ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

GILLES GODEFROY

Étude des projections de norme 1 de E'' sur E. Unicité de certains préduaux. Applications

Annales de l'institut Fourier, tome 29, nº 4 (1979), p. 53-70

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1979__29_4_53_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
29, 4 (1979), 53-70.

ÉTUDE DES PROJECTIONS DE NORME 1 DE E″ SUR E. UNICITÉ DE CERTAINS PRÉDUAUX. APPLICATIONS

par Gilles GODEFROY

A la mémoire de mon ami Jean-Pierre Péronnet.

On étudie dans ce travail les projections de norme 1 du bidual E″ d'un espace de Banach E sur l'image canonique $i_E(E)$ de E dans E″. On montre que dans un certain nombre de cas, il y a unicité de la projection de norme 1. On en déduit des théorèmes d'existence et d'unicité du prédual de E. On donne ensuite diverses applications, en particulier aux espaces dont la norme est différentiable sur un ensemble dense et aux espaces ne contenant pas $l^1(\mathbf{N})$.

Dans tout le travail, i_E désignera l'injection canonique de E dans E″. De plus, le mot « projection » signifiera toujours « projection linéaire »; enfin, « E espace dual » veut dire « E est isométrique à un espace dual ».

Commençons par une définition.

Définition 1. — *Soit* E *un espace de Banach. On dira que* E *est un dualoïde s'il existe une projection de norme* 1 *de* E″ *sur* $i_E(E)$.

Remarques :

1) Tout espace isométrique à un dual est clairement un dualoïde — la projection de norme 1 de E‴ sur $i_{E'}(E')$ étant $i_{E'} \circ (i_E)'$ — . L'exemple de $E = L^1([0,1]; dx)$ montre que la réciprocité est fausse.

2) On vérifie aisément qu'un espace de Banach E est un dualoïde si et seulement si il existe un espace dual F' et une projection de norme 1 de F' sur un sous-espace X isométrique à E. Les espaces dualoïdes sont donc les sous-espaces « 1-complémentés » des espaces duaux.

3) On peut montrer que E est un dualoïde si et seulement si son image canonique $\tilde{E}$ dans tout ultraproduit $\hat{E}_{\mathcal{U}}$ est image d'une projection de norme 1 de $\hat{E}_{\mathcal{U}}$ sur $\tilde{E}$.

Dans tout ce qui suit, les duaux, biduaux, ... d'un Banach E seront toujours supposés munis des normes duales, biduales, ... de la norme de E. (*)

Énonçons un lemme fondamental.

Lemme 2. — *Soit* E *un espace de Banach. Soit* f *un élément de* E''. *Les énoncés suivants sont équivalents :*

1) $\|f+u\| \geqslant \|u\| \quad \forall u \in i_E(E)$.

2) $\operatorname{Ker} f \cap B_1(E')$ *est* $\sigma(E',E)$-*dense dans* $B_1(E')$.

Démonstration :

2) $\Rightarrow$ 1). Soit $\varepsilon > 0$. On pose $\omega_\varepsilon = \{x \in B_1(E') | u(x) > \|u\| - \varepsilon\}$. ω_ε est un ouvert non vide de $(B_1(E'), \sigma(E'E))$. Il existe donc $x_0 \in \omega_\varepsilon$ tel que $f(x_0) = 0$. On a alors $f + u(x_0) = u(x_0) > \|u\| - \varepsilon$; donc $\|f+u\| > \|u\| - \varepsilon$, et ceci pour tout $\varepsilon > 0$.

1) $\Rightarrow$ 2). Soit $f \in E''$, $\|f\| = 1$, telle que $\operatorname{Ker} f \cap B_1(E')$ ne soit pas $\sigma(E', E)$-dense dans $B_1(E')$. On voit aisément qu'il existe $g \in i_E(E)$, de norme 1, et $0 < \alpha < 1$ tels que

$$\operatorname{Ker} f \cap B_1(E') \subseteq \{x \in B_1(E') \mid |g(x)| \leqslant \alpha\}.$$

Soit $\omega = \{x \in B_1(E') | g(x) > \alpha\}$. Par convexité, on voit que f a un signe constant sur ω ; quitte à changer g en $(-g)$, on peut supposer que $f > 0$ sur ω.

Soit $\varepsilon_0 > 0$ tel que $(1-\varepsilon_0)^2 - \varepsilon_0 > \alpha$. On a la relation :

$$x \in B_1(E'); \qquad 1 \geqslant g(x) > 1 - \varepsilon_0 \Rightarrow f(x) \geqslant \varepsilon_0 \quad (*)$$

En effet, soit $x_0 \in B_1(E')$ tel que $f(x_0) = -1 + \varepsilon_0$. Si la relation (*)

(*) La notation $B_1(X)$ désignera la boule unité fermée d'un espace de Banach X.

n'est pas vérifiée, il existe $y_0 \in \mathrm{B}_1(\mathrm{E}')$ tel que

$$g(y_0) > 1 - \varepsilon_0 \qquad \text{et} \qquad f(y_0) < \varepsilon_0 .$$

On a alors

$$f((1-\varepsilon_0)y_0 + \varepsilon_0 x_0) < (1-\varepsilon_0)\varepsilon_0 + \varepsilon_0(\varepsilon_0 - 1) = 0$$

et de plus

$$g((1-\varepsilon_0)y_0 + \varepsilon_0 x_0) > (1-\varepsilon_0)^2 - \varepsilon_0 > \alpha .$$

On trouve donc, si (*) n'est pas vérifiée, un point

$$t_0 = (1-\varepsilon_0)y_0 + \varepsilon_0 x_0$$

dans ω tel que $f(t_0) < 0$, ce qui est absurde. On a donc :

$x \in \mathrm{B}_1(\mathrm{E}')$, $1 \geqslant g(x) > 1 - \varepsilon_0 \Rightarrow f(x) \geqslant \varepsilon_0$ et par symétrie
$x \in \mathrm{B}_1(\mathrm{E}')$, $-1 \leqslant g(x) < -1 + \varepsilon_0 \Rightarrow f(x) \leqslant -\varepsilon_0$.

