la forme $Q_{h+\frac{2-n}{2}}(\xi)$ si n est impair, et si $h < \dfrac{n-2}{2}$, $F^{(h)}(\xi)$ tend vers une limite finie pour $\xi \to +0$.*

On a un résultat tout à fait analogue concernant $F_2^{(h)}(\xi)$ et $F^{(h)}(\xi)$ pour $\xi \to -0$ lorsque q est impair: il suffit de changer ξ en $-\xi$ et de permuter p et q pour se ramener au cas qui vient d'être examiné.

L'existence d'une partie infinie de $F^{(h)}(\xi)$ entraîne l'existence d'un développement asymptotique limité représentant $F(\xi)$ à une fonction près dont le quotient par ξ^h a une limite finie pour $\xi \to +0$ ou $\xi \to -0$, selon le cas, développement qu'on obtient, à un polynôme près de degré h, en intégrant h fois la partie infinie de $F^{(h)}(\xi)$. Comme h peut-être pris aussi grand qu'on veut, il en résulte l'existence d'un développement asymptotique illimité de $F(\xi)$, ou de H_ε, ce qui revient au même puisque $H_\varepsilon[\alpha] = F(\varepsilon)$, développement qui diffère, dans chacun des trois cas du n° 1, selon que $\varepsilon \to +0$ ou $\varepsilon \to -0$ et dont la forme, qui se déduit immédiatement de là, est la suivante.

1er *cas* (n impair, p impair, q pair)

$$H_\varepsilon \sim \begin{cases} \sum_0^\infty A_h\varepsilon^h + B_h\varepsilon^{h+\frac{n-2}{2}} & \text{pour} \quad \varepsilon \to +0, \\ \sum_0^\infty A'_h\varepsilon^h & \text{pour} \quad \varepsilon \to -0. \end{cases} \tag{8}$$

2e *cas* (n pair, p et q pairs)

$$H_\varepsilon \sim \begin{cases} \sum_0^\infty A'_h\varepsilon^h & \text{pour} \quad \varepsilon \to +0, \\ \sum_0^\infty A_h\varepsilon^h & \text{pour} \quad \varepsilon \to -0. \end{cases} \tag{9}$$

3e *cas* (n pair, p et q impairs)

$$H_\varepsilon \sim \begin{cases} \sum_0^\infty A'_h\varepsilon^h + B'_h\varepsilon^{h+\frac{n-2}{2}}\log\varepsilon & \text{pour} \quad \varepsilon \to +0, \\ \sum_0^\infty A_h\varepsilon^h + B_h\varepsilon^{h+\frac{n-2}{2}}\log|\varepsilon| & \text{pour} \quad \varepsilon \to -0. \end{cases} \tag{10}$$

Le raisonnement par lequel a été établie l'existence du développement asymptotique de $F(\xi)$ s'applique de la même manière à $F^{(k)}(\xi)$. Par suite, $\frac{d^k}{d\varepsilon^k} H_\varepsilon = (-1)^k H_\varepsilon^k$ possède aussi un développement asymptotique illimité, développement qu'on pourra déduire de celui de H_ε par dérivation. *Ces développements peuvent ainsi être dérivés par rapport à* ε *autant de fois que l'on veut.*

Les coefficients de ces développements sont des distributions. Pour les déterminer, il convient d'utiliser certaines relations de récurrence, comme l'a fait M. MÉTHÉE dans le cas où $p = 1$. Considérons les opérateurs différentiels adjoints

$$(11) \qquad D = D_\xi = \left(4\xi \frac{d}{d\xi} + 2n\right)\frac{d}{d\xi},$$
$$D^* = D^*_\xi = \left(4\xi \frac{d}{d\xi} + 8 - 2n\right)\frac{d}{d\xi}.$$

On a les relations

$$(12) \qquad \square f^*S = f^*DS, \qquad f \square T = D^*fT.$$

La première, valable pour toute distribution S dans R^1, s'établit aisément par calcul direct, et la seconde, valable pour tout courant T de degré n à support compact dans R^n, se déduit de la première par dualité (Cf. (M) p. 235). Comme $f\alpha = F(\xi)\,d\xi$, en prenant $T = \alpha$, on a $f \square \alpha = D^*_\xi F(\xi)\,d\xi$, par suite

$$H_\varepsilon[\square \alpha] = \delta_\varepsilon[D^*_\xi F(\xi)\,d\xi] = D^*_\varepsilon F(\varepsilon),$$

et comme $$\square H_\varepsilon[\alpha] = H_\varepsilon[\square \alpha],$$

on a $$\square H_\varepsilon = D^*_\varepsilon H_\varepsilon = \left(4\varepsilon \frac{d}{d\varepsilon} + 8 - 2n\right)\frac{d}{d\varepsilon} H_\varepsilon.$$

En vertu de cette relation, le développement asymptotique de $\square H_\varepsilon$ peut être obtenu de deux manières : soit en appliquant l'opération $\square$ aux coefficients du développement de H_ε, soit en effectuant sur ce développement l'opération $D^*_\varepsilon = \left(4\varepsilon \frac{d}{d\varepsilon} + 8 - 2n\right)\frac{d}{d\varepsilon}\cdot$ Par identification des deux résultats, on obtient, selon les cas, l'une ou l'autre des relations suivantes et celles qui s'en déduisent en remplaçant A et B par A′ et B′.

$$(13) \qquad \square A_h = 4(h+1)\left(h + 2 - \frac{n}{2}\right)A_{h+1},$$

$$(14) \qquad \square A_h = 4(h+1)\left(h+2-\frac{n}{2}\right)A_{h+1} + (8h+12-2n)B_{h-\frac{n}{2}+2},$$

$$(15) \qquad \square B_h = 4(h+1)\left(h + \frac{n}{2}\right)B_{h+1}.$$

La relation (13) et la relation analogue avec A′ au lieu de A sont valables pour tout h dans le 1er et dans le 2e cas, et pour $h < \frac{n-4}{2}$ dans le 3e cas.

