ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

ROLAND GILLARD

Unités cyclotomiques, unités semi-locales et $\mathbb{Z}_\ell$-extensions. II

Annales de l'institut Fourier, tome 29, nº 4 (1979), p. 1-15
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1979__29_4_1_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
29, 4 (1979), 1-15.

UNITÉS CYCLOTOMIQUES, UNITÉS SEMI-LOCALES ET Z_l-EXTENSIONS II

par **Roland GILLARD**

0. Introduction.

Dans un article très important ([13]), K. Iwasawa discute comment pourraient être démontrées par voie algébrique des formules de nombre de classes. Cet article l'amène à formuler certaines conjectures (non démontrées à l'heure actuelle). Les idées contenues dans cette théorie devaient se révéler fort fécondes : lien avec les lois de réciprocité explicites, rapport entre les formules du nombre de classes et le théorème de Stickelberger sur l'annulation du groupe des classes. Ce rapport s'explicite maintenant à l'aide des fonctions L l-adiques. La clef de voûte de l'article d'Iwasawa est un résultat que nous allons décrire plus en détail.

Soit l un nombre premier impair ; pour $n \in \mathrm{N}$, choisissons une racine de l'unité ζ_{l^n} d'ordre l^n. Considérons le groupe U_n des unités de $\mathbf{Q}_l(\zeta_{l^{n+1}})$, le groupe C_n des unités cyclotomiques de $\mathbf{Q}(\zeta_{l^{n+1}})$ et $\bar{\mathrm{C}}_n$ la fermeture de C_n dans U_n. Prenons alors la limite projective Y_∞ des groupes $(\mathrm{U}_n/\bar{\mathrm{C}}_n)_{n\geqslant 0}$ pour les applications déduites des normes relatives. Désignons par ω le caractère canonique à valeurs dans $\mathbf{Z}_l$ donnant l'action de $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\zeta_l)/\mathbf{Q})$ sur ζ_l. Le groupe de Galois sur $\mathbf{Q}$ de la réunion des corps $\mathrm{Q}(\zeta_{l^n})$ contient un facteur direct Δ isomorphe à $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\zeta_l)/\mathbf{Q})$. En utilisant l'isomorphisme précédent on peut décomposer la l-partie de Y_∞ en facteurs directs $\mathrm{Y}_\infty^{(i)}$, $0 \leqslant i < l-1$: sur le facteur $\mathrm{Y}_\infty^{(i)}$, Δ opère suivant ω^i. Le résultat d'Iwasawa décrit le module galoisien $\mathrm{Y}_\infty^{(i)}$ à l'aide de la « série de Stickelberger » liée à ω^i ; rappelons que cette série permet de reconstruire la fonction L l-adique, cf. [15], chap. 6.

Soient $K/\mathbf{Q}$ une extension abélienne réelle et l un nombre premier, premier au degré $[K : \mathbf{Q}]$. Le but de cet article est de démontrer pour la $\mathbf{Z}_l$-extension K_∞ de K, un résultat analogue à celui d'Iwasawa (ci-dessous théorème 1). Les groupes U_n doivent être remplacés par des groupes d'unités « semi-locales ». Par rapport à mon précédent travail ([8]), le gain est notamment de remplacer une égalité sur l'ordre de deux groupes, cf. ci-dessous lemme 5, par un isomorphisme ou une suite exacte, cf. ci-dessous théorème 2. La méthode suivie ici est une adaptation convenable de celle de J. Coates et A. Wiles ([4], cf. aussi [16]) qui repose sur l'emploi des dérivées logarithmiques. L'objet du § 6 est de montrer que, comme dans le cas de $\mathbf{Q}(\zeta_l)$, le résultat précédent a des conséquences sur les groupes de classes : si L_∞ désigne la l-extension abélienne non ramifiée maximale de K_∞, il permet de traduire la conjecture de R. Greenberg, [10] (intermédiaire entre la conjecture principale de [2], § 5.1 et celle de Coates et Lichtenbaum, [3] conj. 2.3) portant sur la partie *imaginaire* de $\mathrm{Gal}(L_\infty/K_\infty)$ en un énoncé portant sur la partie *réelle* : énoncé qui est une version « à la limite projective » de la conjecture de G. Gras (cf. [8], § 6.1 conjecture 1).

1. Notations et résultats.

Soient $K/\mathbf{Q}$ une extension abélienne, Δ son groupe de Galois et l un nombre premier, premier à $[K : \mathbf{Q}]$. Désignons par K_∞ (resp. $\mathbf{Q}_\infty$) la $\mathbf{Z}_l$-extension de K (resp. de $\mathbf{Q}$) : on a $K_\infty = K.\mathbf{Q}_\infty$. Soient S l'ensemble fini des places de K_∞ au-dessus de l et v un élément de S, fixé dans toute la suite. Pour chaque n dans $\mathbf{N}$, soit K_n le sous-corps de K_∞ avec $[K_n : K] = l^n$. Pour w dans S, notons K_n^w le complété de K_n correspondant, $\mathcal{O}_n^w$ l'anneau des entiers de K_n^w et U_n^w l'ensemble des x de $\mathcal{O}_n^w$ congrus à 1 modulo l'idéal maximal. Posons

$$(1)\qquad \hat{K}_n = \prod_{w\in S} K_n^w, \quad \hat{\mathcal{O}}_n = \prod_{w\in S} \mathcal{O}_n^w, \quad U_n = \prod_{w\in S} U_n^w.$$

Désignons par C_n le groupe des unités cyclotomiques de K_n (au sens de Hasse, i.e. celui noté C^1 dans [9], § 2.1, cf. aussi ci-dessous § 4). Considérons l'intersection de U_n et de l'image de C_n par l'application diagonale $K_n \to \hat{K}_n$ et notons $\bar{C}_n$ sa fermeture dans U_n, muni de la topologie produit. Posons

$$U = \varprojlim U_n, \qquad C = \varprojlim \bar{C}_n,$$

les applications de transition étant les normes, provenant de $N_{m,n} : K_m \to K_n$, pour $m \geqslant n$, par complétion. Ceci a un sens pour C puisque $N_{m,n}(C_m)$ est inclus dans C_n, cf. [9] formule (12).

