

ANDRÉ GALLIGO

Théorème de division et stabilité en géométrie analytique locale

Annales de l'institut Fourier, tome 29, n° 2 (1979), p. 107-184

http://www.numdam.org/item?id=AIF_1979__29_2_107_0

© Annales de l'institut Fourier, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

THÉORÈME DE DIVISION ET STABILITÉ EN GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE LOCALE

par André GALLIGO

	Pages
CHAPITRE 1. — THÉORÈME DE DIVISION	115
1. Exposants privilégiés, escaliers, ouverts effilés	115
2. Énoncé des théorèmes de division	122
3. Démonstration	128
4. Applications du théorème de division	132
CHAPITRE 2. — RÉSOLUTION DE CERTAINS SYSTÈMES D'ÉQUATIONS ANALYTIQUES	138
1. Énoncé du théorème	139
2. Préparation et normalisation	140
3. Construction de la solution	145
CHAPITRE 3. — STABILITÉ DES MORPHISMES PLATS	150
1. Définitions et énoncés	151
2. Infinitésimalement stable implique stable	153
3. Caractérisation des morphismes stables et plats	158
4. Critère de stabilité	161
CHAPITRE 4. — MORPHISMES STABLES ENTRE GERMES LISSES	166
1. Rappels sur la théorie de Thom-Mather	166
2. Généralisation	168
3. Relation entre un morphisme stable entre germes lisses et la déforma- tion semi-universelle de sa fibre	173
4. Un exemple	176

INTRODUCTION

L'objet principal de ce travail est le théorème de division également baptisé « technique des escaliers ». Cette technique permet d'associer à chaque idéal de séries entières convergentes un unique système de générateurs vérifiant certaines conditions. Ces conditions permettent d'une part de totaliser un maximum d'informations sur les exposants des termes non nuls du développement en série de chaque générateur et sur les relations entre ces générateurs, d'autre part de définir un bon algorithme de division par ces générateurs.

La recherche d'une forme normale des générateurs d'un idéal a déjà été abordée par divers auteurs :

Par H. Grauert pour étudier les déformations des germes d'espaces analytiques. A tout idéal et après changement générique des coordonnées, il associe un algorithme de division avec unicité du reste. Voir [13], [12], [11].

Par H. Hironaka pour résoudre les singularités d'un espace analytique. Il généralise le théorème de préparation de Weierstrass au cas d'une famille de séries. Ce théorème a été ensuite amélioré par J. Briançon et par nous grâce à l'introduction des notions « d'escalier » et « d'escalier générique ». Voir [15, p. 24], [3], [5], [11].

Cependant, aucune étude systématique n'avait encore été écrite sur ce sujet.

Avant de présenter la contribution du présent travail, exposons quelques principes élémentaires.

L'exemple le plus simple est le théorème de préparation classique que l'on peut énoncer ainsi :

« Tout idéal principal I de l'algèbre A_n des séries entières convergentes à n variables, engendré par une série f telle que $f(0, \dots, 0, x_n) \neq 0$ admet pour générateur un unique polynôme de Weierstrass :

$$g = x_n^m + a_{m-1}(x_1, \dots, x_{n-1})x_n^{m-1} + \dots + a_0(x_1, \dots, x_{n-1})$$

avec $a_i(0, \dots, 0) = 0$ pour $0 \leq i \leq m - 1$. »

Chacun sait que ce générateur permet de définir sur A_n un algorithme de

division avec unicité du quotient, du reste et estimation des normes sur un système fondamental de poly-disques de \mathbf{C}^n ou de \mathbf{R}^n centrés en 0. Formellement, l'algorithme consiste à substituer indéfiniment $(g - a_{m-1}x_n^{m-1} - \dots - a_0)$ à x_n^m .

Lorsque l'hypothèse $f(0, \dots, 0, x_n) \neq 0$ n'est plus satisfaite, on est conduit soit à effectuer un changement de variables générique qui peut entraîner une perte d'information sur l'idéal, soit à changer d'approche : suivant H. Hironaka, ordonnons \mathbf{N}^n à l'aide d'une forme linéaire positive sur \mathbf{R}^n (c'est le procédé le plus simple) afin d'obtenir la sommation :

$$f = ax^\alpha + r$$

a étant une constante non nulle et r une série n'ayant que des termes d'exposants supérieurs à α . Nous nommerons l'exposant $\alpha \in \mathbf{N}^n$, *exposant privilégié* de la série f . On démontre que l'algorithme de division sur A_n qui consiste formellement à substituer indéfiniment $(f - r)$ à (ax^α) est bien défini et que l'idéal I admet un unique générateur de la forme :

$$g = x^\alpha + (\text{termes d'exposants supérieurs non multiples de } x^\alpha).$$

Dans le cas général où l'idéal I n'est pas principal, la méthode de H. Hironaka, exposée par J. Briançon dans « Singularités à Cargèse », consiste à considérer l'ensemble $E(I)$ des exposants privilégiés de tous les éléments de I , à remarquer qu'il existe un plus petit ensemble fini $F(I) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_p\}$ que nous nommerons *escalier* de l'idéal I tel que :

$$E(I) = \bigcup_{1 \leq i \leq p} (\alpha_i + \mathbf{N}^n),$$

puis de démontrer que toute famille (f_1, \dots, f_p) de séries de I d'exposants privilégiés $(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ engendre l'idéal I , enfin de définir sur A_n un algorithme naturel de division par la famille (f_1, \dots, f_p) .

Motivé par des applications à l'étude de la stabilité que nous développerons plus bas, nous avons été amenés à améliorer la méthode de H. Hironaka dans trois directions.

La première est l'obtention d'estimations précises pour les normes : à chaque algorithme de division par un idéal I nous avons attaché l'ensemble des poly-rayons ρ appartenant à un *ouvert effilé* V de \mathbf{R}_+^n (voir définition et description p. 120), sur chaque poly-disque $D(0, \rho)$ centré en 0 de poly-rayon ρ nous obtenons un algorithme de division avec unicité des dividendes, des quotients et des restes et inégalité précise sur les normes.

La seconde est l'extension à la définition d'un algorithme de division par un sous-module d'un module libre A_n^m .

La troisième est l'extension à la définition d'un algorithme de division avec paramètres. Celui-ci nous conduit naturellement à considérer la platitude et nous fournit notre théorème « platitude et division » (1.2.8) qui est, pour la norme « à la Grauert $\Sigma|a_n|p^n$ », l'analogue de « platitude et privilège » de A. Douady.

Notre énoncé complet se trouve en (1.2.7). Nous avons rassemblé en Annexe les résultats sur la platitude que nous utilisons.

Cette technique nous donne des démonstrations simples et constructives du théorème d'existence de scissions de B. Malgrange (1.4.2) et du théorème d'existence du platicateur local d'un morphisme de Hironaka-Lejeune-Teissier (1.4.4) qui débouchent sur des procédés de calculs explicites.

Avant d'aborder notre motivation géométrique, rappelons que, traditionnellement depuis R. Thom, le théorème de préparation est lié à la théorie de la stabilité des morphismes. L'exemple le plus simple est le fait que les germes de morphismes stables de \mathbf{R}^n dans \mathbf{R}^p qui sont de type Σ^1 , c'est-à-dire dont l'anneau local de la fibre est de la forme $\mathbf{R}\{x\}/x^{p+1}$, sont à isomorphismes près :

$$\begin{aligned} \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{p-1} \times \mathbf{R}^{n-p-2} &\longrightarrow \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{p-1} \times \mathbf{R}^{n-p-2} \\ (x, a, z) &\longrightarrow (x^{p+1} + a_{p-1}x^{p-1} + \dots + a_1x, a, z) \end{aligned}$$

et que ce résultat est essentiellement équivalent au théorème de préparation classique après la transformation de Tscirnausen.

La \mathcal{A} -stabilité d'un morphisme de germes $F : (\mathbf{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^p, 0)$ au sens de Thom-Mather peut s'exprimer de la façon suivante (4.2.7) : pour tout déploiement G de F ,

$$\begin{array}{ccc} (\mathbf{R}^n, 0) & \xleftrightarrow[\sigma']{i'} & (\mathbf{R}^N, 0) \\ \downarrow F & & \downarrow G \\ (\mathbf{R}^p, 0) & \xleftrightarrow[\sigma]{I} & (\mathbf{R}^p, 0) \end{array}$$

il existe un couple de rétractions (σ, σ') de (i, i') qui commutent avec F et G .

Dans le cas des morphismes plats entre germes d'espaces singuliers, généralisons :

$F : X \rightarrow S$ est plat et stable si pour tout diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 X & \begin{array}{c} \xrightarrow{i'} \\ \xleftarrow{\sigma'} \end{array} & Y \\
 \downarrow F & & \downarrow G \\
 S & \begin{array}{c} \xrightarrow{i} \\ \xleftarrow{\sigma} \end{array} & T
 \end{array}$$

commutatif cartésien où G est plat, il existe un couple de rétractions (σ, σ') de (i, i') qui commutent avec F et G .

Cette définition n'est certes pas la seule généralisation possible. On pourrait, par exemple, exiger que Y et T soient des espaces produits de la forme $Y = X \times U$ et $T = S \times U$. Cependant, c'est pour nous la plus satisfaisante, car perturber un morphisme n'est-ce pas aussi perturber sa source et son but (qui sont rigides dans le cas lisse) ? Si nous nous restreignons au cas des morphismes plats, ce n'est pas faute d'avoir examiné le cas des morphismes quelconques (le cas des morphismes stables à but lisse a été étudié par J. F. Mattei dans sa Thèse de 3^e Cycle) nous indiquons d'ailleurs (4.2.11), le premier obstacle auquel nous nous heurtons lorsque nous tentons de généraliser notre approche de la stabilité. Disons simplement que la platitude est une notion géométrique simplificatrice; bien que l'intuition ait du mal à la saisir, elle exprime une certaine continuité des fibres d'un morphisme.

La définition de la stabilité étant acquise, l'inévitable « infinitésimalement stable implique stable » se démontre traditionnellement depuis J. Mather par l'intégration d'un champ de vecteurs. Ici, après quelques manipulations algébriques, nous utilisons une méthode d'approximations successives et un passage du « formel » au convergent. Ce passage ne résultant pas du théorème général d'approximation de M. Artin, nous sommes conduits à énoncer et démontrer, par une méthode différente, un autre théorème d'approximation qui nous paraît mieux adapté à l'étude des morphismes de germes d'espaces analytiques. Nous avons (2.1.4) résumé l'idée de la démonstration de ce résultat : elle utilise pleinement les estimations précises que nous avons établies avec le théorème de division et s'inspire d'un exposé de J. L. Verdier au Séminaire de l'E.N.S. en 1973.

Un calcul simple (3.3.6) donne la caractérisation des morphismes

plats et stables comme le produit de la déformation semi-universelle de leur fibre par l'identité d'un germe d'espace lisse. Une conséquence de cette caractérisation est que toute déformation semi-universelle d'un germe d'espace analytique est également quasi-universelle (3.1.8). Dans le cas particulier important des déformations d'espaces à singularités isolées, ce résultat avait été démontré en utilisant une méthode différente par Geneviève Pourcin.

Nous démontrons ensuite que le platificateur local d'un morphisme stable entre germes lisses est stable. Ce résultat est doublement intéressant : d'une part il approche la notion de stabilité que nous avons introduit précédemment à celle de Thom-Mather, d'autre part combiné avec le résultat précédent, il établit le lien entre la théorie de la stabilité des morphismes entre germes lisses de Thom-Mather et la théorie des déformations plates de germes d'espaces de Tjurina-Grauert.

Une conséquence pratique de tout ce qui précède est l'obtention d'une procédure de calcul de la déformation universelle d'un espace analytique local de dimension 0.

Recette : 1° le présenter comme fibre d'une application entre germes d'espaces lisses,

2° calculer le déploiement universel de cette application,

3° prendre le platificateur.

A chacune des trois étapes, on sait calculer explicitement des équations.

Nous illustrons cette procédure par le calcul d'un exemple.

Nous n'avons employé ici la technique des escaliers que pour étendre la théorie de la stabilité de Thom-Mather et pour la relier à l'étude des déformations plates. Aussi, il nous faut signaler que l'on peut appliquer la technique des escaliers à l'intérieur même de cette théorie. Nous renvoyons à notre article avec J. Damon « A topological invariant for stable map-germs » et à l'utilisation qui en est faite par J. Damon pour comparer les classifications topologiques et différentiables des germes stables et montrer qu'elles coïncident dans les bonnes dimensions définies par J. Mather.

C'est avec grand plaisir que je remercie mes amis et Professeurs Jean-Louis Verdier, Frédéric Pham, Christian Houzel, Joël Briançon, Jim Damon, Bernard Teissier, Claude Bardos et André Hirschowitz qui m'ont toujours témoigné une confiance amicale et m'ont aidé dans la réalisation de ma thèse.

Je remercie particulièrement :

Frédéric, qui m'a introduit dans le monde des singularités,

Jean-Louis, qui m'a offert un bon sujet de thèse,

et Joël.

NOTATIONS

La lettre \mathbf{k} désignera soit le corps des nombres réels \mathbf{R} , soit le corps des nombres complexes \mathbf{C} . Les lettres \mathbf{R}^* , \mathbf{R}_+ , \mathbf{R}_+^* , \mathbf{R}_- , \mathbf{R}_-^* désigneront respectivement les ensembles des nombres réels non nuls, positifs, strictement positifs, négatifs, strictement négatifs.

Pour tout n -uple de variables $x = (x_1, \dots, x_n)$ $\mathbf{k}\{x\} = \mathbf{k}\{x_1, \dots, x_n\}$ désignera l'algèbre des séries convergentes en x_1, \dots, x_n .

Pour tout $A \in \mathbf{N}^n$, $A = (A_1, \dots, A_n)$, $x^A = x_1^{A_1} \dots x_n^{A_n}$.

Pour tout $(A, i) \in \mathbf{N}^n \times \{1, \dots, m\}$,

$x^{A,i} = (0, \dots, x^A, \dots, 0)$, le monome étant à la $i^{\text{ième}}$ place.

Dans ce travail, les germes d'espaces analytiques et les morphismes de germes d'espaces analytiques sont appelés plus simplement espaces analytiques et morphismes d'espaces analytiques.

La catégorie des germes d'espaces analytiques sur le corps \mathbf{k} est la catégorie opposée à la catégorie des \mathbf{k} -algèbres analytiques locales, c'est-à-dire des algèbres quotients des algèbres de séries entières convergentes à coefficients dans le corps \mathbf{k} . A un espace analytique X correspond une \mathbf{k} -algèbre analytique locale que nous noterons \mathcal{O}_X , ainsi à l'espace lisse \mathbf{k}^n correspond l'algèbre des séries convergentes à n variables. A un morphisme d'espace analytique $f: X \rightarrow Y$ correspond un morphisme d'algèbres analytiques locales que nous noterons $f^*: \mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{O}_X$. Nous appellerons fibre de f l'espace analytique $X_0 = f^{-1}(0)$ (0 désignant le point marqué de Y) ayant pour algèbre analytique locale $\mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathbf{k}$.

CHAPITRE PREMIER

THÉORÈME DE DIVISION

1. Exposants privilégiés, escaliers, ouverts effilés.

(1.1.1) DÉFINITION. — On appellera forme positive sur $\mathbf{R}^n \times \{1, \dots, m\}$ un couple $L = (\tilde{L}, \lambda)$ formé par une application linéaire $\tilde{L} : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ à coefficients positifs non tous nuls (l_1, \dots, l_n) , et un élément $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ de \mathbf{R}_+^m . On représentera la forme linéaire L par le point P de \mathbf{R}_+ de coordonnées (l_1, \dots, l_n) . Une telle forme L définit une application :

$$\mathbf{R}_+^n \times \{1, \dots, m\} \rightarrow \mathbf{R}_+$$

$$L(a_1, \dots, a_n; i) = l_1 a_1 + \dots + l_n a_n + \lambda_i.$$

(1.1.2) Remarque. — Si les coefficients $(l_1, \dots, l_n; \lambda_1, \dots, \lambda_m)$ de la forme positive L sont linéairement indépendants sur \mathbf{Z} , alors pour tout $(a_1, \dots, a_n; i)$ et $(b_1, \dots, b_n; j)$ distincts dans $\mathbf{N}^n \times \{1, \dots, m\}$ la différence

$$L(a_1, \dots, a_n; i) - L(b_1, \dots, b_n; j)$$

est soit strictement positive, soit strictement négative. La forme positive L définit ainsi un ordre total sur $\mathbf{N}^n \times \{1, \dots, m\}$, qui est aussi un bon ordre.

(1.1.3) Remarque. — Si les coefficients ne sont pas indépendants sur \mathbf{Z} , on peut encore définir un bon ordre semi-lexicographique sur $\mathbf{N}^n \times \{1, \dots, m\}$ noté $<$ de la manière suivante :

$$(a_1, \dots, a_n; i) < (b_1, \dots, b_n; j)$$

si et seulement si

$$L(a_1, \dots, a_n; i) < L(b_1, \dots, b_n; j)$$

ou si

$$L(a_1, \dots, a_n; i) = L(b_1, \dots, b_n; j)$$

et soit $i < j$ soit $i = j$ et $\exists p$:

$$0 \leq p \leq n \text{ t.q. } a_n = b_n \dots, a_{p+1} = b_{p+1} \quad \text{et} \quad a_p < b_p.$$

(1.1.4) Une forme positive L fixée, on considérera toujours $\mathbb{N}^n \times \{1, \dots, m\}$ muni de ce bon ordre, de même on considérera toujours \mathbb{N}^n muni du bon ordre défini par \tilde{L} .

Remarquons aussi que \mathbb{N}^n agit sur $\mathbb{N}^n \times \{1, \dots, m\}$ de la manière suivante :

$$A + (B, j) = (A + B, j).$$

(1.1.5) DÉFINITION. — Soit un vecteur non nul de séries convergentes sur le corps $\mathbf{k} = \mathbf{R}$ ou \mathbf{C} , $f = (f_1, \dots, f_m) \in \mathbf{k}\{x_1, \dots, x_n\}^m$ on note $f_i = \sum_{A \in \mathbb{N}^n} f_{A,i} x^A$.

On appelle diagramme de Newton de f l'ensemble d'indices

$$Q(f) = \{(A; i) \in \mathbb{N}^n \times \{1, \dots, m\} / f_{A,i} \neq 0\}.$$

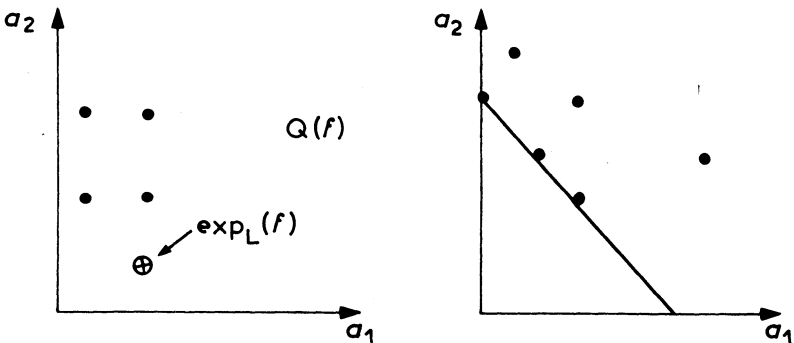
On appelle L -graduation de f le nombre réel

$$d_L(f) = \inf \{L(A; i) / (A; i) \in Q(f)\}.$$

On appelle forme initiale de f pour la direction L , l'élément de $\mathbf{k}[x_1, \dots, x_n]^m$ suivant :

$$\begin{aligned} \text{in}_L(f) &= \left(\sum_{L(A,i)=d_L} f_{A,i} x^A, \dots, \sum_{L(A,i)=d_L} f_{A,i} x^A \right) \\ &= \sum_{L(A,i)=d_L(f)} f_{A,i} x^{A,i} \end{aligned}$$

si l'on note $x^{A,i} = (0, \dots, 0, x^A, 0, \dots, 0)$, le monôme étant à la $i^{\text{ème}}$ place. On appelle exposant privilégié de f pour la direction L et on note $\text{exp}_L(f)$ le plus petit élément de $Q(f)$ pour le bon ordre défini par L .



