ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

PIERRE-PAUL GRIVEL

# Formes différentielles et suites spectrales

*Annales de l'institut Fourier*, tome 29, nº 3 (1979), p. 17-37

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1979__29_3_17_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
29, 3 (1979), 17-37

# FORMES DIFFERENTIELLES ET SUITES SPECTRALES

par Pierre-Paul GRIVEL

La théorie de Sullivan de l'homotopie rationnelle nécessite l'introduction de certaines formes différentielles définies sur un complexe simplicial. Plusieurs auteurs ont démontré, plus ou moins récemment, un théorème de de Rham, à savoir que la cohomologie de l'algèbre différentielle commutative engendrée par ces formes est isomorphe à la cohomologie singulière du complexe.

L'objet de cet article est de montrer que l'on peut aussi obtenir avec ces algèbres de formes différentielles, une suite spectrale (théorème 5.1) analogue à celle de Serre. On donne ainsi une solution effective au problème des cochaînes commutatives tel que Thom l'avait formulé (voir [11] exposé 17, p. 4). D'autre part, on peut appliquer cette suite spectrale à la théorie du modèle minimal. On montre (théorème 6.4) que si on connaît le modèle d'une fibration, alors la fibre du modèle donne le modèle de la fibre.

Pour des raisons de fonctorialité il est convenable de travailler dans la catégorie des ensembles simpliciaux.

Dans les § 1 et 2, on définit la notion de faisceaux sur un ensemble simplicial et celle de forme différentielle sur un ensemble simplicial à valeurs dans un tel faisceau.

Les § 3, 4 et 5 sont consacrés à la construction de la suite spectrale. Celle-ci est obtenue en filtrant une algèbre de formes différentielles définies sur l'ensemble des bisimplexes d'une application. (L'idée d'introduire les bisimplexes d'une application est due initialement à Dress (voir [2])).

Dans le § 6 on donne une application de la suite spectrale à la théorie du modèle minimal.

Enfin dans le § 7 on montre que l'on peut aussi obtenir la suite spectrale d'Eilenberg – Moore en utilisant ces algèbres de formes différentielles. Un résultat analogue, obtenu par une méthode un peu différente, se trouve dans [18].

L'auteur a bénéficié largement de conversations avec A. Haefliger lors de l'élaboration de ce travail.

## 1. Faisceaux sur un ensemble simplicial.

Toutes les notions que nous utiliserons concernant les ensembles simpliciaux se trouvent dans [4] et [9] ; nous adopterons les notations de [4] à une exception près : nous désignerons ici par $\underline{\mathrm{Ord}}$ la catégorie dont les objets sont les suites $[n]$ et dont les morphismes sont les applications croissantes.

1.1. Soit X un ensemble simplicial. Comme il y a une bijection entre l'ensemble $X_p$ des $p$-simplexes de X et l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\underline{\Delta \mathrm{E}ns}}(\Delta[p]\,;X)$, on peut considérer X comme une sous-catégorie pleine $\underline{X}$ de la catégorie $\underline{\Delta \mathrm{E}ns}/X$.

A une application simpliciale $f : X \longrightarrow Y$ est alors associé un foncteur $\underline{f} : \underline{X} \longrightarrow \underline{Y}$.

1.2. Un faisceau $\mathcal{F}$ sur X à valeurs dans une catégorie $\underline{C}$ est un foncteur contravariant de $\underline{X}$ dans $\underline{C}$.

On note $\mathcal{F}(x)$ l'objet de $\underline{C}$ associé à $x \in X$ par $\mathcal{F}$ ; on note $\mathcal{F}(\alpha\,;x) : \mathcal{F}(\alpha^* x) \longrightarrow \mathcal{F}(x)$ le morphisme de $\underline{C}$ associé par $\mathcal{F}$ au couple $(\alpha\,;x)$ où $\alpha : [p] \longrightarrow [q]$ est une application de $\underline{\mathrm{Ord}}$ et $x \in X_q$.

Un morphisme de faisceaux est une transformation naturelle de foncteurs.

1.3. Si $f : X \longrightarrow Y$ est une application simpliciale et si $\mathcal{F}$ est un faisceau sur Y, le faisceau image réciproque $f^*\mathcal{F}$ est le faisceau $\mathcal{F} \circ \underline{f}$.

Si $\underline{C}$ est une catégorie abélienne, on définit d'une façon évidente la notion de suite exacte de faisceaux sur X.

1.4. Considérons le cas où $\mathcal{F}$ est un faisceau sur X à valeurs dans la catégorie $\underline{\Delta C}$ des objets simpliciaux de $\underline{C}$. Pour chaque simplexe $x \in X$, $\mathcal{F}(x)$ est un objet simplicial de $\underline{C}$ ; pour chaque application $\alpha : [p] \longrightarrow [q]$ dans $\underline{\mathrm{Ord}}$ et pour chaque simplexe $x \in X_q$, $\mathcal{F}(\alpha ; x) : \mathcal{F}(\alpha^* x) \longrightarrow \mathcal{F}(x)$ est un morphisme simplicial de $\underline{C}$.

Alors une section $s$ de $\mathcal{F}$ consiste à associer à chaque $p$-simplexe $x \in X$, pour chaque entier $p \geq 0$, un élément $s(x) \in \mathcal{F}(x)_p$ de façon que pour toute application $\alpha : [p] \longrightarrow [q]$ dans $\underline{\mathrm{Ord}}$ et tout simplexe $x \in X_q$ on ait $\mathcal{F}(\alpha ; x)(s(\alpha^* x)) = \alpha^* s(x)$. En particulier si $\mathcal{F}$ est un faisceau constant sur X, c'est-à-dire si pour chaque simplexe $x \in X$ on a $\mathcal{F}(x) = M$ où M est un objet de $\underline{\Delta C}$, alors une section est simplement une application simpliciale de X dans M.

1.5. Considérons encore le cas où $\mathcal{L}$ est un faisceau sur X à valeurs dans la catégorie $\underline{Ab}$ des groupes abéliens et supposons que pour tout entier $p \geq 1$, pour tout simplexe $x \in X_p$, et pour tout $0 \leq i \leq p$, les morphismes de groupe abélien $\mathcal{L}(\partial_i ; x) : \mathcal{L}(d_i x) \longrightarrow \mathcal{L}(x)$ soient des isomorphismes. On dit alors que $\mathcal{L}$ est un système de coefficients local sur X (voir [15]). Dans ces conditions on peut définir, pour chaque 0-simplexe $x \in X$, une action du groupe fondamental $\pi_1(X ; x)$ sur le groupe abélien $\mathcal{L}(x)$. Si cette action est triviale on dit que $\mathcal{L}$ est un système de coefficients simple ; dans ces conditions, et si de plus X est connexe, alors tous les groupes $\mathcal{L}(x)$ sont canoniquement isomorphes.

## 2. Formes différentielles sur un ensemble simplicial.

2.1. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau sur un ensemble simplicial X, à valeurs dans la catégorie $\underline{\mathrm{DGV}}$ des $k$-espaces vectoriels différentiels gradués ($k$ désigne un corps de caractéristique 0).

Les faisceaux que nous considérerons plus loin (cf. remarque 4.5) vérifieront la condition suivante que nous supposons satisfaite dès à présent : il existe un système projectif $\{\mathcal{F}_j\}_{j \in J}$ de faisceaux sur X tel que $\mathcal{F} = \varprojlim_j \mathcal{F}_j$.