La relation (14) et la relation analogue avec A′ et B′ au lieu de A et B sont valables pour $h \geqslant \frac{n-4}{2}$ dans le 3e cas.

La relation (15) est valable pour tout h dans le 1er et dans le 3e cas, et la relation analogue à (15) avec B′ au lieu de B est valable pour tout h dans le 3e cas.

Remarquons que le coefficient numérique de A_{h+1} au second membre de (13) et de (14) ne peut s'annuler que si n est pair, pour $h = \frac{n-4}{2}$; celui de B_{h+1} au second membre de (15) ne s'annule jamais, ni celui de $B_{h-\frac{n}{2}+2}$ dans (14) puisque cette formule ne vaut que pour $h \geqslant \frac{n-4}{2}$.

Les formules (6) montrent que $\lim\limits_{\xi \to +0} F_1(\xi) = \lim\limits_{\xi \to -0} F_2(\xi)$; il en résulte $\lim\limits_{\varepsilon \to +0} H_\varepsilon = \lim\limits_{\varepsilon \to -0} H_\varepsilon = H_0$, d'où, dans tous les cas, $A_0 = A'_0$. A l'aide de (13) et de la relation analogue avec A′ au lieu de A, on en déduit $A'_h = A_h$ pour tout h dans le 1er cas et pour $h \leq \frac{n-4}{2}$ dans le 2e et dans le 3e cas. Dans le 3e cas, (14) entraîne $\left(\text{pour } h = \frac{n-4}{2}\right) \square A_{\frac{n-4}{2}} = (2n-4)B_0$, et de même $\square A'_{\frac{n-4}{2}} = (2n-4)B'_0$, d'où $B_0 = B'_0$, puisque $A_{\frac{n-4}{2}} = A'_{\frac{n-4}{2}}$. A l'aide de (15) et de la relation analogue avec B′ au lieu de B, on en déduit $B'_h = B_h$ pour tout h. Nous montrerons plus loin directement que, dans le 3e cas, $A_{\frac{n-2}{2}} = A'_{\frac{n-2}{2}}$; à l'aide de (14) et de la relation analogue avec A′ et B′ au lieu de A et B, cela entraîne que dans le 3e cas $A_h = A'_h$ pour tout h.

Dans le 2e cas, il est commode de poser $B_h = A'_{h+\frac{n-2}{2}} - A_{h+\frac{n-2}{2}}$. La relation (13) et la relation analogue avec A′ au lieu de A entraînent alors que la relation (15) est encore vérifiée.

Il est alors possible, en utilisant la fonction d'Heaviside $Y(\varepsilon)$, de mettre sous une même forme les développements asymptotiques relatifs à $\varepsilon > 0$ et $\varepsilon < 0$, et, sous réserve de l'égalité $A_{\frac{n-2}{2}} = A'_{\frac{n-2}{2}}$ dans le 3e cas et de la valeur de B_0 qui sera calculée plus loin, nous pouvons énoncer :

Dans le 1er et dans le 2e cas, on a

$$H_\varepsilon \sim \sum_0^\infty A_h \varepsilon^h + B_h \varepsilon^{h+\frac{n-2}{2}} Y(\varepsilon), \tag{16}$$

$$B_0 = (-1)^{\frac{q}{2}} \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \delta_0 \tag{17}$$

et les relations (13) *et* (15) *sont valables pour tout h. Dans le* 1er *cas, tous les coefficients se déduisent, par ces relations, de* A_0 *et de* B_0. *Dans le* 2e *cas, ils se déduisent tous de* A_0, $A_{\frac{n-2}{2}}$ *et* B_0 *et l'on a* $\square A_{\frac{n-4}{2}} = 0$.

Dans le 3e *cas, on a*

$$H_\varepsilon \sim \sum_0^\infty A_h \varepsilon^h + B_h \varepsilon^{h+\frac{n-2}{2}} \log|\varepsilon|, \tag{18}$$

$$B_0 = (-1)^{\frac{q+1}{2}} \frac{\pi^{\frac{n-2}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \delta_0, \tag{19}$$

la relation (13) *est valable pour* $h < \frac{n-4}{2}$, *la relation* (14) *pour* $h \geqslant \frac{n-4}{2}$ *et la relation* (15) *pour tout h. Tous les coefficients se déduisent, par ces relations, de* A_0 *et de* $A_{\frac{n-2}{2}}$, *et l'on a* $\square A_{\frac{n-4}{2}} = (2n-4)B_0$.

Il faut remarquer que le développement donné par (16) a deux structures différentes dans le 1er cas, où n est impair, et dans le 2e cas, où n est pair. Dans le 2e cas, comme (9) le montre bien, il a la forme de Taylor aussi bien pour $\varepsilon > 0$ que pour $\varepsilon < 0$; dans le 1er cas, comme (8) le montre bien, il n'a la forme de Taylor que pour $\varepsilon < 0$.

Pour achever la démonstration, il ne reste qu'à calculer B_0 et à vérifier que, dans le 3^e cas, $A'_{\frac{n-2}{2}} = A_{\frac{n-2}{2}}$.

Calcul de B_0 *dans le* 1^{er} *cas*. La partie infinie de $\left(\frac{d}{d\varepsilon}\right)^{\frac{n-1}{2}} H_\varepsilon$ pour $\varepsilon \to +0$ est égale à

$$\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} B_0 \varepsilon^{-\frac{1}{2}}.$$

Cela se déduit directement de (8) ou (16), par dérivation. D'autre part, à l'aide de (7) avec $h = \frac{n-1}{2}$, on voit que, pour $\xi \to +0$, $F_1^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}(\xi)$ a la même partie infinie que

$$c_0 \int_0^\infty \Phi(\xi + w, w)(\xi + w)^{\frac{-q-1}{2}} w^{\frac{q-2}{2}} dw,$$

car pour $h = \frac{n-1}{2}$ les termes au second membre de (7) qui correspondent à des valeurs de $i > 0$ ont une limite finie pour $\xi \to +0$. En vertu du lemme (cas où $m = q - 2$ et $d = 1$), cette partie infinie est

$$c_0 \frac{\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)} \Phi(0, 0)\xi^{-\frac{1}{2}}$$

et le coefficient numérique c_0, qui s'introduit en dérivant $\frac{n-1}{2}$ fois $(\xi + w)^{\frac{p-2}{2}}$, a pour valeur

$$c_0 = \frac{p-2}{2}\frac{p-4}{2}\cdots\frac{1-q}{2} = \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-q}{2}\right)}.$$