Dans la suite, lorsqu'on considérera l'exposant privilégié d'un vecteur, il s'agira toujours d'un vecteur non nul même si on omet de préciser expressément cette condition.

On dira que f est *monique* si le coefficient du monôme de f d'exposant $\exp_L(f)$ est égal à 1.

(1.1.6) PROPRIÉTÉS. — a) Soient f et g deux éléments de $\mathbf{k}\{x_1, \dots, x_n\}^m$ non nuls. On a les formules suivantes d'addition :

$$\begin{aligned} \text{si } d_L(f) < d_L(g) & \quad \text{on a } \begin{cases} d_L(f+g) = d_L(f) \\ \text{in}_L(f+g) = \text{in}_L(f) \text{ et} \\ \exp_L(f+g) = \exp_L(f), \end{cases} \\ \text{si } \begin{cases} d_L(f) = d_L(g) \\ \exp_L(f) < \exp_L(g) \end{cases} & \quad \text{on a } \begin{cases} d_L(f+g) = d_L(f) \\ \text{in}_L(f+g) = \text{in}_L(f) + \text{in}_L(g) \\ \exp_L(f+g) = \exp_L(f) \end{cases} \\ \text{si } \text{in}_L(f) + \text{in}_L(g) = 0 & \quad \text{on a } \begin{cases} d_L(f+g) < d_L(f) = d_L(g) \\ \exp_L(f+g) < \exp_L(f) = \exp_L(g) \end{cases} \\ \text{si } \begin{cases} \exp_L(f) = \exp_L(g) \\ \text{in}_L(f) + \text{in}_L(g) \neq 0 \end{cases} & \quad \text{on a } \exp_L(f+g) = \exp_L(f) \end{aligned}$$

b) Soient f un élément de $\mathbf{k}\{x_1, \dots, x_n\}^m$ et g un élément de $\mathbf{k}\{x_1, \dots, x_n\}$, on a les formules de multiplications suivantes :

$$\begin{aligned} d_L(g \cdot f) &= d_L(g) + d_L(f) \\ \text{in}_L(g \cdot f) &= \text{in}_L(g) \times \text{in}_L(f) \\ \exp_L(g \cdot f) &= \exp_L(g) + \exp_L(f). \end{aligned}$$

(1.1.7) DÉFINITIONS. — Soit \mathcal{M} un sous-module de $\mathbf{k}\{x_1, \dots, x_n\}^m$. On appelle sous-module initial de \mathcal{M} pour la direction L , le sous-module $\text{In}_L(\mathcal{M}) = \{\text{in}_L(f) / f \in \mathcal{M}\}$ engendré par les formes initiales pour la direction L des éléments de \mathcal{M} . On appelle ensemble des privilégiés pour la direction L , le sous-ensemble de $\mathbf{N}^n \times \{1, \dots, m\}$ suivant :

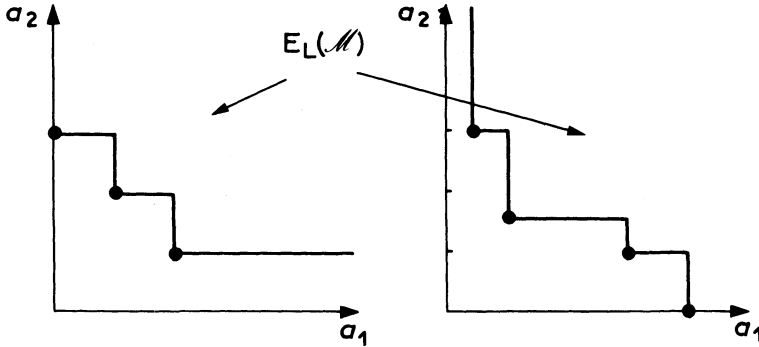
$$E_L(\mathcal{M}) = \{\exp_L(f) / f \in \mathcal{M}\}.$$

Des formules de multiplications (1.1.6) on déduit que $E_L(\mathcal{M}) + \mathbf{N}^n = E_L(\mathcal{M})$.

(1.1.8) LEMME. — Pour tout sous-ensemble E de $\mathbf{N}^n \times \{1, \dots, m\}$ tel que $E + \mathbf{N}^n = E$, il existe une plus petite (pour l'inclusion) partie finie F de E telle que

$$E = \bigcup_{a \in F} a + \mathbf{N}^n.$$

Dans le cas où $E = E_L(\mathcal{M})$ on notera cette partie $F = F_L(\mathcal{M})$ et on l'appellera l'escalier de \mathcal{M} pour la direction L .



Les gros points désignent les éléments de $F_L(\mathcal{M})$.

Preuve. — Il suffit de ne considérer que le cas $m = 1$. Disons qu'une partie F_1 de E est génératrice si $E = \bigcup_{a \in F_1} a + \mathbf{N}^n$ et que F_1 est redondante s'il existe deux éléments distincts a et a' de F_1 tels que $a' \in (a + \mathbf{N}^n)$ ou $a \in (a' + \mathbf{N}^n)$.

Démontrons le lemme par récurrence sur l'entier n . Si $n = 1$, le lemme est évident. Si $n > 1$, supposons le lemme vrai pour l'entier $n - 1$, soit E un sous-ensemble de \mathbf{N}^n vérifiant l'hypothèse et $a = (a_1, \dots, a_n)$ un élément de E .

Pour tout $i = 1, \dots, n$ et $j = 0, 1, \dots, a_i$ notons

$$E_{i,j} = E \cap (\mathbf{N}^{i-1} \times \{j\} \times \mathbf{N}^{n-i}), \quad \mathbf{N}^{n-1} = \mathbf{N}^{i-1} \times \{0\} \times \mathbf{N}^{n-i}$$

agit par addition sur $E_{i,j}$ et on a $E_{i,j} + \mathbf{N}^{n-1} = E_{i,j}$.

L'hypothèse de récurrence implique l'existence d'une partie finie et génératrice $F_{i,j}$ de $E_{i,j}$.

La réunion $F' = \bigcup_{i,j} F_{i,j} \cup \{a\}$ est une partie génératrice finie de E .

Par un nombre fini d'opérations, on en extrait une partie finie génératrice non redondante F de E .

Il est facile de voir que F est contenue dans toutes les parties génératrices de E . \square

(1.1.9) *Remarque.* — Une forme positive de $\mathbf{R}_+^n \times \{1, \dots, m\}$ étant choisie, tout sous-module de $\mathbf{k}\{x_1, \dots, x_n\}^m$ a même escalier que son sous-module initial.

(1.1.10) **PROPOSITION.** — Soient \tilde{L} une forme linéaire positive sur \mathbf{R}^n de coefficients non tous nuls (l_1, \dots, l_n) et $(A_{1j_1}), \dots, (A_{pj_p})$ une famille de multi-indices de $\mathbf{N}^n \times \{1, \dots, m\}$.

Il existe une constante strictement positive α telle que pour tout $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbf{R}_+^m$ tel que $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_m < \alpha$ il existe des constantes réelles strictement positives β_1, \dots, β_n et un ouvert de \mathbf{R}_+^n

$$\Lambda = \Lambda_{(\beta_1, \dots, \beta_n)} = \{(l_1 + \delta_1, \dots, l_n + \delta_n) / 0 < \delta_1 < \beta_1 \delta_2 < \dots < \beta_{n-1} \delta_n < \beta_n\}$$

tels que pour toute forme positive $L' = (\tilde{L}, \lambda)$, où \tilde{L} est représentée par un point de Λ , et pour tout k compris entre 1 et p , tout multi-indice E de $\mathbf{N}^n \times \{1, \dots, m\}$ strictement supérieur à (A_{kj_k}) , pour l'ordre défini par la forme positive $L = (\tilde{L}, 0)$, vérifie l'inégalité $L'(E) > L'(A_{kj_k})$.

Preuve. — Il suffit de démontrer la proposition dans le cas où p égal un, car l'intersection d'un nombre fini d'ouverts de \mathbf{R}_+^n du type $\Lambda_{\beta_1, \dots, \beta_n}$ contient un ouvert de ce type. Notons

$$(A_{1j_1}) = (A_j) = (a_1, \dots, a_n; j).$$

Le lemme (1.1.8) implique l'existence d'un nombre fini de multi-indices E_1, \dots, E_s tels que :

$$\{E \in \mathbf{N}^n \times \{1, \dots, m\} / L(E) > L(A_j)\} = \bigcup_{k=1}^s E_k + \mathbf{N}^n.$$

Il existe une constante $\alpha > 0$ telle que pour toute forme positive L' de coefficients $(l_1 + \delta_1, \dots, l_n + \delta_n; \lambda_1, \dots, \lambda_m)$ telle que $\delta_1, \dots, \delta_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m$ soient inférieurs à α , on ait

$$L'(E_k) > L'(A_j), \quad 1 \leq k < s,$$

d'où l'implication

$$L(E) > L(A_j) \Rightarrow L'(E) > L'(A_j).$$

Considérons les multi-indices $E = (B, i) = (b_1, \dots, b_n; i)$ supérieurs à (A_j) pour l'ordre défini par L et tels que $L(E) = L(A_j)$ c'est-à-dire

$$l_1 b_1 + \dots + l_n b_n = l_1 a_1 + \dots + l_n a_n.$$

Supposons $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_m < \alpha$; afin que

$$L'(B,i) - L'(A,j) = \delta_1(b_1 - a_1) + \dots + \delta_n(b_n - a_n) + \lambda_i - \lambda_j$$

soit strictement positif, il suffit que :

$i = j, \exists q, 1 \leq q \leq n, b_n = a_n, \dots, b_{q+1} = a_{q+1}, b_q \geq a_q + 1$
et

$$-\delta_1 a_1 - \dots - \delta_{q-1} a_{q-1} + \delta_q > 0$$

ou que :

$$i > j \quad \text{et} \quad -\delta_1 a_1 - \dots - \delta_n a_n + \lambda_i - \lambda_j > 0.$$

Puisque $(B,i) > (A,j)$ pour l'ordre défini par L , il suffit que

$$0 < (1 + a_q)\delta_q < \delta_{q+1} \quad (q=1, \dots, n-1),$$

$$(1 + a_n)\delta_n < \gamma = \inf \{ \lambda_{k+1} - \lambda_k; 1 \leq k \leq m-1 \} < \alpha,$$

donc il suffit que l'on ait :

$$0 < \delta_1 < \beta_1 \delta_2 < \dots < \beta_{n-1} \delta_n < \beta_n$$

avec

$$\beta_1 = \frac{1}{1 + a_1}, \dots, \quad \beta_{n-1} = \frac{1}{(1 + a_1) \dots (1 + a_{n-1})},$$

$$\beta_n = \frac{\gamma}{(1 + a_1) \dots (1 + a_n)}.$$

Remarquons que les inégalités précédentes impliquent que $\delta_1, \dots, \delta_n$ sont strictement inférieurs à α . \square

(1.1.11) DÉFINITION. — Soit \tilde{L} une forme linéaire sur \mathbf{R}^n de coefficients positifs non tous nuls (l_1, \dots, l_n) . Nous dirons qu'un ouvert V de \mathbf{R}_+^n est effilé pour la direction \tilde{L} s'il existe $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in (\mathbf{R}_+^*)^n$,

$$\Lambda_\beta = \{(l_1 + \delta_1, \dots, l_n + \delta_n) \in (\mathbf{R}_+^*)^n / 0 < \delta_1 < \beta_1 \delta_2 < \dots < \beta_{n-1} \delta_n < \beta_n\}$$

et une fonction continue $C : \Lambda_\beta \rightarrow \mathbf{R}_+^*$ tels que l'ouvert V contienne l'ouvert suivant de \mathbf{R}_+^n

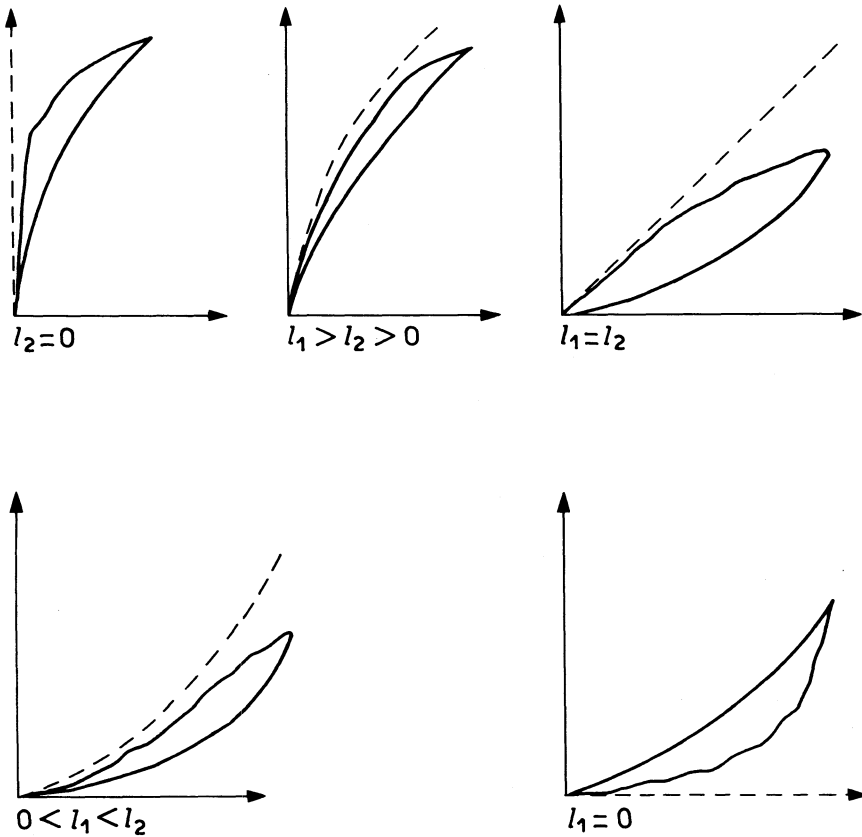
$$V_{\beta,C} = \{(\eta^1, \dots, \eta^l) / (l'_1, \dots, l'_n) \in \Lambda_\beta, \eta \in \mathbf{R}_+ \quad \text{et} \quad \eta < C(l'_1, \dots, l'_n)\}.$$

(1.1.12) Remarques. — Un ouvert effilé pour la direction \tilde{L} n'est pas vide. L'intersection de deux ouverts effilés dans la direction \tilde{L} est un ouvert effilé pour la direction \tilde{L} .

Soit V un ouvert effilé pour la direction \tilde{L} . Les poly-disques de \mathbf{k}^n de poly-rayon $\rho \in V$ et centrés à l'origine forment un système fondamental de voisinages de l'origine.

Pour tout $\rho \in V$, il existe un nombre réel $s(\rho)$, $0 \leq s(\rho) < 1$, tel que pour tout t , $s(\rho) < t < 1$, on ait $t \cdot \rho \in V$; en général il n'existe pas de $\rho \in V$ avec $s(\rho) = 0$.

Exemple. — Dans le cas $n = 2$, les ouverts effilés contiennent un des ensembles du type suivant :

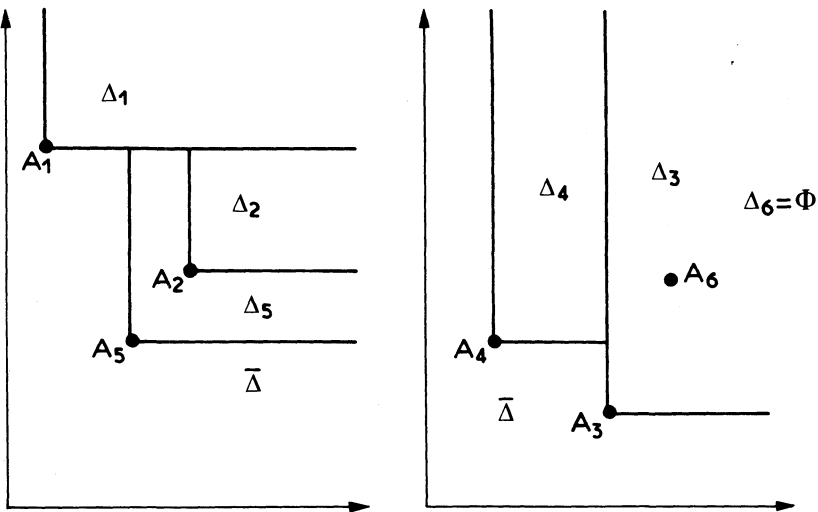


2. Énoncés des théorèmes de division.

(1.2.1) DÉFINITIONS ET NOTATIONS. — On appellera partition associée au p -uplet de $\mathbf{N}^n \times \{1, \dots, m\}$, $[(A_{1j_1}), \dots, (A_{pj_p})]$, la partition suivante de $\mathbf{N}^n \times \{1, \dots, m\}$, l'une des parties pouvant éventuellement être vide :

$$1 \leq k \leq p \quad \Delta_k = [(A_{kj_k}) + \mathbf{N}^n] \setminus \left[\bigcup_{k' < k} (A_{k'j_{k'}}) + \mathbf{N}^n \right]$$

$$\bar{\Delta} = \mathbf{N}^n \times \{1, \dots, m\} \setminus \bigcup_{1 \leq k \leq p} \Delta_k$$



Notons aussi qu'une somme indexée par l'ensemble vide est nulle.

Pour tout poly-rayon $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_n) \in (\mathbf{R}_+^*)^n$, on notera $\mathbf{k}(\rho)$ l'algèbre de séries convergentes en n variables $x = (x_1, \dots, x_n)$:

$$\mathbf{k}(\rho) = \left\{ f = \sum_{A \in \mathbf{N}^n} f_A x^A \in \mathbf{k}\{x\} / \sum |f_A| \rho^A < +\infty \right\}$$

qui munie de la norme $\|f\| = \sum |f_A| \rho^A$, est une algèbre de Banach.

Sauf mention contraire, on munira l'espace de Banach $\mathbf{k}(\rho)^m$ de la norme $\|(f_1, \dots, f_m)\| = \max_{1 \leq i \leq m} \|f_i\|$.

(1.2.2) THÉORÈME DE DIVISION PAR UNE FAMILLE DE VECTEURS. — Soient \tilde{L} une forme linéaire à coefficients positifs sur \mathbf{R}^n et (f^1, \dots, f^p) des vecteurs non

nuls de $\mathbf{k}\{x\}^m$, $x = \{x_1, \dots, x_n\}$. Désignons par (A_{kj}) l'exposant privilégié de f^k ($1 \leq k \leq p$) pour la direction $L = (\tilde{L}, 0)$ et supposons f^k monique. Notons $(\Delta_k, \bar{\Delta})$ la partition associée au p -uple précédent. On a l'algorithme de division suivant :

1) Pour tout $f \in \mathbf{k}\{x\}^m$ il existe des quotients uniques $g^k \in \mathbf{k}\{x\}$ ($1 \leq k \leq p$) et un reste unique $h \in \mathbf{k}\{x\}^m$ tels que :

$$(i) f = g^1 f^1 + \dots + g^p f^p + h$$

$$(ii) g^k = \sum_{(A_{kj}) \in \Delta_k} g_{A_{kj}}^k x^{A_{kj}} \quad (1 \leq k \leq p)$$

$$(iii) h = \sum_{(A_{kj}) \in \bar{\Delta}} h_{A_{kj}} x^{A_{kj}}$$

2) Pour tout $a \in (\mathbf{R}_+^*)^n$, quand $m = 1$ on peut prendre $a = 0$, l'ensemble des poly-rayons $\rho \in (\mathbf{R}_+^*)^n$ tels que :

(i) si $f \in \mathbf{k}(\rho)^m$ alors $g^k \in \mathbf{k}(\rho)$ ($1 \leq k \leq p$) et $h \in \mathbf{k}(\rho)^m$ et

$$(ii) \sum_{k=1}^p \|g^k\| \rho^{A_k} + \|h\| \leq 2m \rho^{-a} \|f\|,$$

contient un ouvert effilé pour la direction \tilde{L} .