2.2. Désignons par $\Omega(\Delta)$ l'algèbre différentielle graduée simpliciale dont la composante de dimension $p$ est l'algèbre différentielle graduée $\Omega(\Delta^p)$ des formes différentielles sur le simplexe géométrique $\Delta^p$ dont les coefficients sont les polynômes sur $k$ en les coordonnées barycentriques de $\Delta^p$. On définit un faisceau $\Omega(\Delta\,;\mathcal{F})$ sur X à valeurs dans la catégorie $\underline{\Delta\mathrm{DGV}}$ de la façon suivante : à chaque simplexe $x \in \mathrm{X}$ on associe l'espace vectoriel différentiel gradué simplicial $\Omega(\Delta)\,\hat{\otimes}\,\mathcal{F}(x)$ dont la composante de dimension $p$ est l'espace vectoriel différentiel gradué

$$\Omega(\Delta^p)\,\hat{\otimes}\,\mathcal{F}(x) = \varprojlim_j\,(\Omega(\Delta^p) \otimes \mathcal{F}_j(x))\,.$$

Si $d'$ est la différentielle de de Rham de $\Omega(\Delta^p)$ et si $d''$ est la différentielle de $\mathcal{F}(x)$, alors sur $\Omega(\Delta^p)\,\hat{\otimes}\,\mathcal{F}(x)$ on a défini la différentielle $\overline{d} = d' \,\hat{\otimes}\, 1 + 1 \,\hat{\otimes}\, d''$.

Un morphisme $u : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ de faisceaux sur X induit un morphisme, noté $1 \,\hat{\otimes}\, u$, de $\Omega(\Delta\,;\mathcal{F})$ dans $\Omega(\Delta\,;\mathcal{G})$.

Si $\mathcal{F}$ prend ses valeurs dans la catégorie $\underline{\mathrm{DGA}}$ des $k$-algèbres différentielles graduées commutatives alors $\Omega(\Delta\,;\mathcal{F})$ prend ses valeurs dans la catégorie $\underline{\Delta\mathrm{DGA}}$.

2.3. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau sur l'ensemble simplicial X à valeurs dans la catégorie $\underline{\mathrm{DGV}}$.

Une section du faisceau $\Omega(\Delta\,;\mathcal{F})$ s'appelle une forme différentielle sur X à valeurs dans $\mathcal{F}$.

L'ensemble de ces sections forme un $k$-espace vectoriel $\mathrm{A}(\mathrm{X}\,;\mathcal{F})$ qui s'identifie à un sous-espace de $\prod_{\substack{x \in \mathrm{X}_p \\ p \geqslant 0}} (\Omega(\Delta^p)\,\hat{\otimes}\,\mathcal{F}(x))$. On note $\mathrm{A}^r(\mathrm{X}\,;\mathcal{F}^s)$ le sous-espace des formes de bidegré $(r,s)$ c'est-à-dire des formes $\omega \in \mathrm{A}(\mathrm{X}\,;\mathcal{F})$ telles que, pour tout simplexe $x \in \mathrm{X}_p$, pour tout $p \geqslant 0$, on a $\omega(x) \in \Omega^r(\Delta^p)\,\hat{\otimes}\,\mathcal{F}^s(x)$. La différentielle $\overline{d}$ induit une différentielle $d$ sur $\mathrm{A}(\mathrm{X}\,;\mathcal{F})$ définie en posant $(d\omega)(x) = \overline{d}\omega(x)$.

Si $\mathcal{F}$ prend ses valeurs dans la catégorie $\underline{\mathrm{DGA}}$ alors $\mathrm{A}(\mathrm{X}\,;\mathcal{F})$ a une structure de $k$-algèbre différentielle graduée commutative. Enfin $\mathrm{A}(\;\,;\mathcal{F})$ est un foncteur contravariant sur la catégorie $\underline{\Delta\mathrm{E}ns}$.

2.4. *Cas particulier* : Supposons que $\mathcal{F}$ est le faisceau constant M (M est un $k$-espace vectoriel homogène de degré 0 avec différentielle nulle et on suppose que $\mathcal{F}_j = \mathrm{M}$ pour tout $j \in \mathrm{J}$). Alors une forme différentielle sur X à valeurs dans M est simplement une application simpliciale de X dans $\Omega(\Delta) \otimes \mathrm{M}$. On pose $\mathrm{A}(\mathrm{X}\,;\mathrm{M}) = \mathrm{Hom}_{\underline{\Delta \mathrm{E}ns}}(\mathrm{X}\,;\Omega(\Delta) \otimes \mathrm{M})$ ; en particulier on écrit A(X) au lieu de $\mathrm{A}(\mathrm{X}\,;k)$. On retrouve ainsi la définition habituelle des formes différentielles sur un ensemble simplicial (voir par exemple [1]).

On a un théorème de de Rham simplicial avec coefficients M : l'application linéaire de A(X ; M) dans le complexe des cochaînes simpliciales C(X ; M) définie par intégration sur les simplexes induit un isomorphisme en cohomologie. La démonstration est analogue au cas $\mathrm{M} = k$ qui est traité dans [1]. (Ce dernier résultat est encore vrai si à la place d'un faisceau constant M on prend un système de coefficients local $\mathcal{L}$).

Si I est une partie finie de l'ensemble des simplexes de X, notons $\mathrm{X}^{\mathrm{I}}$ le sous-ensemble simplicial de X engendré par I ; on a $\mathrm{X} = \varinjlim_{\mathrm{I}} \mathrm{X}^{\mathrm{I}}$. On en déduit que $\mathrm{A}(\mathrm{X}\,;\mathrm{M}) = \mathrm{A}(\mathrm{X}) \hat{\otimes} \mathrm{M}$ où on a posé $\mathrm{A}(\mathrm{X}) \hat{\otimes} \mathrm{M} = \varprojlim_{\mathrm{I}} (\mathrm{A}(\mathrm{X}^{\mathrm{I}}) \otimes \mathrm{M})$. De plus en utilisant le théorème de de Rham et en remarquant que l'espace vectoriel d'homologie $\mathrm{H}_*(\mathrm{X}^{\mathrm{I}}\,;k)$ est de dimension finie, on voit que $\mathrm{H}^*(\mathrm{A}(\mathrm{X}\,;\mathrm{M})) = \mathrm{H}^*(\mathrm{A}(\mathrm{X})) \hat{\otimes} \mathrm{M}$.