Comme

$$H_\varepsilon[\alpha] = F(\varepsilon) = \frac{s_{p-1}s_{q-1}}{4} F_1(\varepsilon) \qquad \text{et} \qquad \Phi(0,\ 0) = \delta_O[\alpha],$$

il vient

$$\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} B_0 = \frac{s_{p-1}s_{q-1}}{4} c_0 \frac{\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)} \delta_0.$$

En tenant compte de la relation $\Gamma\left(\frac{1-q}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+q}{2}\right) = (-1)^{\frac{q}{2}}\pi$, on obtient alors facilement la relation (17).

Calcul de B_0 *dans le* 3^e^ *cas.* La partie infinie de $\left(\frac{d}{d\varepsilon}\right)^{\frac{n-2}{2}} H_\varepsilon$, pour $\varepsilon \to +0$ comme pour $\varepsilon \to -0$, est alors égale à $\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) B_0 \log|\varepsilon|$. Cela se déduit directement de (10) ou (18), par dérivation. D'autre part, à l'aide de (7) avec $h = \frac{n-2}{2}$, on voit que, pour $\xi \to +0$, $F_1^{\left(\frac{n-2}{2}\right)}(\xi)$ a la même partie infinie que

$$c_0 \int_0^\infty \Phi(\xi + w,\ w)\,(\xi + w)^{-\frac{q}{2}} w^{\frac{q-2}{2}} dw,$$

soit, en vertu du lemme (cas où $m = q - 2$ et $d = 0$), $-c_0\Phi(0, 0)\log\xi$, et le coefficient c_0, qui s'introduit en dérivant $\frac{n-2}{2}$ fois $(\xi + w)^{\frac{p-2}{2}}$ a pour valeur

$$c_0 = \frac{p-2}{2}\frac{p-4}{2}\cdots\frac{2-q}{2} = \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2-q}{2}\right)}$$

La relation (19) se déduit de là de la même manière qu'on a obtenu (17) dans le 1^er^ cas, à l'aide de la relation $H_\varepsilon[\alpha] = \frac{s_{p-1}s_{q-1}}{4} F_1(\varepsilon)$.

Calcul de $A'_{\frac{n-2}{2}} - A_{\frac{n-2}{2}}$ *dans les* 2^e^ *et* 3^e^ *cas.* On déduit de (9) dans le 2^e^ cas,

$$A'_{\frac{n-2}{2}} = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \lim_{\varepsilon \to +0}\left(\frac{d}{d\varepsilon}\right)^{\frac{n-2}{2}} H_\varepsilon, \qquad A_{\frac{n-2}{2}} = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \lim_{\varepsilon \to -0}\left(\frac{d}{d\varepsilon}\right)^{\frac{n-2}{2}} H_\varepsilon,$$

d'où

$$(20)\quad A'_{\frac{n-2}{2}}[\alpha]-A_{\frac{n-2}{2}}[\alpha]=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\lim_{\xi\to+0}\left[F^{\left(\frac{n-2}{2}\right)}(\xi)-F^{\left(\frac{n-2}{2}\right)}(-\xi)\right]$$
$$=\frac{s_{p-1}s_{q-1}}{4\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\lim_{\xi\to+0}\left[F_1^{\left(\frac{n-2}{2}\right)}(\xi)-F_2^{\left(\frac{n-2}{2}\right)}(-\xi)\right].$$

Cette relation (20) est aussi valable dans le 3e cas : elle se déduit alors de (10), où l'on sait que $B_0 = B'_0$. Dans ce cas, $F_1^{\left(\frac{n-2}{2}\right)}(\xi)$ et $F_2^{\left(\frac{n-2}{2}\right)}(-\xi)$ n'ont pas de limite pour $\xi \to +0$, mais ont la même partie infinie (précisément parce que $B_0 = B'_0$).

Pour calculer la limite figurant dans (20), considérons la fonction

$$K(\xi)=\int_a^\infty \Phi(\xi+w,w)(\xi+w)^{\frac{p-2}{2}}w^{\frac{q-2}{2}}dw$$
$$=\int_{a+\xi}^\infty \Phi(v,v-\xi)v^{\frac{p-2}{2}}(v-\xi)^{\frac{q-2}{2}}dv,$$

où a est un nombre >0 donné quelconque, et les fonctions $G_1(\xi) = F_1(\xi) - K(\xi)$ et $G_2(\xi) = F_2(\xi) - K(\xi)$. La fonction $K(\xi)$ est définie et C^∞ pour $\xi > -a$, $G_1(\xi)$ est définie pour $\xi > 0$ et $G_2(\xi)$ est définie pour $-a < \xi < 0$.

Comme $K^{\left(\frac{n-2}{2}\right)}(\xi)$ est continue au point $\xi = 0$, on a

$$(21)\quad \lim_{\xi\to+0}\left[F_1^{\left(\frac{n-2}{2}\right)}(\xi)-F_2^{\left(\frac{n-2}{2}\right)}(-\xi)\right]=\lim_{\xi\to+0}\left[G_1^{\left(\frac{n-2}{2}\right)}(\xi)-G_2^{\left(\frac{n-2}{2}\right)}(-\xi)\right]$$

La limite au second membre de (21) ne dépend donc pas de a.