Considérons alors, pour $a > 0$ assez grand, la fonction $(f - ag)$. On a, pour $x \in \mathrm{B}_1(\mathrm{E}')$:

$$\begin{aligned}
|g(x)| \leqslant 1 - \varepsilon_0 &\Rightarrow |(f-ag)(x)| \leqslant a(1-\varepsilon_0) + 1 \\
g(x) > 1 - \varepsilon_0 &\Rightarrow 0 > (f-ag)(x) > \varepsilon_0 - a \\
g(x) < -1 + \varepsilon_0 &\Rightarrow 0 < (f-ag)(x) < -\varepsilon_0 + a .
\end{aligned}$$

On a donc pour $a > 0$ assez grand

$$\|f - ag\| \leqslant \sup(a - \varepsilon_0, a(1-\varepsilon_0) + 1)$$

donc

$$\|f - ag\| < a = \|-ag\| .$$

On a donc trouvé $u = -ag \in i_{\mathrm{E}}(\mathrm{E})$ tel que $\|f+u\| < \|u\|$, ce qui montre que f ne vérifie pas 1) et termine la démonstration.

C.Q.F.D.

Tirons maintenant quelques conséquences de ce lemme. Si $f \in \mathrm{E}''$, on notera Cont (f) l'ensemble des points de continuité de la fonction

$$f : (\mathrm{B}_1(\mathrm{E}'), \sigma(\mathrm{E}',\mathrm{E})) \to \mathbf{R}.$$

PROPOSITION 3. — *Soit* E *un Banach. Soit* $f \in \mathrm{E}''$ *telle que* $\|f+u\| \geqslant \|u\|$, $\forall u \in i_{\mathrm{E}}(\mathrm{E})$. *Alors la restriction de* f *à* Cont (f) *est identiquement nulle.*

Démonstration. — En effet d'après le lemme 2, f est nulle sur un ensemble dense de $(\mathrm{B}_1(\mathrm{E}'), \sigma(\mathrm{E}',\mathrm{E}))$, donc en tout point de continuité.

C.Q.F.D.

PROPOSITION 4. — *Soit* E *un Banach; soit* $\mathscr{C}(E)$ *l'ensemble des points de continuité de l'application* $\mathrm{Id} : (B_1(E'), \sigma(E',E)) \to (B_1(E'), \|\ \ \|)$. *Soit* $f \in E''$ *telle que* $\|f+u\| \geqslant \|u\|\ \forall u \in i_E(E)$. *Alors* f *est identiquement nulle sur* $\mathscr{C}(E)$.

Démonstration. — En effet, on a $\mathscr{C}(E) \subseteq \mathrm{Cont}\,(f)$, d'où le résultat par la Proposition 3.

C.Q.F.D.

PROPOSITION 5. — *Soit* E *un Banach tel que* $\mathrm{conv}\,(\mathscr{C}(E))$ *soit dense dans* $(B_1(E'), \sigma(E',E))$. *Soit* $f \in E''$. *Les énoncés suivants sont équivalents :*

1) $\|f+u\| \geqslant \|u\| \quad \forall u \in i_E(E)$.

2) f *est nulle en tout point de* $\mathscr{C}(E)$.

Démonstration. — 1) $\Rightarrow$ 2) d'après la proposition 4.

2) $\Rightarrow$ 1) car $\mathrm{conv}\,(\mathscr{C}(E))$ étant dense dans $(B_1(E'), \sigma(E',E))$, f est nulle sur un ensemble dense de $(B_1(E', \sigma(E',E))$. On applique alors le lemme 2.

C.Q.F.D.

Notations et définition :

On notera dans la suite

$$R(E) = \{f \in E'' \mid \|f+u\| \geqslant \|u\| \quad \forall u \in i_E(E)\}$$

$R(E)$ est l'ensemble des éléments de E'' qui sont orthogonaux au sens de James à tous les éléments de $i_E(E)$ (voir [2], p. 24). On dira, comme dans [3], que E est *unique prédual normique* de E' si pour toute bijection isométrique I de E' sur un dual F', l'application $(I' \circ i_F)$ est une bijection isométrique de F sur $i_E(E)$. Si E est unique prédual normique de E', alors tout espace F tel que F' soit isométrique à E' est isométrique à E.

On peut énoncer

PROPOSITION 6. — *Soit* E *un Banach tel que* $\mathrm{conv}\,(\mathscr{C}(E))$ *soit dense dans* $(B_1(E'), \sigma(E',E))$. *Alors* $R(E)$ *est un sous-espace vectoriel* $\sigma(E'',E')$-*fermé de* E''.

Démonstration. — D'après la proposition 5 on a en effet : $f \in R(E) \Leftrightarrow f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathscr{C}(E)$. C'est alors immédiat.

C.Q.F.D.

Terminons, avant de passer aux applications, par le résultat essentiel suivant :

THÉOREME 7. — *Soit* E *un Banach tel que* R(E) *soit un sous-espace vectoriel* $\sigma(E'',E')$*-fermé de* E″. *Alors les énoncés suivants sont équivalents :*

1) E *est un espace dual.*

2) $E'' = i_E(E) \oplus R(E)$.

3) E *est un dualoïde.*

Si les propriétés ci-dessus sont vérifiées, il existe une unique projection de norme 1 *de* E″ *sur* $i_E(E)$, *et le prédual normique de* E *est unique.*

Démonstration. — 1) $\Rightarrow$ 3) est évident.

3) $\Rightarrow$ 2). Soit π une projection de norme 1 de E″ sur $i_E(E)$. Pour toute $f \in \operatorname{Ker} \pi$ et tout $u \in i_E(E)$, on a

$$\|f+u\| \geqslant \|\pi(f+u)\| = \|\pi(u)\| = \|u\|.$$

On a donc $\operatorname{Ker} \pi \subseteq R(E)$; et comme R(E) est un espace vectoriel et que $R(E) \cap E = \{0\}$, on a $\operatorname{Ker} \pi = R(E)$ et donc $E'' = i_E(E) \oplus R(E)$.

2) $\Rightarrow$ 1) : D'après la définition de R(E), la projection de E″ sur $i_E(E)$ parallèlement à R (E) est de norme 1. L'espace R(E) étant supposé $\sigma(E'',E')$-fermé, soit $X = [R(E)]_\perp$ le sous-espace vectoriel fermé de E′ tel que $X^\perp = R(E)$. Le dual X′ de X est isométrique à $E''/R(E)$, donc à $i_E(E)$ puisque la projection de E″ sur $i_E(E)$ parallèlement à R(E) est de norme 1.

Il est clair que si les propriétés 1)-2)-3) sont vérifiées, il existe une unique projection de norme 1 de E″ sur $i_E(E)$; en effet d'après la démonstration de 3) $\Rightarrow$ 2), une telle projection est nécessairement la projection de E″ sur $i_E(E)$ parallèlement à R(E).