Soient Φ un caractère de Δ, non trivial, défini et irréductible sur $\mathbf{Q}_l$ et e_Φ l'idempotent de $\mathbf{Z}_l[\Delta]$ correspondant

$$e_\Phi = \frac{1}{[K : \mathbf{Q}]} \sum_{\sigma \in \Delta} \Phi(\sigma^{-1}).\sigma.$$

Fixons une clôture algébrique Ω_l de $\mathbf{Q}_l$ et choisissons un facteur ψ, défini et irréductible sur Ω_l, de la décomposition de Φ sur Ω_l. On sait qu'en prolongeant ψ à $\mathbf{Z}_l[\Delta]$, on obtient un isomorphisme

$$e_\Phi \mathbf{Z}_l[\Delta] \xrightarrow{\sim} A, \tag{2}$$

où A désigne le sous-anneau de Ω_l engendré par l'image de ψ. Désignons par $f(T,\psi)$ la série de Stickelberger, c'est-à-dire l'élément de $A[[T]]$ construit dans [15] chap. 6, pour le caractère de Dirichlet primitif à valeurs dans Ω_l et correspondant à ψ. Soient f' le conducteur de ψ et q_0 le plus petit commun multiple de f' et q, où $q = l$ $(q=4$ si $l=2)$. Pour m dans $\mathbf{N}$, désignons par ζ_m une racine primitive $m^{\text{ième}}$ de l'unité (avec $\zeta_{mm'}^{m'} = \zeta_m$). Posons (*) $c = 1 + q_0$ et considérons l'automorphisme de $\cup K(\zeta_{l^n})/K(\zeta_l)$ envoyant ζ_{l^n} sur $\zeta_{l^n}^c$ (pour tout n), et notons γ sa restriction à K_∞ : γ est un générateur topologique de $\Gamma = \mathrm{Gal}(K_\infty/K)$. En identifiant γ à la série $1 + T$, on munit les groupes U et C de structures de $\mathbf{Z}_l[[T]]$-modules. De plus, en identifiant Δ et $\mathrm{Gal}(K_\infty/\mathbf{Q}_\infty)$, ce sont aussi des $\mathbf{Z}_l[\Delta]$-modules. D'après (2), on peut donc considérer $e_\Phi U$ et $e_\Phi C$ comme des $A[[T]]$-modules.

Pour a unité dans $\mathbf{Z}_l$, soit $\omega(a)$ la racine de 1 congrue à a modulo q : ω définit un caractère de Dirichlet de conducteur q. Pour n dans $\mathbf{Z}$, on note ψ_n le caractère de Dirichlet primitif correspondant à $\psi.\omega^{-n}$, ψ étant identifié à un caractère de Dirichlet primitif. Ainsi, il existe un seul entier, noté i dans la suite, avec $0 \leqslant i \leqslant l - 2$ $(i = 0$ si $l = 2)$ et tel que le conducteur f de ψ_i soit premier à l. Désignons par $\dot{T}$ la série $c(1 + T)^{-1} - 1$.

L'énoncé des théorèmes suivants suppose que K est une extension réelle de $\mathbf{Q}$.

(*) Ceci permet de rappeler la formule $\frac{1}{2} L_l(s,\psi) = f(c^s - 1,\psi)$ reliant $f(T,\psi)$ aux valeurs de la fonction L l-adique évaluée en $s \in \mathbf{Z}_l$.

THÉORÈME 1. — *Le* $A[[T]]$-*module* $e_\Phi(U/C)$ *est isomorphe à* $A[[T]]/(f(\dot{T},\psi))$ *si* $\psi_1(l) \neq 1$ *et figure dans une suite exacte si* $\psi_1(l) = 1$:

$$0 \to A[[T]]/(\dot{T}) \to e_\Phi(U/C) \to A[[T]]/(f(\dot{T},\psi)/\dot{T}) \to 0.$$

Pour n dans $\mathbf{N}$, notons ω_n la série $(1+T)^{l^n} - 1$ et μ_n le groupe des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité; ainsi, μ_{ql^n} est isomorphe à $\mathbf{Z}_l[[T]]/(\dot{T},\omega_n)$.

THÉORÈME 2. — *Le* A-*module* $e_\Phi(U_n/\bar{C}_n)$ *est isomorphe à* $A[T]/(\omega_n, f(\dot{T},\psi))$ *si* $\psi(l)$ *et* $\psi_1(l)$ *sont* $\neq 1$; *il figure dans une suite exacte*

$$0 \to A[[T]]/(\omega_n, 2\omega_n/T, f(\dot{T},\psi)) \to e_\Phi(U_n/\bar{C}_n) \to A/\left(\frac{1}{2} f(c-1,\psi)\right) \to 0,$$

si $\psi(l) = 1$ et

$$0 \to A \otimes_{\mathbf{Z}_l} \mu_{ql^n} \to e_\Phi(U_n/\bar{C}_n) \to A[[T]]/(\omega_n, f(\dot{T},\psi)/\dot{T}) \to 0$$

si $\psi_1(l) = 1$.

2. Structure de $e_\Phi U$.

Le but des § 2.1 et 2.2 est la démonstration du résultat suivant :

PROPOSITION 1. — *Le* $A[[T]]$-*module* $e_\Phi U$ *est isomorphe à* $A[[T]] \oplus (A[[T]]/(\dot{T}))$ *si* $\psi_1(l) = 1$, *et à* $A[[T]]$ *sinon.*

2.1. Réduction à $U^v = \varprojlim U_n^v$. Soient D le groupe de décomposition de l dans $K/\mathbf{Q}$, ψ_D la restriction de ψ à D, Φ_D la somme des conjugués de ψ_D sur $\mathbf{Q}_l$ et A_D le sous-anneau de A engendré par l'image de ψ_D. On a alors un isomorphisme de $\mathbf{Z}_l[\mathrm{Gal}(K_n/\mathbf{Q})]$-modules

$$U_n \simeq U_n^v \otimes_{\mathbf{Z}_l[D]} \mathbf{Z}_l[\Delta], \tag{3}$$

d'où, en utilisant (2) et un isomorphisme analogue avec D et Φ_D,

$$e_\Phi U_n \simeq e_{\Phi_D} U_n^v \otimes_{A_D} A.$$

On en déduit donc en passant à la limite

$$e_\Phi U \simeq e_{\Phi_D} U^v \otimes_{A_D} A, \tag{4}$$

puisque A est un A_D-module libre. De plus dire que $\psi(l) = 1$ (resp. $\psi_1(l) = 1$) revient à dire que ψ_D est trivial (resp. est égal à la restriction de ω, considéré comme caractère de $\mathrm{Gal}(K_0^v/\mathbf{Q}_l) \simeq D$) et que $i = 0$ (resp. $i = 1$).