$G_1(\xi)$ et $G_2(\xi)$ sont représentées par des intégrales qui se déduisent de celles définissant $F_1(\xi)$ et $F_2(\xi)$ dans (6) en remplaçant la limite supérieure ∞ par a et $a+\xi$ respectivement. Par dérivation, on en déduit

$$(22)\quad G_1^{\left(\frac{n-2}{2}\right)}(\xi)=\int_0^a\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^{\frac{n-2}{2}}\left[\Phi(\xi+w,w)(\xi+w)^{\frac{p-2}{2}}\right]w^{\frac{q-2}{2}}dw,$$

et, en changeant ξ en $-\xi$,

(23)

$$G_2^{\left(\frac{n-2}{2}\right)}(-\xi)=(-1)^{\frac{n-2}{2}}\int_0^{a-\xi}\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^{\frac{n-2}{2}}\left[\Phi(v,v+\xi)(v+\xi)^{\frac{q-2}{2}}\right]v^{\frac{p-2}{2}}dv$$
$$+(-1)^n\sum_{j=0}^{\frac{n-4}{2}}\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^{\frac{n-4}{2}-j}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^j\left\{\Phi(v,v+\xi)(v+\xi)^{\frac{q-2}{2}}\right\}v^{\frac{p-2}{2}}\right]_{v=a-\xi}.$$

Supposons d'abord que $\Phi(x, y)$ soit de la forme $x\Phi_1(x, y)$, $\Phi_1(x, y)$ étant continue ainsi que toutes ses dérivées pour $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$. Dans (22) et (23), on peut alors simplement remplacer Φ par Φ_1 et p par $p+2$; on constate qu'alors les intégrales sont convergentes pour $\xi=0$ même dans le 3e cas, de sorte que $G_1^{\left(\frac{n-2}{2}\right)}(\xi)$ et $G_2^{\left(\frac{n-2}{2}\right)}(-\xi)$ ont des limites finies pour $\xi \to +0$, et l'on vérifie facilement que, dans le 2e cas comme dans le 3e cas, ces limites tendent vers 0 pour $a \to 0$. Comme leur différence ne dépend pas de a, elle est nulle. Il en est de même lorsque $\Phi(x, y)$ est de la forme $y\Phi_2(x, y)$.

Cela entraîne que, $\Phi(x, y)$ pouvant toujours se mettre sous la forme $\Phi(x, y)=\Phi(0, 0)+x\Phi_1(x, y)+y\Phi_2(x,y)$, la limite au second membre de (21) est égale à $C\Phi(0, 0)$, où C est une constante numérique, valeur de cette même limite lorsque $\Phi\equiv 1$. En se reportant à (20), il vient alors

$$A'_{\frac{n-2}{2}}-A_{\frac{n-2}{2}}=\frac{s_{p-1}s_{q-1}}{4\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}C\delta_0. \tag{24}$$

Pour calculer C, désignons par $J_1(\xi)$ et $J_2(\xi)$ ce que deviennent $G_1(\xi)$ et $G_2(\xi)$ lorsqu'on remplace Φ par 1. On a

$$J_1(\xi)=\int_0^a(\xi+w)^{\frac{p-2}{2}}w^{\frac{q-2}{2}}dw=\int_\xi^{a+\xi}v^{\frac{p-2}{2}}(v-\xi)^{\frac{q-2}{2}}dv,$$
$$J_2(\xi)=\int_0^{a+\xi}v^{\frac{p-2}{2}}(v-\xi)^{\frac{q-2}{2}}dv$$

et

$$C=\lim_{\xi\to+0}\left[J_1^{\left(\frac{n-2}{2}\right)}(\xi)-J_2^{\left(\frac{n-2}{2}\right)}(-\xi)\right]. \tag{25}$$

Dans le 2e *cas*, p et q étant pairs, les fonctions $J_1(\xi)$ et $J_2(\xi)$ sont définies et C^∞ pour tout ξ; par suite, en posant

$$J(\xi) = J_1(\xi) - J_2(\xi) = -\int_0^\xi v^{\frac{p-2}{2}} (v-\xi)^{\frac{q-2}{2}} dv,$$

il vient $C = J^{\left(\frac{n-2}{2}\right)}(0)$, d'où par un calcul facile,

$$C = (-1)^{\frac{q}{2}} \Gamma\left(\frac{q}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p}{2}\right).$$

En se reportant à (24), on obtient alors pour $B_0 = A'_{\frac{n-2}{2}} - A_{\frac{n-2}{2}}$ la valeur donnée par (17).

Il reste à vérifier que, *dans le* 3e *cas*, $C = 0$. En posant

$$\frac{p-1}{2} = h, \ \frac{q-1}{2} = k, \qquad \text{de sorte que} \qquad h+k = \frac{n-2}{2},$$

on a

$$J_1(\xi) = \int_0^a (\xi + w)^{h-\frac{1}{2}} w^{k-\frac{1}{2}} dw, \quad J_2(\xi) = \int_0^{a+\xi} w^{h-\frac{1}{2}} (w-\xi)^{k-\frac{1}{2}} dw,$$

et l'on obtient en dérivant

$$J_1^{\left(\frac{n-2}{2}\right)}(\xi) = \frac{\Gamma\left(h+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(-k+\frac{1}{2}\right)} \cdot \int_0^a (\xi+w)^{-k-\frac{1}{2}} w^{k-\frac{1}{2}} dw,$$

$$J_2^{\left(\frac{n-2}{2}\right)}(-\xi) = (-1)^{h+k} \frac{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(-h+\frac{1}{2}\right)} \int_0^{a-\xi} (\xi+w)^{-h-\frac{1}{2}} w^{h-\frac{1}{2}} dw$$

$$+ (-1)^{h+k+1} \sum_{j=0}^{h-k+1} \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^{h+k-1-j} \left[\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^j (\xi+w)^{k-\frac{1}{2}} w^{h-\frac{1}{2}}\right]_{w=a-\xi}.$$