Enfin, notons E_* un prédual normique de E. Notons I une bijection isométrique entre E et un dual F′. L'application $i_E \circ (i_{E_*})'$ est une projection de norme 1 de E″ sur $i_E(E)$. De plus, on vérifie que l'application

$$p = i_E \circ I^{-1} \circ (I' \circ i_F)'$$

est une projection de E″ sur $i_E(E)$, de norme 1. Les projections p et $i_E \circ (i_{E_*})'$ sont alors identiques d'après ce qui précède. On a donc $\operatorname{Ker}[i_E \circ (i_{E_*})'] = \operatorname{Ker} p$. Or, on a

$$\operatorname{Ker}[i_E \circ (i_{E_*})'] = \operatorname{Ker}(i_{E_*})' = [i_{E_*}(E_*)]^\perp$$

et

$$\operatorname{Ker} p = \operatorname{Ker}(I' \circ i_F)' = [\operatorname{Im}(I' \circ i_F)]^\perp$$

donc $[i_{E_*}(E_*)]^\perp = [\operatorname{Im}(I' \circ i_F)]^\perp$; on en déduit que $i_{E_*}(E_*) = I' \circ i_F(F)$, et donc que E_* est unique prédual normique de E.

C.Q.F.D.

Remarque. — La démonstration ci-dessus, qu'un souci de rigueur rend quelque peu obscure, se comprend mieux si on se place du point de vue suivant : dire que E est unique prédual normique de E' revient à dire qu'il existe une unique projection π de norme 1 de E''' sur $i_{E'}(E')$, telle que $\operatorname{Ker} \pi$ soit $\sigma(E''', E'')$-fermé. Sous les hypothèses du théorème 7, il existe une unique projection de norme 1 de $(E_*)''' = E''$ sur $i_E(E)$. Le résultat s'ensuit donc immédiatement.

Nous verrons qu'on retrouve — et améliore — tous les résultats démontrés dans [3], où les espaces considérés étaient *supposés* être des duaux, ce qui permettait de ne considérer que le cas où le noyau de la projection de norme 1 de E'' sur $i_E(E)$ — à savoir $[i_{E_*}(E_*)]^\perp$ — était $\sigma(E'',E')$-fermé.

Passons maintenant aux applications.

1. Dualité et différentiabilité des normes.

On notera dans ce paragraphe « norme $\mathscr{F}$-diff. » pour « norme Fréchet-différentiable ». L'expression « ensemble dense » voudra dire « ensemble dense pour la topologie de la norme ».

On a le lemme suivant

LEMME 8. — *Soit* E *un Banach dont la norme est* $\mathscr{F}$-diff. *en tout point d'un ensemble dense. Alors* conv. $(\mathscr{C}(E))$ *est dense dans* $(B_1(E'), \sigma(E',E))$.

Démonstration. — Soit $x \in E$, $\|x\| = 1$, tel que la norme de E soit $\mathscr{F}$-diff. en x. Soit $f \in E'$, $\|f\| = 1$, tel que $f(x) = 1$. On sait (voir [2], p. 29) qu'alors x expose fortement f dans $B_1(E')$, soit : $f_\alpha \in B_1(E')$, $f_\alpha(x) \to 1 \Rightarrow \|f_\alpha - f\| \to 0$.

Ceci montre qu'on a $f \in \mathscr{C}(E)$. Supposons que conv. $(\mathscr{C}(E))$ ne soit pas dense dans $B_1(E'), \sigma(E',E)$. Il existe alors $x_0 \in E$, $\|x_0\| = 1$, et $\varepsilon > 0$ tels que $|f(x_0)| \leqslant 1 - \varepsilon$ pour toute $f \in \mathscr{C}(E)$. Or, il existe $x_1 \in E$, $x_1 = 1$, tel que $\|x_0 - x_1\| < 1 - \varepsilon/2$ et tel que la norme de E soit $\mathscr{F}$-diff. en x_1. Si

$f_1 \in B_1(E')$ est telle que $f_1(x_1) = 1$, on a $f_1 \in \mathscr{C}(E)$ et $f_1(x_0) \geqslant 1 - \varepsilon/2$, d'où contradiction.

C.Q.F.D.

THÉORÈME 9. — *Soit* E *un Banach dont la norme est* $\mathscr{F}$-diff. *en tout point d'un ensemble dense. Les énoncés suivants sont équivalents :*

1) E *est un espace dual.*

2) $E'' = i_E(E) \oplus R(E)$.

3) E *est un dualoïde.*

Si les propriétés ci-dessus sont vérifiées, il existe une unique projection de norme 1 *de* E″ *sur* $i_E(E)$, *et le prédual normique de* E *est unique.*

Démonstration. — D'après le lemme 8 et la proposition 6, l'ensemble R(E) est un s.e.v. $\sigma(E'',E')$-fermé de E″. On peut alors appliquer le théorème 7.

C.Q.F.D.

Le théorème, ainsi que la suite du paragraphe, s'applique naturellement aux espaces d'Asplund, dont toutes les normes sont $\mathscr{F}$-diff. en tout point d'un ensemble dense. Développons maintenant l'étude de la différentiabilité des normes duales.

Différentiabilité des normes duales.

Posons une définition.

DÉFINITION 10. — *Soit* E *un Banach. Pour tout* $x \in E$ *tel que la norme de* E *soit* $\mathscr{F}$-diff. *en* x, *soit* f_x *la différentielle de la norme en* x.

Le s.e.v. fortement fermé de E′ *engendré par les* $\{f_x\}$ *sera appelé « espace tangent à* E *» et noté* $\mathscr{T}(E)$.

On précisera par la suite dans la notation la norme dont on munit E, s'il y a ambiguïté.

Considérons alors, pour un Banach E, la famille $\mathscr{N}$ des normes équivalentes à la norme de E. On définit sur $\mathscr{N}$ une relation notée $\prec$, et appelée « pré-ordre de différentiabilité » de la façon suivante :

$$N_1, \quad N_2 \in \mathscr{N}; \quad N_1 \prec N_2 \Leftrightarrow \mathscr{T}((E,N_1)) \subseteq \mathscr{T}((E,N_2)).$$

Soit $\dot{\mathscr{N}}$ l'ensemble des classes de la relation R d'équivalence sur $\mathscr{N}$:

$$[N_1 R N_2] \Leftrightarrow [N_1 \prec N_2 \quad \text{et} \quad N_2 \prec N_1 \Leftrightarrow \mathscr{T}((E,N_1)) = \mathscr{T}((E,N_2))]$$

On note encore $\prec$ la relation d'ordre sur $\dot{\mathscr{N}}$ obtenue par passage au quotient.