2.5. Revenons au cas général et remarquons que A(X ; ) est un foncteur sur la catégorie des faisceaux sur X.

On peut alors vérifier, par calculs directs et en utilisant la propriété d'extension des formes différentielles définies sur le bord d'un simplexe (voir [1] ou [6]) que ce foncteur est exact dans le sens suivant :

PROPOSITION. – *Si* $0 \longrightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{u} \mathcal{B} \xrightarrow{v} \mathcal{C} \longrightarrow 0$ *est une suite exacte de faisceaux sur* X *telle que la suite de faisceaux simpliciaux* $0 \longrightarrow \Omega(\Delta\,;\mathcal{A}) \xrightarrow{1 \hat{\otimes} u} \Omega(\Delta\,;\mathcal{B}) \xrightarrow{1 \hat{\otimes} v} \Omega(\Delta\,;\mathcal{C}) \longrightarrow 0$ *soit exacte, alors la suite* $0 \longrightarrow \mathrm{A}(\mathrm{X}\,;\mathcal{A}) \xrightarrow{u_*} \mathrm{A}(\mathrm{X}\,;\mathcal{B}) \xrightarrow{v_*} \mathrm{A}(\mathrm{X}\,;\mathcal{C}) \longrightarrow 0$ *est exacte.*

2.6. En particulier si $\mathcal{F}$ est un faisceau sur X à valeurs dans la catégorie $\underline{\text{DGV}}$, considérons les faisceaux $\mathcal{Z}^s = \text{Ker}(d'' : \mathcal{F}^s \longrightarrow \mathcal{F}^{s+1})$, $\mathcal{B}^s = \text{I}m(d'' : \mathcal{F}^{s-1} \longrightarrow \mathcal{F}^s)$ et $\mathcal{H}^s(\mathcal{F}) = \mathcal{Z}^s/\mathcal{B}^s$. Supposons que les trois suites exactes évidentes (voir [5] p. 165) que l'on peut écrire avec ces faisceaux vérifient les hypothèses de la proposition. Dans ces conditions on a

COROLLAIRE. – $H^s(A(X\,;\mathcal{F})) = A(X\,;\mathcal{H}^s(\mathcal{F}))$ *(où* $H^s(A(X\,;\mathcal{F}))$ *est la cohomologie de* $A(X\,;\mathcal{F})$ *calculée avec la différentielle* $1 \hat{\otimes} d''$).

## 3. Les bisimplexes d'une application.

A une application simpliciale surjective $f : E \longrightarrow B$ on va associer un ensemble bisimplicial dont la cohomologie sera isomorphe à celle de E. C'est une filtration de l'algèbre des formes différentielles sur cet ensemble bisimplicial qui induira une suite spectrale pour $f$. Nous commençons par décrire brièvement la construction des formes différentielles sur un ensemble bisimplicial, qui généralise celle des formes différentielles sur un ensemble simplicial.

3.1. Considérons l'algèbre différentielle graduée bisimpliciale $\Omega(\Delta \times \Delta)$ dont la composante de bidimension $(p\,;q)$ est l'algèbre différentielle graduée $\Omega(\Delta^p \times \Delta^q)$ des formes différentielles sur $\Delta^p \times \Delta^q$ dont les coefficients sont des polynômes sur $k$ en les coordonnées barycentriques de $\Delta^p$ et $\Delta^q$. Cette algèbre est bigraduée car on a $\Omega(\Delta^p \times \Delta^q) = \Omega(\Delta^p) \otimes \Omega(\Delta^q)$.

Soit X un ensemble bisimplicial.

Une forme différentielle sur X est une application bisimpliciale $\omega$ de X dans $\Omega(\Delta \times \Delta)$.

La différentielle $d$ d'une telle forme, ainsi que le produit de deux telles formes, se définissent d'une façon évidente ; on pose, pour $x \in X_{pq}$,

$$(d\omega)(x) = (d' \otimes 1 + 1 \otimes d')\,\omega(x)$$

(où $d'$ est la différentielle de de Rham de $\Omega(\Delta^p)$, resp. $\Omega(\Delta^q)$). On note A(X) l'algèbre différentielle graduée des formes différentielles sur X et on remarque que A( ) est un foncteur contravariant sur la catégorie $\underline{\Delta^2 \text{E}ns}$ des ensembles bisimpliciaux. De plus ce foncteur est bigradué.

Le théorème de de Rham bisimplicial est encore vrai : l'application linéaire de $A(X)$ dans le complexe simple $C(X)$, associé au complexe double donné par $X$, définie par intégration sur le produit des simplexes, induit un isomorphisme en cohomologie. La démonstration est analogue à celle du théorème de de Rham simplicial une fois que l'on a remarqué qu'on a une propriété d'extension pour les formes différentielles définies sur le bord du produit de deux simplexes (voir [6]).

3.2. Soit $X$ un ensemble simplicial ; on peut lui associer d'une manière naturelle un ensemble bisimplicial $\beta X$ : la composante de bidimension $(p\,;q)$ de $\beta X$ est l'ensemble $X_p$ pour tout $q \geqslant 0$ ; les opérateurs horizontaux sont ceux de $X$, les opérateurs verticaux sont tous l'identité.

On a un isomorphisme $A(\beta X) = A(X)$.

3.3. Soit maintenant $f : E \longrightarrow B$ une application simpliciale surjective. On définit l'ensemble bisimplicial $S(f)$ dont la composante de bidimension $(p\,;q)$ est l'ensemble $S_{pq}(f)$ des couples $(w\,;u)$ d'applications simpliciales telles que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{tikzcd} \Delta[p] \times \Delta[q] \arrow[r, "w"] \arrow[d, "pr"'] & E \arrow[d, "f"] \\ \Delta[p] \arrow[r, "u"'] & B \end{tikzcd}$$

Une application $(\alpha\,;\beta) : [p] \times [q] \longrightarrow [p'] \times [q']$ dans la catégorie $\underline{\mathrm{Ord}} \times \underline{\mathrm{Ord}}$ donne une application

$$\alpha^* \times \beta^* : S_{p'q'}(f) \longrightarrow S_{pq}(f)$$

définie en posant $(\alpha^* \times \beta^*)(w\,;u) = (w \circ (\alpha^* \times \beta^*)\,; u \circ \alpha^*)$.

On remarquera que la définition de l'ensemble bisimplicial $S(f)$ est fonctorielle par rapport aux changements de base. Si $g : B' \longrightarrow B$ est une application simpliciale et si $f'$ est le pull-back de $f$ par $g$ on a une application bisimpliciale $\overline{g} : S(f') \longrightarrow S(f)$.

On notera enfin que si l'on fixe un des indices de $S(f)$ on obtient un ensemble simplicial ; on peut donc considérer $S(f)$ comme un objet simplicial de la catégorie des ensembles simpliciaux.

**3.4.** Pour chaque entier $q \geqslant 0$ la projection $\Delta[p] \times \Delta[q] \longrightarrow \Delta[p]$ induit une application simpliciale $a._q : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{S}._q(f)$ qui est une équivalence d'homotopie ; en particulier $a._0$ est un isomorphisme de E sur $\mathrm{S}._0(f)$. Ces applications donnent naissance à une application bisimpliciale $a : \beta\mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{S}(f)$.

De même les applications simpliciales $p._q : \mathrm{S}._q(f) \longrightarrow \mathrm{B}$ définies en posant $p._q(w\,; u) = u$, donnent naissance à une application bisimpliciale $p : \mathrm{S}(f) \longrightarrow \beta\mathrm{B}$.

Ces différentes applications rendent commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{S}(f) \arrow[dr, "p"'] & & \beta\mathrm{E} \arrow[ll, "a"'] \arrow[dl, "\beta f"] \\ & \beta\mathrm{B} & \end{tikzcd}$$

**3.5.** Proposition. – *L'application bisimpliciale* $a : \beta\mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{S}(f)$ *induit un isomorphisme* $\mathrm{H}(a) : \mathrm{H}^*(\beta\mathrm{E}\,; k) \longrightarrow \mathrm{H}^*(\mathrm{S}(f)\,; k)$.

*Démonstration.* – voir [2].