Remarque. – Désignons par F_n le sous-corps de K_n fixé par le noyau de ψ dans Δ (via l'isomorphisme $\Delta \simeq \mathrm{Gal}(K_\infty/\mathbf{Q}_\infty)$). A l'aide de (4), on voit facilement que $e_\Phi U_n$ n'est pas modifié lorsqu'on remplace K_n par F_n, dans toutes les définitions faites. Ceci permet de supposer que K contient ζ_l, en imposant que Φ soit pair (i.e. $\psi(-1) = 1$), *ce que nous ferons désormais.*

2.2. Étude de $e_{\Phi_D} U^v$ (je remercie J.-P. Wintenberger pour ses explications sur ce point). Soient $X_n = (K_n^v)^*$ et $\hat{X}_n$ son complété l-adique : $\hat{X}_n = \varprojlim X_n/l^m . X_n$; on a donc, toujours avec des notations *additives*, une suite exacte

$$0 \to U_n^v \to \hat{X}_n \to \mathbf{Z}_l \to 0.$$

Pour $m \geqslant n$, la norme induit une application $\hat{X}_m \to \hat{X}_n$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & U_m^v & \to & \hat{X}_m & \to & \mathbf{Z}_l & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \| & & \\ 0 & \to & U_n^v & \to & \hat{X}_n & \to & \mathbf{Z}_l & \to & 0, \end{array}$$

d'où à la limite, en posant $\hat{X} = \varprojlim \hat{X}_n$,

(5) $$0 \to U^v \to \hat{X} \to \mathbf{Z}_l \to 0.$$

La structure de $e_{\Phi_D}\hat{X}$ s'obtient par un raisonnement analogue à [14], théorème 25 :

(6)
a) $e_{\Phi_D}\hat{X} \simeq A_D[[T]]$ si ψ_D n'est ni trivial ni égal à la restriction de ω à D,
b) $e_{\Phi_D}\hat{X} \simeq \mathbf{Z}_l[[T]] \oplus \mathbf{Z}_l[[T]]/(\dot{T})$ si ψ_D est égal à la restriction de ω à D,
c) $e_{\Phi_D}\hat{X} \simeq (2,T)\mathbf{Z}_l[[T]]$ si ψ_D est trivial.

Dans les cas *a*) et *b*), on a $e_{\Phi_D}U^v = e_{\Phi_D}\hat{X}$ d'après (5). Dans le cas *c*), en considérant la valuation, on voit que $e_{\Phi_D}U^v$ s'identifie via l'isomorphisme (6) à $T \cdot \mathbf{Z}_l[[T]] \simeq A_D[[T]]$. La proposition 1 résulte alors de (4).

2.3. Soit V_n (resp. V_n^v) l'intersection des images des U_m (resp. des U_m^v) pour $m \geqslant n$ pour les applications déduites des $N_{m,n}$.

PROPOSITION 2. – *Pour n dans* $\mathbf{N}$, *on a* $e_\Phi V_n \simeq e_\Phi[U/(\omega_n, 2\omega_n/T).U]$ *si* $\psi(l) = 1$ *et* $e_\Phi U_n = e_\Phi V_n \simeq e_\Phi[U/\omega_n.U]$ *sinon.*

Démonstration. — D'après les considérations de 2.1, on peut se ramener à $e_{\Phi_D}V_n^v$. Soit alors $\hat{X}'_n$ l'intersection des images des $\hat{X}_m$ pour $m \geqslant n$ pour les applications déduites des $N_{m,n}$. On peut montrer, par exemple en considérant des quotients de Herbrand, que $\hat{X}'_n$ est isomorphe à $\hat{X}/\omega_n\hat{X}$. Compte tenu de (4) et (5), ceci prouve la proposition 2 si ψ_D est non trivial (i.e. $\psi(l) \neq 1$). *Si* ψ_D est trivial $e_{\Phi_D}U^v$ s'identifie par l'isomorphisme (6) à $T.\mathbf{Z}_l[[T]]$: l'application $e_{\Phi_D}U^v \to V_n^v$ est surjective; son noyau égal à $e_{\Phi_D}.\omega_n\hat{X}$, correspond à $(2\omega_n, T\omega_n)\mathbf{Z}_l[[T]]$ donc est encore égal à $e_{\Phi_D}(2\omega_n/T, \omega_n)U^v$. La proposition 2 en découle encore d'après (4).

3. Semi-localisation de la méthode de [16], chap. 7.

3.1. Désignons par $K_{-1}/\mathbf{Q}$ la sous-extension non ramifiée en l, maximale de $K/\mathbf{Q}$; soit Δ_{-1} son groupe de Galois. On étend (1) au cas $n = -1$, avec des définitions analogues. Notons que pour tout $n \geqslant 0$ et tout w, K_n^w est l'extension composée des deux extensions (*) K_{-1}^w et $\mathbf{Q}_l(\zeta_{ql^n})$, linéairement disjointes sur $\mathbf{Q}_l$. La place v définit un plongement φ de K_n dans Ω_l. On prolonge φ à $\hat{\mathcal{O}}_n$, puis à $\hat{K}_n$, en considérant $\hat{\mathcal{O}}_n$ comme le complété l-adique de $\mathcal{O}_n$. De même l'action de Δ sur $\hat{K}_n$ provient du prolongement de celle sur K_n (via $\Delta \simeq \mathrm{Gal}(K_\infty/\mathbf{Q}_\infty)$) ; soit s l'automorphisme de Frobenius de l dans $K/\mathbf{Q}(\zeta_l)$; c'est un élément de Δ dont l'action sur $\hat{K}_n$ provient de celle sur chaque K_n^w.

Pour chaque w, $\pi_n = \zeta_{ql^n} - 1$ est une uniformisante de K_n^w. On a l'égalité $(1 + \pi_{n+1})^l = 1 + \pi_n$. D'après [5], pour tout élément $x^v = (x_x^v)$ de U^v, il existe une série formelle $f^v(T)$ à coefficients dans $\mathcal{O}_{-1}^v$ telle que

$$s^n(x_n^v) = f^v(\pi_n) \qquad \text{pour tout } n \text{ dans } \mathbf{N}.$$

En utilisant les décompositions (1), on en déduit que pour tout élément $x = (x_n)$ de U, il existe une série formelle $f(T)$ à coefficients dans $\hat{\mathcal{O}}_{-1}$, telle que

$$(7) \qquad s^n(x_n) = f(\pi_n) \qquad \text{pour tout } n \text{ dans } \mathbf{N}.$$

Pour σ élément de Δ, soit $f_\sigma(T)$ la série déduite de $f(T)$ par l'action de σ sur ses coefficients. Avec ψ et i comme au § 1, on pose pour $k \equiv i \bmod (l-1)$ (mod 2 si $l=2$)

$$(8) \qquad \delta_k(x) = \sum_{\sigma \in \Delta_{-1}} \psi_i(\sigma)^{-1} . \varphi\left(\left(\frac{d}{dz}\right)^k_{z=0} \log f_\sigma(e^z - 1)\right),$$

(*) Si $l = 2$, il faut remplacer K_n^w par $K_n^w(\sqrt{-1})$ au § 3.1.

comparer à [16], chap. 7, § 4. Ainsi $\delta_k(x)$ appartient à l'anneau A' de Ω_l engendré par $\varphi(\mathcal{O}^v_{-1})$ et A.