On peut énoncer :

PROPOSITION 11. – *Soit* E *un Banach dualoïde. Supposons que l'ensemble des points de* $\mathscr{F}$*-différentiabilité de la norme* $\| \ \|_E$ *soit dense. Alors* E *est un dual et* $\| \ \|_E$ *est minimale, pour le pré-ordre* $\prec$, *parmi les normes* $\mathscr{F}$-diff. *en tout point d'un ensemble dense.*

Démonstration. – L'espace E est un dual d'après le théorème 9. On voit aisément, en utilisant $\{f_x\} \subseteq \mathscr{C}(E)$, que $[\mathscr{T}(E)]^{\perp} = R(E)$. Soit N une norme telle que $\mathscr{T}((E,N))$ soit strictement inclus dans $\mathscr{T}(E)$. Alors l'espace $[\mathscr{T}(E,N)]^{\perp}$ contient strictement $[\mathscr{T}(E)]^{\perp}$, et puisque

$$E'' = i_E(E) \oplus [\mathscr{T}(E)]^{\perp},$$

on a $i_E(E) \cap [\mathscr{T}(E,N)]^{\perp} \neq \{0\}$, ce qui montre que N n'est pas $\mathscr{F}$-diff. en tout point d'un ensemble dense.

C.Q.F.D.

Énonçons le cas particulier concernant les espaces d'Asplund.

PROPOSITION 12. – *Soit* E *un espace d'Asplund dualoïde. Alors* E *est un dual et la classe de la norme de* E *est minimale pour* $\prec$ *dans l'espace* $\dot{\mathscr{N}}$.

C'est immédiat puisqu'alors toutes les normes sont $\mathscr{F}$-diff. en tout point d'un ensemble dense.

Remarques :

– Les résultats ci-dessus peuvent s'énoncer de la façon suivante : sur un Banach E, les normes duales, s'il y en a : 1) ou bien ne sont pas $\mathscr{F}$-diff. en tout point d'un ensemble dense. 2) ou bien, si elles le sont, sont minimales pour le pré-ordre $\prec$, parmi les normes $\mathscr{F}$-diff. sur un ensemble dense. On a donc « mauvaise différentiabilité » des normes duales. Dans le cas E réflexif, on a toujours $\mathscr{T}(E) = E'$ et le pré-ordre $\prec$ est trivial.

– On peut encore énoncer le résultat suivant : Soit E un Banach dualoïde, dont la norme est $\mathscr{F}$-diff. en tout point d'un ensemble dense. Alors E est le dual de son espace tangent $\mathscr{T}$ (E). Il est intéressant de remarquer que *si* E *est un espace d'Asplund, la propriété* « E *est un dual* » *ne dépend que de* $\mathscr{T}$ (E). La propriété « être une norme duale » ne dépend que de la classe de la norme modulo R, et caractérise donc certains éléments minimaux de l'ensemble ordonné $(\dot{\mathscr{N}}, \prec)$.

Perte de régularité de la norme dans les duaux d'ordre supérieur.

Énonçons tout de suite le résultat.

THÉORÈME 13. — *Soit* E *un Banach dualoïde. Si l'une des hypothèses suivantes est vérifiée :*

1) *La norme de* E *est* $\mathscr{F}$-diff. *en tout point.*

2) E *est très lisse* (« *very smooth* », *voir* [2], *p.* 31).

3) E′ *est faiblement localement uniformément convexe.*

4) E″ *est lisse* (« *smooth* »)-*i.e. la norme de* E″ *est Gateaux-différentiable en tout point.*

5) E‴ *est strictement convexe.*

Alors E *est réflexif.*

Démonstration. — Les résultats ci-dessus sont démontrés dans [2] (p. 33-35) sous l'hypothèse E *dual.* Pour les démontrer sous l'hypothèse E dualoïde, il suffit donc de montrer qu'un dualoïde qui vérifie l'une de ces hypothèses est un dual.

1) Si la norme de E est $\mathscr{F}$-diff., le théorème 9 s'applique, donc E est un dual.

2) Si E est très lisse, alors E est un espace d'Asplund ([2], p. 31); le théorème 9 s'applique encore.

3) Si E′ est faiblement *l.u.c.* alors E est très lisse ([2], p. 32); donc 2) s'applique.

4) Si E″ est lisse, alors E est très lisse et le 2) s'applique.

5) Si E‴ est strictement convexe alors E″ est lisse ([2], p. 23) donc le 4) s'applique.

C.Q.F.D.

Remarques :

— Le résultat ci-dessus étend donc les résultats connus pour les espaces duaux aux sous-espaces 1-complémentés des duaux.

— On donnera en annexe à ce travail une démonstration très simple, et complète, du 5) ci-dessus.

2. Espaces ne contenant pas $l^1(\mathbf{N})$.

On dira dans ce qui suit qu'un Banach E ne contient pas $l^1(\mathbf{N})$ si E ne contient pas de sous-espace isomorphe à $l^1(\mathbf{N})$.

Examinons d'abord le cas où E est supposé séparable.

THÉORÈME 14. — *Soit* E *un Banach séparable ne contenant pas* $l^1(\mathbf{N})$. *Les énoncés suivants sont équivalents :*

1) E *est un dual.*

2) $E'' = i_E(E) \oplus R(E)$.

3) E *est un dualoïde.*

Si les propriétés ci-dessus sont vérifiées, il existe une unique projection de norme 1 de E″ sur $i_E(E)$, et le prédual normique de E est unique.

Démonstration. — Il suffit, pour pouvoir appliquer le théorème 7, de montrer que R(E) est un s.e.v. $\sigma(E'',E)$-fermé de E″. Soit donc $f \in R(E)$. D'après la caractérisation de Rosenthal des espaces séparables qui ne contiennent pas $l^1(\mathbf{N})$ ([4]), la fonction f est de 1$^{\text{re}}$ classe de Baire pour $\sigma(E', E)$; et donc Cont(f) est un $\mathcal{G}_\delta$ dense de $(B_1(E'), \sigma(E',E))$. On déduit alors de la proposition 3 et du lemme 2 que

$$f \in R(E) \Leftrightarrow f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathrm{Cont}(f).$$

Soit alors $f, g \in R(E)$. On a

$$\mathrm{Ker}(\lambda f + \mu g) \cap B_1(E') \supseteq \mathrm{Cont}(f) \cap \mathrm{Cont}(g).$$

L'intersection de deux $\mathcal{G}_\delta$-denses du compact $(B_1(E'), \sigma(E',E))$ étant dense, Ker$(\lambda f + \mu g)$ est dense dans $(B_1(E'), \sigma(E',E))$ et d'après le lemme 1, $\lambda f + \mu g \in R(E)$; donc R(E) est un espace vectoriel.