**3.6.** Appliquons le foncteur A au diagramme du No 3.4. Posons $\mathrm{A}(f) = \mathrm{A}(\mathrm{S}(f))$. Compte tenu de 3.2 on a un diagramme commutatif dans la catégorie <u>DGA</u>

$$\begin{tikzcd} \mathrm{A}(f) \arrow[rr, "a^*"] & & \mathrm{A}(\mathrm{E}) \\ & \mathrm{A}(\mathrm{B}) \arrow[ul, "p^*"] \arrow[ur, "f^*"'] & \end{tikzcd}$$

La proposition 3.5 et le théorème de de Rham bisimplicial entraînent que $a^*$ est un quasi-isomorphisme, c'est-à-dire que $a^*$ induit un isomorphisme en cohomologie.

## 4. Le système de coefficients.

Etant donné une application simpliciale surjective $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{B}$ on va construire un faisceau sur B, qui sera un système de coefficients local lorsque l'on prendra pour $f$ une fibration. Ce faisceau est défini à partir de l'ensemble des simplexes de $f$ qui sont au-dessus d'un simplexe de B.

4.1. Soit $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{B}$ une application simpliciale surjective et considérons B comme une catégorie $\underline{\mathrm{B}}$ (cf. 1.1). On définit un foncteur

$$\mathrm{F} : \underline{\mathrm{B}} \longrightarrow \underline{\Delta \mathrm{E}ns}$$

en posant, pour tout simplexe $u \in \mathrm{B}_p$, pour tout $p \geqslant 0$, et pour tout $q \geqslant 0$, $\mathrm{F}_q(u) = \{w \mid (w\,;u) \in \mathrm{S}_{pq}(f)\}$.

Si $\alpha : [p] \longrightarrow [p']$ est une application dans $\underline{\mathrm{Ord}}$ et si $u \in \mathrm{B}_{p'}$, alors $\mathrm{F}(\alpha\,;u)$ est l'application simpliciale de $\mathrm{F}(u)$ dans $\mathrm{F}(\alpha^* u)$ définie en posant $\mathrm{F}(\alpha\,;u)(w) = w \circ (\alpha \times 1_{\Delta[q]})$ si $w \in \mathrm{F}_q(u)$. La composition de foncteurs

$$\underline{\mathrm{B}} \xrightarrow{\mathrm{F}} \underline{\Delta \mathrm{E}ns} \xrightarrow{\mathrm{A}} \underline{\mathrm{DGA}}$$

définit un faisceau $\mathcal{F}$ sur B à valeurs dans la catégorie $\underline{\mathrm{DGA}}$ (cf. 1.2).

4.2. Pour chaque entier $s \geqslant 0$ considérons le faisceau $\mathcal{H}^s(\mathcal{F})$ sur B à valeurs dans la catégorie $\underline{\mathrm{A}b}$ défini au No 2.6.

THEOREME. — *Si* $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{B}$ *est une fibration de Kan (voir* [9] p. 14 ss) *alors* $\mathcal{H}^s(\mathcal{F})$ *est un système de coefficients local sur* B.

*Démonstration.* — Remarquons que si $\varphi$, $\psi : \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{Y}$ sont deux applications simpliciales homotopes, les morphismes $\varphi^*$, $\psi^* : \mathrm{A(Y)} \longrightarrow \mathrm{A(X)}$ sont égaux sur la cohomologie. Alors le théorème est une conséquence immédiate du résultat suivant.

4.3. PROPOSITION. — *Si* $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{B}$ *est une fibration de Kan, les applications simpliciales* $\mathrm{F}(\partial_i\,;u)$ *sont des équivalences d'homotopie.*

*Démonstration.* — Pour fixer les idées traitons le cas $i = 0$ et pour simplifier les notations posons $\lambda = \mathrm{F}(\partial_0\,;u) : \mathrm{F}(u) \longrightarrow \mathrm{F}(d_0 u)$ où $u \in \mathrm{B}_p$. La proposition résulte alors du lemme suivant :

4.4. LEMME. — *Il existe une application simpliciale* $\mu : \mathrm{F}(d_0 u) \longrightarrow \mathrm{F}(u)$ *telle que* $\lambda \circ \mu = 1_{\mathrm{F}(d_0 u)}$.

*L'application simpliciale* $k = \mu \circ \lambda : \mathrm{F}(u) \longrightarrow \mathrm{F}(u)$ *est homotope à* $1_{\mathrm{F}(u)}$.

*Démonstration.* – L'application $\mu$ se construit par récurrence sur la dimension des simplexes en utilisant le théorème 6.4 du chapitre I de [9]. L'homotopie $h : \mathrm{F}(u) \times \Delta[1] \longrightarrow \mathrm{F}(u)$ entre $k$ et $1_{\mathrm{F}(u)}$ se construit d'une manière analogue.

4.5. *Remarque.* – Soit I une partie finie de l'ensemble des bisimplexes de $\mathrm{S}(f)$ et notons $\mathrm{S}(f)^{\mathrm{I}}$ le sous-ensemble bisimplicial de $\mathrm{S}(f)$ engendré par I. On a $\mathrm{S}(f) = \varinjlim_{\mathrm{I}} \mathrm{S}(f)^{\mathrm{I}}$.

Le foncteur F introduit dans 4.1 est la limite inductive des foncteurs $\mathrm{F}^{\mathrm{I}} : \underline{\mathrm{B}} \longrightarrow \underline{\Delta \mathrm{E}ns}$ définis de la façon suivante : à tout simplexe $u \in \mathrm{B}_p$, pour tout $p \geqslant 0$, on associe l'ensemble simplicial $\mathrm{F}^{\mathrm{I}}(u)$ dont la composante de dimension $q$ est l'ensemble $\mathrm{F}^{\mathrm{I}}_q(u) = \{w \mid (w\,;u) \in \mathrm{S}_{pq}(f)^{\mathrm{I}}\}$.

En composant le foncteur $\mathrm{F}^{\mathrm{I}}$ avec le foncteur A on obtient un faisceau $\mathcal{F}_{\mathrm{I}}$ sur B à valeurs dans la catégorie $\underline{\mathrm{DGA}}$. On a alors $\mathcal{F} = \varprojlim_{\mathrm{I}} \mathcal{F}_{\mathrm{I}}$.

On peut maintenant appliquer les constructions de 2.3 pour définir l'algèbre $\mathrm{A}(\mathrm{B}\,;\mathcal{F})$ des formes différentielles sur B à valeurs dans ce faisceau $\mathcal{F}$. C'est dans le but de montrer que cette algèbre est isomorphe au terme $\mathrm{E}_0$ d'une certaine suite spectrale que l'on a dû introduire le produit tensoriel complété pour la définir.

## 5. La suite spectrale d'une fibration.

Ce paragraphe est consacré à la construction d'une suite spectrale analogue à celle de Serre (voir [13]), mais obtenue à partir d'une algèbre de cochaînes commutatives. Nous n'insistons pas sur le fait que les corollaires immédiats de la suite spectrale de Serre sont encore vrais dans notre cas.