Démonstration. — Au prochain paragraphe.

(1.2.3) PROPOSITION. — Avec les notations précédentes on a, si $h \neq 0$,

$$\exp_L f = \inf \{ \exp_L h, \exp_L g^k + \exp_L f^k \quad (1 \leq k \leq p) \}$$

et en particulier $\exp_L f \leq \exp_L h$.

Preuve. — En effet d'après la propriété (1.1.6b)

$$\exp_L g^k \cdot f^k = \exp_L g^k + \exp_L f^k \in \Delta_k$$

pour ($1 \leq k \leq p$) et, comme $(\bar{\Delta}, \Delta_k$ ($1 \leq k \leq p$)) forme une partition de $\mathbf{N}^n \times \{1, \dots, m\}$, ils sont tous distincts et distincts de $\exp_L h$. La propriété (1.1.6a) implique alors que l'exposant privilégié de la somme est le plus petit des exposants privilégiés. \square

(1.2.4) Remarque. — La famille (f^1, \dots, f^p) étant fixée, lorsque la forme positive $L = (\tilde{L}, 0)$ varie on n'obtient qu'un nombre fini d'algorithmes de division.

En effet chaque f^k ne peut admettre qu'un nombre fini d'exposants privilégiés possibles qui sont les sommets de l'enveloppe convexe de son diagramme de Newton (1.1.5), d'où un nombre fini de partitions possibles du type $(\bar{\Delta}, \Delta_k \ 1 \leq k \leq p)$ de $\mathbf{N}^n \times \{1, \dots, m\}$.

(1.2.5) THÉORÈME DE DIVISION PAR UN SOUS-MODULE. — Une forme linéaire positive \tilde{L} sur \mathbf{N}^n et un sous-module \mathcal{M} de $\mathbf{k}\{x\}^m$, $x = (x_1, \dots, x_n)$ étant fixés, désignons par $E_L(\mathcal{M})$ et $F_L(\mathcal{M})$ l'ensemble des privilégiés de \mathcal{M} et l'escalier de \mathcal{M} pour la direction $L = (\tilde{L}, 0)$. Alors

1) Toute famille (f^1, \dots, f^p) de vecteurs de \mathcal{M} telle que

$$F_L(\mathcal{M}) \subset \{\exp_L f^1, \dots, \exp_L f^p\}$$

est un système de générateurs de \mathcal{M} .

2) Tout élément $f \in \mathbf{k}\{x\}^m$ est congru modulo \mathcal{M} à un unique élément de $\mathbf{k}\{x\}^m$ de la forme :

$$r(f) = \sum_{(A, i) \notin E_L(\mathcal{M})} h_{A, i} x^{A, i}$$

que nous appellerons reste de la division de f par \mathcal{M} . De plus pour tout $a \in (\mathbf{R}_+^*)^n$, (quand $m = 1$ on peut prendre $a = 0$) il existe un ouvert effilé $V = V(a)$ pour la direction \tilde{L} tel que pour tout poly-rayon $\rho \in V$ on ait :

$$r(f) \in \mathbf{k}(\rho)^m \quad \text{si} \quad f \in \mathbf{k}(\rho)^m \quad \text{et} \quad \|r(f)\| \leq 2m\rho^{-a} \|f\|.$$

3) Notons $A_i (1 \leq i \leq p)$ les éléments de $F_L(\mathcal{M})$ et h_i le reste de la division de x^{A_i} par \mathcal{M} . On appelle base standard de \mathcal{M} , pour la direction \tilde{L} , la famille $f_i = x^{A_i} - h_i, 1 \leq i \leq p$. Elle vérifie $\exp(f_i) = A_i, f_i \in \mathcal{M}$ et avec les notations de 2), $\forall a \in (\mathbf{R}_+^*)^n, a = 0$ si $m = 1, \forall \rho \in V(a), \|f_i\| \leq 2m\rho^{A_i - a}$.

4) Il existe un ouvert effilé V pour la direction \tilde{L} tel que pour tout $\rho \in V$, le sous-module de $\mathbf{k}(\rho)^m$ $\mathcal{M}(\rho) = \{f \in \mathcal{M} \text{ et } f \in \mathbf{k}(\rho)^m\}$ est fermé et facteur directeur de $\mathbf{k}(\rho)^m$.

Preuve. — Montrons comment ce théorème se déduit du précédent. L'unicité de 2) s'obtient de la manière suivante : s'il existait deux éléments distincts h et h' de la forme du reste et congrus modulo \mathcal{M} , par différence on aurait :

$$h - h' = \sum_{(A, i) \notin E_L(\mathcal{M})} (h_{A, i} - h'_{A, i}) x^{A, i},$$

$$h - h' \neq 0 \quad \text{d'où} \quad \exp_L(h - h') \in E_L(\mathcal{M})$$

et

$$\exp_L(h - h') \notin E_L(\mathcal{M})$$

ce qui est absurde.

Pour toute famille (f^1, \dots, f^p) de vecteurs de \mathcal{M} , l'algorithme de division permet d'écrire tout $f \in \mathbf{k}(x)^m$:

$$f = \sum_{k=1}^p g^k f^k + \sum_{(A, i) \in \bar{\Delta}} h_{A,i} x^{A,i}$$

si $\{\exp f^1, \dots, \exp f^p\} \supset F_L(\mathcal{M})$, $\bar{\Delta} \cap E_L(\mathcal{M}) = \emptyset$, le reste de la division de f par f^1, \dots, f^p est alors le reste de la division de f par \mathcal{M} ; en particulier il est nul si $f \in \mathcal{M}$. L'inégalité sur les normes est celle du théorème (1.2.2). Le 3) est immédiat.

Le 4) s'obtient en remarquant que $\mathcal{M}(\rho)$ est le supplémentaire topologique du sous-espace :

$$H(\rho) = \left\{ h = \sum_{(A, i) \notin E_L(\mathcal{M})} h_{A,i} x^{A,i} \in \mathbf{k}(\rho)^m \right\}$$

dans $\mathbf{k}(\rho)^m$. \square

(1.2.6.) PRÉSENTATION D'ALGÈBRES ANALYTIQUES ET NOTATIONS. — Considérons l'algèbre analytique $\mathbf{K} = \mathbf{k}\{t_1, \dots, t_q\}/J$, d'après le théorème précédent il existe un ouvert effilé W de \mathbf{R}^q tel que pour tout $\mu \in W$, $\mathbf{K}_\mu = \mathbf{K}(\mu)/J(\mu)$ soit une $\mathbf{k}(\mu)$ algèbre de Banach.

Pour tout poly-rayon $\rho \in \mathbf{R}_+^n$ on forme, $x = \{x_1, \dots, x_n\}$,

$$\mathbf{K}_\mu(\rho) = \left\{ f = \sum_{A \in \mathbf{N}^n} f_A x^A / f_A \in \mathbf{K}_\mu \text{ et } \sum_{A \in \mathbf{N}^n} \|f_A\| \rho^A < +\infty \right\}$$

qui, muni de la norme $\|f\| = \sum \|f_A\| \rho^A$ est une \mathbf{K}_μ -algèbre de Banach.

On munira $\mathbf{K}_\mu(\rho)^m$ de la norme suivante :

si $f = (f_1, \dots, f_n)$, $\|f\| = \max \{\|f_i\|, 1 \leq i \leq m\}$.

Si $\mathbf{K} = \mathbf{k}\{t\}/J$ où $t = (t_1, \dots, t_q)$, on notera :

$$\mathbf{K}\{x\} = \mathbf{k}\{t, x\}/J.\mathbf{k}\{t, x\}.$$

A tout $f \in \mathbf{K}\{x\}$, $f = \sum f_A x^A$, on associe $f(0) = \sum f_A(0) x^A \in \mathbf{k}\{x\}$ où $f_A(0)$ désigne la classe de f_A modulo l'idéal maximal de \mathbf{K} , classe qu'on identifie à un élément du corps \mathbf{k} .

(1.2.7) THÉORÈME DE DIVISION AVEC PARAMÈTRES PAR UNE FAMILLE DE VECTEURS. — Fixons une forme linéaire positive \tilde{L} sur \mathbf{R}^n , une \mathbf{k} -algèbre analytique $\mathbf{K} = \mathbf{k}\{t_1, \dots, t_q\}/\mathbf{J}$, et une famille (f^1, \dots, f^p) de vecteurs de $\mathbf{K}\{x\}^m$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, telle que chacun des $f^k(0)$ soit non nul. Notons pour tout k , $1 \leq k \leq p$, (A_{kj}) l'exposant privilégié de $f^k(0)$ pour la direction $\mathbf{L} = (\tilde{L}, 0)$ supposons $f^k(0)$ monique et désignons par $(\Delta_k, \bar{\Delta})$ la partition associée au p -uple précédent.

On a l'algorithme de division suivant :

1) Pour tout $f \in \mathbf{K}\{x\}^m$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, il existe des quotients uniques $g^k \in \mathbf{K}(x)$ ($1 \leq k \leq p$) et un reste unique $h \in \mathbf{K}(x)^m$ tels que :

$$(i) \quad f = g^1 f^1 + \dots + g^p f^p + h,$$

$$(ii) \quad g^k = \sum_{(A, j_k) \in \Delta_k} g_A^k x^{A - A_k} \quad \text{et} \quad g_A^k \in \mathbf{K},$$

$$(iii) \quad h = \sum_{(A, j) \in \bar{\Delta}} h_{A, j} x^{A, j} \quad \text{et} \quad h_{A, j} \in \mathbf{K}.$$

2) Pour tout $a \in (\mathbf{R}_+^*)^n$, quand $m = 1$ on peut prendre $a = 0$, il existe un ouvert effilé pour la direction \tilde{L} , V de $(\mathbf{R}_+^*)^n$ et une fonction continue $\varepsilon : V \rightarrow \mathbf{R}_+^*$ tels que pour tout $\rho \in V$ et tout $\mu \in (\mathbf{R}_+^*)^q$ tel que \mathbf{K}_μ soit une algèbre de Banach et $|\mu| \leq \varepsilon(\rho)$, ($|\mu|$ désignant la somme des composantes de μ), [la condition sur $|\mu|$ disparaît si $f_k = f_k(0)$ ($1 \leq k \leq p$)]:

(i) Si $f \in \mathbf{K}_\mu(\rho)^m$ alors $g^k \in \mathbf{K}_\mu(\rho)$, $1 \leq k \leq p$ et $h \in \mathbf{K}_\mu(\rho)^m$ et

$$(ii) \quad \sum_{k=1}^p \|g^k\| \rho^{A_k} + \|h\| \leq 2m \rho^{-a} \|f\|.$$

Démonstration. — Au prochain paragraphe.

(1.2.8) THÉORÈME (platitude et division). — Une forme linéaire positive \tilde{L} sur \mathbf{R}^n , une \mathbf{k} -algèbre analytique $\mathbf{K} = \mathbf{k}\{t_1, \dots, t_q\}/\mathbf{J}$ et un sous-module \mathcal{M} de $\mathbf{K}\{x\}^m$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, étant fixés; désignons par $\mathcal{M}(0)$ le sous-module image de $\mathcal{M} \hat{\otimes}_{\mathbf{k}} \mathbf{k}$ dans $\mathbf{k}\{x\}^m$. Soit (f^1, \dots, f^p) une famille d'éléments de \mathcal{M} telle que :

$$F_L(\mathcal{M}(0)) \subset \{\exp_L f^1(0), \dots, \exp_L f^p(0)\}, \quad L = (\tilde{L}, 0).$$

Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) Le module $M = \mathbf{K}\{x\}^m / \mathcal{M}$ est \mathbf{K} -plat.

(ii) Pour toute $f \in \mathbf{K}\{x\}^m$, le reste de la division de f par la famille (f^1, \dots, f^p) est nul si, et seulement si $f \in \mathcal{M}$.

Démonstration. — Notons \mathfrak{M} l'idéal maximal de K . La condition (i) est équivalente à la condition $\mathcal{M} \cap \mathfrak{M} K\{x\}^m \subset \mathfrak{M} \mathcal{M}$ (voir Annexe). Si (ii) est vraie, toute $f \in \mathcal{M}$ s'écrit, selon l'algorithme de division

$$f = \sum_{i=1}^p q_i f_i; \quad \text{si} \quad f \in \mathfrak{M} K\{x\}^m, \quad f(0) = 0$$

donc par (1.2.2)

$$q_i(0) = 0 \quad \text{et} \quad q_i \in \mathfrak{M} \quad \text{d'où} \quad f \in \mathfrak{M} \mathcal{M}.$$

Supposons (i) vraie. Considérons le K -module \mathcal{H} des $h \in \mathcal{M}$ qui sont leur propre reste dans la division par (f^1, \dots, f^k) si (ii) n'était pas vraie \mathcal{H} ne serait pas réduit à $\{0\}$ et d'après le théorème de Krull il existerait un plus grand entier r tel que $\mathcal{H} \subset \mathfrak{M}^r \mathcal{M}$. Soit $h \in \mathcal{H}$ tel que $h \notin \mathfrak{M}^{r+1} \mathcal{M}$ d'après le théorème (1.2.5) $h(0) = 0$ car il appartient à $\mathcal{M}(0)$ et il est son propre reste dans la division par $(f^1(0), \dots, f^p(0))$; d'après (i) il existe $s_i \in \mathfrak{M}$ et $h_i \in \mathcal{M}$ tels que $h = \sum_{i=1}^q s_i h_i$. Divisons h_i par (f^1, \dots, f^p) . on obtient $h_i = \sum q_i^k f^k + l_i$ et $l_i \in \mathcal{H}$, puis $h = \sum (\sum s_i q_i^k) f^k + \sum s_i l_i$ et $h = \sum s_i l_i$ car le reste de la division de h par (f^1, \dots, f^p) est unique. Comme $l_i \in \mathcal{H} \subset \mathfrak{M}^r \mathcal{M}$, $s_i \in \mathfrak{M}$ et $h \notin \mathfrak{M}^{r+1}$ c'est une contradiction, donc $\mathcal{H} = \{0\}$ et (ii) est vraie. \square

(1.2.10) *Remarque.* — Voici un exemple qui montre que le recours à l'ouvert effilé V et au coefficient ρ^{-a} ne sont pas superflus dans le point 2) du théorème (1.2.7).

Prenons $K = \mathbf{k}$, $n = 2$, $\tilde{L} = (1,1)$, $m = 2$, $p = 2$

$$f^1 = \begin{pmatrix} y \\ 3x \end{pmatrix}, \quad f^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ x - 2y \end{pmatrix}.$$

Si on choisit ρ de la forme $\rho = (\eta, \eta)$, pour tout η , $0 < \eta < 1$, bien que le vecteur

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{1 - \frac{x}{2\eta}} \end{pmatrix} \text{ appartienne à } \mathbf{k}(\eta, \eta)^2, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{1 - \frac{2y}{2\eta}} \end{pmatrix}$$

son reste dans la division par (f^1, f^2) n'appartient pas à $\mathbf{k}(\eta, \eta)^2$.

Pour que la division dans $\mathbf{k}(\rho)^2$ soit possible il faut donc choisir ρ de la

forme $\rho = (\eta, \eta^{1+\varepsilon})$ avec $\varepsilon > 0$. Considérons alors la division évidente

$$\begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} = f^1 - \begin{pmatrix} 0 \\ 3x \end{pmatrix}$$

si $\rho = (\eta, \eta^{1+\varepsilon})$, quel que soit $\varepsilon > 0$ et $\eta < 1$ on n'a jamais l'inégalité

$$(2 \times 2)\eta^{1+\varepsilon} \geq \eta^{1+\varepsilon} + 3\eta,$$

cependant on a l'inégalité avec le coefficient $\eta^{-\varepsilon}$

$$(2 \times 2(\eta)^{-\varepsilon})\eta^{1+\varepsilon} \geq \eta^{1+\varepsilon} + 3\eta.$$

3. Démonstration du théorème de division.

Nous n'écrivons que la démonstration du théorème de division avec paramètres (1.2.7) qui utilise le théorème (1.2.5). Pour obtenir celle des théorèmes (1.2.2) et (1.2.5) il suffit dans ce qui suit de remplacer partout l'algèbre de Banach K_μ par le corps \mathbf{k} .

(1.3.1) Soient (l_1, \dots, l_n) les coefficients de la forme linéaire \tilde{L} et $a \in \mathbf{R}_+^{*n}$, $a = 0$ si $m = 1$; si $m = 1$, on choisit $\lambda = \lambda_1 = 0$; si $m \neq 1$, soit α la constante réelle strictement positive donnée par la proposition (1.1.11), on choisit $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbf{R}_+^m$ tels que

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_m < \inf \{ \alpha, l_1 a_1 + \dots + l_n a_n \}.$$

(1.3.2.) LEMME. — Il existe des nombres réels strictement positifs β_1, \dots, β_n , un ouvert non vide de \mathbf{R}_+^{*n}

$$\Lambda = \Lambda_{\beta_1, \dots, \beta_n} = \{ (l_1 + \delta_1, \dots, l_n + \delta_n) / 0 < \delta_1 < \beta_1, \delta_2 < \dots < \beta_{n-1}, \delta_n < \beta_n \}$$

et une fonction continue $b : \Lambda \rightarrow \mathbf{R}_+^*$ tels que :

Pour tout $P' \in \Lambda$ représentant une forme linéaire \tilde{L}' et $L' = (\tilde{L}', \lambda)$ on ait $L'(B, i) - L'(A_{k,j,k}) \geq b(P')$ pour chaque k compris entre 1 et p et chaque (B, i) supérieur à $(A_{k,j,k})$ pour l'ordre défini par la forme positive $L = (\tilde{L}, 0)$ sur $\mathbf{N}^n \times \{1, \dots, m\}$.

Preuve. — La proposition (1.1.10) nous fournit β_1, \dots, β_n tels que, avec les mêmes hypothèses, on ait $L'(B, i) - L'(A_{k,j,k}) > 0$. Pour chaque $P' \in \Lambda$ il n'existe qu'un nombre fini de multi-indices (B, i) tels que $L'(B, i) - L'(A_{k,j,k}) < 1$, car les coefficients de la forme linéaire \tilde{L}' sont

strictement positifs. On désigne par $b(P')$ la borne inférieure de la différence $L'(B, i) - L'(A_{kj})$ et de 1, k variant de 1 à p , (B, i) étant supérieur à (A_{kj}) pour l'ordre défini par L et $L'(A_{kj})$ étant inférieur à 1. Il est facile de voir que lorsque P' parcourt Λ , $b(P')$ est une fonction continue de P' . \square

(1.3.4) Avec les notations de (1.2.6) on munit le module libre $K_\mu(\rho)^m$ de la famille de normes suivantes qui sont toutes uniformément équivalentes :

pour tout $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in (\mathbf{R}_+^n)^m$, on pose pour tout

$$(f_1, \dots, f_m) \in K_\mu(\rho)^m, \quad N_\alpha(f_1, \dots, f_m) = \sum_{j=1}^m \|f_j\| \rho^{\alpha_j}$$

si $\rho_j < 1$, ($1 \leq j \leq n$) on a :

$$\inf(\rho^{\alpha_j}) \cdot \max \|f_j\| \leq N_\alpha(f_1, \dots, f_m) \leq m \cdot \max \|f_j\|.$$

Muni de N_α , $K_\mu(\rho)^m$ est un espace de Banach que nous noterons $K(\mu, \rho, \alpha)$.