L'espace E étant séparable et ne contenant pas $l^1(\mathbf{N})$, il suffit, pour démontrer que R(E) est $\sigma(E'',E')$-fermé, de démontrer qu'il est $\sigma(E'',E')$-séquentiellement fermé. En effet $B_1(E'')$ s'identifie à un compact de fonctions de 1$^{\text{re}}$ classe de Baire sur le compact métrisable $(B_1(E'), \sigma(E',E))$, pour la topologie de la convergence simple ; et dans ce cadre, les notions de « fermé » et « séquentiellement fermé » coïncident ([1]). Si $R(E) \cap B_1(E'')$ est séquentiellement $\sigma(E'',E')$-fermé, alors $R(E) \cap B_1(E'')$ est $\sigma(E'',E')$-fermé et le théorème de Banach-Dieudonné termine la démonstration.

Vérifions donc que R(E) est $\sigma(E'',E')$-séquentiellement fermé. Soit

$f_n \in \mathrm{R(E)}$, telle que $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ pour $\sigma(\mathrm{E''},\mathrm{E'})$. On a

$$\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{B_1(E')} \supseteq \bigcap_{n\in\mathbf{N}} \mathrm{Ker}\, f_n \cap \mathrm{B_1(E')}.$$

Or, pour tout n, $\mathrm{Ker}\, f_n \cap \mathrm{B_1(E')}$ est un $\mathscr{G}_\delta$-dense de $(\mathrm{B_1(E')}, \sigma(\mathrm{E'},\mathrm{E}))$; l'intersection d'une famille dénombrable de $\mathscr{G}_\delta$-denses d'un compact étant dense, $\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{B_1(E')}$ est dense dans $(\mathrm{B_1(E')}, \sigma(\mathrm{E'},\mathrm{E}))$, et $f \in \mathrm{R(E)}$.

L'ensemble $\mathrm{R(E)}$ est donc un s.e.v. $\sigma(\mathrm{E''},\mathrm{E'})$-fermé de $\mathrm{E''}$, et le théorème 7 s'applique.

C.Q.F.D.

On peut énoncer, de plus, sans hypothèse de séparabilité.

Proposition 15. — *Soit* E *un Banach tel que* E′ *ne contienne pas* $l^1(\mathbf{N})$. *Alors il existe une unique projection de norme* 1 *de* E‴ *sur* $i_{\mathrm{E'}}(\mathrm{E'})$, *et* E *est unique prédual normique de* E′.

Démonstration. — On a ([4]), sans hypothèse de séparabilité $\mathrm{E} \not\supset l^1(\mathbf{N}) \Rightarrow \forall f \in \mathrm{E''}$, $\mathrm{Cont}(f)$ est un $\mathscr{G}_\delta$-dense de $(\mathrm{B_1(E')}, \sigma(\mathrm{E'},\mathrm{E}))$.

En reprenant la démonstration du théorème 14, on en déduit que $\mathrm{R(E')}$ est un espace vectoriel. Or, on a $[i_{\mathrm{E}}(\mathrm{E})]^\perp \subseteq \mathrm{R(E')}$, et d'autre part

$$\mathrm{E'''} = i_{\mathrm{E'}}(\mathrm{E'}) \oplus [i_{\mathrm{E}}(\mathrm{E})]^\perp \qquad \text{et} \qquad \mathrm{R(E')} \cap i_{\mathrm{E'}}(\mathrm{E'}) = \{0\}.$$

On en déduit que $\mathrm{R(E')} = [i_{\mathrm{E}}(\mathrm{E})]^\perp$.

L'ensemble $\mathrm{R(E')}$ est donc un sous-espace vectoriel $\sigma(\mathrm{E'''},\mathrm{E''})$-fermé de E‴ et on applique le théorème 7 pour conclure.

C.Q.F.D.

Une application : caractérisation des duaux parmi les espaces séparables ne contenant pas $l^1(\mathbf{N})$.

Sous les hypothèses ci-dessus, on sait que E est un dual si et seulement si E est un dualoïde. On va en déduire une caractérisation ayant un autre aspect.

Soit E un Banach; on note $l^\infty(\mathrm{E})$ le Banach des suites bornées d'éléments de E, normé par la norme « sup », et $\mathrm{C}_f(\mathrm{E})$ le sous-espace fermé de $l^\infty(\mathrm{E})$ formé des suites $\sigma(\mathrm{E},\mathrm{E'})$-convergentes *dans* E. On considère l'application

$$\lim : \mathrm{C}_f(\mathrm{E}) \to \mathrm{E}$$
$$(u_n) \to \lim_{n\to\infty} u_n$$

on a clairement $\|\lim\| = 1$. On peut énoncer

PROPOSITION 16. — *Soit* E *un Banach séparable ne contenant pas* $l^1(\mathbf{N})$. *Les énoncés suivants sont équivalents :*

1) E *est un dual.*

2) *L'application* $\lim : C_f(E) \to E$ *admet un prolongement linéaire de norme* 1 *de* $l^\infty(E)$ *dans* E.

Démonstration :

1) $\Rightarrow$ 2) : Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre non trivial sur $\mathbf{N}$. Notons E_* le prédual normique de E. On pose

$$\forall (u_n) \in l^\infty(E), \qquad \tilde{\lim}\,(u_n) = \lim_{\mathcal{U}} u_n \quad (\text{pour } \sigma(E,E_*)).$$

Il est aisé de vérifier que $\tilde{\lim}$ est un prolongement linéaire de norme 1 de lim.