Comme de (7), on déduit $s^n\gamma(x_n) = f(\zeta^c_{ql^n} - 1)$, on voit que $\gamma(x)$ est représenté par la série $f((1+T)^c - 1)$, ce qui correspond à un changement de z en cz, d'où

$$\delta_k(\gamma(x)) = c^k\,\delta_k(x).$$

En supposant g dans $\mathbf{Z}_l[[T]]$ on en déduit par linéarité et continuité que

$$\delta_k(g.x) = g(c^k - 1).\delta_k(x).$$

En identifiant les caractères de Δ aux caractères de Dirichlet correspondants, pour τ dans Δ, on a

$$s^n.\tau(x_n) = f_\tau(\zeta_{ql^n}^{\omega(\tau)} - 1),$$

d'où en raisonnant comme plus haut

$$\delta_k(\tau(x)) = \Sigma\ \psi_i(\sigma)^{-1}\omega(\tau)^k\varphi\left(\left(\frac{d}{dz}\right)^k_{z=0} \log f_{\sigma\tau}(e^z - 1)\right),$$

c'est-à-dire encore $\delta_k(\tau(x)) = \psi_{i-k}(\tau)\,\delta_k(x)$. Si x est dans $e_\Phi U$ et si k vérifie $k \equiv i \bmod (l-1)$ (mod 2 si $l=2$), d'après la définition de l'action de $A[[T]]$ sur $e_\Phi U$, cf. (2), pour g appartenant à $A[[T]]$, on a

$$\delta_k(g.x) = g(c^k - 1).\delta_k(x). \tag{9}$$

3.2. Proposition 3. — *Pour tout élément x de $e_\Phi U$, il existe une série G_x, à coefficients dans A' telle que*

$$(1 - l^{k-1}\psi_i(l)).\delta_k(x) = G_x(c^k - 1),$$

pour tout k entier > 0 vérifiant $k \equiv i \bmod (l-1)$ (mod 2 si $l=2$).

Démonstration. — La série $F(T) = \left(\frac{d}{dz}\right)\log f(T)$, avec $T = e^z - 1$, étant à coefficients dans $\hat{\mathcal{O}}_{-1}$, il existe une mesure sur $\mathbf{Z}_l$, à valeurs dans $\hat{\mathcal{O}}_{-1}$, cf. [16], chap. 4 telle que

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^k_{z=0} F(e^z - 1) = \int_{\mathbf{Z}_l} t^k\mu(t),$$

pour k entier $\geqslant 0$, d'où encore (loc. cit. Meas. 4)

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^k_{z=0} \tilde{F}(e^z - 1) = \int_{\mathbf{Z}_l^*} t^k\mu(t), \tag{10}$$

avec $\tilde{\mathrm{F}}(\mathrm{T}) = \mathrm{F}(\mathrm{T}) - \frac{1}{l}\sum_{j=0}^{l-1} \mathrm{F}(\zeta_l^j(1+\mathrm{T})-1)$. Mais pour tout n, on a

$$\prod_{j=0}^{l-1} f(\zeta_l^j(1+\pi_{n+1})-1) = \mathrm{N}_{n+1,n}(f(\pi_{n+1})) = \mathrm{N}_{n+1,n}(x_{n+1}^{s^{n+1}})$$
$$= x_n^{s^{n+1}} = f_s(\pi_n),$$

d'où l'on déduit

$$\tilde{\mathrm{F}}(\mathrm{T}) = \mathrm{F}(\mathrm{T}) - \mathrm{F}_s((1+\mathrm{T})^l - 1).$$

On déduit alors de (10), cf. [16] démonstration du théorème 4.2 du chap. 7, qu'il existe une série G_x^1 à coefficients dans $\hat{\mathcal{O}}_{-1}$ telle que pour $k > 0$,

$$\left(\frac{d}{dz}\right)_{z=0}^k \left[\log f(e^z-1) - \frac{1}{l}\log f_s(e^{lz}-1)\right] = \mathrm{G}_x^1(c^k-1).$$

On peut donc prendre

$$\mathrm{G}_x = \sum_{\sigma\in\Delta_{-1}} \psi_i(\sigma)^{-1}\varphi_\sigma(\mathrm{G}_x^1),$$

où $\varphi_\sigma(\mathrm{G}_x^1)$ désigne la série de $\mathrm{A}'[[\mathrm{T}]]$, obtenue en faisant σ puis φ sur chacun des coefficients de G_x^1. Dégageons maintenant quelques propriétés de G_x.

LEMME 1. — *Si g appartient à* $\mathrm{A}[[\mathrm{T}]]$, *on a* $\mathrm{G}_{gx} = g.\mathrm{G}_x$.

Démonstration. — Les valeurs des deux séries du lemme sont égales si $\mathrm{T} = c^k - 1$ pour tout $k > 0$, $k \equiv i \bmod (l-1)$ (mod 2 si $l=2$).

LEMME 2. — *Si x est dans la partie de* $\mathrm{A}[[\mathrm{T}]]$*-torsion de* $e_\Phi\mathrm{U}$, G_x *est nulle.*

Démonstration. — Ceci résulte immédiatement du lemme 1 puisque l'anneau $\mathrm{A}'[[\mathrm{T}]]$ est intègre.

LEMME 3. — *Fixons un épimorphisme* $\Lambda_\Phi : e_\Phi\mathrm{U} \to \mathrm{A}[[\mathrm{T}]]$ *de* $\mathrm{A}[[\mathrm{T}]]$*-modules dont le noyau est la partie de torsion de* $e_\Phi\mathrm{U}$, *cf. prop.* 1 ; *alors il existe une série* G_Φ *de* $\mathrm{A}'[[\mathrm{T}]]$ *telle que l'on ait pour tout x dans* $e_\Phi\mathrm{U}$

$$\mathrm{G}_x = \mathrm{G}_\Phi.\Lambda_\Phi(x). \tag{11}$$

Démonstration. – Soit x_1 une image réciproque par Λ_Φ de l'unité de $A[[T]]$, de sorte qu'on a la décomposition

$$e_\Phi U = A[[T]].x_1 \oplus \operatorname{Ker} \Lambda_\Phi ;$$

le lemme 3 résulte des deux lemmes précédents en prenant $G_\Phi = G_{x_1}$.