5.1. THEOREME. – *Soit* $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{B}$ *une application simpliciale surjective.*

a) *Il existe une k-algèbre différentielle graduée* $A(f)$, *un quasi-isomorphisme* $a^* : A(f) \longrightarrow A(E)$ *et un morphisme* $p^*$ : $A(B) \longrightarrow A(f)$, *qui rendent commutatif le diagramme suivant*

$$\begin{tikzcd} A(f) \arrow[rr, "a^*"] & & A(E) \\ & A(B) \arrow[ul, "p^*"] \arrow[ur, "f^*"'] & \end{tikzcd}$$

b) *Il existe une filtration de l'algèbre* $A(f)$ *induisant une suite spectrale du premier quadrant qui converge vers* $H^*(A(E))$. *Les termes* $E_i$ $(i = 0, 1, 2)$ *sont donnés par*

$$E_0^{rs} = A^r(B\,; \mathscr{F}^s)$$

$$E_1^{rs} = A^r(B\,; \mathcal{H}^s(\mathscr{F}))$$

$$E_2^{rs} = H^r(A(B\,; \mathcal{H}^s(\mathscr{F})))$$

*où* $\mathscr{F}$ *est le faisceau sur* B *à valeurs dans la catégorie* <u>DGA</u> *défini au N° 4.1.*

*Cette suite spectrale est multiplicative et naturelle par rapport aux morphismes de changement de base.*

c) *Si* $f$ *est une fibration de Kan,* $\mathcal{H}^s(\mathscr{F})$ *est le système de coefficients local sur* B *qui associe à chaque point (un* 0*-simplexe et ses dégénérés) de* B *la cohomologie de la fibre de* $f$ *au-dessus de ce point.*

d) *Si de plus* B *est connexe et si le système de coefficients* $\mathcal{H}^s(\mathscr{F})$ *est simple, on a*

$$E_2^{rs} = H^r(A(B)) \hat{\otimes} H^s(A(F))$$

*où* F *est la fibre de* $f$.

*Démonstration.* – La partie a) du théorème résulte de 3.6 ; la partie c) résulte de 4.2.

Démontrons la partie b). Disons qu'un élément $\omega \in A(f)$ est de filtration $n$ si pour tout bisimplexe $(w\,; u) \in S_{pq}(f)$ on a $\omega(w\,; u) \in \bigoplus_{r \geqslant n} \Omega^r(\Delta^p) \otimes \Omega(\Delta^q)$ ; autrement dit on considère la première filtration du bicomplexe $A^{*,*}(f)$ et la suite spectrale qu'elle induit (voir [10] chap. XI, § 6) ; on a donc $E_0^{rs} = A^{r,s}(f)$.

D'après la remarque 4.5 on peut considérer l'algèbre $A(B\,;\mathcal{F})$ des formes différentielles sur $B$ à valeurs dans $\mathcal{F}$, où $\mathcal{F}$ est le faisceau sur $B$ défini au N° 4.1.

On définit une paire de morphismes, inverses l'un de l'autre,

$$A^r(B\,;\mathcal{F}^s) \underset{\psi}{\overset{\Phi}{\rightleftarrows}} A^{r,s}(f)$$

de la façon suivante : soit $\omega \in A^r(B\,;\mathcal{F}^s)$ ; si $u \in B_p$ on a $\omega(u) \in \Omega^r(\Delta^p) \hat{\otimes} \mathcal{F}^s(u)$ ; mais par 4.1, et 2.4 on a

$$\Omega^r(\Delta^p) \hat{\otimes} \mathcal{F}^s(u) = \Omega^r(\Delta^p) \hat{\otimes} A^s(F(u)) = A^s(F(u)\,;\Omega^r(\Delta^p))\,;$$

alors $\Phi(\omega)$ est l'application bisimpliciale définie en posant $\Phi(\omega)(w\,;u) = \omega(u)(w)$ où $(w\,;u) \in S_{pq}(f)$.

Maintenant soit $\omega \in A^{r,s}(f)$ ; si $u \in B_p$ alors $\psi(\omega)(u)$ s'identifie à l'application simpliciale définie en posant

$$\psi(\omega)(u)(w) = \omega(w\,;u) \quad \text{où} \quad w \in F_q(u).$$

La différentielle $d_0$ étant induite par la deuxième différentielle du bicomplexe $A^{**}(f)$, elle s'identifie par l'isomorphisme $\psi$ à la différentielle $1 \hat{\otimes} d$ du complexe $A(B\,;\mathcal{F})$. On a donc

$$E_1^{rs} = H^s(A^r(B\,;\mathcal{F})\,;\,1 \hat{\otimes} d).$$

Mais compte tenu de 2.4 on est dans les conditions où on peut appliquer le corollaire 2.6. Donc $E_1^{rs} = A^r(B\,;\mathcal{H}^s(\mathcal{F}))$. Par cet isomorphisme la différentielle $d_1$ s'identifie à la différentielle $d \hat{\otimes} 1$ du complexe $A(B\,;\mathcal{H}^s(\mathcal{F}))$ ; donc $E_2^{rs} = H^r(A(B\,;\mathcal{H}^s(\mathcal{F})))$.

Démontrons enfin la partie d) du théorème. Les hypothèses impliquent que $\mathcal{H}^s(\mathcal{F})$ est le faisceau constant $H^s(A(F))$ où $F$ est la fibre de $f$ au-dessus d'un point de $B$ ; alors d'après 2.4 on a $H^r(A(B\,;H^s(A(F)))) = H^r(A(B)) \hat{\otimes} H^s(A(F))$, le produit tensoriel étant complété relativement aux parties finies de l'ensemble des simplexes de $B$.

## 6. Le modèle d'une fibration.

Comme application du théorème précédent nous montrons que si on connaît le modèle minimal d'une fibration, alors la fibre du modèle est le modèle minimal de la fibre. On en déduit ensuite que le modèle d'un pull-back est le pull-back du modèle. On suppose dans ce paragraphe que $k = \mathbf{Q}$.

**6.1.** Soit $F \xrightarrow{\iota} E \xrightarrow{f} B$ une fibration de Kan d'ensembles simpliciaux pointés telle que F est la fibre de $f$ au-dessus du point-base de B.

On suppose dans toute la suite de ce paragraphe que E, B et F sont connexes, que B est simplement connexe et que $H^*(B\,;\mathbf{Q})$ ou $H^*(F\,;\mathbf{Q})$ sont de dimension finie en chaque degré.

**6.2.** Soit $(\mathcal{B}\,;\psi)$ un modèle de B ; $\mathcal{B}$ est une $\mathbf{Q}$-algèbre différentielle graduée augmentée et $\psi : \mathcal{B} \longrightarrow A(B)$ est un quasi-isomorphisme préservant les augmentations. D'après la théorie des algèbres minimales (voir [16], ou [7] proposition du § 1.3, ou [8] théorème 6.1), le morphisme $f^* \circ \psi : \mathcal{B} \longrightarrow A(E)$ admet pour modèle minimal le fibré algébrique $(\mathcal{B} \underset{\tau}{\otimes} \mathcal{F}\,;\varphi)$. Rappelons brièvement ce que cela signifie. C'est une $\mathcal{B}$-algèbre différentielle $\mathcal{B} \otimes \mathcal{F}$, où $\mathcal{F}$ est une algèbre libre $L(V)$ sur un espace vectoriel gradué positivement, dont la différentielle $d$, donnée par $d_{\mathcal{B}} \otimes 1 + 1 \otimes d_{\mathcal{F}} + 1 \otimes \tau$ où $\tau : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{B} \otimes \mathcal{F}$ est une dérivation de degré $+1$ telle que $\tau(\mathcal{F}) \subset \bigoplus_{k \geqslant 1} \mathcal{B}^k \otimes \mathcal{F}$, vérifie la condition $d(1 \otimes v) \in \mathcal{B} \otimes L(sq_{q-1}V)$ pour tout $v \in V^q$. De plus $\varphi : \mathcal{B} \underset{\tau}{\otimes} \mathcal{F} \longrightarrow A(E)$ est un quasi-isomorphisme. Dans le diagramme

$$\mathcal{B} \xrightarrow{j} \mathcal{B} \underset{\tau}{\otimes} \mathcal{F} \xrightarrow{i} \mathcal{F}\ ,$$

$j$ est une inclusion et $i$ est induit par l'augmentation $\epsilon_{\mathcal{B}}$ de $\mathcal{B}$.