(1.3.5)LEMME. — $(\bar{\Delta}, \Delta_k (1 \leq k \leq p))$ ayant été définie en (1.2.1). Pour tous $\rho \in (\mathbf{R}_+^*)^n$, $\alpha \in (\mathbf{R}_+^n)^m$ et $\mu \in (\mathbf{R}_+^*)^q$ tel que K soit une algèbre de Banach, considérons les espaces de Banach suivants :

$$H(\bar{\Delta}) = \left\{ h \in K(\mu, \rho, \alpha) / h = \sum_{(A, i) \in \bar{\Delta}} h_{A, i} X^{A, i} \right\}$$

$$H(\Delta_k) = \left\{ g^k \in K(\mu)(\rho) / g^k = \sum_{(A, j_k) \in \Delta_k} g_A^k X^{A - A_k} \right\}$$

$$H(\mu, \rho, \alpha) = \bigoplus_{k=1}^p H(\Delta_k) \oplus H(\bar{\Delta}) \text{ muni de la norme suivante :}$$

$$\|(g^1, \dots, g^p; h)\| = \sum_{k=1}^p \|g^k\| \rho^{A_k + \alpha_{j_k}} + \|h\|.$$

Le morphisme

$$\varphi_1 : H(\mu, \rho, \alpha) \rightarrow K(\mu, \rho, \alpha)$$

$$(g^1, \dots, g^p; h) \rightarrow \sum_{k=1}^p g^k X^{A_{kj_k}} + h$$

est une isométrie d'espaces de Banach.

Preuve. — Évidente. \square

(1.3.6) *Perturbation de φ_1 .* — Nous utiliserons les notations suivantes : \tilde{L}' désignera une forme linéaire représentée par un élément

$$P' = (l'_1, \dots, l'_n) \in \Lambda; \quad L' = (\tilde{L}', \lambda).$$

A toute \tilde{L}' on associe une solution $\alpha' = (\alpha'_1, \dots, \alpha'_m) \in (\mathbf{R}_+^n)^m$ du système d'équations $\tilde{L}'(\alpha'_i) = \lambda_i (1 \leq i \leq m)$ et à toute \tilde{L}' et à tout nombre réel positif η on associe le poly-rayon $\rho' = (\eta^{l'_1}, \dots, \eta^{l'_n})$. Remarquons, qu'avec ces notations, pour tout multi-indice $(A, i) \in \mathbf{N}^n \times \{1, \dots, m\}$ on a l'égalité

$$\eta^{L(A, i)} = \rho'^A \cdot \rho'^{\alpha'_i}.$$

Pour tous $\mu_0 \in \mathbf{R}_+^q$ et $\mu \in \mathbf{R}_+^q$, la notation $\mu \leq \mu_0$ signifiera que le poly-disque de poly-rayon μ est inclus dans le poly-disque de poly-rayon μ_0 .

Ceci posé, on choisit un poly-rayon $\mu_0 \in \mathbf{R}_+^q$ et un nombre réel positif η_0 tels que :

(i) K_{μ_0} soit une algèbre de Banach,

(ii) pour tout $P' \in \Lambda$, les vecteurs f^1, \dots, f^p soient dans $K_{\mu_0}(\rho'_0)^m$, donc dans $K(\mu_0, \rho'_0, \alpha')$.

Comme (A_{kj}) est l'exposant privilégié de $f^k(0)$, $1 \leq k \leq p$, et que $f^k(0)$ a été supposé monique, on a la décomposition suivante :

$$f^k = x^{A_{kj}} + \mathcal{U}_k + \mathcal{V}_k$$

avec

$$\mathcal{U}_k = \sum_{f_{A, i}^k \neq 0} f_{A, i}^k x^{A, i} \quad \text{et} \quad \mathcal{V}_k = \sum_{f_{A, i}^k = 0} f_{A, i}^k x^{A, i}$$

et

$$(A, i) > (A^k, j^k).$$

Pour tout $\mu \in \mathbf{R}_+^q$, $\mu \leq \mu_0$, tel que K_μ soit une algèbre de Banach, pour tout $\eta \in \mathbf{R}_+$, $\eta \leq \eta_0$, pour toute forme linéaire \tilde{L}' représentée par un point $P' \in \Lambda$, ρ' et α' associés à \tilde{L}' et à η , et pour tout k , on a $\mathcal{V}_k \in K(\mu, \rho', \alpha')$ et $\mathcal{U}_k \in K(\mu, \rho', \alpha')$.

On peut donc considérer le morphisme

$$\varphi_2 : H(\mu, \rho', \alpha') \rightarrow K(\mu, \rho', \alpha')$$

$$(g^1, \dots, g^p; h) \rightarrow \sum_{1 \leq k \leq p} g^k (\mathcal{U}_k + \mathcal{V}_k).$$

(1.3.7) LEMME. — Il existe une fonction continue $C : \Lambda \rightarrow \mathbf{R}_+^*$ définissant l'ouvert effilé pour la direction \tilde{L} :

$$V = \{\rho' = (\eta^l, \dots, \eta^l) \in (\mathbf{R}_+^*)^n / (l'_1, \dots, l'_n) \in \Lambda; 0 < \eta \leq \eta_0 \text{ et } \eta < C(P')\}$$

et il existe une fonction continue $\varepsilon : V \rightarrow \mathbf{R}_+^*$ telles que pour tout $\rho' \in V$ et tout $\mu \in (\mathbf{R}_+^*)^q$, tel que $|\mu| < \varepsilon(\rho')$ et K_μ soit une algèbre de Banach, la norme du morphisme φ_2 correspondant soit inférieure à 1/2.

Preuve. — Nous allons majorer la norme de φ_2 et définir les fonctions continues C et ε au cours du calcul suivant :

$$\begin{aligned} \|\varphi_2\| &= \sup \frac{\|\Sigma(\mathcal{U}_k + \mathcal{V}_k)g^k\|}{\Sigma\|\mathcal{G}^k\|\rho'^{A_k + \alpha_{j_k}} + \|h\|} \\ &\leq p \max_{1 \leq k \leq p} (\|\mathcal{U}_k\| + \|\mathcal{V}_k\|)\rho'^{-A_k - \alpha_{j_k}} \end{aligned}$$

or

$$\|\mathcal{U}_k\| \cdot \rho'^{-A_k - \alpha_{j_k}} = \sum_{\substack{f_{A,i}^k(0) \neq 0 \\ L'(A,i) > L'(A_k, j_k)}} \|f_{A,i}^k\|_\mu \cdot \eta^{L'(A,i) - L'(A_k, j_k)}$$

d'après le lemme (1.3.2), $L'(A,i) - L'(A_k, j_k) \geq b(P')$ d'où

$$\begin{aligned} \|\mathcal{U}_k\| \cdot \rho'^{-A_k - \alpha_{j_k}} &\leq \left(\frac{\eta}{\eta_0}\right)^{b(P')} \|\mathcal{U}_k\|_{K(\mu_0, \rho'_0, \alpha)} \rho_0'^{-A_k - \alpha_{j_k}} \\ &\leq \frac{1}{4p} \quad \text{si} \quad \eta \leq C(P') \in \mathbf{R}_+^* \end{aligned}$$

où l'on définit la fonction continue sur Λ , $P' \mapsto C(P')$, par l'égalité suivante :

$$C(P')^{b(P')} = \frac{1}{4p} \eta_0^{b(P')} \min_{1 \leq k \leq p} [\eta_0^{L'(A_k, j_k)} (\|\mathcal{U}_k\|_{K(\mu_0, \rho'_0, \alpha)})]^{-1}.$$

$\mathcal{U}_k \neq 0.$

D'autre part si $\mu \leq s\mu_0$, avec $s \in \mathbf{R}^*$ et $s \leq 1$,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{V}_k\| &\leq s \|\mathcal{V}_k\|_{K(\mu_0, \rho', \alpha)}, \quad \text{car} \quad \mathcal{V}_k(0) = 0, \\ \|\mathcal{V}_k\| \rho'^{-A_k - \alpha_{j_k}} &\leq \frac{1}{4p} \quad \text{si} \quad \mu \leq s(\rho')\mu_0 \end{aligned}$$

où l'on définit la fonction continue, $\rho' \mapsto s(\rho')$, par l'égalité suivante :

$$s(\rho') = \frac{1}{4p} \min_{1 \leq k \leq p} (\|\mathcal{V}_k\|_{K(\mu_0, \rho', \alpha)} \rho'^{-A_k - \alpha_{j_k}})^{-1}.$$

On peut également trouver une fonction continue $\rho' \rightarrow \varepsilon(\rho') \in \mathbf{R}_+$ telle que $|\mu| \leq \varepsilon(\rho')$ implique $\mu \leq s(\rho')\mu_0$.

On conclut que :

si $\rho' \in V$ et $|\mu| \leq \varepsilon(\rho')$ alors $\|\varphi_2\| \leq 1/2$. \square

(1.3.8). — Comme l'isométrie

$$\varphi_1 : H(\mu, \rho', \alpha') \rightarrow K(\mu, \rho', \alpha')$$

entre ces mêmes espaces de Banach est de conorme égale à un, nous venons de montrer que le morphisme de division par la famille (f^1, \dots, f^p) :

$$\begin{aligned} \varphi_1 + \varphi_2 : H(\mu, \rho', \alpha') &\rightarrow K(\mu, \rho', \alpha') \\ (g^1, \dots, g^p; h) &\rightarrow f = g^1 f^1 + \dots + g^p f^p + h \end{aligned}$$

est un isomorphisme de norme inférieure ou égale à 2.

Au début de la démonstration du théorème nous avons choisis λ_i tel que $\lambda_i < l_1 a_1 + \dots + l_n a_n$, $1 \leq i \leq m$, on en déduit que pour tout

$$P' = (l'_1, \dots, l'_n) \in \Lambda, \quad \lambda_i < l'_1 a_1 + \dots + l'_n a_n,$$

donc pour tout $\eta \in \mathbf{R}_+^*$ et $\eta < 1$

$$\rho'^{\alpha_i} = \eta^{\lambda_i} > \eta^{l'_1 a_1 + \dots + l'_n a_n} = \rho'^a.$$

Par ailleurs nous avons remarqué que la norme habituelle de $K_\mu(\rho')^m$ et la norme N_x , sont reliées par les inégalités suivantes, pour tout $(e_1, \dots, e_m) \in K_\mu(\rho')^m$:

$$\max_{1 \leq i \leq m} \|e_i\| \rho'^a \leq N_x(e_1, \dots, e_m) \leq m \cdot \max_{1 \leq i \leq m} \|e_i\|.$$

On en déduit l'inégalité cherchée, avec les normes habituelles

$$\sum_{k=1}^p \|g^k\| \rho'^{\Lambda_k} + \|h\| \leq 2m \rho'^{-a} \|f\|.$$

Le théorème de division dans $K\{x_1, \dots, x_n\}^m$ s'obtient par passage à la limite inductive sur ρ' et μ .

4. Applications du théorème de division.

(1.4.1) DÉFINITION (B. Malgrange [21]). — Soient K une \mathbf{k} -algèbre analytique, $x = (x_1, \dots, x_n)$ et φ un morphisme de $K\{x\}$ -modules libres φ :

$K\{x\}^r \rightarrow K\{x\}^m$. On appelle scission de φ toute application K -linéaire $\psi : K\{x\}^m \rightarrow K\{x\}^r$ telle que $\varphi \circ \psi \circ \varphi = \varphi$.

(1.4.2) THÉORÈME (Platitude et scissions). — Avec les notations précédentes et $K = \mathbf{k}\{t_1, \dots, t_q\}/J$, les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) Il existe une scission ψ de φ ;

(ii) coker φ est K -plat ;

(iii) Il existe une scission ψ de φ , il existe $a \in (\mathbf{R}_+^*)^n$, un ouvert effilé V de \mathbf{R}_+^n et une fonction continue $\varepsilon : V \rightarrow \mathbf{R}_+^*$ tels que

$$\forall \rho \in V, \quad \forall \mu \in \mathbf{R}_+^q, \quad |\mu| < \varepsilon(\rho) \quad \text{et } K_\mu \text{ algèbre de Banach,}$$

φ et ψ induisent des morphismes K -linéaires continus $\bar{\varphi}, \bar{\psi} :$

$$K_\mu(\rho)^r \begin{array}{c} \xleftarrow{\bar{\varphi}} \\ \xrightarrow{\bar{\psi}} \end{array} K_\mu(\rho)^m$$

vérifiant $\bar{\varphi} \circ \bar{\psi} \circ \bar{\varphi} = \bar{\varphi}$ et $\|\bar{\psi}\| \leq \rho^{-a}$.

Démonstration. — Il est clair que (iii) implique (i). Montrons que (i) implique (ii). Supposons qu'il existe une scission ψ de φ ; $\varphi \circ \psi$ est alors un projecteur de $K\{x\}^m$, il en résulte que $\text{Im } \varphi = \text{Im } (\varphi \circ \psi)$ et $\ker (\varphi \circ \psi)$ sont des facteurs directs supplémentaires de $K\{x\}^m$. Comme $K\{x\}^m$ est K -plat, coker φ , qui est K -isomorphe à $\ker (\varphi \circ \psi)$, est K -plat.

Montrons que (ii) implique (iii). Supposons que coker φ soit K -plat. Soient e_1, \dots, e_r les images par φ des vecteurs de la base canonique de $K\{x\}^r$, notons $\mathcal{M} = \text{Im } \varphi$ le sous-module de $K\{x\}^m$ qu'ils engendrent. $\mathcal{M}(0) = \mathcal{M} \otimes_K \mathbf{k}$ est un sous-module de $\mathbf{k}\{x\}^m$. On choisit une forme positive $L = (\tilde{L}, 0)$ sur $\mathbf{R}^n \times \{1, \dots, m\}$ et une famille (f^1, \dots, f^p) d'éléments de \mathcal{M} telle que les exposants privilégiés de $f^k(0) \exp_L f^k(0)$, $1 \leq k \leq p$, décrivent l'escalier $F_L(\mathcal{M}(0))$ de $\mathcal{M}(0)$; on fixe ensuite des éléments λ_j^k de $K\{x\}$ tels que $f^k = \sum_{j=1}^r \lambda_j^k e_j$.

D'après les théorèmes (1.2.7) et (1.2.8) toute $f \in K\{x_1, \dots, x_n\}^m$ s'écrit de manière unique et K -linéaire

$$f = \sum_{j=1}^r \left(\sum_{k=1}^p g^k \lambda_j^k \right) e_j + h,$$

g^k et h vérifiant certaines conditions et $h = 0$ si, et seulement si,

$f \in \mathcal{M} = \text{Im } \varphi$. Posons

$$\psi(f) = \left(\sum_{k=1}^p g^k \lambda_j^k, 1 \leq j \leq r \right), \quad f \in \mathbf{K}\{x\}^m,$$

ψ ainsi définie est une scission de φ . Pour obtenir la majoration, on applique le théorème (1.2.7) et on « grossit » a pour se dispenser d'écrire les coefficients $2m$ et $\|\lambda_j^k\|$. \square

(1.4.3) COROLLAIRE. — Soient A et B deux matrices de types (p, m) et (r, m) à coefficients dans $\mathbf{k}\{x\}$, $x = (x_1, \dots, x_n)$. Le morphisme φ défini par

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbf{k}^p \times \mathbf{k}\{x\}^r &\rightarrow \mathbf{k}\{x\}^m \\ (\delta, \gamma) &\rightarrow A \cdot \delta + B \cdot \gamma \end{aligned}$$

admet une scission ψ \mathbf{k} -linéaire vérifiant $\varphi \circ \psi \circ \varphi = \varphi$.

De plus il existe $a \in \mathbf{R}_+^n$ et un ouvert effilé V de \mathbf{R}_+^n tels que pour tout $\rho \in V$, φ et ψ induisent $\bar{\varphi}$ et $\bar{\psi}$:

$$\mathbf{k}^p \times \mathbf{k}(\rho)^r \xrightleftharpoons[\bar{\psi}]{\bar{\varphi}} \mathbf{k}(\rho)^m$$

avec $\bar{\varphi} \circ \bar{\psi} \circ \bar{\varphi} = \bar{\varphi}$ et $\|\bar{\psi}\| \leq \rho^{-a}$.

Preuve. — Si $r = 0$, on choisit une base de k^p telle que les images e_1, \dots, e_s des s premiers vecteurs forment une base de $\text{Im } \varphi$, et que pour une direction fixée $L = (\bar{L}, 0)$ la partition associée $(\Delta_k, \bar{\Delta})$ soit telle que $\Delta_k \neq \emptyset$, $1 \leq k \leq s$.

Le morphisme $\psi : \mathbf{k}\{x\}^m \rightarrow \mathbf{k}^p$ qui à f associe

$$(g_1(0), \dots, g_s(0), 0, \dots, 0) \in \mathbf{k}^p,$$

où g_1, \dots, g_s désignent les quotients de la division de f par e_1, \dots, e_s , vérifie les conditions du corollaire.

Si $r > 0$, notons

$$\begin{aligned} \varphi_1 : \mathbf{k}^p &\rightarrow \mathbf{k}\{x\}^m & \text{et} & & \varphi_2 : \mathbf{k}\{x\}^r &\rightarrow \mathbf{k}\{x\}^m. \\ \delta &\rightarrow A \cdot \delta & & & \gamma &\rightarrow B \cdot \gamma. \end{aligned}$$

Soient ψ_2 une scission de φ_2 donnée par le théorème précédent,

$$\mathcal{H} = \text{Im} (\text{Id} - (\varphi_2 \circ \psi_2))$$

un supplémentaire de $\text{Im } \varphi_2$ dans $\mathbf{k}\{x\}^m$, $E = \varphi_1^{-1}(\mathcal{H}) \xrightarrow{i} \mathbf{k}^p$, φ_1' la

restriction de φ_1 à E et ψ_1 la scission de φ'_1 que nous venons de construire dans le cas $r = 0$. Alors le morphisme \mathbf{k} -linéaire

$$\begin{aligned} \psi : \mathbf{k}\{x\}^m &= \mathcal{H} \oplus \text{Im } \varphi_2 \rightarrow \mathbf{k}^p \times \mathbf{k}\{x\}^2 \\ (y_1 + y_2) &\rightarrow (\psi_1(y_1), \psi_2(y_2)) \end{aligned}$$

vérifie les conditions du corollaire, car $\text{Im } \varphi = \text{Im } \varphi'_1 \oplus \text{Im } \varphi_2$. \square

(1.4.4) THÉORÈME (H. Hironaka, M. Lejeune, B. Teissier [16]). — Soient $\varphi^* : \mathcal{O}_S \rightarrow \mathcal{O}_X$ un morphisme de \mathbf{k} -algèbres analytiques locales et M un \mathcal{O}_X -module de type fini donc un \mathcal{O}_S -module via φ^* .