4. Unités cyclotomiques.

4.1. Soient $F/\mathbf{Q}$ une extension abélienne (réelle sinon remplacer F dans les définitions suivantes par son sous-corps réel maximal) de conducteur m et u un élément de l'idéal d'augmentation de l'anneau $\mathbf{Z}[\operatorname{Gal}(F/\mathbf{Q})]$; en prolongeant l'action de $\operatorname{Gal}(F/\mathbf{Q})$ par multiplicativité, on vérifie que l'élément $N_{\mathbf{Q}(\zeta_m)/F}(1-\zeta_m)^u$ est le carré d'une unité de F. Le groupe des *unités cyclotomiques* (*) *propres* de F est formé des racines carrées des éléments précédents pour toutes les valeurs possibles de u. Le groupe des *unités cyclotomiques* (*) de F est le groupe engendré par les groupes d'unités cyclotomiques propres des sous-corps de F. Désignons par Ω_n le groupe des unités cyclotomiques propres de F_n (le sous-corps de K_n fixé par $\ker \psi$). Considérons l'intersection de U_n et de l'image de Ω_n dans $\hat{K}_n$ et notons $\bar{\Omega}_n$ sa fermeture dans U_n. On montre facilement que $e_\Phi \bar{C}_n$ est égal à $e_\Phi(\bar{\Omega}_n.\bar{\Omega}_0)$, cf. notamment [9], § 5 et § 3 formule (9) et même à $e_\Phi\bar{\Omega}_n$ si $\psi(l) \neq 1$. De plus la norme induit des surjections $e_\Phi\bar{\Omega}_m \to e_\Phi\bar{\Omega}_n$ pour $m > n > 0$; ceci montre que $e_\Phi C$ s'identifie à la limite projective des groupes $e_\Phi\bar{\Omega}_n$. A l'aide de [9] § 3 (9), on voit que le $A[[T]]$-module $e_\Phi\bar{\Omega}_n$ s'identifie si $\psi(l) \neq 1$ à

$$A[[T]]/(\omega_n) \simeq A[\operatorname{Gal}(K_n/K_0)]$$

et si $\psi(l) = 1$ à l'idéal d'augmentation de $A[\operatorname{Gal}(K_n/K_0)]$, encore isomorphe à $A[[T]]/(\omega_n/T)$. On en déduit les isomorphismes

$$(12) \quad e_\Phi C \simeq A[[T]], \quad \begin{cases} e_\Phi\bar{\Omega}_n \simeq e_\Phi(C/(\omega_n)C) & \text{si} \quad \psi(l) \neq 1 \\ e_\Phi\bar{\Omega}_n \simeq e_\Phi(C/(\omega_n/T)C) & \text{si} \quad \psi(l) = 1 \end{cases}$$

4.2. Soit r l'ordre commun du groupe multiplicatif des corps résiduels des F_n, l'élément de $\hat{K}_n$ $\theta_n(\Phi) = N_{\mathbf{Q}(\zeta_{q_0 l^n})/F_n}(1-\zeta_f.\zeta_{qln})^{s^{-n} r.e_\Phi/2}$ est dans $\bar{\Omega}_n$; de plus la famille de ces éléments, pour $n \geqslant 1$, définit un élément $\theta(\Phi)$, générateur du $A[[T]]$-module $e_\Phi C$. Par ailleurs, on a

$$\theta_n(\Phi)^{2s^n} = f_\Phi(T)^{r.e_\Phi}|_{T=\pi_n}$$

(*) Au sens de H. Hasse, cf. [9], § 2.3.

avec $f_\Phi(T) = \Pi\,(1-\zeta_f^\sigma(1+T)^{\omega(\sigma)})$ où σ parcourt $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\zeta_{q_0})F_0)$. Ceci permet de calculer $\delta_k(\theta(\Phi))$:

$$\delta_k(\theta(\Phi)) = (\dot{R}/2)\sum_{a=1}^{f}\psi_i(a)^{-1}\,\varphi\left(\left(\frac{d}{dz}\right)^k_{z=0}\log(1-\zeta_f^a(1+T))\right)$$

où R est un entier indépendant de k, premier à l si $l \neq 2$. D'où encore

$$\delta_k(\theta(\Phi)) = (R/2)\left(\frac{d}{dz}\right)^{k-1}_{z=0}\sum_{a=1}^{f}\psi_i(a)^{-1}\frac{\zeta_f^a.e^z}{\zeta_f^a e^z - 1}.$$

Utilisant l'identité $1/(U-1) = \sum_0^{f-1} U^j/(U^f-1)$, on trouve, en introduisant la somme de Gauss $\tau(\psi_i) = \sum_{a=1}^{f}\zeta_f^a\psi_i(a)^{-1}$,

$$\delta_k(\theta(\Phi)) = (R/2).\tau(\psi_i).\left(\frac{d}{dz}\right)^{k-1}_{z=0}\sum_{j=1}^{f}\frac{e^{jz}\psi_i(j)}{e^{fz}-1} = (\tau(\psi_i)R/2)\cdot\frac{B_{k},\psi_i}{k}.$$

Avec la série de Stickelberger $f(T,\psi)$, cf. [15], la proposition 3 donne

$$G_{\theta(\Phi)}(T) = -\; R\cdot\tau(\psi_i)\cdot f(\dot{T},\psi). \tag{13}$$

Nous sommes en mesure de prouver la version affaiblie suivante du théorème 1 :

THÉORÈME 1′. — *Il existe un diviseur* $f'(T,\psi)$ *de* $f(T,\psi)$ *dans* $A[[T]]$ *tel que le* $A[[T]]$*-module* $e_\Phi(U/C)$ *soit isomorphe à* $A[[T]]/(f'(\dot{T},\psi))$ *si* $\psi_1(l) \neq 1$, *ou figure dans une suite exacte*

$$0 \to A[[T]]/(\dot{T}) \to e_\Phi(U/C) \to A[[T]]/(f'(\dot{T},\psi)) \to 0$$

si $\psi_1(l) = 1$.