En effectuant les dérivations et tenant compte de la relation

$$(-1)^{h+k} \frac{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(-h+\frac{1}{2}\right)} = \frac{\Gamma\left(h+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(-k+\frac{1}{2}\right)},$$

il vient

$$J_2^{\left(\frac{n-2}{2}\right)}(-\xi)=\frac{\Gamma\left(h+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(-k+\frac{1}{2}\right)}\int_0^{a-\xi}(\xi+\varpi)^{-h-\frac{1}{2}}\varpi^{h-\frac{1}{2}}\,d\varpi$$

$$+\sum_{j=0}^{h+k-1}(-1)^j\frac{\Gamma\left(h+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(j-k+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(k-j+\frac{1}{2}\right)}(a-\xi)^{j-k+\frac{1}{2}}a^{k-j-\frac{1}{2}}.$$

En posant

$$I_h=\int_0^a(\xi+\varpi)^{-h-\frac{1}{2}}\varpi^{h-\frac{1}{2}}\,d\varpi,$$

on peut alors écrire

$$(26)\quad J_1^{\left(\frac{n-2}{2}\right)}(\xi)-J_2^{\left(\frac{n-2}{2}\right)}(-\xi)=\frac{\Gamma\left(h+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(-k+\frac{1}{2}\right)}(I_k-I_h)$$

$$-\sum_{j=0}^{h+k-i}(-1)^j\frac{\Gamma\left(h+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(j-k+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(k-j+\frac{1}{2}\right)}+o(1),$$

où $o(1)$ désigne, selon l'usage, une expression qui $\to 0$ pour $\xi\to+0$.

Lorsque $h=k$, les termes équidistants des extrêmes dans la somme au second membre de (26) sont opposés, cette somme est donc nulle, ce qui entraîne $C=0$.

Si $h>k$, soit $h=k+l$. De la relation

$$I_k=I_{k+1}+\frac{1}{k+\frac{1}{2}}+o(1),$$

qu'on vérifie en intégrant par parties, on déduit

$$I_k-I_h=I_k-I_{k+l}=\sum_{j=0}^{l-1}\frac{1}{k+j+\frac{1}{2}}+o(1),$$

d'où, en substituant dans (26) et prenant la limite pour $\xi \to +0$,

$$C = \frac{\Gamma\left(h+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(-k+\frac{1}{2}\right)} \sum_{j=1}^{l-1} \frac{1}{k+j+\frac{1}{2}}$$

$$- \sum_{j=0}^{h+k-1} (-1)^j \frac{\Gamma\left(h+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(j-k+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(k-j+\frac{1}{2}\right)}.$$

En tenant compte des relations $\Gamma\left(-k+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right) = (-1)^k\pi$ et

$$\Gamma\left(j-k+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(k-j+\frac{1}{2}\right) = (-1)^{k-j}\left(j-k+\frac{1}{2}\right)\pi,$$

il vient

$$C = \frac{\Gamma\left(h+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(-k+\frac{1}{2}\right)}\left(\sum_{j=0}^{l-1}\frac{1}{k+j+\frac{1}{2}} - \sum_{j=0}^{2k+l-1}\frac{1}{j-k+\frac{1}{2}}\right)$$

et l'on vérifie facilement que l'expression dans la parenthèse se réduit à zéro. Le calcul est presque le même si $h < k$. On a donc bien toutjours $C = 0$ dans le 3e cas.

3. Solution élémentaire.

A l'aide du développement asymptotique de H_ε établi au n° 2, nous allons déterminer la solution élémentaire de $\square$ et démontrer les résultats énoncés au n° 1, de la même manière que l'a fait M. Méthée dans le cas de l'équation des ondes où $p = 1$.

En posant, pour n impair $\geqslant 3$,

$$S_1 = \underset{\varepsilon\to+0}{\mathrm{Pf}}\, Y(\xi-\varepsilon)\xi^{\frac{2-n}{2}}, \qquad S_2 = \underset{\varepsilon\to-0}{\mathrm{Pf}}\, Y(\varepsilon-\xi)|\xi|^{\frac{2-n}{2}}$$

et pour n pair $\geqslant 4$,

$$S_1 = \underset{\varepsilon \to +0}{\mathrm{Pf}}\, Y(\xi - \varepsilon)\xi^{\frac{2-n}{2}} + \underset{\varepsilon \to -0}{\mathrm{Pf}}\, Y(\varepsilon - \xi)\xi^{\frac{2-n}{2}}, \qquad S_2 = \delta^{\left(\frac{n-4}{2}\right)}$$

la distribution la plus générale S dans R^1 satisfaisant à l'équation $DS = 0$ où D est défini par (11), est donnée par

$$S = aS_1 + bS_2 + c,$$

avec trois constantes arbitraires a, b et c (voir (M) p. 259-260).

En vertu de (12), il en résulte que la distribution la plus générale T dans $R^n - O$ qui satisfait à $\square T = 0$ dans $R^n - O$ et qui est de la forme $T = f^*S$, est $T = af^*S_1 + bf^*S_2 + c$, et il est évident que f^*S_1 et f^*S_2 sont respectivement égales (dans $R^n - O$) aux distributions T_1 et T_2 définies au n° 1. Mais les formules du n° 1 définissent T_1 et T_2 dans R^n, et non seulement dans $R^n - O$; pour s'en assurer, il suffit de vérifier que les parties finies qui interviennent dans ces formules ont un sens. Cela est presque immédiat. Considérons par exemple la distribution

$$Y(u - \varepsilon)\, u^{\frac{2-n}{2}} \qquad \text{pour} \qquad \varepsilon > 0;$$

sa dérivée $\dfrac{d}{d\varepsilon}\, Y(u - \varepsilon)u^{\frac{2-n}{2}} = -\varepsilon^{\frac{2-n}{2}} H_\varepsilon$ possède une partie infinie, qu'on obtient en multipliant le développement asymptotique de H_ε par $-\varepsilon^{\frac{2-n}{2}}$ et en ne conservant que les termes qui n'ont pas de limite pour $\varepsilon \to +0$; par suite, $Y(u - \varepsilon)u^{\frac{2-n}{2}}$ a aussi une partie infinie et $\underset{\varepsilon \to +0}{\mathrm{Pf}}\, Y(u - \varepsilon)u^{\frac{2-n}{2}}$ a bien un sens. Dans les cas où n est pair, on voit aussi que l'on a

$$T_2 = \lim_{\varepsilon = 0} H_\varepsilon^{\frac{n-4}{2}} = \lim_{\varepsilon = 0} (-1)^{\frac{n-4}{2}} \left(\frac{d}{d\varepsilon}\right)^{\frac{n-4}{2}} H_\varepsilon = (-1)^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right) A_{\frac{n-4}{2}}.$$

Ce qui précède montre que T_1 et T_2 sont bien définies dans R^n et que les distributions $\square T_1$ et $\square T_2$, si elles ne sont pas nulles, ont un support qui se réduit au point O.