2) $\Rightarrow$ 1). Soit $f \in E''$. Soit

$$E_f = \{(u_n) \in l^\infty(E) \backslash \lim_{n\to\infty} i_E(u_n) = f \quad \text{pour} \quad \sigma(E'',E')\}.$$

On a $E_f \neq \varnothing$ (voir [4]). Si (u_n) et (v_n) sont deux éléments de E_f, on a

$$\lim_{n\to\infty} (u_n - v_n) = 0 \qquad \text{pour} \qquad \sigma(E,E').$$

Soit $\tilde{\lim}$ un prolongement de norme 1 de lim ; on a $(u_n - v_n) \in C_f(E)$ et $\lim_{n\to\infty} (u_n - v_n) = 0$, donc $\tilde{\lim}\,(u_n - v_n) = 0$ et $\tilde{\lim}\,(u_n) = \tilde{\lim}\,(v_n)$. On peut alors poser $\pi(f) = \tilde{\lim}\,(u_n)$, où $(u_n) \in E_f$. On a $\|\pi(f)\| \leqslant \|f\|$ pour tout $f \in E''$ car pour $f \in E''$ il existe une suite $(u_n) \in E_f$ qui vérifie $\|(u_n)\| \leqslant \|f\|$ et donc $\|\tilde{\lim}\,(u_n)\| \leqslant \|f\|$. L'application π est clairement linéaire. De plus, on vérifie, en considérant pour tout $i_E(x) \in i_E(E)$ la suite constante égale à x, que l'application $i_E \circ \pi$ est une projection, de norme 1, de E'' sur $i_E(E)$.

L'espace E est donc un dualoïde, et d'après le théorème 14 un dual.

C.Q.F.D.

Remarque. — L'exemple $E = L^1([0,1]\,;dx)$ montre que l'hypothèse $E \not\supset l^1(\mathbf{N})$ est indispensable à la démonstration de 2) $\Rightarrow$ 1). En effet, tout dualoïde, donc en particulier $L^1([0,1]\,;dx)$, vérifie 2).

3. Autres exemples.

Ce paragraphe, combiné avec le suivant, nous montrera que le présent travail recouvre et améliore les résultats de [3], et en particulier son résultat essentiel (Théorème 10).

A) Soit E un Banach séparable tel que l'espace topologique $(B_1(E), \sigma(E, E'))$ soit un espace de Baire. On voit aisément ([3]) que l'ensemble des points de continuité de $\mathrm{Id} : (B_1(E), \sigma(E,E')) \to (B_1(E). \| \ \|)$ est dense dans $(B_1(E), \sigma(E, E'))$. On en déduit ([3]) que l'ensemble $\mathscr{C}(E')$ est dense dans $(B_1(E''), \sigma(E'',E'))$. On en déduit, par la proposition 6 et le théorème 7, qu'il existe une unique projection de norme 1 de E''' sur $i_{E'}(E')$ et que E est l'unique prédual normique de E'.

B) Si E est localement uniformément convexe, l'application

$$\mathrm{Id} : (B_1(E), \sigma(E,E')) \to (B_1(E). \| \ \|)$$

est continue en tout point de la sphère unité $S_1(E)$ de E. On en déduit $i_E(S_1(E)) \subseteq \mathscr{C}(E')$, et par la proposition 6 et le théorème 7, qu'il existe une unique projection de norme 1 de E''' sur $i_{E'}(E')$, et que E est unique prédual normique de E'.

Remarque. – Si E est *l.u.c.* alors $(B_1(E), \sigma(E,E'))$ est un espace de Baire. Le B) se déduit donc du A) dans le cas E séparable.

4. Duaux d'espaces ayant la propriété de Radon-Nikodym. Propriété d'unicité.

On peut énoncer

THÉORÈME 17. – *Soit* E *un espace de Banach qui a la propriété de Radon-Nikodym. Alors il existe une unique projection de norme* 1 *de* E''' *sur* $i_{E'}(E')$, *et* E *est unique prédual normique de* E'.

Démonstration. – Si E a la propriété de Radon-Nikodym, alors $B_1(E)$ est l'enveloppe convexe fortement fermée de ses points fortement exposés. Or, si x est fortement exposé dans $B_1(E)$, on a $i_E(x) \in \mathscr{C}(E')$; on en déduit que $\mathrm{Conv}(\mathscr{C}(E'))$ est dense dans $(B_1(E''), \sigma(E'', E'))$. On peut alors appliquer le théorème 7 et la proposition 6.

C.Q.F.D.

Exemples. — Si $\mathscr{L}(h)$ est l'espace des opérateurs bornés d'un Hilbert dans lui-même, il existe une unique projection de norme 1 de $[\mathscr{L}(h)]''$ sur $i[\mathscr{L}(h)]$, et $\mathscr{L}(h)_*$ est l'unique prédual de $\mathscr{L}(h)$. De même, pour tout ensemble I, il existe une unique projection de norme 1 de $l^\infty(\mathrm{I})$ sur $i[l^\infty(\mathrm{I})]$, et $l^1(\mathrm{I})$ est unique prédual normique de $l^\infty(\mathrm{I})$. C'est vrai plus généralement de toute sous-algèbre de Von Neumann *biduale* de $\mathscr{L}(h)$ — où h est un Hilbert séparable —. Notons cependant que le résultat n'est pas vrai pour toute algèbre de Von Neumann ; en effet, il existe une infinité de projections linéaires de norme 1 de $\mathrm{L}^\infty([0,1]; dx)''$ sur $i(\mathrm{L}^\infty([0,1]; dx)$. Pour voir cela, considérons l'élément suivant de $\mathrm{L}^\infty([0,1]; dx)''$

$$\begin{aligned}\varphi_1 : \mathscr{M}(\mathrm{K}) &\to \mathbf{R}\\ \mu &\longmapsto \mu_d(1)\end{aligned}$$

où K désigne le spectre de $\mathrm{L}^\infty([0,1]; dx)$ et μ_d la partie diffuse de la mesure $\mu \in \mathscr{M}(\mathrm{K})$. L'application φ_1 est nulle sur toute mesure atomique, donc nulle sur un sous-ensemble $\sigma(\mathscr{M}(\mathrm{K})), \mathscr{C}(\mathrm{K}))$-dense de $\mathrm{B}_1(\mathscr{M}(\mathrm{K}))$. D'après le lemme 2, on a donc

$$\|\varphi + \varphi_1\| \geqslant \|\varphi\| \qquad \forall \varphi \in i(\mathrm{L}^\infty([0,1]; dx).$$