Il existe une unique \mathbf{k} -algèbre analytique \mathcal{O}_P , quotient de \mathcal{O}_P et munie de la surjection canonique $\lambda_P^* : \mathcal{O}_S \rightarrow \mathcal{O}_P$, vérifiant les conditions suivantes :

- (i) $M \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_P$ est un \mathcal{O}_P -module plat,
- (ii) pour tout morphisme d'algèbres analytiques $\lambda^* : \mathcal{O}_S \rightarrow \mathcal{O}_P$ tel que $M \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_T$ soit un \mathcal{O}_T -module plat, il existe un et un seul morphisme $\mu^* : \mathcal{O}_P \rightarrow \mathcal{O}_T$ tel que $\lambda^* = \mu^* \circ \lambda_P^*$.

Remarquons que l'unicité de μ^* est automatiquement vérifiée car λ_P^* est surjectif.

(1.4.5) DÉFINITION. — L'algèbre locale \mathcal{O}_P s'appelle le platificateur du \mathcal{O}_S -module M . Dans le cas où M égale \mathcal{O}_X , notons $\varphi : X \rightarrow S$ le morphisme de germes d'espaces analytiques correspondant à φ^* et P le sous-germe d'espace analytique de S d'algèbre locale \mathcal{O}_P , on appelle platificateur du morphisme φ le morphisme $\varphi_P : X \times_S P \rightarrow P$ obtenu par le changement de base $P \hookrightarrow S$.

Démonstration du théorème. — Si $M = 0$ alors $\mathcal{O}_P = \mathcal{O}_S$, supposons donc $M \neq 0$.

(1.4.5) LEMME. — Soit $\mathbf{k}\{t\} \xrightarrow{\chi} \mathcal{O}_S \rightarrow 0$, $t = (t_1, \dots, t_q)$, une présentation de \mathcal{O}_S , M est un $\mathbf{k}\{t\}$ -module via χ . Tout morphisme $\bar{\lambda}^* : \mathbf{k}\{t\} \rightarrow \mathcal{O}_T$ tel que $M \otimes_{\mathbf{k}\{t\}} \mathcal{O}_T$ soit \mathcal{O}_T -plat se factorise par \mathcal{O}_S .

Preuve. — A l'aide du lemme de Nakayama, on montre que l'annulateur de tout élément $j = \bar{\lambda}^*(i)$ tel que $\chi(i) = 0$, n'est pas inclus dans l'idéal maximal de \mathcal{O}_T . \square

On en déduit que si M considéré comme $\mathbf{k}\{t\}$ -module, admet \mathcal{O}_P comme platificateur, \mathcal{O}_P est aussi le platificateur de M considéré comme \mathcal{O}_S -module.

Dans ce qui suit on peut donc se restreindre au cas $O_S = \mathbf{k}\{t\}$. Comme O_X est isomorphe à un quotient de $\mathbf{k}\{t, x\}$, $x = (x_1, \dots, x_n)$ pour n assez grand, on peut présenter M sous la forme $M = \mathbf{k}\{t, x\}^m / \mathcal{M}$.

(1.4.6) Désignons par $\mathcal{M}(0)$ l'image de $\mathcal{M} \otimes_{\mathbf{k}\{t\}} \mathbf{k}$ dans $\mathbf{k}\{x\}^m$. Après avoir choisi une forme positive $L = (\tilde{L}, 0)$ sur $\mathbf{R}^n \times \{1, \dots, m\}$ on définit le $\mathbf{k}\{t\}$ -module

$$\mathcal{H} = \{h \in \mathcal{M} / h = \sum h_{A,i} x^{A,i} \text{ (A,i) } \notin E_L(\mathcal{M}(0))\}.$$

Notons J l'idéal de $\mathbf{k}\{t\}$ formé par les coefficients $h_{A,i}$ des éléments h de \mathcal{H} et O_P l'algèbre analytique $O_P = \mathbf{k}\{t\}/J$.

Pour tout morphisme $\lambda^* : \mathbf{k}\{t\} \rightarrow O_T$ le théorème (1.2.8) implique que le module $M \otimes_{\mathbf{k}\{t\}} O_T = O_T\{x\}^m / \text{Im}(\mathcal{M} \otimes_{\mathbf{k}\{t\}} O_T)$ est O_T -plat si, et seulement si, on a :

$$\forall h \in \mathcal{H} \quad \text{et} \quad \forall (A,i) \in \mathbf{N}^n \times \{1, \dots, m\} \setminus E_L(\mathcal{M}(0)), \quad \lambda^*(h_{A,i}) = 0,$$

soit si, et seulement si, λ^* se factorise par O_P . \square

(1.4.7) PROPOSITION (Calcul de O_P). — *Supposons $O_S = \mathbf{k}\{t\}$ et*

$$M = \mathbf{k}\{t, x\}^m / \mathcal{M} \neq 0, \quad t = (t_1, \dots, t_q), \quad x = (x_1, \dots, x_n),$$

on désigne par $\mathcal{M}(0)$ l'image de $\mathcal{M} \otimes_{\mathbf{k}\{t\}} \mathbf{k}$ dans $\mathbf{k}\{x\}^m$. On choisit successivement une forme positive L , $L = (\tilde{L}, 0)$ sur $\mathbf{R}^n \times \{1, \dots, m\}$, des générateurs f^1, \dots, f^p de \mathcal{M} tels que l'escalier $F_L(\mathcal{M}(0))$ soit contenu dans l'ensemble $\{\exp_L f^k(0); 1 \leq k \leq p \text{ et } f^k(0) \neq 0\}$, et un système de générateurs des relations entre les $f^1(0), \dots, f^p(0)$ qu'on note

$$(g_j^1, \dots, g_j^p) \quad 1 \leq j \leq r.$$

On forme les éléments $m_j = g_j^1 f^1 + \dots + g_j^p f^p$, $1 \leq j \leq r$, puis on calcule le reste

$$h_j = \sum_{(A,i) \notin E_L(\mathcal{M}(0))} h_{A,i} x^{A,i}$$

de la division de m_j par \mathcal{M} . Les

$$h_{A,i}^j \in \mathbf{k}\{t\} \quad \{1 \leq j \leq r, (A,i) \in \mathbf{N}^n \times \{1, \dots, m\} \setminus E_L(\mathcal{M}(0))\}$$

ainsi trouvés engendrent l'idéal J et $O_P = \mathbf{k}\{t\}/J$.

Nous calculerons explicitement le platificateur d'un morphisme à l'aide de cette proposition au § 4 du chapitre 4.

Preuve. — Notons $K = k\{t\}/J$, d'après (1.4.6) il suffit de voir que $M \otimes_{k\{t\}} K$ est K -plat. Notons f^1, \dots, f^p les images de f^1, \dots, f^p dans $K\{x\}^m$ et \mathcal{M}_K le sous-module qu'ils engendrent, on a $M \otimes_{k\{t\}} K = K\{x\}^m / \mathcal{M}_K$. Par construction toute relation entre les générateurs $f^1(0), \dots, f^p(0)$ de $\mathcal{M}(0)$ s'étend en une relation entre les générateurs f^1, \dots, f^p de \mathcal{M}_K donc $M \otimes_{k\{t\}} K$ est plat. (Voir l'Annexe.) \square

CHAPITRE 2

RÉSOLUTION DE CERTAINS SYSTÈMES D'ÉQUATIONS ANALYTIQUES

Introduction.

M. Artin a démontré dans [1] que tout système d'équations analytiques sur $\mathbf{k} = \mathbf{R}$ ou \mathbf{C} :

$$R(x,t) = 0 \quad \text{où} \quad x = (x_1, \dots, x_n), \quad t = (t_1, \dots, t_q), \quad R \in \mathbf{k}\{x,t\}^p$$

qui admet une solution formelle :

$$\hat{x}_1 = \hat{\phi}_1(t_1, \dots, t_q) \in \mathbf{k}[[t_1, \dots, t_q]]$$

...

$$\hat{x}_n = \hat{\phi}_n(t_1, \dots, t_q) \in \mathbf{k}[[t_1, \dots, t_q]] \quad \text{tels que} \quad R(\hat{x}, t) = 0$$

admet aussi une solution convergente.

Cependant, le théorème de M. Artin ne permet pas de préciser, dans le cas où le système admet une solution formelle \hat{x} telle que

$$\hat{x}_1 = \hat{\phi}_1(t_1) \in \mathbf{k}[[t_1]]$$

ne dépende que de la variable t_1 , s'il existe une solution convergente ayant la même propriété. Cette propriété n'est pas toujours satisfaite, voir un contre-exemple dans [10].

Notre prochain chapitre nécessitant une réponse affirmative à une question de ce type, nous allons augmenter les hypothèses et malheureusement alourdir l'énoncé du théorème.

Notre démonstration utilise le théorème de division du chapitre 1 et s'inspire d'un exposé, non publié, de Jean-Louis Verdier au Séminaire de 1973 de l'École Supérieure et de [13].

1. Énoncés du théorème.

(2.1.1) *Notations, définitions et premier énoncé.* — Soient

$$\begin{aligned} z &= (z_1, \dots, z_q), & y &= (y_1, \dots, y_q), \\ \Phi &= (\Phi_1, \dots, \Phi_r), & \Psi &= (\Psi_1, \dots, \Psi_r), \end{aligned}$$

quatre familles de variables ; $\mathbf{k} = \mathbf{R}$ ou \mathbf{C} et $R \in \mathbf{k}\{z, y, \Phi, \Psi\}^p$.

On appelle solution du système d'équations analytiques (R), tout couple (φ, ψ) où $\varphi \in \mathbf{k}\{z\}^r$, $\psi \in \mathbf{k}\{z, y\}^r$ avec $\varphi(0) = \psi(0) = 0$ et tel qu'en substituant dans R on ait $R(z, y, \varphi, \psi) = 0$.

On appelle solution à l'ordre $n \in \mathbf{N}$ tout couple (φ_n, ψ_n) où $\varphi_n \in \mathbf{k}\{z\}^r$, $\psi_n \in \mathbf{k}\{z, y\}^r$ avec $\varphi(0) = \psi(0) = 0$ et tel qu'en substituant dans R on ait :

$$R(z, y, \varphi_n, \psi_n) \in \mathfrak{M}^{n+1} \cdot \mathbf{k}\{z, y\}^p, \mathfrak{M} \text{ désignant l'idéal maximal de } \mathbf{k}\{z\}.$$

Remarquons que si (φ'_n, ψ'_n) est congru modulo (\mathfrak{M}^{n+1}) à une solution à l'ordre n (φ_n, ψ_n) , alors (φ'_n, ψ'_n) est aussi solution à l'ordre n .

On dit qu'une solution à l'ordre $n + 1$ $(\varphi_{n+1}, \psi_{n+1})$ prolonge une solution à l'ordre n (φ_n, ψ_n) si les deux couples sont congrus modulo (\mathfrak{M}^{n+1}) .

THÉORÈME. — *Tout système d'équations analytiques (R) admettant une solution à l'ordre n_0 et tel que pour tout entier $n \geq n_0$, toute solution à l'ordre n qui prolonge la solution à l'ordre n_0 donnée se prolonge en une solution à l'ordre $n + 1$, admet une solution convergente qui prolonge la solution à l'ordre n_0 donnée.*

(2.1.2) *Formulation plus générale.* — Soient

$$\begin{aligned} z &= (z_1, \dots, z_q), & y &= (y_1, \dots, y_q), \\ \Phi &= (\Phi_1, \dots, \Phi_r), & \Psi &= (\Psi_1, \dots, \Psi_r) \end{aligned}$$

quatre familles de variables, $\mathbf{k} = \mathbf{R}$ ou \mathbf{C} , Q une algèbre analytique quotiente de $\mathbf{k}\{z\}$ et $R \in Q\{y, \Phi, \Psi\}^p$. Soit \bar{z} la classe de z dans Q, par abus de notations, on écrira $R = R(\bar{z}, y, \Phi, \Psi)$.

On appelle solution du système (R) tout couple (φ, ψ) où

$$\varphi \in Q^r, \quad \psi \in Q\{y\}^r \quad \text{avec} \quad \varphi(0) = \psi(0) = 0$$

et tel qu'en substituant dans R on ait

$$R(\bar{z}, y, \varphi, \psi) = 0.$$

Désignons par \mathfrak{M} l'idéal maximal de Q et fixons un idéal I de Q . On appellera solution modulo $(I \cap \mathfrak{M}^{n+1})$ ou en abrégé solution à l'ordre $n \in \mathbb{N}$, tout couple (φ_n, ψ_n) où $\varphi_n \in Q^r$, $\psi_n \in Q\{y\}^r$ et $\varphi_n(0) = \psi_n(0) = 0$, tel qu'en substituant dans R on ait :

$$R(\bar{z}, y, \varphi, \psi) \in (I \cap \mathfrak{M}^{n+1}) Q\{y\}^p.$$

Une solution à l'ordre $n + 1$ prolonge une solution à l'ordre n lorsqu'elles sont congrues modulo $(I \cap \mathfrak{M}^{n+1})$.

THÉORÈME. — Même énoncé que précédemment en (2.1.1).

(2.1.3) *Remarque.* — Le théorème (2.1.1) est un cas particulier du théorème (2.1.2). Remarquons que le théorème (2.1.2) ne se déduit immédiatement ni du théorème (2.1.1) ni du théorème (2.1.2) avec l'hypothèse $I = \mathfrak{M}$.

(2.1.4) *Idée de la démonstration.* — On veut construire une suite convergente dans $Q^r \times Q\{y\}^r$ de solutions (φ_n, ψ_n) à l'ordre n . En normalisant on se réduit au cas où $(\varphi_n, \psi_n) \in I^r \times I\{y\}^r$. A l'aide du théorème de division on choisit une « bonne » présentation de I comme $\mathbf{k}\{z\}$ -module qui permet d'une part de mettre les solutions (φ_n, ψ_n) sous une forme canonique et d'autre part de choisir un ouvert effilé de poly-rayons ρ tels que les normes induites sur $I(\rho)$ par sa présentation et par son inclusion dans $Q(\rho)$ soient comparées avec précision. On utilise la forme canonique des solutions (φ_n, ψ_n) pour imposer des inégalités de normes dans $I(\rho)$ et on utilise la structure d'algèbre de Banach de $Q(\rho)$ pour fabriquer une série majorante.

2. Préparation et normalisation.

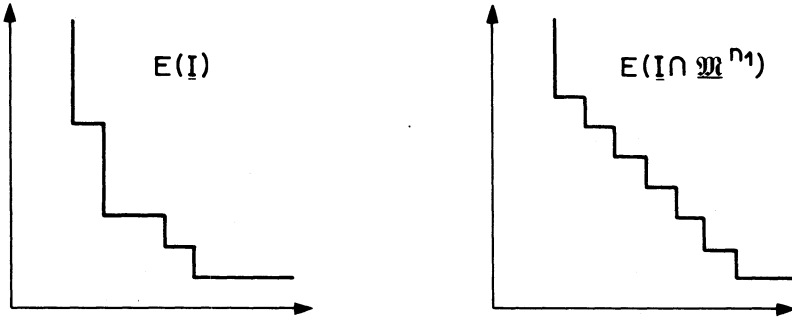
Notons $\underline{\mathfrak{M}}$ l'idéal maximal de $\mathbf{k}\{z\}$.

(2.2.1) **LEMME.** (Artin-Rees). — *Il existe un entier n_1 tel que l'on ait l'égalité : $\underline{\mathfrak{M}}^n(I \cap \mathfrak{M}^{n_1}) = I \cap \mathfrak{M}^{n+n_1}$ pour tout entier n .*

Donnons, à titre de curiosité, une preuve utilisant les escaliers.

Preuve. — Soit χ l'application canonique $\chi : \mathbf{k}\{z\} \rightarrow Q$, notons \underline{I}

l'idéal $\chi^{-1}(\underline{I})$ de $\mathbf{k}\{z\}$, puis considérons l'escalier de \underline{I} pour la direction diagonale $(1,1,\dots,1)$:



Posons $n_1 = \sup \{|A|/A \in F(\underline{I})\}$. On a $E(\underline{I} \cap \mathfrak{M}^{n_1}) = E(\underline{I}) \cap E(\mathfrak{M}^{n_1})$. Notons (f_1, \dots, f_m) la base standard de $\underline{I} \cap \mathfrak{M}^{n_1}$ pour la direction diagonale (voir (1.2.5)3)). Posons $\exp f_j = A_j$ $1 \leq j \leq m$, on a $|A_j| = n_1$.

Pour tout $f \in \underline{I} \cap \mathfrak{M}^{n+n_1}$ l'algorithme de division donne $f = \sum_{j=1}^m \lambda_j f_j$ avec $\exp(f) = \inf(\exp(\lambda_j) + \exp(f_j))$ et en particulier

$$|\exp(\lambda_j)| \geq |\exp(f)| - n_1 \geq n + n_1 - n_1 = n \quad \text{pour tout } j,$$

d'où $\lambda_j \in \mathfrak{M}^n$ et $f \in \mathfrak{M}^n (\underline{I} \cap \mathfrak{M}^{n_1})$. Comme l'inclusion

$$\mathfrak{M}^n \cdot (\underline{I} \cap \mathfrak{M}^{n_1}) \subset \underline{I} \cap \mathfrak{M}^{n+n_1}$$

est triviale on conclut à l'égalité, puis par passage au quotient à l'aide du morphisme χ on obtient l'égalité cherchée :

$$\underline{I} \cap \mathfrak{M}^{n+n_1} = \mathfrak{M}^n (\underline{I} \cap \mathfrak{M}^{n_1}) = \mathfrak{M}^n (\underline{I} \cap \mathfrak{M}^{n_1}).$$

(2.2.2) *Première normalisation.* — Dans l'énoncé du théorème translatons de n_1 l'ordre des solutions, c'est-à-dire que nous rebaptisons solution à l'ordre n une solution modulo $\underline{I} \cap \mathfrak{M}^{n+n_1+1} = \mathfrak{M}^{n+1} (\underline{I} \cap \mathfrak{M}^{n_1})$. Et, pour simplifier, rebaptisons \underline{I} l'idéal $\underline{I} \cap \mathfrak{M}^{n_1}$. Nous considérerons donc le nouvel idéal \underline{I} comme un $\mathbf{k}\{z\}$ -module muni de sa filtration canonique $(\mathfrak{M}^n \cdot \underline{I})$.

(2.2.3) *Présentation de \underline{I} et comparaison des normes.* — Les images $\chi(f_1), \dots, \chi(f_m)$ induisent une présentation $\underline{I} = \mathbf{k}\{z\}^m / \mathcal{M}$ de \underline{I} , où \mathcal{M} est le sous-module de $\mathbf{k}\{z\}^m$ des relations entre les $\chi(f_1), \dots, \chi(f_m)$. De même $\underline{I}\{y\} = \mathbf{k}\{z,y\}^m / \mathcal{M}\mathbf{k}\{z,y\}$. On en déduit le diagramme commutatif suivant

de $k\{z\}$ -modules où les deux suites horizontales sont exactes :

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \rightarrow & \mathcal{M} & \rightarrow & k\{z,y\}^m & \begin{array}{c} \xrightarrow{\chi} \\ \xleftarrow{\tau} \end{array} & I\{y\} & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow i & & \\
 & & & & k\{z,y\} & \begin{array}{c} \xrightarrow{\chi'} \\ \xleftarrow{\sigma} \end{array} & Q\{y\} & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

Notons τ et σ les sections de χ et χ' construites à l'aide de divisions comme en (1.2.5).