Démonstration. — D'après la proposition 1 et les lemmes 1 et 2, on a l'isomorphisme ou la suite exacte comme dans l'énoncé précédent en posant $f'(\dot{T},\psi) = \Lambda_\Phi(\theta(\Phi))$. Pour évaluer $f'(\dot{T},\psi)$, on utilise le lemme 3 ; ainsi $f'(\dot{T},\psi)$ divise $G_{\theta(\Phi)}(T)$. Le conducteur de ψ_i étant premier à l, $R.\tau(\psi_i)$ est une unité de A' si $l \neq 2$ et $f'(T,\psi)$ divise $f(T,\psi)$. Ce résultat est encore vrai si $l = 2$, cf. [6], § 2.8.

5. Démonstration des théorèmes 1 et 2.

5.1. Démontrons d'abord une version affaiblie du théorème 2. Soit $\mathscr{C}$ la partie de torsion de U_0.

THÉORÈME 2'. — *Le* A-*module* $e_\Phi(\mathrm{U}_n/\bar{\mathrm{C}}_n)$ *est isomorphe à*

$$\mathrm{A}[[\mathrm{T}]]/(\omega_n, f'(\dot{\mathrm{T}},\psi))$$

si $\psi(l)$ *et* $\psi_1(l)$ *sont* $\neq 1$. *Il figure dans la suite exacte*

$$0 \to \mathrm{A}[[\mathrm{T}]]/(2\omega_n/\mathrm{T}, \omega_n, f'(\dot{\mathrm{T}},\psi)) \to e_\Phi(\mathrm{U}_n/\bar{\mathrm{C}}_n) \to e_\Phi(\mathrm{U}_0/\mathscr{C}.\bar{\mathrm{C}}_0) \to 0$$

si $\psi(l) = 1$ *et*

$$0 \to \mathrm{A}[[\mathrm{T}]]/(\omega_n, \dot{\mathrm{T}}) \to e_\Phi(\mathrm{U}_n/\bar{\mathrm{C}}_n) \to \mathrm{A}[[\mathrm{T}]]/(\omega_n, f'(\dot{\mathrm{T}},\psi)) \to 0$$

si $\psi_1(l) = 1$.

Démontrons d'abord le lemme :

LEMME 4. — *Pour tout* $n \geqslant 1$, *on a un isomorphisme*

$$e_\Phi(\mathrm{V}_n/\bar{\Omega}_n) \xrightarrow{\sim} e_\Phi((\mathrm{U}/\mathrm{C})/\mathscr{I}_n(\mathrm{U}/\mathrm{C}))$$

où $\mathscr{I}_n = (\omega_n)$ *si* $\psi(l) \neq 1$ *et* $(2\omega_n/\mathrm{T},\omega_n)$ *si* $\psi(l) = 1$.

Démonstration. — D'après la proposition 2, on a une surjection de $e_\Phi \mathrm{V}_n$ dans $e_\Phi((\mathrm{U}/\mathrm{C})/\mathscr{I}_n(\mathrm{U}/\mathrm{C}))$, dont le noyau est l'image de C dans $e_\Phi \mathrm{V}_n$. On sait de plus que $e_\Phi \mathrm{C}$ est la limite projective des $e_\Phi \bar{\Omega}_m$. Comme les applications de passage $e_\Phi \bar{\Omega}_{m+1} \to e_\Phi \bar{\Omega}_m$ sont surjectives pour $m \geqslant 1$, le lemme en résulte.

Le théorème 2' résulte du théorème 1' si $\psi(l) \neq 1$ et $\psi_1(l) \neq 1$.
Si $\psi(l) = 1$, on déduit du lemme 4 la suite exacte

$$(14) \quad 0 \to e_\Phi[(\mathrm{U}/\mathrm{C})/\mathscr{I}_n(\mathrm{U}/\mathrm{C})] \to e_\Phi(\mathrm{U}_n/\bar{\mathrm{C}}_n) \to e_\Phi(\mathrm{U}_n/\mathrm{V}_n.\bar{\mathrm{C}}_n) \to 0.$$

On vérifie facilement (comparer à [2], appendice, lemmes 2 et 3) que $e_\Phi \mathrm{V}_n$ s'identifie au noyau de l'application $e_\Phi \mathrm{U}_n \to e_\Phi(\mathrm{U}_0/\mathscr{C})$ déduite de la norme, et que l'image de cette application est $e_\Phi(\mathrm{U}_0^{l^n}.\mathscr{C}/\mathscr{C})$. De même, l'image de $e_\Phi \bar{\mathrm{C}}_n = e_\Phi(\bar{\Omega}_n.\bar{\Omega}_0)$ est encore l'image de $e_\Phi \bar{\Omega}_0^{l^n} = e_\Phi \bar{\mathrm{C}}_0^{l^n}$ dans $e_\Phi(\mathrm{U}_0/\mathscr{C})$. Le groupe de droite dans (14) est donc isomorphe à $e_\Phi(\mathrm{U}_0/\mathscr{C}.\bar{\mathrm{C}}_0)$ si $n > 0$. Si $n = 0$, la suite exacte du théorème 2' se réduit à

$$0 \to e_\Phi(\mathscr{C} \to e_\Phi(\mathrm{U}_0/\bar{\mathrm{C}}_0) \to e_\Phi(\mathrm{U}_0/\mathscr{C}\bar{\mathrm{C}}_0) \to 0,$$

la série $f'(\dot{\mathrm{T}},\psi)$ étant non inversible, d'après le cas $n > 0$, cf. aussi [12].

Si $\psi_1(l) = 1$, on applique le lemme du serpent au diagramme constitué par la suite exacte du théorème 1' écrite deux fois. On utilise aussi le fait que dans $A[[T]]/(f'(\dot{T},\psi))$ la multiplication par ω_n est injective puisque le quotient $A[[T]]/(f'(\dot{T},\psi),\omega_n)$ est fini, ce qui se déduit du lemme suivant.

LEMME 5. — *L'ordre du groupe* $e_\Phi(U_n/\bar{C}_n)$ *est égal à celui de*

$$A[[T]]/(f(\dot{T},\psi),\omega_n).$$

Démonstration. — Ceci n'est qu'une reformulation de [8], théorème 2, compte tenu des calculs de [8], §6.3.