Soit alors $\mathrm{X} = i(\mathrm{L}^\infty([0,1]; dx)) \oplus \mathbf{R}\varphi_1$. La projection π de X sur $i(\mathrm{L}^\infty([0,1]; dx))$ parallèlement à $\mathbf{R}\varphi_1$ est de norme 1. L'espace $\mathrm{L}^\infty([0,1]; dx)$ étant un espace injectif, la projection π se prolonge en une projection $\tilde{\pi}$, de norme 1, de $\mathrm{L}^\infty([0,1]; dx)''$ sur $i(\mathrm{L}^\infty([0,1]; dx)$. Or, si $f \in \mathrm{L}^1([0,1]; dx)$, l'application $i_{\mathrm{L}^1}(f)$ est une mesure diffuse sur K, et on a

$$\varphi_1(i_{\mathrm{L}^1}(f)) = \int_0^1 f(t)\, dt,$$

ce qui montre que $\varphi \notin [i_{\mathrm{L}^1}(\mathrm{L}^1)]^\perp$. Les projections π et $i_{\mathrm{L}^\infty} \circ (i_{\mathrm{L}^1})'$ sont donc distinctes. On a donc obtenu deux projections de norme 1 de $\mathrm{L}^\infty([0,1]; dx)''$ sur $i(\mathrm{L}^\infty([0,1]; dx))$; appelons X_0 et X_1 leurs noyaux, et soit

$$\mathrm{X}_\lambda = \{z \in \mathrm{L}^{\infty''} \mid z = (1-\lambda)x + \lambda y ;\ x \in \mathrm{X}_0,\ \ y \in \mathrm{X}_1, y - x \in \mathrm{L}^\infty\}.$$

On vérifie aisément que la projection de $\mathrm{L}^{\infty''}$ sur $i(\mathrm{L}^\infty)$ parallèlement à X_λ est de norme 1 ; on obtient ainsi une infinité de projections de norme 1 distinctes.

Remarquons que la démonstration ci-dessus montre en fait que si K est un compact hyperstonien, il existe une unique projection de norme 1 de $\mathscr{C}(K)''$ sur $\mathscr{C}(K)$ si et seulement si K est le compactifié de Stone-Čech d'un ensemble discret, c'est-à-dire $\mathscr{C}(K) = l^\infty(I)$.

Notons que l'existence d'une unique projection de norme 1 de $l^\infty(I)''$ sur $i(l^\infty(I))$ se traduit de la façon suivante : les formes linéaires coordonnées $(\pi_\alpha)_{\alpha\in I}$ sur $l^\infty(I)$ admettent un unique prolongement de norme 1 à $l^\alpha(I)''$.

Cette remarque nous amène à introduire une notion :

Propriété d'unicité.

Soit E un Banach. On vérifie sans difficulté qu'on a

$$i_{E''} \circ i_E = (i_E)'' \circ i_E.$$

On dira que $x \in E$ a la *propriété d'unicité* si l'élément

$$y = i_{E''} \circ i_E(x) = (i_E)'' \circ i_E(x)$$

est l'unique élément y de $E^{(4)}$ tel que $(i_{E'})'(y) = i_E(x)$, qui soit de même norme que x. En d'autres termes, x a la propriété d'unicité s'il existe un unique prolongement de x à E''' de norme $\|x\|$.

PROPOSITION 18. — *Soit* E *un Banach. Soit* Uni(E) *l'ensemble des éléments de* E *qui ont la propriété d'unicité. Si* Uni (E) *est une partie totale de* E, *il existe une unique projection de norme* 1 *de* E''' *sur* $i_{E'}(E')$, *et* E *est unique prédual normique de son dual.*

Démonstration. — On raisonne par l'absurde. Soient π_1 et π_2 deux projections de norme 1 de E''' sur $i_{E'}(E')$, telles que $\operatorname{Ker}\pi_1 \neq \operatorname{Ker}\pi_2$. Soient $x \in i_{E'}(E')\backslash\{0\}$ et $y \in E'''$ tels que $y \in \operatorname{Ker}\pi_1$ et $y + x \in \operatorname{Ker}\pi_2$. Si Uni (E) est totale dans E, il existe $f \in$ Uni (E) telle que $f(x) \neq 0$. Les formes linéaires $(i_{E''} \circ i_E)(f) \circ \pi_1$ et $(i_{E''} \circ i_E)(f) \circ \pi_2$ sont des prolongements de f à E''', de norme $\|f\|$, et on a

$$[(i_{E''} \circ i_E)(f) \circ \pi_1 - (i_{E''} \circ i_E)(f) \circ \pi_2](y) = f(x) \neq 0,$$

contredisant le fait que $f \in$ Uni (E).

C.Q.F.D.

Illustrons cette proposition par un exemple : si x est fortement exposé dans $B_1(E)$, alors $x \in$ Uni (E). Plus généralement, *si* $x \in \mathscr{C}(E')$ *alors* $x \in i_E(E)$ *et* $i_E^{-1}(x) \in$ *Uni* (E). En effet, on voit aisément que si $x \in \mathscr{C}(E')$ alors $x \in i_E(E)$, en utilisant la densité de $i_E(B_1(E))$ dans $B_1(E'')$, $\sigma(E'',E')$;

on a donc $x = i_E(x_0)$. Montrons que $x_0 \in \mathrm{Uni}(E)$. Soit $y \in E^{(4)}$ tel que $\|y\| = \|x_0\| = \|x\|$ et tel que

$$(y - i_{E''}(x)) \in i_{E'}(E')^{\perp}.$$

Soit alors $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ un ensemble filtrant dans E'' tel que

$$\begin{cases} i_{E''}(x_\alpha) \to y & \text{pour} \quad \sigma(E^{(4)}.E''') \\ \|x_\alpha\| \leqslant \|y\| & \forall\alpha \in A. \end{cases}$$

Puisqu'on a $(y - i_{E''}(x)) \in i_{E'}(E')^{\perp}$ on a $x_\alpha \to x$ pour $\sigma(E'',E')$ mais ceci implique $\|x_\alpha - x\| \to 0$ puisque $x \in \mathscr{C}(E')$. On en déduit que $i_{E''}(x_\alpha) \to i_{E''}(x)$ et donc que $y = i_{E''}(x)$.

Le résultat ci-dessus s'énonce encore de la façon suivante, plus maniable : *si* $x \in E$ *est un point de continuité de* $\mathrm{Id} : (B_1(E), \sigma(E,E')) \to (B_1(E), \|\ \ \|)$ *alors* $x \in \mathrm{Uni}(E)$. Ceci nous permet de vérifier qu'à l'exception des Propositions 14, 15 et 16, les résultats de ce travail sont des conséquences de la Proposition 18, pour ce qui est des assertions d'unicité de la projection de norme 1 de E''' sur $i_{E'}(E')$, et d'unicité du prédual. En effet :

– Si $\|\ \ \|_{E'}$ est $\mathscr{F}$-diff. en tout point d'un ensemble dense, alors Uni (E) contient l'ensemble des formes linéaires tangentes aux points de $\mathscr{F}$-diff. de $\|\ \ \|_{E'}$.