(2.2.4) PROPOSITION. — Pour tout $a \in (\mathbf{R}_+^*)^q$ il existe un ouvert effilé de $(\mathbf{R}_+^*)^q$ dans la direction $\tilde{L} = (1, \dots, 1)$, $V = V(a)$ tel que pour tout $\rho \in V$ et tout $\mu \in (\mathbf{R}_+^*)^q$ le diagramme (2.2.3) induise le diagramme suivant d'espaces de Banach :

$$\begin{array}{ccc}
 k(\rho, \mu)^m & \begin{array}{c} \xrightarrow{\chi} \\ \xleftarrow{\tau} \end{array} & I_\rho(\mu) \\
 \downarrow & & \downarrow i \\
 k(\rho, \mu) & \begin{array}{c} \xrightarrow{\chi'} \\ \xleftarrow{\sigma} \end{array} & Q_\rho(\mu)
 \end{array}$$

et pour tous f et f' dans $I_\rho(\mu)$ on a l'implication

$$\|\tau(f)\| \leq \|\tau(f')\| \Rightarrow \|i(f)\| \leq \|i(f')\| \rho^{-a}.$$

Preuve. — Rappelons d'abord que les notations $I_\rho(\mu)$ et $Q_\rho(\mu)$ ont été définies en (1.2.5). Remarquons que si nous ne demandons pas à $a \in (\mathbf{R}_+^*)^q$ d'être arbitraire, cette proposition serait une conséquence immédiate du théorème (1.4.2) d'existence de scissions. Notons V_1 l'intersection des trois ouverts effilés dans la direction L que le théorème (1.2.7) associe à la division dans $k\{y\}\{z\}$ par la famille (f_1, \dots, f_m) et aux sections σ et τ afin que $\|\sigma\| \leq 2$ et $\|\tau\| \leq 2m\rho^{-a/2}$ pour $\rho \in V_1$.

Pour tout $\rho \in V_1$ on a les inégalités suivantes :

1° $\|f_j\| \leq 2\rho^{A_j}$ $1 \leq j < p$ (voir (1.2.5)3).

2° $\forall f \in I_\rho(\mu), \|i(f)\| \leq 2m \left(\max_j \rho^{A_j} \right) \|\tau(f)\|$; en effet, si

$$\tau(f) = (q_1, \dots, q_m), \quad \tilde{f} = \sum_{j=1}^m q_j f_j, \quad \chi'(\tilde{f}) = i(f)$$

on a

$$\|i(f)\| \leq \|\tilde{f}\| \leq \sum_{j=1}^m \|q_j\| \cdot \|f_j\| < m \cdot \max_j \|q_j\| \cdot \|f_j\|.$$

3° $\forall f' \in I_\rho(\mu)$, $\|\tau(f')\| \leq 8m \rho^{-a/2} (\inf \rho^{A_j})^{-1} \|i(f')\|$; en effet en divisant $\sigma \circ i(f')$ par f_1, \dots, f_m on obtient

$$\sigma \circ i(f') = \sum_{j=1}^m q'_j f_j \quad \text{et} \quad \chi'(q'_1, \dots, q'_m) = f'$$

d'où

$$\|\tau(f')\| \leq 2m \rho^{-a/2} \|f'\| \leq 2m \rho^{-a/2} \max_j \|q'_j\|$$

$$\max_j \|q'_j\| \left(\inf_j \rho^{A_j} \right) \leq \sum_{j=1}^m \|q'_j\| \rho^{A_j} \leq 2 \|\sigma \circ i(f')\| \leq 4 \|i(f')\|.$$

Donc si $\|\tau(f)\| \leq \|\tau(f')\|$ on déduit que

$$\|i(f)\| \leq 16m^2 \left(\max_j \rho^{A_j} \right) \left(\inf_j \rho^{A_j} \right)^{-1} \rho^{-a/2} \|i(f')\|.$$

Définissons la famille d'ouverts effilés :

$$V_{\varepsilon, \omega} = \{ \rho = (\eta^1, \dots, \eta^q) \in V_1 / \eta < \omega \quad \text{et} \quad 1 < l_j < 1 + \varepsilon \\ \text{pour} \quad 1 \leq j \leq q. \}$$

Comme pour tout $j = 1, \dots, m$, $|A_j| = n_1$, si $\rho \in V_{\varepsilon, \omega}$, ρ^{A_j} est compris entre η^{n_1} et $\eta^{(1+\varepsilon)n_1}$ donc en choisissant $\varepsilon = \frac{|a|}{4n_1}$,

$$\max \rho^{A_j} / \inf \rho^{A_j} \leq \eta^{-n_1 \varepsilon} \leq \rho^{-a/4}.$$

On choisit ω tel que $16m^2 \leq \omega^{-|a|/4} \leq \rho^{-|a|/4}$.

Donc pour tout $\rho \in V = V_{\varepsilon, \omega}$ on obtient

$$\|i(f)\| \leq \rho^{-a} \|i(f')\|. \quad \square$$

(2.2.5) *Description de la filtration de I.* — La présentation $I = \mathbf{k}\{z\}^m / \mathcal{M}$ ayant été fixée précédemment, il s'en suit l'égalité

$$\underline{\mathfrak{M}}^n \cdot I = (\underline{\mathfrak{M}}^n \mathbf{k}\{z\}^m / (\underline{\mathfrak{M}}^n)) \cap \mathcal{M},$$

où $(\underline{\mathfrak{M}}^n)$ désigne le sous-module $(\underline{\mathfrak{M}}^n) \mathbf{k}\{z\}^m$.

Soit $L = (\tilde{L}, 0)$ la forme positive sur $\mathbf{R}^q \times \{1, \dots, m\}$ de coefficient

$(1, \dots, 1; 0)$. Il est immédiat que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$E(\mathfrak{M}^n \cap \mathcal{M}) = E(\mathcal{M}) \cap E(\mathfrak{M}^n)$$

donc chaque élément de $\mathfrak{M}^n \cdot I$ est l'image par χ' d'un unique élément h de $\mathbf{k}\{z\}^m$ de la forme suivante :

$$h = \sum_{\substack{(A,i) \notin E(\mathcal{M}) \\ |A| \geq n}} h_{A,i} z^{A,i}.$$

Notons I'_n l'espace vectoriel de dimension finie sur \mathbf{k} des éléments de $\mathbf{k}\{z\}^m$:

$$h = \sum_{\substack{(A,i) \notin E(\mathcal{M}) \\ |A| = n}} h_{A,i} z^{A,i}.$$

On en déduit la somme directe :

$$\mathfrak{M}^n \cdot I = \chi(I'_n) \oplus (\mathfrak{M}^{n+1} \cdot I).$$

On définit $I'_n\{y\}$ de manière analogue.

(2.2.6) *Deuxième normalisation et préparation.* — Quitte à effectuer un changement de variables qui transformerait

$$R(\bar{z}, y, \Phi, \Psi) \quad \text{en} \quad R(\bar{z}, y, \Phi - \varphi_0, \Psi - \psi_0),$$

on peut supposer que le couple $(0,0)$ est solution à l'ordre 0. Toute solution à l'ordre n (φ_n, ψ_n) , $n \in \mathbb{N}$, qui prolonge la solution 0 est alors congrue à $(0,0)$ modulo I , c'est-à-dire $\varphi_n \in I^r$ et $\psi_n \in I\{y\}^{r'}$.

Toute solution à l'ordre n qui prolonge la solution nulle est congrue modulo $\mathfrak{M}^{n+1} \cdot I$ à une solution à l'ordre n de la forme $(\bar{\varphi}_n, \bar{\psi}_n)$ avec

$$\bar{\varphi}_n = \chi(\varphi_n), \quad \bar{\psi}_n = \chi(\psi_n), \quad \varphi_n \in \left(\bigoplus_{k=1}^n I_k \right)^r \quad \text{et} \quad \psi_n \in \left(\bigoplus_{k=1}^n I_k\{y\} \right)^{r'}.$$

Dans la suite de ce chapitre, nous ne considérerons que des solutions de cette forme.

Une solution à l'ordre n , $(\bar{\varphi}_n, \bar{\psi}_n)$ se prolonge en une solution à l'ordre $n+1$ si et seulement si il existe $\delta_{n+1} \in (I'_{n+1})^r$ et $\gamma_{n+1} \in (I'_{n+1}\{y\})^{r'}$ tels que $\bar{\delta}_{n+1} = \chi(\delta_{n+1})$, $\bar{\gamma}_{n+1} = \chi(\gamma_{n+1})$ et $(\bar{\varphi}_n + \bar{\delta}_{n+1}, \bar{\psi}_n + \bar{\gamma}_{n+1})$ soit solution à l'ordre $n+1$.

Une solution $(\bar{\varphi}_n, \bar{\psi}_n)$ à l'ordre n étant choisie, on notera $\bar{R}_{n+1} = \chi(R_{n+1})$ le terme en $\chi(I'_{n+1}\{y\}^p)$ de

$$R(\bar{z}, y, \varphi_n, \psi_n) \in (\mathfrak{M}^{n+1} I\{y\})^p = (\chi(I'_{n+1}\{y\}) \oplus (\mathfrak{M}^{n+2} I\{y\}))^p.$$

3. Construction de la solution.

(2.3.1) Désignons par A et B les matrices suivantes à coefficients dans $\mathbf{k}\{y\}$:

$$A = \frac{\partial R}{\partial \Phi}(0, y, 0, 0), \quad B = \frac{\partial R}{\partial \Psi}(0, y, 0, 0).$$

Posons $\tilde{R}(\bar{z}, y, \Phi, \Psi) = R(\bar{z}, y, \Phi, \Psi) - A \cdot \Phi - B \cdot \Psi$, les égalités suivantes sont satisfaites :

$$\begin{aligned} \tilde{R}(0, y, 0, 0) &= 0 \\ \frac{\partial \tilde{R}}{\partial \Phi}(0, y, 0, 0) &= 0 \\ \frac{\partial \tilde{R}}{\partial \Psi}(0, y, 0, 0) &= 0. \end{aligned}$$

(2.3.2) LEMME. — Pour tout $n \in \mathbf{N}$, considérons l'application

$$\begin{aligned} \beta_n : I_n^r \times I_n^s\{y\}^r &\rightarrow I_n^s\{y\}^p \\ (\delta_n, \gamma_n) &\rightarrow A \cdot \delta_n + B \cdot \gamma_n. \end{aligned}$$

Une solution $(\bar{\varphi}_n, \bar{\psi}_n)$ à l'ordre n se prolonge en une solution à l'ordre $n + 1$ si et seulement si $R_{n+1} \in \text{Im}(\beta_{n+1})$.

Dans ce cas si

$$R_{n+1} = -\beta_{n+1}(\delta_{n+1}, \gamma_{n+1}),$$

le couple $(\bar{\varphi}_n + \bar{\delta}_{n+1}, \bar{\psi}_n + \bar{\gamma}_{n+1})$ est solution à l'ordre $n + 1$.

Preuve. — A l'aide de la formule de Taylor et en négligeant les termes d'ordres supérieurs à $n + 1$, on exprime que

$$R(\bar{z}, y, \bar{\varphi}_n, \bar{\psi}_n) \in \mathfrak{M}^{n+1}(I^p)$$

et que

$$R(\bar{z}, y, \bar{\varphi}_n + \bar{\delta}_n, \bar{\psi}_n + \bar{\gamma}_n) \in \mathfrak{M}^{n+2}(I^p).$$

(2.3.3) Construction de la scission ε_n de β_n . — Soient

$$\begin{aligned} \beta : \mathbf{k}^r \times \mathbf{k}\{y\}^r &\rightarrow \mathbf{k}\{y\}^p \\ (\delta, \gamma) &\rightarrow A \cdot \delta + B \cdot \gamma \end{aligned}$$

et $\varepsilon = (\varepsilon^1, \varepsilon^2)$ la scission de β construite en (1.4.3).

En considérant la base $\{z^{A,i}; (A,i) \notin E_L(\mathcal{M}), |A|=n\}$ de I'_n , β_n s'écrit

$$\beta_n(\Sigma \delta_{A,i} z^{A,i}, \Sigma \gamma_{A,i} z^{A,i}) = \Sigma \beta(\delta_{A,i}, \gamma_{A,i}) z^{A,i}$$

donc $\varepsilon_n : I'_n\{y\}^p \rightarrow I'_n{}^r \times I'_n\{y\}^r$

$$\Sigma \theta_{A,i} z^{A,i} \rightarrow (\Sigma \varepsilon^1(\theta_{A,i}) z^{A,i}, \Sigma \varepsilon^2(\theta_{A,i}) z^{A,i})$$

est une scission de β_n .

(2.3.4) *Construction de la solution.* — On définit par récurrence sur l'entier n , la suite $(\bar{\varphi}_n, \bar{\psi}_n)$ $\bar{\varphi}_n = \chi(\varphi_n)$, $\bar{\psi}_n = \chi(\psi_n)$ de solutions à l'ordre n qui se prolongent l'une l'autre, par les relations :

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= \psi_0 = 0 \\ (\delta_{n+1}, \gamma_{n+1}) &= -\varepsilon_{n+1}(\mathbf{R}_{n+1}(\bar{z}, y, \bar{\varphi}_n, \bar{\psi}_n)) \\ \varphi_{n+1} &= \varphi_n + \delta_{n+1} \quad \text{et} \quad \psi_{n+1} = \psi_n + \gamma_{n+1} \\ \varphi_{n+1} &= \delta_1 + \dots + \delta_{n+1}, \quad \psi_{n+1} = \gamma_1 + \dots + \gamma_{n+1}. \end{aligned}$$

(2.3.5) PROPOSITION. — Soient $c \in \mathbf{R}_+^*$, $c < 1$ et

$$\gamma = (c, \dots, c) \in (\mathbf{R}_+^*)^{q+q'+r+r'}$$

le poly-rayon d'un poly-disque sur lequel converge un représentant de \mathbf{R} dans $\mathbf{k}(z, y, \Phi, \Psi)^p$.

Il existe deux poly-rayons $\rho \in (\mathbf{R}_+^*)^q$ et $\mu \in (\mathbf{R}_+^*)^{q'}$ tel que

(i) $|\rho| < c$ et $|\mu| < c$;

(ii) $\forall n \in \mathbf{N} \quad i \circ \chi(\varphi_n) \in \mathbf{Q}^r, \quad i \circ \chi(\psi_n) \in \mathbf{Q}_\rho(\mu)^{r'}$

$$\|i \circ \chi(\varphi_n)\| < c \quad \text{et} \quad \|i \circ \chi(\psi_n)\| < c.$$

$i \circ \chi$ désignant l'un des morphismes composés

$$\begin{aligned} (\mathbf{k}\{z\}^m)^r &\rightarrow \mathbf{I}^r &&\rightarrow \mathbf{Q}^r \\ (\mathbf{k}\{z, y\}^m)^r &\rightarrow \mathbf{I}\{y\}^r &&\rightarrow \mathbf{Q}\{y\}^r. \end{aligned}$$

La proposition implique que les séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} i \circ \chi(\delta_n) \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} i \circ \chi(\gamma_n)$$

convergent dans \mathbf{Q}_ρ^r et $\mathbf{Q}_\rho(\mu)^{r'}$; soient φ et ψ leurs sommes. Le couple

$(\varphi, \psi) \in Q^r \times Q\{y\}^r$ est solution du système (R) et prolonge la solution nulle $(0,0)$ fixée initialement. La démonstration du théorème est donc ramenée à la démonstration de la proposition.

Démonstration de la proposition :

(2.3.6) *Choix du poly-rayon* μ . — A l'aide du corollaire (1.4.3) on fixe $\mu \in (\mathbf{R}_+^*)^q$ tel que : $|\mu| < c$.

β et ε induisent des morphismes d'espaces de Banach entre $\mathbf{k}^r \times \mathbf{k}(\mu)^r$ et $\mathbf{k}(\mu)^p$.

Soit N la norme de ε .

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $I'_n \subset \mathbf{k}\{z\}^m$ et $I'_n\{y\} \subset \mathbf{k}\{z, y\}^m$; donc pour tout $\rho \in (\mathbf{R}_+^*)^q$, β_n et ε_n induisent des morphismes

$$(I'_n \cap \mathbf{k}(\rho)^m)^r \times (I'_n\{y\} \cap \mathbf{k}(\rho, \mu)^m)^r \rightleftharpoons (I'_n\{y\} \cap \mathbf{k}(\rho, \mu)^m)^p$$

d'espaces de Banach. La norme de ε_n est N .

Comme $(\delta_n, \gamma_n) = -\varepsilon_n(\mathbf{R}_{n+1})$, $\mathbf{R}_{n+1} = -(A\delta_n + B\gamma_n)$, on obtient

$$\|\delta_n\| \leq N \|A\delta_n + B\gamma_n\|$$

puis en sommant

$$\begin{aligned} \|\varphi_{n+1}\| &= \|\delta_1\| + \dots + \|\delta_n\| \\ &\leq N \|\mathbf{R}_{n+1}\| + N \|A\varphi_n + B\psi_n\| = N \|\mathbf{R}_{n+1} - (A\varphi_n + B\psi_n)\| \end{aligned}$$

de même

$$\|\psi_{n+1}\| \leq N \|\mathbf{R}_{n+1} - (A\varphi_n + B\psi_n)\|.$$

(2.3.7) *Série majorante auxiliaire.* — Notons F la série en $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_q)$ et v à coefficients réels positifs définie de la façon suivante :

Soit $(\tilde{\mathbf{R}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{R}}_p)$ un représentant de $\tilde{\mathbf{R}}$ dans $\mathbf{k}\{z, y, \Phi, \Psi\}^p$ qui converge sur le poly-disque de poly-rayon (c, \dots, c)

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{R}}_i &= \sum_{H, J, K, L} \tilde{\mathbf{R}}_{i, H, J, K, L} z^H y^J \Phi^K \Psi^L, \\ F(\rho, v) &= \sum_{i=1}^p \sum_{H, J, K, L} |\tilde{\mathbf{R}}_{i, H, J, K, L}| \mu^J \rho^H v^{K+|L|}. \end{aligned}$$

Cette série converge dans le poly-disque de poly-rayon (c, \dots, c) et

satisfait aux relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \|\tilde{\mathbf{R}}\|_{Q,(\mu,v,\dots,v)}^\rho \leq F(\rho,v) \\ F(0,0) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial v}(0,0) = 0. \end{array} \right.$$

Les deux dernières relations provenant de (2.3.1).

(2.3.8) LEMME. — Il existe $a \in (\mathbf{R}_+^*)^q$, il existe $\rho \in V(a)$, l'ouvert effilé associé à a par la proposition (2.2.4), et il existe une suite de nombres réels positifs (v_n) tels que pour tout $n \in \mathbf{N}$ on ait

$$|\rho| < c, \quad v_n < c \quad \text{et} \quad v_{n+1} = N \rho^{-a} F(\rho, v_n).$$

Preuve. — Fixons $a = \left(\frac{1}{5q}, \dots, \frac{1}{5q}\right)$. Par définition d'un ouvert effilé, il existe des nombres rationnels l_1, \dots, l_q compris strictement entre 1 et 2, un entier M et un nombre positif η_1 tels que

$$\frac{Ml_i}{q} \in \mathbf{N}, \quad (1 \leq i \leq q), \quad \eta_1 < \frac{c}{q}, \quad \eta_1 < 1, \quad M \geq 2,$$

et tels que pour tout η compris entre 0 et η_1 on ait :

$$\rho(\eta) = (\eta^{5Ml_1}, \dots, \eta^{5Ml_q}) \in V(a).$$

Remarquons que $\rho(\eta)^a$ « divise » η^{2M} . Grâce aux relations (2.3.7) il existe deux séries en η et v , $H_1(\eta, v)$ et $H_2(\eta, v)$ convergentes sur le poly-disque de poly-rayon (η_1, c) telles que

$$N\rho(\eta)^{-a} F(\rho(\eta), v) = \eta^6 H_1(\eta, v) + v^2 H_2(\eta, v).$$

Posons

$$\begin{aligned} H(\eta, w) &= \eta^{-3} \cdot N\rho(\eta)^{-a} F(\rho(\eta), \eta^3 w) \\ &= \eta^3 H_1(\eta, \eta^3 w) + \eta^3 w^2 H_2(\eta, \eta^3 w); \end{aligned}$$

la fonction $w - H(\eta, w)$ vérifie les conditions du théorème des fonctions implicites. Donc il existe $\eta_0, 0 < \eta_0 < \eta_1$, tel que la suite définie par récurrence $w_0 = 0, w_{n+1} = H(\eta_0, w_n)$ soit bien définie et que $w_n < c$ pour tout n .