5.2. Nous pouvons maintenant prouver les théorèmes 1 et 2. Prenons $f'(T,\psi)$ comme dans le théorème 1' : c'est un diviseur de $f(T,\psi)$ qui d'après le lemme 5 et le théorème 2' a mêmes invariants λ et μ (cf. [15], chap. 7) qu'elle si $\psi_1(l) \neq 1$. Leur quotient est donc une unité de $A[[T]]$, ce qui démontre les théorèmes 1 et 2 à partir des théorèmes 1' et 2' dans ce cas. On sait en effet que si $\psi(l) = 1$, le A-module $e_\Phi(U_0/\mathscr{C}\bar{C}_0)$ est monogène ; son ordre est le même que $A/\left(\frac{1}{2}f(c-1,\psi)\right)$ d'après le lemme 5 appliqué à $n = 0$.

Si $\psi_1(l) = 1$, on sait seulement, d'après le lemme 5 et le théorème 2', que la différence des invariants λ des séries $f(T,\psi)$ et $f'(T,\psi)$ est égale à 1 : leur quotient est donc, à une unité de $A[[T]]$ près, un polynôme unitaire de degré 1. Par ailleurs, on déduit de la proposition 3 et de la construction de G_Φ (cf. démonstration du lemme 3) la nullité de $G_\Phi(c-1)$. On voit alors, en utilisant (11) et (13) que le quotient $f(\dot{T},\psi)/f'(\dot{T},\psi)$ s'annule pour $T = c - 1$, i.e. $\dot{T} = 0$. Ainsi $f(\dot{T},\psi)$ ne diffère de $\dot{T}\cdot f'(\dot{T},\psi)$ que par une unité de $A[[T]]$, ce qui achève la démonstration des théorèmes 1 et 2 à partir des théorèmes 1' et 2' lorsque $\psi_1(l) = 1$.

6. Application aux groupes de classes.

Désignons par M_∞ (resp. L_∞) la l-extension non ramifiée pour les places finies ou *infinies* premières à l (resp. pour toutes les places) maximale de K_∞. On se restreint (*) au cas $l \neq 2$ et on suppose toujours que ζ_l appartient à K et que Φ est pair. On note $\tilde{\Phi}$ (resp. $\tilde{\psi}$) le caractère de Δ défini et irréductible sur $\mathbf{Q}_l$ (resp. Ω_l) donné par $\sigma \to \omega(\sigma)\Phi(\sigma^{-1})$ (resp. $\sigma \to \omega(\sigma)\psi(\sigma^{-1})$) ; l'isomorphisme (2) est encore valable en remplaçant Φ par $\tilde{\Phi}$. En utilisant la conjugaison dans $\mathrm{Gal}(M_\infty/\mathbf{Q})$ (resp. $\mathrm{Gal}(L_\infty/\mathbf{Q})$), on sait qu'on peut considérer $\mathrm{Gal}(M_\infty/K_\infty)$ (resp. $\mathrm{Gal}(L_\infty/K_\infty)$) comme un

(*) Cf. cependant la remarque finale.

$\mathbf{Z}_l[\Delta][[\mathrm{T}]]$-module ; la structure précédente dépend du choix de γ fait au § 1. On peut donc munir, cf. (2),

$$e_\Phi \,\mathrm{Gal}(\mathrm{L}_\infty/\mathrm{K}_\infty), \quad e_{\tilde\Phi}\,\mathrm{Gal}(\mathrm{L}_\infty/\mathrm{K}_\infty) \quad \text{et} \quad e_\Phi\,\mathrm{Gal}(\mathrm{M}_\infty/\mathrm{K}_\infty)$$

de structures de $\mathrm{A}[[\mathrm{T}]]$-modules ; ce sont des $\mathrm{A}[[\mathrm{T}]]$-modules de torsion, cf. [14] théorèmes 5 et 16. Si X est un $\mathrm{A}[[\mathrm{T}]]$-module de torsion, il existe un morphisme à noyau et conoyau finis

$$\mathrm{X} \to \bigoplus_h \mathrm{A}[[\mathrm{T}]]/(h) \tag{15}$$

où h parcourt un sous-ensemble fini de $\mathrm{A}[[\mathrm{T}]]$. La série caractéristique de X est par définition le produit des séries h ; elle n'est bien définie qu'à une série inversible près, cf. par exemple [1] § 4 et [14] § 1.1. Dans [10], Greenberg pose une conjecture qui, compte-tenu de $\mu = 0$ (cf. [7]), peut s'énoncer ainsi :

CONJECTURE 1. — *L'élément* $f(\mathrm{T},\psi)$ *est une série caractéristique de*

$$e_{\tilde\Phi}\mathrm{Gal}(\mathrm{L}_\infty/\mathrm{K}_\infty).$$

Dans [3], Coates et Lichtenbaum conjecturent que pour $e_{\tilde\Phi}\mathrm{Gal}(\mathrm{L}_\infty/\mathrm{K}_\infty)$, (15) peut s'écrire avec une seule série h égale à $f(\mathrm{T},\psi)$. La conjecture principale de [2] § 5.1 est plus faible que la conjecture 1 puisque l'action de Δ y est remplacée par celle de $\mathrm{Gal}(\mathrm{K}/\mathrm{K}_{-1})$; elle est énoncée dans un cadre beaucoup plus général.

En utilisant la théorie de Kummer comme dans la démonstration du théorème 16 de [14], on obtient, cf. aussi [11], l'équivalence entre la conjecture 1 et la conjecture suivante.

CONJECTURE 2. — *L'élément* $f(\dot{\mathrm{T}},\psi)$ *est une série caractéristique de*

$$e_\Phi\mathrm{Gal}(\mathrm{M}_\infty/\mathrm{K}_\infty).$$

Désignons par E_n le groupe des unités réelles de K_n et définissons $\bar{\mathrm{E}}_n$ par le même procédé que pour $\bar{\mathrm{C}}_n$. Notons $(\mathrm{E}_n/\mathrm{C}_n)_l$ le l-sous-groupe de Sylow de $\mathrm{E}_n/\mathrm{C}_n$. On voit d'après [9] corollaire 1 du théorème 2 que $(\mathrm{E}_n/\mathrm{C}_n)_l$ a même ordre que le l-groupe des classes réelles $\mathscr{C}(\mathrm{K}_n)$ de K_n. C'était le but de [8] de démontrer que la conjecture 1 implique que la Φ-partie de $(\mathrm{E}_n/\mathrm{C}_n)_l$ a même ordre que la Φ-partie de $\mathscr{C}(\mathrm{K}_n)$ (énoncé de la conjecture de Gras relative à K_n). En passant à la limite projective il est naturel d'énoncer