Pour n pair, la formule ci-dessus donne, en tenant compte de la valeur de $\square A_{\frac{n-4}{2}}$ trouvée au nº 2, dans le 2e cas $\square T_2 = 0$ et dans le 3e cas

$$\square T_2 = (-1)^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right) \square A_{\frac{n-4}{2}}$$

$$= (-1)^{\frac{n+q+1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \pi^{\frac{n-2}{2}} (2n-4)\delta_O = (-1)^{\frac{p-1}{2}} 4\pi^{\frac{n-2}{2}} \delta_O,$$

d'où il résulte que la solution élémentaire est bien celle indiquée au nº 1 pour le 3e cas.

Il reste à calculer $\square T_1$ dans chacun des trois cas et $\square T_2$ dans le 1er cas.

Dans le 1er cas, on a, pour $\varepsilon > 0$, par un calcul facile (cf. (M) p. 259-260),

$$D_\xi Y(\xi - \varepsilon)\xi^{\frac{2-n}{2}} = 4\varepsilon^{\frac{4-n}{2}} \delta'_\varepsilon,$$

d'où

$$\square\, Y(u - \varepsilon)u^{\frac{2-n}{2}} = 4\varepsilon^{\frac{4-n}{2}} H^1_\varepsilon.$$

A l'aide du développement asymptotique de $H^1_\varepsilon = -\frac{d}{d\varepsilon} H_\varepsilon$, on obtient

$$\underset{\varepsilon \to +0}{\mathrm{Pf}}\ \varepsilon^{\frac{4-n}{2}} H^1_\varepsilon = \varepsilon^{\frac{2-n}{2}} B_0,$$

d'où, les opérations $\square$ et Pf étant permutables,

$$\square\, T_1 = \underset{\varepsilon \to +0}{\mathrm{Pf}}\ \square\, Y(u - \varepsilon)u^{\frac{2-n}{2}} = (4 - 2n)B_0,$$

d'où résulte que la solution élémentaire est bien celle indiquée au nº 1. On obtient de même, pour $\varepsilon < 0$,

$$D_\xi Y(\varepsilon - \xi)|\xi|^{\frac{2-n}{2}} = 4(-\varepsilon)^{\frac{4-n}{2}} \delta'_\varepsilon$$

d'où

$$\square\, Y(u - \varepsilon)|u|^{\frac{2-n}{2}} = 4(-\varepsilon)^{\frac{4-n}{2}} H^1_\varepsilon.$$

Le développement asymptotique montre immédiatement que, dans le 1er cas, $\underset{\varepsilon \to -0}{\mathrm{Pf}}\ (-\varepsilon)^{\frac{4-n}{2}} H^1_\varepsilon = 0$, d'où résulte que $\square\, T_2 = 0$.

Si n est pair, on obtient de la même manière

$$\square\, Y(u-\varepsilon)\, u^{\frac{2-n}{2}} = 4\varepsilon^{\frac{4-n}{2}} H^1_\varepsilon \qquad \text{pour} \qquad \varepsilon > 0,$$
$$\square\, Y(\varepsilon-u)\, u^{\frac{2-n}{2}} = -4\varepsilon^{\frac{4-n}{2}} H^1_\varepsilon \qquad \text{pour} \qquad \varepsilon < 0.$$

Dans le 2e cas, on déduit des développements asymptotiques

$$\underset{\varepsilon \to +0}{\mathrm{P}f}\ \varepsilon^{\frac{4-n}{2}} H^1_\varepsilon = -\frac{n-2}{2}\left(A_{\frac{n-2}{2}} + B_0\right),$$
$$\underset{\varepsilon \to -0}{\mathrm{P}f}\ \varepsilon^{\frac{4-n}{2}} H^1_\varepsilon = -\frac{n-2}{2} A_{\frac{n-2}{2}},$$

ce qui entraîne $\square T_1 = (4-2n) B_0$ et montre que la solutoin élémentaire est bien celle indiquée au n° 1.

Dans le 3e cas, on déduit des développements asymptotiques

$$\underset{\varepsilon \to +0}{\mathrm{P}f}\ \varepsilon^{\frac{4-n}{2}} H^1_\varepsilon = \underset{\varepsilon \to -0}{\mathrm{P}f}\ \varepsilon^{\frac{4-n}{2}} H^1_\varepsilon = -\frac{n-2}{2} A_{\frac{n-2}{2}} - B_0,$$

d'où résulte $\square T_1 = 0$, ce qui achève la démonstration des résultats annoncés au n° 1.

Les solutions élémentaires qui viennent d'être déterminées, en vertu de leur définition même, jouissent de la propriété d'être invariantes vis-à-vis du groupe G de toutes les transformations linéaires de R^n en lui-même laissant u invariante et même vis-à-vis de tous les homéormorphismes C^∞ de R^n en lui-même laissant u invariante. Il est facile de voir dans quelle mesure elles sont caractérisées par cette propriété. On sait en effet que toute distribution définie dans $R^n - O$ et invariante vis-à-vis de G est de la forme f^*S, S étant une distribution quelconque dans R^1, et que les distributions dans R^n invariantes vis-à-vis de G et dont le support se réduit au point O sont les combinaisons linéaires des distributions $\square^k \delta_O (k = 0, 1, 2, \ldots)$ [5]. Il découle alors des résultats établis ci-dessus que *la distribution la plus générale* T *dans* R^n *qui satisfait à l'équation* $\square T = \delta_O$ *et qui est invariante vis-à-vis de* G *est* $T = E + aT_2 + b$ *dans le* 1er *cas et dans le* 2e *cas*, et $T = E + aT_1 + b$ *dans le* 3e *cas, avec deux constantes arbitraires* a *et* b.