On en déduit que $a = \left(\frac{1}{5q}, \dots, \frac{1}{5q}\right) \in \mathbf{R}_+^{*q}$, $\rho = \rho(\eta_0) \in \mathbf{R}_+^{*q}$ et la suite $v_n = \eta_0^3 w_n$ vérifient les conditions du lemme. \square

(2.3.9). — Démontrons par récurrence sur n que

$$\|i \circ \chi'(\varphi_n)\|_{Q_\rho} \leq v_n < c \quad \text{et} \quad \|i \circ \chi'(\psi_n)\|_{Q_\rho(\mu)} \leq v_n < c.$$

En effet $\varphi_0 = \psi_0 = v_0 = 0$, supposons l'assertion vraie pour n , on obtient

$$\tilde{\mathbf{R}}(\bar{z}, y, i \circ \chi'(\varphi_n), \quad i \circ \chi'(\psi_n)) \in Q_\rho(\mu)$$

puis, d'après (2.3.6) et la proposition (2.2.4)

$$\begin{aligned} \|i \circ \chi'(\varphi_{n+1})\|_{Q_\rho} &\leq N\rho^{-a} \|\tilde{\mathbf{R}}(\bar{z}, y, i \circ \chi'(\varphi_n), i \circ \chi'(\psi_n))\|_{Q_\rho(\mu)} \\ &\leq N\rho^{-a} \|\tilde{\mathbf{R}}\|_{Q_\rho(\mu, (v_n, \dots, v_n))} \\ &\leq N\rho^{-a} F(\rho, v_n) = v_{n+1} \end{aligned}$$

de même $\|i \circ \chi'(\psi_{n+1})\|_{Q_\rho(\mu)} \leq v_{n+1}$. \square

CHAPITRE 3

STABILITÉ DES MORPHISMES PLATS

Introduction.

Soit T un espace analytique, c'est-à-dire un germe d'espace analytique, et I un idéal de l'algèbre analytique locale O_T , on notera $V(I)$ ou $\text{Spec}(O_T/I)$ le sous-espace analytique S de T d'algèbre O_T/I ; si I est de carré nul (respectivement de carré nul et de dimension finie sur \mathbf{k}) on dira que T est un épaissement (respectivement épaissement de longueur finie) de S . On dira que T est artinien si l'algèbre O_T est artinienne (i.e. \mathbf{k} -espace vectoriel de dimension finie).

Dans ce chapitre, nous montrons que tout morphisme plat et stable $f : X \rightarrow S$ vérifie la propriété suivante :

« tout diagramme commutatif à carrés cartésiens en traits pleins

$$\begin{array}{ccccc} X & \xleftarrow{\quad} & Y_0 & \xrightarrow{\quad} & Y_1 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \text{ plat} \\ S & \xleftarrow{\quad} & T_0 & \xrightarrow{\quad} & T_1 \end{array}$$

(Des flèches en pointillés relient X à T_0 et Y_1 à T_1 en passant par Y_0 .)

peut être complété par des flèches en pointillés »

Pour que f soit stable, il suffit de vérifier cette propriété pour tous les T_0 et T_1 artiniens ou pour tous les T_1 épaissements de longueur finie de $T_0 = S$.

Ceci implique que si un germe d'espace analytique admet une déformation semi-universelle (une condition nécessaire et suffisante a été donnée par H.

Grauert dans [13]) celle-ci possède une propriété d'universalité plus forte : elle est quasi-universelle.

Au § 3 nous décrivons et caractérisons les morphismes plats et stables.

Au § 4 nous obtenons un critère de stabilité, à l'aide du complexe cotangent de L . Illusie, qui généralise le critère bien connu de stabilité infinitésimale de J. Mather.

1. Définitions et énoncés.

(3.1.1) DÉFINITION. — Nous dirons qu'un diagramme commutatif de morphismes d'espaces analytiques :

$$(3.1.2) \quad \begin{array}{ccccc} X & \xleftarrow{u'} & Y_0 & \xrightarrow{v'} & Y \\ f \downarrow & (1) & g \downarrow & (2) & h \downarrow \\ S & \xleftarrow{u} & T_0 & \xrightarrow{v} & T \end{array}$$

où les carrés (1) et (2) sont cartésiens, c'est-à-dire que Y_0 est le produit fibré de X et T_0 au-dessus de S et de Y et T_0 au-dessus de T , et v est un plongement, possède la propriété d'extension s'il existe deux morphismes $w : T \rightarrow S$ et $w' : Y \rightarrow X$ tels que :

$$\begin{cases} w \circ v' = u' \\ w \circ v = u \\ f \circ w' = w \circ h. \end{cases}$$

Le couple (w, w') est appelé une extension du couple (u, u') .

(3.1.3) Remarque. — Dans un diagramme du type (3.1.2) si le morphisme h est plat, pour toute extension (w, w') de (u, u') le diagramme suivant est cartésien :

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{w'} & Y \\ f \downarrow & & \downarrow h \\ S & \xleftarrow{w} & T \end{array}$$

Cette assertion est une conséquence du Lemme 3 de l'Annexe ou du Lemme (4.2.8).

(3.1.4) DÉFINITIONS. — Soit $f : X \rightarrow S$ un morphisme plat, on définit les notions suivantes de stabilité :

(S) : f est stable, si tout diagramme du type précédent (3.1.2) où h est plat et u est un isomorphisme possède la propriété d'extension.

(I.S.) : f est infinitésimalement stable, si tout diagramme du type précédent (3.1.2) où h est plat, u est un isomorphisme et v est un épaississement de longueur finie possède la propriété d'extension.

(F.S.) : f est fortement stable si tout diagramme du type précédent (3.1.2) où h est plat possède la propriété d'extension.

(F.I.S.) f est fortement infinitésimalement stable si tout diagramme du type précédent (3.1.2) où h est plat et v est un épaississement de longueur finie possède la propriété d'extension.

(F.F.S.) : f est fortement formellement stable si tout diagramme du type précédent (3.1.2) où h est plat et où T_0 et T sont artiniens possède la propriété d'extension.

(3.1.5) THÉORÈME. — Pour un morphisme plat $f : X \rightarrow S$, les différentes notions précédentes de stabilité sont équivalentes.

(3.1.6) DÉFINITIONS. — Soit X_0 un espace analytique on appelle déformation plate de X_0 , en oubliant souvent l'adjectif, tout morphisme $f : X \rightarrow S$ plat dont X_0 est la fibre. Soient $f : X \rightarrow S$ et $h : Y \rightarrow T$ deux déformations de X_0 ; s'il existe un morphisme $w : T \rightarrow S$ tel que $Y = X \times_S T$, on dit que h se déduit de f par le changement de base w .

On dit que $f : X \rightarrow S$ est une déformation semi-universelle de X_0 si toute déformation de X_0 se déduit de f par un changement de base dont l'application linéaire cotangente est unique.

On dit que $f : X \rightarrow S$ est une déformation quasi-universelle de X_0 si elle est semi-universelle et fortement stable.

(3.1.7) THÉORÈME. — Soient f un morphisme plat et X_0 sa fibre. Le morphisme f est stable si et seulement si

1° X_0 admet une déformation semi-universelle $f_U : X_U \rightarrow S_U$ et

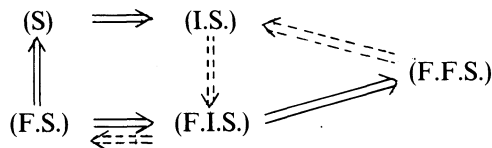
2° il existe un espace lisse $V = \mathbf{k}^s$ et deux isomorphismes γ et γ' tels que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\gamma'} & X_U \times V \\ f \downarrow & & \downarrow f_U \times \text{Id}_V \\ S & \xrightarrow{\gamma} & S_U \times V \end{array}$$

(3.1.8) COROLLAIRE. — Une déformation semi-universelle d'un germe d'espace analytique est aussi quasi-universelle.

2. Démonstration du premier théorème.

Dans le dessin suivant, les implications notées en traits pleins sont évidentes et nous allons démontrer les implications notées en pointillés.



(3.2.1) (F.F.S.) \implies (I.S.). — Supposons le morphisme f (F.F.S.) et plat.

Soit

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{v'} & Y \\ f \downarrow & & \downarrow h \\ S & \xrightarrow{v} & T \end{array}$$

un diagramme commutatif cartésien où h est plat et T est un épaississement de longueur finie de S .

Notons \mathfrak{M} l'idéal maximal de O_T et I l'idéal qui définit S dans T . Pour tout entier n , définissons les sous-espaces de T suivant :

$$\begin{aligned} S_n &= V(I + \mathfrak{M}^n) \\ T_n &= V(\mathfrak{M}^n) \end{aligned}$$

et notons

$$f_n : X_n \rightarrow S_n \quad \text{et} \quad h_n : Y_n \rightarrow T_n$$

les morphismes obtenus à partir de h par les changements de bases naturels; notons aussi

$$\begin{aligned} u_n : S_n &\rightarrow S, & u'_n : X_n &\rightarrow X \\ v_n : S_n &\rightarrow T_n & \text{et} & v'_n : X_n &\rightarrow Y_n \end{aligned}$$

les inclusions naturelles. Remarquons que :

$$\begin{aligned} S_0 = S, & \quad X_0 = X, & T_0 = T, & \quad Y_0 = Y, \\ f_0 = f & \quad \text{et} & h_0 = h. \end{aligned}$$

Comme le morphisme h est plat, il en est de même des morphismes f_n et h_n et on en déduit les égalités :

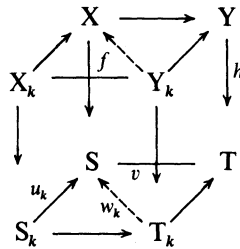
$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{X_n} &= \mathcal{O}_Y \otimes_{\mathcal{O}_T} (\mathcal{O}_T/I + \mathfrak{M}^n) \\ \mathcal{O}_{Y_n} &= \mathcal{O}_Y \otimes_{\mathcal{O}_T} (\mathcal{O}_T/\mathfrak{M}^n). \end{aligned}$$

L'idéal I étant de longueur finie, il existe un entier k tel que $I \cap \mathfrak{M}^k = \{0\}$ donc, par un petit lemme algébrique évident,

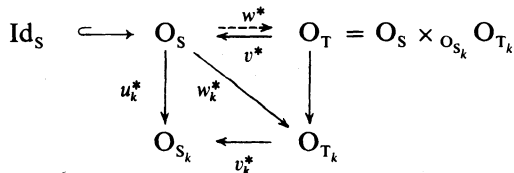
$$\mathcal{O}_T = (\mathcal{O}_T/I) \times_{(\mathcal{O}_T/I + \mathfrak{M}^k)} (\mathcal{O}_T/\mathfrak{M}^k)$$

d'où

$$\mathcal{O}_T = \mathcal{O}_S \times_{\mathcal{O}_{S_k}} \mathcal{O}_{T_k} \quad \text{et} \quad \mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_X \times_{\mathcal{O}_{X_k}} \mathcal{O}_{Y_k}.$$



Il existe une extension (w_k, w'_k) de (u_k, u'_k) car f est (F.F.S.). L'extension (w_k, w'_k) et le couple des identités $(\text{Id}_S, \text{Id}_X)$ définissent alors, grâce à la propriété universelle du produit fibré \mathcal{O}_T , un couple de rétractions (w, w') du couple (v, v') ; le diagramme commutatif des algèbres « au but » étant le suivant :



Donc f est (I.S.). \square

(3.2.2) (I.S.) \Rightarrow (F.I.S.).

Nous utiliserons deux lemmes.

(3.2.3) LEMME. — Soient $\varphi : T_0 \rightarrow S$ un morphisme et T un épaississement de T_0 . Le produit fibré des algèbres O_T et O_S sur O_{T_0} est une algèbre analytique. Cette algèbre définit un espace analytique S_1 qui est un épaississement de S . Si T est un épaississement de longueur fine de T_0 , S_1 est un épaississement de longueur fine de S .

Preuve. — Notons J l'idéal de carré nul de O_T (respectivement de carré nul et de longueur finie) qui définit T_0 dans T .

1° Si $O_S = \mathbf{k}\{x\}$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, J est, via φ^* , un $\mathbf{k}\{x\}$ -module de type fini, notons (g_1, \dots, g_p) un système de générateurs de J sur $\mathbf{k}\{x\}$ et $(\sum_{i=1}^p a_i^k g_i)$ $1 \leq k \leq q$ un système de générateurs des relations entre les g_i . Alors, il est facile de vérifier que

$$\mathbf{k}\{x\} \times_{O_{T_0}} O_T = \mathbf{k}\{x, y_1, \dots, y_p\} / \left(y_i y_j, \sum_{i=1}^p a_i^k y_i \right) \\ 1 \leq i < j \leq p, \quad 1 \leq k \leq q,$$

le produit fibré est donc une algèbre analytique.

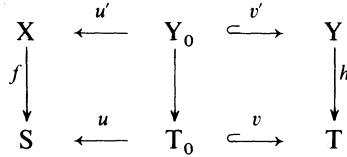
2° Si $O_S = \mathbf{k}\{x\}/I$, $x = (x_1, \dots, x_n)$. Remarquons que le produit fibré existe toujours dans la catégorie des \mathbf{k} -algèbres, dans cette catégorie on a le diagramme commutatif suivant dont les lignes sont exactes et les carrés (1) et (2) cartésiens :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & J & \hookrightarrow & O_T \times_{O_{T_0}} \mathbf{k}\{x\} & \longrightarrow & \mathbf{k}\{x\} \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow \chi' & & (1) \quad \downarrow \chi \\ 0 & \longrightarrow & J & \longrightarrow & O_T \times_{O_{T_0}} O_S & \longrightarrow & O_S \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & & (2) \quad \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & J & \hookrightarrow & O_T & \longrightarrow & O_{T_0} \longrightarrow 0 \end{array}$$

D'après le « lemme des trois », χ' est surjective, il en résulte que $O_T \times_{O_{T_0}} O_S$ est un quotient de $O_T \times_{O_{T_0}} \mathbf{k}\{x\}$ donc est une algèbre analyti-

que. L'espace analytique S_1 qu'elle définit est un épaississement (respectivement un épaississement de longueur finie) de S . \square

Supposons que le morphisme plat f vérifie (I.S.). Soit

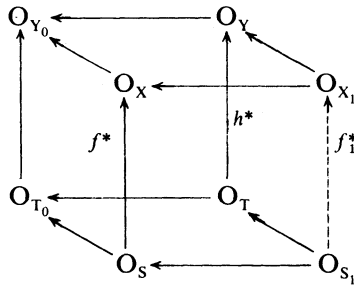


un diagramme du type (3.1.2) où v est un épaississement de longueur finie et le morphisme h est plat ; v' est aussi un épaississement de longueur finie.

Définissons les produits fibrés

$$O_{S_1} = O_S \times_{O_{T_0}} O_T \quad \text{et} \quad O_{X_1} = O_X \times_{O_{Y_0}} O_Y$$

qui existent d'après le lemme précédent : on a le diagramme



Comme $O_{X_1} = O_X \times_{O_{Y_0}} O_Y$, f^* et h^* induisent un morphisme f_1^* de O_{S_1} dans O_{X_1} .

(3.1.4) LEMME. — Le morphisme f_1^* est plat et $O_X = O_{X_1} \hat{\otimes}_{O_{S_1}} O_S$.

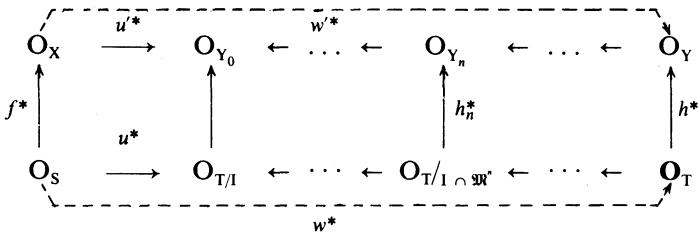
Preuve. — Voir A.H.M. Levelt [19, § 1. Proposition 2]. \square

Comme f a été supposé (I.S.), il existe un couple de rétractions (w_1, w'_1) de (v_1, v'_1) . En appliquant la propriété universelle des produits fibrés O_{S_1} et O_{X_1} , ce couple induit une extension (w, w') du couple (u, u') . Donc f est (F.I.S.). \square

(3.2.5) (F.I.S.) \Rightarrow (F.S.). — Soit f un morphisme plat supposé (F.I.S.) et soit un diagramme du type (3.1.2) où h est plat.

Notons I l'idéal de O_T définissant T_0 dans T et \mathfrak{M} l'idéal maximal de O_T . Pour tout entier n , posons $T_n = V(I \cap \mathfrak{M}^n)$, $Y_n = Y \times_T T_n$ et notons v_n l'inclusion de T_n dans T . Alors, pour tout entier n , le morphisme $h_n : Y_n \rightarrow T_n$ obtenu à partir de h par changement de base est plat et T_{n+1} est un épaissement de longueur finie de T_n .

Par hypothèse, tout couple de morphisme (u_n, u'_n) , du type $u_n : T_n \rightarrow S$, $u'_n : Y_n \rightarrow X$ et $u_n \circ h_n = f \circ u'_n$, s'étend en un couple de morphisme (u_{n+1}, u'_{n+1}) du même type. On a le diagramme suivant qu'on désire compléter à l'aide des flèches en pointillés :



Pour ramener ce problème à la résolution d'un système d'équations analytiques, on choisit les présentations suivantes :

$$O_S = \mathbf{k}\{s\}/J \quad \text{avec } s = (s_1, \dots, s_q) \quad \text{et } J = (J_1, \dots, J_d)$$

$$O_X = \mathbf{k}\{s, x\}/G \quad \text{avec } x = (x_1, \dots, x_p) \quad \text{et } G = (G_1, \dots, G_g)$$

de sorte que f^* soit induit par l'inclusion de $\mathbf{k}\{s\}$ dans $\mathbf{k}\{s, x\}$ c'est-à-dire que $f^*(\text{classe}(s_i)) = \text{classe}(s_i)$, pour $1 \leq i \leq q$, et $f^*(J) \subset G$.

On choisit aussi les présentations

$$O_T = \mathbf{k}\{z\}/K \quad \text{avec } z = (z_1, \dots, z_k)$$

$$O_Y = \mathbf{k}\{z, y\}/L \quad \text{avec } y = (y_1, \dots, y_r) \quad \text{et } L = (L_1, \dots, L_l)$$

de sorte que h^* soit induit par l'inclusion de $\mathbf{k}\{z\}$ dans $\mathbf{k}\{z, y\}$ et $h^*(K) \subset L$.