CONJECTURE 3. — *Les* $\mathrm{A}[[\mathrm{T}]]$*-modules* $e_\Phi(\varprojlim(\mathrm{E}_n/\mathrm{C}_n)_l$ *et* $e_\Phi\mathrm{Gal}(\mathrm{L}_\infty/\mathrm{K}_\infty)$ *ont mêmes séries caractéristiques.*

En fait cette conjecture se ramène aux précédentes :

THÉORÈME 3. — *Les conjectures* 1, 2 *et* 3 *sont équivalentes.*

Démonstration. — Notons d'abord que $(E_n/C_n)_l$ étant fini, il s'identifie à $\bar{E}_n/\bar{C}_n$. Ceci permet d'écrire le diagramme suivant où les lignes sont les suites exactes évidentes mais vont malheureusement en sens contraire :

$$\begin{array}{l} 0 \to e_\Phi \mathrm{Gal}(M_\infty/L_\infty) \to e_\Phi \mathrm{Gal}(M_\infty/K_\infty) \to e_\Phi \mathrm{Gal}(L_\infty/K_\infty) \to 0 \\ \qquad\qquad \downarrow (*) \\ 0 \leftarrow e_\Phi \varprojlim (U_n/\bar{E}_n) \leftarrow e_\Phi(U/C) \leftarrow e_\Phi \varprojlim (\bar{E}_n/\bar{C}_n) \leftarrow 0 . \end{array}$$

Dans ce diagramme (*) est un isomorphisme déduit de la théorie du corps de classes. D'après le théorème 1, la série $f(\dot{T},\psi)$ est une série caractéristique de $e_\Phi(U/C)$. Le théorème 3 provient alors du fait général suivant : dans une suite exacte de $A[[T]]$-modules de torsion $0 \to X' \to X \to X'' \to 0$, si F', F, F'' sont respectivement des séries caractéristiques de X', X et X'', alors on a $F = F'.F''$ à une unité de $A[[T]]$ près, cf. par exemple [1], § 4, n° 5.

Remarque sur le cas $l = 2$. — Le cas $l = 2$ se traite de façon analogue, mais nécessite quelques ajustements pour l'énoncé de la conjecture 1, comparer à [8], § 7. Reprenons les hypothèses initiales : $K/\mathbf{Q}$ est une extension abélienne réelle de degré impair, $\Delta = \mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q})$. On note $\bar{\Phi}$ (resp. $\bar{\psi}$) le caractère de Δ défini par $\sigma \to \Phi(\sigma^{-1})$ (resp. $\sigma \to \psi(\sigma^{-1})$). Soient $K' = K(\zeta_4)$, Δ' son groupe de Galois sur $\mathbf{Q}$ et J l'élément de Δ' représentant la conjugaison complexe. Pour tout Δ'-module X, notons X^- le noyau de la multiplication par $1 + J$. On définit L_∞ et M_∞ comme au début du § 6 ; en remplaçant K_∞ par $K'_\infty = K'.K_\infty$, on définit de même L'_∞ et M'_∞. On peut alors énoncer

CONJECTURE 1'. — *L'élément* $f(T,\psi)$ *est une série caractéristique de* $e_{\bar{\Phi}}\, \mathrm{Gal}\,(L'_\infty/K'_\infty)^-$. *Pour chaque conjugué de* Φ *sur* $\mathbf{Q}$, *la condition analogue est vérifiée.*

On voit en reprenant la démonstration des théorèmes 3' et 4' de [8] que la conjecture 1' se ramène à la suivante :

CONJECTURE 2'. — *L'élément* $f(\dot{T},\psi)$ *est une série caractéristique de* $e_\Phi\, \mathrm{Gal}\,(M_\infty/K_\infty)$. *Pour chaque conjugué de* Φ *sur* $\mathbf{Q}$, *la condition analogue est vérifiée.*

On déduit alors, en reprenant la démonstration du théorème 3 et en appelant conjecture 3′, la conjecture 3 énoncée pour Φ et tous ses conjugués sur $\mathbf{Q}$:

THÉORÈME 3′. — *Les conjectures* 1′, 2′ *et* 3′ *sont équivalentes.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. BOURBAKI, Éléments de mathématique, Algèbre commutative, Chap. 7, Hermann, Paris, 1965.

[2] J. COATES, p-adic L-functions and Iwasawa's theory, Durham conference on Algebraic Number Theory, edited by A. Fröhlich, Academic Press, Londres, 1977.

[3] J. COATES et S. LICHTENBAUM, On l-adic zeta functions, *Ann. of Math.*, 98 (1973), 498-550.

[4] J. COATES et A. WILES, On p-adic L-functions and elliptic units, *J. Austral. Math. Soc.*, series A 26 (1978), 1-25.

[5] R. COLEMAN, Some modules attached to Lubin-Tate groups, à paraître.

[6] B. FERRERO, Iwasawa invariants of abelian number fields, *Math. Ann.*, 234 (1978), 9-24.

[7] B. FERRERO et L. WASHINGTON, The Iwasawa invariant μ_p vanishes for abelian number fields, *Ann. of Math.*, à paraître.

[8] R. GILLARD, Unités cyclotomiques, unités semi-locales et $\mathbf{Z}_l$-extensions, *Ann. Inst. Fourier*, t. 29, fasc. 1 (1979), 49-79.

[9] R. GILLARD, Remarques sur les unités cyclotomiques et les unités elliptiques, *J. of Numbers Theory*, 11, 1 (1979), 21-48.

[10] R. GREENBERG, On p-adic L-functions and cyclotomic fields, *Nagoya Math. J.*, 56 (1974), 61-77.

[11] R. GREENBERG, On p-adic L-functions and cyclotomic fields II, *Nagoya Math. J.*, 67 (1977), 139-158.

[12] R. GREENBERG, On 2-adic L-functions and cyclotomic invariants, *Math. Zeit.*, 159 (1978), 37-45.

[13] K. IWASAWA, On some modules in the theory of cyclotomic fields, *J. Math. Soc. Japan*, vol. 16, n° 1, (1964), 42-82.

[14] K. IWASAWA, On $\mathbf{Z}_l$-extensions of algebraic number fields, *Ann. of Math.*, 98 (1973), 246-326.

[15] K. IWASAWA, Lectures on p-adic L-functions, *Ann. Math. Studies*, 74, Princeton Univ. Press, 1972.

[16] S. LANG, Cyclotomic fields, Springer Verlag, 1978.

Manuscrit reçu le 26 mars 1979
révisé le 16 avril 1979.

Roland GILLARD,

Université Grenoble I
Laboratoire de Mathématiques Pures
Institut Fourier
B.P. 116
38402 St-Martin d'Hères Cedex.