**6.3.** Comme $\operatorname{Ker} i$ est l'idéal de $\mathcal{B} \otimes \mathcal{F}$ engendré par $j\ (\operatorname{Ker} \epsilon_{\mathcal{B}})$ et que $\iota^* \circ f^*$ s'identifie à l'augmentation de A(B) (qui est induite par l'inclusion du point base), il est facile de définir un morphisme $\alpha$ qui rende le diagramme suivant commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F} \arrow[r, "\alpha"] & A(F) \\
\mathcal{B} \underset{\tau}{\otimes} \mathcal{F} \arrow[u, "i"] \arrow[r, "\varphi"'] & A(E) \arrow[u, "\iota^*"'] \\
\mathcal{B} \arrow[u, "j"] \arrow[r, "\psi"'] & A(B) \arrow[u, "f^*"']
\end{tikzcd}$$

6.4. THEOREME. — *Supposons que les hypothèses de 6.1 sont satisfaites et supposons de plus que* $\tau(\mathcal{F}) \subset \bigoplus_{k\geqslant 2} \mathcal{B}^k \otimes \mathcal{F}$. *Alors* $\alpha$ *est un quasi-isomorphisme.*

(Cela signifie donc que $(\mathcal{F}\,;\alpha)$ est le modèle minimal de F).

*Démonstration.* — On considère, avec les notations précédentes et celles de 5.1, le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F} \arrow[rr, "\alpha"] & & A(F) \\
& A(f) \arrow[ur] \arrow[dr, "a^*"] & \\
\mathcal{B} \otimes_\tau \mathcal{F} \arrow[u, "i"] \arrow[ur, dashed, "\overline{\varphi}"] \arrow[rr, "\varphi"'] & & A(E) \arrow[u, "\iota^*"'] \\
\mathcal{B} \arrow[u, "j"] \arrow[rr, "\psi"'] & & A(B) \arrow[u, "f^*"'] \arrow[uul, "p^*"]
\end{tikzcd}$$

Comme $a^*$ est un quasi-isomorphisme surjectif et que $\mathcal{B} \otimes_\tau \mathcal{F}$ est une algèbre minimale sur $\mathcal{B}$, il existe un quasi-isomorphisme $\overline{\varphi}$ qui factorise $\varphi$ (voir [8] théorème 5.19).

On filtre l'algèbre $A(f)$ comme indiqué dans 5.1 ; les éléments de filtration $k$ de l'algèbre $\mathcal{B} \otimes_\tau \mathcal{F}$ sont ceux de l'idéal engendré par $\bigoplus_{p\geqslant k} \mathcal{B}^p \otimes \mathcal{F}$. Le morphisme $\overline{\varphi}$ préserve ces filtrations, donc il induit un morphisme de suites spectrales. Compte tenu des hypothèses on peut appliquer le lemme du § 1.4 de [7] et la partie d) du théorème 5.1 ci-dessus ; on a donc un morphisme

$$\begin{aligned}
\overline{\varphi}_2^{pq} : E_2^{pq}\left(\mathcal{B} \otimes_\tau \mathcal{F}\right) = H^p(\mathcal{B}) \otimes H^q(\mathcal{F}) \longrightarrow\ & E_2^{pq}(A(f)) \\
&= H^p(A(B)) \otimes H^q(A(F))
\end{aligned}$$

tel que

$$\overline{\varphi}_2^{po} = \psi^* : H^p(\mathcal{B}) \longrightarrow H^p(A(B))$$

$$\overline{\varphi}_2^{oq} = \alpha^* : H^q(\mathcal{F}) \longrightarrow H^q(A(F))$$

Mais par hypothèse $\overline{\varphi}^* : H^*\left(\mathcal{B} \underset{\tau}{\otimes} \mathcal{F}\right) \longrightarrow H^*(A(f))$ et $\psi^*$ sont des isomorphismes ; donc par un théorème de comparaison (voir [11] exposé 3 théorème B), $\alpha^*$ est un isomorphisme.

**6.5.** Plaçons-nous toujours dans la situation décrite dans 6.1. Soit X un ensemble simplicial 1-connexe et une application simpliciale $h : X \longrightarrow B$. Notons $f' : X \underset{B}{\times} E \longrightarrow X$ le fibré induit de $f$ par $h$.

Soit $(\mathcal{B} ; \psi_B)$ le modèle minimal de B et $(\mathcal{X} ; \psi_X)$ le modèle minimal de X. Il existe un morphisme $\theta : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{X}$ tel que $h^* \circ \psi_B$ soit homotope à $\psi_X \circ \theta$. (voir [8] 6.27).

Si $\mathcal{B} \xrightarrow{j} \mathcal{B} \underset{\tau}{\otimes} \mathcal{F} \xrightarrow{i} \mathcal{F}$ est le modèle de $f$ construit ci-dessus, considérons le fibré algébrique induit $\mathcal{X} \xrightarrow{j'} \mathcal{X} \underset{\tau'}{\otimes} \mathcal{F} \xrightarrow{i'} \mathcal{F}$ où $\tau' = (\theta \otimes 1) \circ \tau$. (voir [7] § 1.4).

**6.6.** THEOREME. — *Sous les hypothèses de 6.5, le fibré algébrique induit* $\mathcal{X} \xrightarrow{j'} \mathcal{X} \underset{\tau'}{\otimes} \mathcal{F} \xrightarrow{i'} \mathcal{F}$ *est le modèle minimal du fibré induit* $f'$.

*Démonstration.* — Considérons le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
 & A(F) \arrow[rr, "id"] & & A(F) \\
\mathcal{F} \arrow[ur, "\alpha_B"] \arrow[rr, dashed, "id"'] \arrow[urrr, dashed, "\alpha_X"] & & \mathcal{F} \arrow[ur, dashed, "\alpha_X"'] & \\
 & A(E) \arrow[uu, "\iota^*"] \arrow[rr, "h'^*"] & & A\left(X \underset{B}{\times} E\right) \arrow[uu, "\iota'^*"'] \\
\mathcal{B} \underset{\tau}{\otimes} \mathcal{F} \arrow[uu, "i"] \arrow[ur, "\varphi_B"] \arrow[urrr, dashed, "\varphi'_X"] \arrow[rr, dashed, "\theta \otimes 1"'] & & \mathcal{X} \underset{\tau'}{\otimes} \mathcal{F} \arrow[uu, dashed, "i'"] \arrow[ur, dashed, "\varphi_X"'] & \\
 & A(B) \arrow[uu, "f^*"] \arrow[rr, "h^*"] & & A(X) \arrow[uu, "f'^*"'] \\
\mathcal{B} \arrow[uu, "j"] \arrow[ur, "\psi_B"] \arrow[urrr, dashed, "\psi_X \circ \theta"] \arrow[rr, "\theta"'] & & \mathcal{X} \arrow[uu, dashed, "j'"] \arrow[ur, "\psi_X"'] &
\end{tikzcd}$$

dans lequel les faces latérales en traits pleins commutent et le carré inférieur commute à homotopie près.