– Si E est séparable et si $(B_1(E), \sigma(E,E'))$ est un espace de Baire, alors Uni (E) contient l'ensemble des points de continuité de $\mathrm{Id} : (B_1(E), \sigma(E,E')) \to (B_1(E). \|\ \ \|)$.

– Si E est localement uniformément convexe, alors Uni (E) = E.

– Si E a la propriété de Radon-Nikodym, alors Uni (E) contient l'ensemble des points fortement exposés de $B_1(E)$.

Remarques :

– On vérifie aisément que si $E = l^1(I)$, alors Uni (E) = E. En effet, on a

$$\mathscr{C}(l^\infty(I)) \supset i(S_1(l^1(I)).$$

– Soit $x \in E$, $\|x\| = 1$. La propriété d'unicité s'exprime géométriquement de la façon suivante : $x \in \mathrm{Uni}(E) \Leftrightarrow$ l'intersection de $B_1(E^{(4)})$ avec

$$(i_{E''} \circ i_E(x)) + [i_{E'}(E')]^{\perp} \quad \text{est réduite à} \quad i_{E''} \circ i_E(x).$$

De nombreuses questions se posent naturellement à propos de ce travail. En particulier :

Question 1. — Existe-t-il un espace d'Asplund E tel que $i_E(E)$ soit facteur direct dans E'' et qui ne soit pas isomorphe à un dual ?

Question 2. — Quelles sont les algèbres de Von Neumann A qui vérifient l'unicité de la projection de norme 1 de A'' sur $i(A)$?

5. Exemples et démonstrations annexes.

1) Exemples de non-unicité du prédual.

Si K est un compact dénombrable, alors $\mathscr{C}(K)'$ est isométrique à $l^1(\mathbf{N})$; on définit ainsi $\aleph_1$ préduaux normiques de $l^1(\mathbf{N})$ deux à deux non isomorphes. De même, si K est un compact métrisable non dénombrable, alors $\mathscr{C}(K)'$ est isométrique à $\mathscr{C}([0,1])' = \mathscr{M}([0,1])$ et $\mathscr{C}(K_1)$ n'est isométrique à $\mathscr{C}(K_2)$ que si K_1 est homéomorphe à K_2. Enfin, soit I le compact « intervalle éclaté » — c'est-à-dire $[0,1] \times \{0,1\}$ muni de l'ordre lexicographique — ; on vérifie grâce à la décomposition de $\mathscr{M}(I)$ en espace des mesures diffuses et en espace des mesures atomiques, que l'espace $\mathscr{M}(I)$ des mesures de Radon sur I est isométrique à $\mathscr{M}([0,1])$. Les espaces $\mathscr{C}([0,1])$ et $\mathscr{C}(I)$ ont donc des duaux isométriques ; cependant $\mathscr{C}([0,1])$ est séparable et $\mathscr{C}(I)$ ne l'est pas puisque I est un compact non métrisable.

2) Comme annoncé à la fin du paragraphe I, on va donner une démonstration directe du résultat suivant :

PROPOSITION 19. — *Soit* E *un espace dualoïde tel que* E''' *soit strictement convexe. Alors* E *est réflexif.*

Démonstration. — Soit π une projection de norme 1 de E'' sur $i_E(E)$. L'application π' transposée de π est une projection de E''' dans E''', de norme 1, de noyau $[i_E(E)]^\perp$ et d'image $[\operatorname{Ker} \pi]^\perp$ $\sigma(E''',E'')$-fermée. D'autre part, l'application $i_{E'} \circ (i_E)'$ est une projection de E''' dans E''', de norme 1, de noyau $[i_E(E)]^\perp$ et d'image $i_{E'}(E')$. Si E n'est pas réflexif, on a nécessairement $\operatorname{Im} \pi' = [\operatorname{Ker} \pi]^\perp \neq i_{E'}(E')$, puisque $\operatorname{Im} \pi'$ est $\sigma(E''',E'')$-fermée. Soit alors $x \in \pi'(E''')\backslash i_{E'}(E')$, de norme 1. Le segment $[x, i_{E'} \circ (i_E)'(x)]$ n'est pas réduit à un point. On a

$$\|i_{E'} \circ (i_E)'\| = 1 \Rightarrow \forall y \in [x, i_{E'} \circ (i_E)'(x)], \quad \|y\| \leqslant 1 .$$

On a d'autre part

$$\forall y \in [x, i_{E'} \circ (i_E)'(x)],\ \pi(y) = x$$

d'où, puisque $\|\pi\| = 1$, $\|y\| \geqslant 1$.

On a donc prouvé que le segment $[x, i_{E'} \circ (i_E)'(x)]$ est contenu dans la sphère unité $S_1(E''')$ de E''', donc que E''' n'est pas strictement convexe.

C.Q.F.D.

COROLLAIRE 20. — *Soit* E *un Banach tel que* $E^{(4)}$ *soit strictement convexe. Alors* E *est réflexif.*

Démonstration. — On applique la proposition ci-dessus à E', dual donc dualoïde.

C.Q.F.D.

Remarque. — Le corollaire ci-dessus était déjà connu, avec des démonstrations plus analytiques. Il apparait ici comme simple conséquence d'une part du fait que :

$$(\text{E non réflexif}) \Rightarrow [i_{E''} \circ (i_{E'})' \neq (i_E)'' \circ (i_{E'})'],$$

ce qui est clair puisque l'image de la première application est $i_{E''}(E'')$ et que l'image de la seconde est $\sigma(E^{(4)}.E''')$-fermée, et d'autre part de la remarque élémentaire suivante : Dans un espace X strictement convexe, deux projections de norme 1 et de même noyau sont identiques.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. BOURGAIN, D. M. FREMLIN, M. TALAGRAND, Pointwise compact sets of Baire mesurable functions, *Am. J. of Math.*, 100 (1978), 845-886.

[2] J. DIESTEL, Geometry of Banach Spaces, selected topics, Lectures notes n° 485, Springer-Verlag.

[3] G. GODEFROY, Espaces de Banach. Existence et Unicité de certains préduaux, *Annales de l'Institut Fourier*, 28,3 (1978), 87-105.

[4] H. P. ROSENTHAL, A double dual characterization of Banach spaces containing l^1, *Israel J. of Math.*, 20 (1975), 375-384.

Manuscrit reçu le 27 mars 1979.

Gilles GODEFROY,
Université de Paris VI
Équipe d'Analyse
Tour 46 - Couloir 46/0
4, place Jussieu
75230 Paris.