[5] Ces faits sont établis dans (M) pour $p = 1$, mais la démonstration subsiste quel que soit p. Voir : G. de Rham, *sur la division de formes et de courants par une forme linéaire*, Commentarii Mathematici Helvetici 28 (1954), p. 346-352.

Le cas où $p = 1$, dont on trouvera l'étude détaillée dans (M), présente une particularité due au fait que, pour $\varepsilon > 0$, l'hyperboloide $u = \varepsilon$ se décompose en deux nappes. La solution élémentaire peut alors être décomposée en la somme

$$E = E_1 + E_2$$

de deux distributions ayant leurs supports contenus respectivement dans le demi-cône « d'avenir » ($x_1 \geqslant 0$, $u = 0$ ou $u \geqslant 0$) et dans le demi-cône « de passé » ($x_1 \leqslant 0$, $u = 0$ ou $u \geqslant 0$), et telles que $\square E_1 = \square E_2 = \frac{1}{2}\delta_O$. La solution élémentaire qui intervient dans la résolution du problème de Cauchy relatif à l'équation des ondes est $2E_1$.

Dans le cas de l'équation de Laplace, $p = n$ et $q = 0$, la méthode suivie s'applique très facilement. Le cône $u = 0$ se réduit alors au point O et le développement asymptotique de H_ε se déduit de (16) en remplaçant A_h par 0 pour tout h, les relations (15) et (17) avec $q = 0$ étant encore valables. On en déduit immédiatement la solution élémentaire bien connue rappelée au n° 1.

4. Autre expression des distributions T_1 et T_2.

Je vais montrer que les distributions T_1 et T_2, définies au n° 1, à l'aide desquelles on a représenté toutes les solutions élémentaires invariantes de l'opérateur $\square$, sont égales, à un facteur constant près, à $\square^{\frac{n-3}{2}} Y(u)u^{-\frac{1}{2}}$ et $\square^{\frac{n-3}{2}} Y(-u)|u|^{-\frac{1}{2}}$ pour n impair et à $\square^{\frac{n-2}{2}} \log|u|$ et $\square^{\frac{n-2}{2}} Y(u)$ pour n pair.

Un calcul facile montre qu'on a, pour $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} D_\xi Y(\xi-\varepsilon)\xi^\lambda = {} & (2n-4+4\lambda)\varepsilon^\lambda\delta_\varepsilon \\ & + 4\varepsilon^{\lambda+1}\delta'_\varepsilon + \lambda(2n-4+4\lambda)Y(\xi-\varepsilon)\xi^{\lambda-1}, \\ D_\xi Y(\xi-\varepsilon)\log\xi = {} & (2n-4+4\log\varepsilon)\delta_\varepsilon \\ & + 4\varepsilon\log\varepsilon.\delta'_\varepsilon + (2n-4)Y(\xi-\varepsilon)\xi^{-1}. \end{aligned}$$

On en déduit immédiatement, pour $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} (26)\quad \square Y(u-\varepsilon)u^\lambda = {} & (2n-4+4\lambda)\varepsilon^\lambda H_\varepsilon \\ & + 4\varepsilon^{\lambda+1}H^1_\varepsilon + \lambda(2n-4+4\lambda)Y(u-\varepsilon)u^{\lambda-1}, \\ (27)\quad \square Y(u-\varepsilon)\log u = {} & (2n+4-4\log\varepsilon)H_\varepsilon \\ & + 4\varepsilon\log\varepsilon.H^1_\varepsilon + (2n-4)Y(u-\varepsilon)u^{-1}. \end{aligned}$$

D'une manière analogue, on obtient, pour $\varepsilon < 0$,

$$(28) \quad \square\, Y(\varepsilon - u)|u|^{\lambda} = 4|\varepsilon|^{\lambda+1} H_{\varepsilon}^{1} - (2n - 4 + 4\lambda)|\varepsilon|^{\lambda} H_{\varepsilon} - \lambda(2n - 4 + 4\lambda) Y(\varepsilon - u)|u|^{\lambda-1},$$

$$(29) \quad \square\, Y(\varepsilon - u)\log|u| = -(2n + 4 - 4\log\varepsilon) H_{\varepsilon} - 4\varepsilon \log|\varepsilon|.\, H_{\varepsilon}^{1} + (2n - 4) Y(\varepsilon - u) u^{-1}.$$

De (26) on déduit

$$(30) \quad \square \underset{\varepsilon \to +0}{\mathrm{Pf}}\, Y(u - \varepsilon) u^{\lambda} = \lambda(2n - 4 + 4\lambda) \underset{\varepsilon \to +0}{\mathrm{Pf}}\, Y(u - \varepsilon) u^{\lambda-1} + \underset{\varepsilon \to +0}{\mathrm{Pf}} [(2n - 4 + 4\lambda)\varepsilon^{\lambda} H_{\varepsilon} + 4\varepsilon^{\lambda+1} H_{\varepsilon}^{1}].$$

Sauf pour certaines valeurs exceptionnelles de λ, le second terme au second membre de (30) s'annule, et cette relation peut alors s'écrire

$$(31) \quad \square \underset{\varepsilon \to +0}{\mathrm{Pf}}\, Y(u - \varepsilon) u^{\lambda} = 4 \frac{\Gamma(\lambda + 1)\Gamma\left(\frac{n}{2} + \lambda\right)}{\Gamma(\lambda)\Gamma\left(\frac{n}{2} + \lambda - 1\right)} \underset{\varepsilon \to +0}{\mathrm{Pf}}\, Y(u - \varepsilon) u^{\lambda-1}.$$