D'après la théorie de l'homotopie des fibrés algébriques (voir 9.15.4 et 9.22 de [8]) il existe un morphisme $\varphi'_X$, homotope à $h'^* \circ \varphi_B$, et un morphisme $\alpha_X$, homotope à $\alpha_B$, tels que le plan diagonal commute.

Maintenant on définit un morphisme $\varphi_X$, qui factorise $\varphi'_X$ et rend commutatif la face latérale droite du diagramme, en posant $\varphi_X(x \otimes 1) = f'^* \circ \psi_X(x)$ et $\varphi_X(1 \otimes y) = \varphi'_X(1 \otimes y)$.

On applique à cette face latérale droite le même raisonnement de suite spectrale que dans la démonstration de 6.4, mais cette fois ce sont $\psi_X^*$ et $\alpha_X^*$ qui sont des isomorphismes. Alors par un théorème de comparaison, (voir [11] exposé 3 théorème C), $\varphi_X^*$ est un isomorphisme.

6.7. *Remarques.* – Nous terminons ce paragraphe en signalant quelques résultats obtenus à partir de la suite spectrale du théorème 5.1.

1) Soit $f : E \longrightarrow B$ un fibré principal de fibre $K(\pi\,;n)$ où $\pi$ est un groupe abélien de rang fini. Posons $V = \pi \underset{\mathbf{Z}}{\otimes} \mathbf{Q}$ et considérons l'espace vectoriel $V$, de dimension finie, comme homogène de degré $n$. Si $\mathcal{B}$ est un modèle de la base de $f$, alors il existe sur l'algèbre $\mathcal{B} \otimes L(V^*)$, où $L(V^*)$ est l'algèbre libre sur le dual de $V$, une dérivation $\tau$, ne dépendant que de la classe d'homotopie du classifiant $k : B \longrightarrow K(\pi\,; n+1)$, telle que $\mathcal{B} \underset{\tau}{\otimes} L(V^*)$ soit le modèle de $f$.

2) Supposons maintenant que $f : E \longrightarrow B$ est une fibration nilpotente et soit $\mathcal{B}$ un modèle de $B$. Alors en raisonnant par récurrence sur le raffinement principal de la tour de Postnikov de $f$ on peut construire une algèbre libre nilpotente $\mathcal{N}$ telle que $\mathcal{B} \underset{\tau}{\otimes} \mathcal{N}$, où la dérivation $\tau$ ne dépend que des invariants de Postnikov partiels, soit un modèle de $f$. Le théorème 6.4 est donc encore valable dans ce cas : l'algèbre $\mathcal{N}$ est le modèle minimal de la fibre de $f$.

3) On peut construire un modèle pour l'espace des chemins libres sur un espace. Par pull-back on retrouve les résultats de [16] et de [17] concernant un modèle pour l'espace des chemins d'origine fixe et pour l'espace des lacets libres.

On peut aussi construire un modèle pour l'espace des sections d'un fibré (voir [12] exposé 3).

## 7. La suite spectrale d'Eilenberg-Moore.

Dans ce paragraphe, on montre qu'il est possible de construire la suite spectrale d'Eilenberg-Moore (voir [3]) à partir des algèbres de formes différentielles qui ont été définies précédemment. (Signalons que dans [18] Wu Wen-Tsün a démontré un résultat analogue).

7.1. On considère la catégorie dont les objets sont les carrés cartésiens

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "\tilde{g}"] \arrow[d, "\tilde{f}"'] & Y \arrow[d, "f"] \\ X \arrow[r, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

d'ensemble simpliciaux pointés. On suppose que tous les espaces sont connexes, que B est simplement connexe et que la fibre F de $f$ est de type fini (c'est-à-dire $H^*(F ; k)$ est de dimension finie en chaque degré).

7.2. En appliquant le foncteur A au carré ci-dessus on obtient un diagramme de $k$-algèbres différentielles graduées

$$\begin{tikzcd} A(Z) & A(Y) \arrow[l, "\tilde{g}^*"'] \\ A(X) \arrow[u, "\tilde{f}^*"] & A(B) \arrow[l, "g^*"] \arrow[u, "f^*"'] \end{tikzcd}$$

A l'aide des morphismes $g^*$ et $f^*$ on peut considérer A(X) et A(Y) comme des A(B)-modules différentiels gradués ; il est clair que $H^*(A(X))$ et $H^*(A(Y))$ sont alors des $H^*(A(B))$-modules gradués.

7.3. THEOREME. — *Sous les hypothèses de 7.1 il existe une suite spectrale du deuxième quadrant, multiplicative et naturelle, dont l'aboutissement est* $H^*(A(Z))$ *et telle que*

$$E_2^{-p,q} = \mathrm{Tor}^{-p,q}_{H^*(A(B))}(H^*(A(X))\,;\,H^*(A(Y))) \qquad (p \geqslant 0,\, q \geqslant 0).$$

*Démonstration.* — D'après la remarque de 3.3 l'application simpliciale $g$ induit une application bisimpliciale $\bar{g} : S(\tilde{f}) \longrightarrow S(f)$. On a alors, avec les notations de 5.1, le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
A(\tilde{f}) \arrow[dr, "\tilde{a}^*"] & & & A(f) \arrow[lll, "\bar{g}^*"'] \arrow[dl, "a^*"'] \\
& A(Z) & A(Y) \arrow[l, "\tilde{g}^*"'] & \\
& A(X) \arrow[u, "\tilde{f}^*"'] \arrow[uul, "\tilde{p}^*"] & A(B) \arrow[l, "g^*"] \arrow[u, "f^*"] \arrow[uur, "p^*"'] &
\end{tikzcd}$$

A l'aide du morphisme $p^*$ on peut considérer $A(f)$ comme un $A(B)$-module différentiel gradué.

7.4. LEMME. — *Il existe une sous-k-algèbre différentielle graduée* $\Lambda$ *de* $A(B)$ *qui est* 0*-réduite et quasi-isomorphe à* $A(B)$.

*Démonstration.* — On pose $\Lambda^0 = k$ ; on prend pour $\Lambda^1$ un supplémentaire de $dA^0(B)$ dans $A^1(B)$ ; on pose $\Lambda^j = A^j(B)$ pour $j \geqslant 2$.

Suite de la démonstration de 7.3 : On peut évidemment considérer $A(X)$ et $A(Y)$ comme des $\Lambda$-modules différentiels gradués. Alors d'après le théorème 1.2 de [14] il existe une suite spectrale du deuxième quadrant, multiplicative et naturelle, qui aboutit à $\mathrm{Tor}_\Lambda(A(X)\,;\,A(Y))$ et telle que

$$E_2^{-p,q} = \mathrm{Tor}^{-p,q}_{H^*(\Lambda)}(H^*(A(X))\,;\,H^*(A(Y))).$$

Maintenant il est clair que

$$\mathrm{Tor}_{H^*(\Lambda)}(H^*(A(X)); H^*(A(Y))) = \mathrm{Tor}_{H^*(A(B))}(H^*(A(X)); H^*(A(Y))) .$$

De plus comme $a^* : A(f) \longrightarrow A(Y)$ est un quasi-isomorphisme il résulte du corollaire 1.3 de [14] que

$$\mathrm{Tor}_\Lambda(A(X) ; A(f)) = \mathrm{Tor}_\Lambda(A(X) ; A(Y)) .$$

Enfin comme $\widetilde{a}^* : A(\widetilde{f}) \longrightarrow A(Z)$ est aussi un quasi-isomorphisme, tout revient donc à démontrer le résultat suivant :

7.5. LEMME. – $\mathrm{Tor}_\Lambda(A(X) ; A(f)) = H^*(A(\widetilde{f}))$.

*Démonstration.* – Le morphisme composé

$$A(X) \otimes A(f) \xrightarrow{\widetilde{p}^* \otimes \widetilde{g}^*} A(\widetilde{f}) \otimes A(\widetilde{f}) \xrightarrow{\text{mult}} A(\widetilde{f})$$

induit un morphisme $\varphi : A(X) \underset{\Lambda}{\otimes} A(f) \longrightarrow A(\widetilde{f})$.

Soit $P \xrightarrow{\epsilon} A(X) \longrightarrow 0$ une $\Lambda$-résolution libre propre de $A(X)$. On peut prendre par exemple pour $P$ la bar-résolution ; on rappelle que pour tout entier $n \geqslant 0$ et $p \geqslant 0$, $P^{-n,p}$ est alors la composante de degré $p$ du produit tensoriel $\Lambda \otimes \overline{\Lambda} \otimes \ldots \otimes \overline{\Lambda} \otimes A(X)$ dans lequel l'idéal d'augmentation $\overline{\Lambda}$ de $\Lambda$ figure $n$ fois. Les différentielles sont données par des formules bien connues.

L'augmentation $\epsilon$ induit un morphisme

$$P \underset{\Lambda}{\otimes} A(f) \longrightarrow A(X) \underset{\Lambda}{\otimes} A(f)$$

qui par composition avec $\varphi$ donne un morphisme

$$\theta : P \underset{\Lambda}{\otimes} A(f) \longrightarrow A(\widetilde{f}) .$$

Par définition on a $\theta^* : \mathrm{Tor}_\Lambda(A(X) ; A(f)) \longrightarrow H^*(A(\widetilde{f}))$. Notons $\underline{\underline{s}}P$ le complexe simple associé au complexe double $P$. On filtre $\underline{\underline{s}}P$ par le degré ; la filtration de $A(f)$ est celle de 5.1 ; alors on définit sur $\underline{\underline{s}}P \underset{\Lambda}{\otimes} A(f)$ la filtration produit tensoriel. On a $E_0\left(\underline{\underline{s}}P \underset{\Lambda}{\otimes} A(f)\right) = \underline{\underline{s}}P \underset{\Lambda}{\otimes} E_0(A(f))$ et la différentielle $d_0$ est induite par $1 \otimes d_0$ où $d_0$ est la différentielle de $E_0(A(f))$. On a donc, d'après 5.1 et puisque $B$ est simplement connexe et que la fibre $F$ de $f$ est de type fini,

$$E_1\left(\underline{\underline{s}}P \underset{\Lambda}{\otimes} A(f)\right) = \left(\underline{\underline{s}}P \underset{\Lambda}{\otimes} A(B)\right) \otimes H^*(A(F)) .$$

La différentielle $d_1$ est induite par $d_{\underline{\underline{s}}P} \otimes 1 + 1 \otimes d_{A(B)}$. Le morphisme évident $\underline{\underline{s}}P \underset{\Lambda}{\otimes} \Lambda \longrightarrow \underline{\underline{s}}P \underset{\Lambda}{\otimes} A(B)$ entraîne que

$$H^*(\underline{\underline{s}}P) = H^*\left(\underline{\underline{s}}P \underset{\Lambda}{\otimes} A(B)\right).$$

De plus il est facile de vérifier que $H^*(\underline{\underline{s}}P) = H^*(A(X))$ puisque P est une résolution propre. On a donc

$$E_2\left(\underline{\underline{s}}P \underset{\Lambda}{\otimes} A(f)\right) = H^*(A(X)) \otimes H^*(A(F)).$$

Maintenant en filtrant $A(\widetilde{f})$ par le premier degré on obtient, d'après 5.1 et compte tenu des hypothèses 7.1,

$$E_2(A(\widetilde{f})) = H^*(A(X)) \otimes H^*(A(F)).$$

Par calcul direct on vérifie que $\theta$ préserve les filtrations. Enfin ces filtrations sont régulières ; donc $\theta^*$ est un isomorphisme.

## BIBLIOGRAPHIE

[1] A.K. Bousfield and V.K.A.M. Gugenheim, On PL De Rham theory and rational homotopy type, *Memoirs of the AMS,* Vol. 8, No 179.

[2] A. Dress, Zur Spectralsequenz von Faserungen, *Inventiones Math.,* 3 (1967), 172-178.

[3] S. Eilenberg and J.C. Moore, Homology and fibrations, *Comm. Math. Helv.,* 40 (1966), 199-236.

[4] P. Gabriel and M. Zisman, Calculus of Fractions and homotopy theory, Springer-Verlag (1967).

[5] R. Godement, Théorie des faisceaux, Hermann (1964).

[6] P.P. Grivel, Suite spectrale et modèle minimal d'une fibration, Thèse Université de Genève (1977).

[7] A. Haefliger, Sur la cohomologie de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs, *Ann. Scient. de l'ENS,* 4e Série, t. 9 (1976), 503-532.

[8] S. Halperin, Lectures on minimal models, *Publications internes de l'UER de mathématiques pure et appliquées de Lille I,* No 111 (1977).

[9] K. Lamotke, Semisimpliziale algebraische Topologie, Springer-Verlag (1968).

[10] S. MacLane, Homology, Springer-Verlag (1975).

[11] Séminaire Henri Cartan 1954-55.

[12] Séminaire sur les formes différentielles sur les ensembles simpliciaux. (Troisième Cycle romand de mathématiques) (1974-75).

[13] J.P. SERRE, Homologie singulière des espaces fibrés, *Annals of Math.*, 54 (1951), 425-505.

[14] L. SMITH, Homological algebra and the Eilenberg-Moore spectral Sequence, *Trans. of the AMS,* vol. 129 (1967), 58-93.

[15] N.E. STEENROD, Homology with local coefficients, *Annals of Math.*, 44 (1945), 610-627.

[16] D. SULLIVAN, Infinitesimal Computation in Topology, *IHES Publications mathématiques,* No 47 (1977), 269-331.

[17] M. VIGUE-POIRRIER and D. SULLIVAN, The homology theory of the closed geodesic problem, *J. Differential Geometry,* 11 (1976), 633-644.

[18] W. WEN-TSUN, Theory of I*-functor in algebraic topology, *Scientia Sinica,* Vol. XVIII, No 4 (1975), 464-482.

Manuscrit reçu le 4 septembre 1978.

Pierre-Paul GRIVEL,
Université de Genève
Faculté des Sciences
Section de mathématiques
2-4, rue du Lièvre, case post. 124
CH- 1211- Genève 24.