Dans le 1^er^ cas, en l'utilisant pour les valeurs

$$-\frac{1}{2}, \quad -\frac{3}{2}, \quad \ldots, \quad -\frac{n-4}{2}$$

de λ, dont aucune n'est exceptionnelle, on obtient

$$\square^{\frac{n-3}{2}} Y(u) u^{\frac{1}{2}} = 4^{\frac{n-3}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{4-n}{2}\right)} T_1,$$

ce qui peut aussi s'écrire (en tenant compte de la relation des compléments et de la relation de LEGENDRE) :

$$\square^{\frac{n-3}{2}} Y(u) u^{-\frac{1}{2}} = (-1)^{\frac{n+1}{2}} \Gamma(n - 2) T_1.$$

On a donc :

$$(32) \qquad T_1 = \frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma(n-2)} \square^{\frac{n-3}{2}} Y(u) u^{-\frac{1}{2}}.$$

D'une manière tout à fait analogue, on obtient encore dans le 1^{er} cas :

$$(33) \qquad T_2 = \frac{1}{\Gamma(n-2)} \square^{\frac{n-3}{2}} Y(-u)|u|^{-\frac{1}{2}}.$$

Supposons maintenant que λ est un entier et posons

$$U^\lambda = \underset{\varepsilon \to +0}{Pf} Y(u-\varepsilon)u^\lambda + \underset{\varepsilon \to -0}{Pf} Y(\varepsilon - u)u^\lambda.$$

Remarquons que, dans (28) et (29), on peut remplacer $|u|$ par $-u$ et $|\varepsilon|$ par $-\varepsilon$. On déduit alors de (26) et (28) :

$$(34) \qquad \square U^\lambda = \lambda(2n-4+4\lambda)U^{\lambda-1} + \left(\underset{\varepsilon \to +0}{Pf} - \underset{\varepsilon \to -0}{Pf}\right)[(2n-4+4\lambda)\varepsilon^\lambda H_\varepsilon + 4\varepsilon^{\lambda+1}H_\varepsilon^1],$$

et de (27) et (29) :

$$(35) \qquad \square \log|u| = (2n-4)U^{-1}$$

Dans le 2^e cas et dans le 3^e cas, le second terme au second membre de (34) s'annule si λ est un entier $\geqslant \frac{4-n}{2}$, et cette relation peut alors s'écrire :

$$(36) \qquad \square U^\lambda = -4 \frac{\Gamma(1-\lambda)\,\Gamma\left(\lambda + \frac{n}{2}\right)}{\Gamma(-\lambda)\,\Gamma\left(\lambda + \frac{n-2}{2}\right)} U^{\lambda-1}.$$

En utilisant (35) et (36) pour $\lambda = -1, -2, \ldots, \frac{4-n}{2}$ et remarquant que, dans les cas envisagés où n est pair, $T_1 = U^{\frac{2-n}{2}}$, il vient

$$\square^{\frac{n-2}{2}} \log|u| = (-4)^{\frac{n-4}{2}} (2n-4)\,\Gamma^2\left(\frac{n-2}{2}\right) T_1,$$

d'où l'on tire

$$(37) \qquad T_1 = (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{2^{2-n}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)} \square^{\frac{n-2}{2}} \log|u|.$$

D'autre part, pour $\lambda = 0$, la relation (30) donne

$$\square Y(u) = (2n-4)A_0,$$

et de la relation (13), qui est valable dans les cas envisagés pour $h < \frac{n-4}{2}$, on déduit :

$$\square^{\frac{n-4}{2}} A_0 = (-1)^{\frac{n}{2}} 2^{n-4} \Gamma^2\left(\frac{n-2}{2}\right) A_{\frac{n-4}{2}}.$$

Comme

$$A_{\frac{n-4}{2}} = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)} T_2,$$

cela entraîne

$$\square^{\frac{n-2}{2}} Y(u) = 2^{n-2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) T_2,$$

d'où finalement :

$$T_2 = \frac{2^{2-n}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \square^{\frac{n-2}{2}} Y(u). \tag{38}$$

Les relations (32) et (33) pour le 1er cas (n impair) et les relations (37) et (38) pour le 2e et le 3e cas (n pair) donnent les représentations de T_1 et T_2 que nous avions en vue.

Pour terminer, je mentionnerai encore les formules suivantes, conséquences immédiates des résultats obtenus [6].

Dans le 1er cas, on a

$$\square^{\frac{n-1}{2}} Y(u) u^{-\frac{1}{2}} = C_1 \delta_O, \qquad \square^{\frac{n-1}{2}} Y(-u) |u|^{-\frac{1}{2}} = 0;$$

dans le 2e cas, on a

$$\square^{\frac{n}{2}} \log|u| = C_2 \delta_O, \qquad \square^{\frac{n}{2}} Y(u) = 0;$$

[6] J'ai communiqué ces formules à M. HARISH-CHANDRA en novembre 1954, en réponse à une question qu'il m'avait posée au Colloque Henri POINCARÉ, et il les a reproduites dans : *American Journal of Mathematics*, vol. 79, 1957, p. 248; mais les valeurs de certains facteurs numériques y sont inexactes. M. HARISH CHANDRA vient de me communiquer (février 1959) qu'il a retrouvé ces mêmes formules par une autre méthode, avec les mêmes valeurs des facteurs numériques que celles données ici. Une autre manière d'obtenir et de représenter la solution élémentaire de l'opérateur $\square$ a été indiquée par Mme FOURÈS-BRUHAT : *solution élémentaire d'équations ultra-hyperboliques*, Journal de Mathématiques pures et appliquées, tome 35, 1956, p. 277-288.

dans le 3e cas, on a

$$\square^{\frac{n}{2}} \log|u| = 0, \qquad \square^{\frac{n}{2}} Y(u) = C_3 \delta_O;$$

les valeurs des facteurs numériques C_1, C_2 et C_3 étant

$$C_1 = (-1)^{\frac{p-1}{2}} 2^{n-1} \pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right),$$

$$C_2 = (-1)^{\frac{p}{2}+1} 2^n \pi^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right),$$

$$C_3 = (-1)^{\frac{p-1}{2}} 2^n \pi^{\frac{n-2}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right).$$