Avec ces présentations, les couples (w^*, w'^*) tels que

$$w'^* \circ f^* = h^* \circ w^*,$$

correspondent aux solutions

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta(\bar{z}) = (\theta_1(\bar{z}), \dots, \theta_q(\bar{z})) \in O_T^q \\ \Pi(\bar{z}, y) = (\Pi_1(\bar{z}, y), \dots, \Pi_p(\bar{z}, y)) \\ \mathbf{M}(\bar{z}, y) = (m_{\alpha, \beta}(\bar{z}, y))_{\substack{\alpha=1, \dots, g \\ \beta=1, \dots, l}} \end{array} \right\} \in O_T\{y\}^{p+gl}$$

du système d'équations analytiques dans $O_T\{y, \theta, \Pi\}^{d+g}$

$$(3.2.6) \quad \begin{cases} J_j(\theta) = 0, & j = 1, \dots, d \\ G_\alpha(\theta, \Pi) = \sum_{\beta=1}^l m_{\alpha, \beta} L_\beta, & \alpha = 1, \dots, g. \end{cases}$$

Le couple (u^*, u'^*) correspond à une solution modulo I de ce système. Pour tout entier n , les couples $(u_n^*, u_n'^*)$ tels que $u_n'^* \circ f^* = h_n^* \circ u_n^*$ correspondent aux solutions modulo $(I \cap \mathfrak{M}^n)$ de ce système; et dire que le couple (u_{n+1}, u_{n+1}') est une extension du couple (u_n, u_n') signifie que la solution $(\theta_{n+1}, \Pi_{n+1}, M_{n+1})$ correspondant au premier étend la solution (θ_n, Π_n, M_n) correspondant au second au sens du Chapitre 2.

En vertu du Théorème (2.1.3), il existe alors une solution (θ, Π, M) du système modulo I correspondant au couple (u, u') . D'où une extension cherchée et la conclusion que f est (F.S.). \square

3. Démonstration du deuxième théorème.

(3.3.1). — Soit X_0 un espace analytique (c'est-à-dire selon nos conventions, un germe d'espace analytique). L'ensemble $D(X_0, \mathbf{k}[\varepsilon])$ des classes d'isomorphie de déformations de X_0 de base $\text{Spec}(\mathbf{k}[\varepsilon]/\varepsilon^2)$, est muni d'une structure canonique d'espace vectoriel sur le corps \mathbf{k} .

Nous utilisons un théorème de H. Grauert [13] sous la forme explicitée dans [12].

(3.3.2) THÉORÈME (H. Grauert). — Soit X_0 un espace analytique. Une condition pour l'existence d'une déformation semi-universelle de X_0 est que la dimension sur \mathbf{k} de $D(X_0, \mathbf{k}[\varepsilon])$ soit finie. Si cette condition est remplie (par exemple quand X_0 est réduit et à singularité isolée), il existe une déformation $f : X \rightarrow S$ de X_0 qui est semi-universelle et qui de plus vérifie la condition (F.F.S.).

(3.3.3) LEMME. — Deux déformations semi-universelles d'un même espace analytique X_0 , sont isomorphes.

Preuve. — En effet, soient $f : X \rightarrow S$ et $f' : X' \rightarrow S'$ deux déformations semi-universelles, il existe deux changements de bases $h : S \rightarrow S'$ et $h' : S' \rightarrow S$ tels que les endomorphismes $h^* \circ h'^*$ et $h'^* \circ h^*$ induisent l'identité sur les espaces cotangents $\mathfrak{M}_S/\mathfrak{M}_S^2$ et $\mathfrak{M}_{S'}/\mathfrak{M}_{S'}^2$ de S et de S' , donc

sont des isomorphismes. Donc h et h' sont des isomorphismes et les deux déformations sont isomorphes. \square

Le Corollaire (3.1.8) est une conséquence du Théorème (3.3.2) du Lemme (3.3.3) et du Théorème (3.1.4).

(3.3.4) LEMME. — *La fibre X_0 d'un morphisme plat et stable $f : X \rightarrow S$, admet une déformation quasi-universelle.*

Preuve. — La propriété (F.F.S) de f implique que les déformations de X_0 de base $\text{Spec } \mathbf{k}[\varepsilon]/\varepsilon^2$ (qui est artinien) se déduisent de f par changement de base.

La flèche canonique suivante :

$$\mathfrak{M}_S/\mathfrak{M}_S^2 = \text{Hom}(O_S, \mathbf{k}[\varepsilon]/\varepsilon^2) \rightarrow D(X_0, \mathbf{k}[\varepsilon])$$

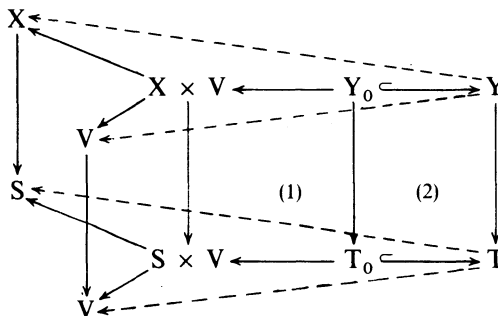
est donc \mathbf{k} -linéaire surjective. Ce qui implique que la condition du Théorème (3.3.2) est satisfaite. On conclut à l'aide du Corollaire (3.1.8). \square

(3.3.5) LEMME. — *Soit $f : X \rightarrow S$ un morphisme plat et stable, et soit V un espace lisse. Le morphisme*

$$f \times \text{Id}_V : X \times V \rightarrow S \times V$$

est plat et stable.

Preuve. — Il suffit d'utiliser la propriété (F.S.) de f et la propriété de lissité de V (i.e. si $U \subset Z$, tout morphisme $\varphi : U \rightarrow V$ provient d'un morphisme $\bar{\varphi} : Z \rightarrow V$) pour compléter tout diagramme commutatif suivant en traits pleins où les carrés (1) et (2) sont cartésiens :



en un diagramme commutatif incluant les traits en pointillés. \square

(3.3.6) *Fin de la démonstration du Théorème (3.1.7).* — Nous venons de voir qu'une déformation semi-universelle est (F.F.S.) donc est un morphisme stable et plat, $f : X \rightarrow S$, puisque pour tout espace lisse V , $f \times \text{Id}_V$ est un morphisme stable et plat. Réciproquement, si f est un morphisme stable et plat, il existe une déformation semi-universelle $g : Y \rightarrow T$ de la fibre X_0 de f . Il existe alors des couples (α, α') et (β, β') tels que le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} Y & \xrightarrow{\alpha'} & X & \xrightarrow{\beta'} & Y \\ g \downarrow & (1) & f \downarrow & (2) & \downarrow g \\ T & \xrightarrow{\alpha} & S & \xrightarrow{\beta} & T \end{array}$$

soit commutatif, que les carrés (1) et (2) soient cartésiens et que $\beta \circ \alpha$ induise l'identité sur l'espace cotangent de T . Notons S_1 et T_1 les sous-espaces analytiques de S et T d'algèbres O_S/\mathfrak{M}_S^2 et O_T/\mathfrak{M}_T^2 , \mathfrak{M}_S et \mathfrak{M}_T désignant les idéaux maximaux. Il existe un espace lisse V tel que S_1 soit isomorphe à $T_1 \times V$ et un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} X & \xleftarrow{u'} & X_1 = Y_1 \times V & \xrightarrow{v'} & Y \times V \\ f \downarrow & (1) & \downarrow & (2) & \downarrow g' = g \times \text{Id}_V \\ S & \xleftarrow{u} & S_1 = T_1 \times V & \xrightarrow{v} & T \times V \end{array}$$

où les carrés (1) et (2) sont cartésiens.

Comme f et g' sont (F.S.) il existe une extension (w, w') de (u, u') et une extension (θ, θ') de (v, v') telles que

$$(w \circ \theta, w' \circ \theta') \quad \text{et} \quad (\theta \circ w, \theta' \circ w')$$

induisent l'identité sur les espaces cotangents donc sont des isomorphismes, donc (w, w') est un couple d'isomorphismes. \square

4. Critères de stabilité.

(3.4.1) Nous allons interpréter la stabilité infinitésimale d'un morphisme plat $f : X \rightarrow S$ à l'aide des premiers termes des complexes cotangents $L_X, L_S, L_{X/S}$ de X , de S et de f . L'étude détaillée du complexe cotangent d'un morphisme a été faite en géométrie algébrique par L. Illusie [17] et sera bientôt généralisée en géométrie analytique par C. Banica; cependant pour voir que les objets que nous allons considérer sont bien définis en géométrie analytique locale, il suffit de consulter l'exposé de Ruget dans [29]. Fixons un (germe de) morphisme plat $f : X \rightarrow S$.

(3.4.2) DÉFINITIONS. — *Appelons épaissement de f tout diagramme commutatif cartésien d'espaces analytiques :*

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ S & \longrightarrow & T \end{array}$$

où g est plat et T est un épaissement de S ; et définissons de manière naturelle les isomorphismes d'épaississements.

Si I et J désignent les idéaux de carrés nuls de O_T et O_Y , définissant S dans T et X dans Y , on a le morphisme d'extensions suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & J & \longrightarrow & O_Y & \longrightarrow & O_X \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & f^{-1}I & \longrightarrow & f^{-1}O_T & \longrightarrow & f^{-1}O_S \longrightarrow 0 \end{array}$$

et comme g est plat, on a aussi un isomorphisme ([17], p. 191) :

$$v : f^*I = f^{-1}I \hat{\otimes}_{f^{-1}O_S} O_X \rightarrow J.$$

Nous dirons que l'épaissement précédemment défini est un épaissement de f par le O_S -module de type fini I , et nous noterons $\text{Ep}(I)$ l'ensemble des classes d'isomorphie d'épaississements de f par I .

Remarquons que $\text{Ep}(I)$ contient toujours la classe 0 dont un représen-

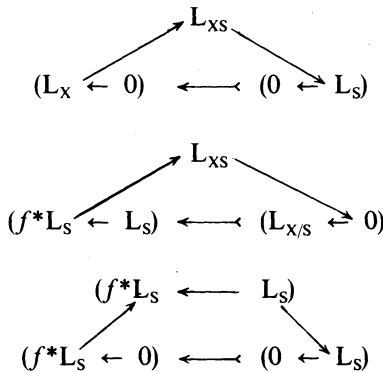
tant est construit en suivant le modèle des nombres duaux, d'où le Lemme immédiat.

(3.4.3) LEMME. — *f* est stable si, et seulement si : pour tout O_S -module de type fini I , $\text{Ep}(I) = \{0\}$.

(3.4.4) Comme dans [17] p. 214, considérons la catégorie (XS) dont les objets sont les triplets (I, J, v) où I est un O_S -module de type fini, J est un O_X -module de type fini et $v : f^* I \rightarrow J$ est un morphisme de O_X -module, triplet que l'on note aussi $J \leftarrow I$. Il existe un complexe L_{XS} de cette catégorie, qui induit canoniquement les complexes cotangents L_X et L_S sur X et S ([17] p. 224), tel que pour tout O_S -module de type fini I ([17] p. 192) :

- $\text{Ep}(I)$ est un toreur sous $\text{Ext}^1(L_{XS}, (I, f^*I, 1))$,
- le groupe $\text{Aut}(I)$ des automorphismes d'un épaississement de f par I s'identifie canoniquement à $\text{Ext}^0(L_{XS}, (I, f^*I, 1))$.

(3.4.4) A l'aide du diagramme de transitivité du complexe cotangent $L_{X/S}$ ([17] p. 169) et des trois diagrammes de transitivité suivants de la catégorie dérivée de (XS) :

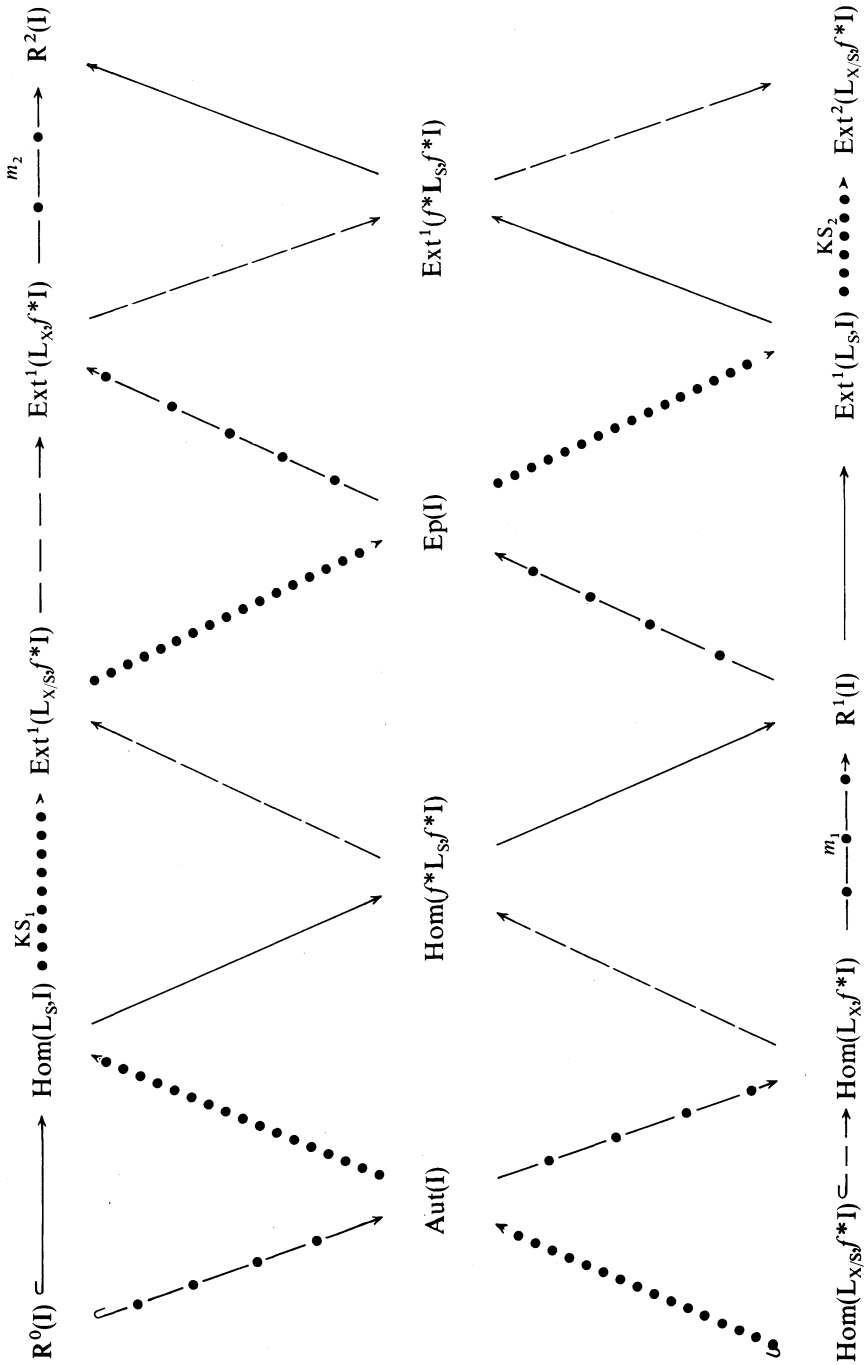


on obtient pour tout O_S -module de type fini I , les quatre suites exactes longues qui forment la tresse suivante, on a noté :

$$R^i(I) = \text{Ext}^i(0 \leftarrow L_S, f^*I \leftarrow I)$$

et on a remarqué ([17] p. 214) que :

$$\begin{array}{ll}
 \text{Ext}^i(L_X \leftarrow 0, f^*I \leftarrow I) & = \text{Ext}^i(L_X, f^*I) \\
 \text{Ext}^i(L_{X/S} \leftarrow 0, f^*I \leftarrow I) & = \text{Ext}^i(L_{X/S}, f^*I) \\
 \text{Ext}^i(f^*L_S \leftarrow L_S, f^*I \leftarrow I) & = \text{Ext}^i(L_S, I),
 \end{array}$$



De la tresse précédente, on déduit immédiatement les deux suites exactes :

$$\begin{array}{c}
 \text{Aut}(\mathbf{I}) \longrightarrow \text{Hom}(\mathbf{L}_S, \mathbf{I}) \oplus \text{Hom}(\mathbf{L}_{X/S} f^* \mathbf{I}) \xrightarrow{M_0} \text{Hom}(f^* \mathbf{L}_S f^* \mathbf{I}) \\
 \longleftarrow \text{Ep}(\mathbf{I}) \longrightarrow \text{Ext}^1(\mathbf{L}_X, \mathbf{I}) \oplus \text{Ext}^1(\mathbf{L}_{X/S} f^* \mathbf{I}) \xrightarrow{M_1} \text{Ext}^1(f^* \mathbf{L}_S f^* \mathbf{I}) \\
 \text{et} \\
 \mathbf{R}^0(\mathbf{I}) \oplus \text{Hom}(\mathbf{L}_{X/S} f^* \mathbf{I}) \longrightarrow \text{Aut}(\mathbf{I}) \longrightarrow \text{Hom}(f^* \mathbf{L}_S f^* \mathbf{I}) \\
 \delta_1 \\
 \longleftarrow \mathbf{R}^1(\mathbf{I}) \oplus \text{Ext}^1(\mathbf{L}_{X/S} f^* \mathbf{I}) \longrightarrow \text{Ep}(\mathbf{I}) \longrightarrow \text{Ext}^1(f^* \mathbf{L}_S f^* \mathbf{I}) \\
 \delta_2 \\
 \longleftarrow \mathbf{R}^2(\mathbf{I}) \oplus \text{Ext}^2(\mathbf{L}_{X/S} f^* \mathbf{I}).
 \end{array}$$

(3.4.5) PROPOSITION. — Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) f est stable,
- (ii) M_0 est surjectif et M_1 est injectif,
- (iii) δ_1 est surjectif et δ_2 est injectif,
- (iv) KS_1 est surjectif et KS_2 est injectif,
- (v) m_1 est surjectif et m_2 est injectif. \square

(3.4.6) COROLLAIRE (Généralisation du critère de stabilité de John Mather). — Le morphisme f est stable si et seulement si :

1° $\text{Der}(\mathbf{O}_S, \Omega_S) \oplus \text{Der}(\mathbf{O}_X, f^* \Omega_S) \rightarrow \text{Der}(\mathbf{O}_S, f^* \Omega_S)$ est surjectif;

2° pour tout \mathbf{O}_S – module de type fini \mathbf{I} le morphisme M_1 est injectif.

Lorsque X et S sont lisses, la condition 2° est vide.

Preuve. — Remarquons d’abord que $f^* : \mathbf{O}_S \rightarrow \mathbf{O}_X$ étant plat et Ω_S un \mathbf{O}_S -module de type fini, on a pour tout \mathbf{O}_S -module de type fini \mathbf{I} les isomorphismes canoniques ([6] Ch. I, § 2 n° 10)

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Hom}_{\mathbf{O}_S}(\Omega_S, \mathbf{I}) \hat{\otimes}_{\mathbf{O}_S} \mathbf{O}_X & \xrightarrow{\sim} & \text{Hom}_{\mathbf{O}_S}(\Omega_S, \mathbf{I} \hat{\otimes}_{\mathbf{O}_S} \mathbf{O}_X) = \text{Der}(\mathbf{O}_S, \mathbf{I} \hat{\otimes}_{\mathbf{O}_S} \mathbf{O}_X) \\
 & & \downarrow \wr \\
 & & \text{Hom}_{\mathbf{O}_X}(\Omega_S \hat{\otimes}_{\mathbf{O}_S} \mathbf{O}_X, \mathbf{I} \hat{\otimes}_{\mathbf{O}_S} \mathbf{O}_X).
 \end{array}$$

Supposons la condition 1° et montrons que pour tout O_S -module de type fini I le morphisme M_0 est surjectif.

Pour tout $\alpha \in O_X$, il existe alors

$$\delta_\alpha \in \text{Hom}_{O_S}(\Omega_S, \Omega_S) \quad \text{et} \quad \gamma_\alpha \in \text{Hom}_{O_X}(\Omega_X, \Omega_S \hat{\otimes}_{O_S} O_X)$$

tel que l'homothétie $h_\alpha : \Omega_S \rightarrow \Omega_S \hat{\otimes}_{O_S} O_X$ s'écrit

$$h_\alpha = \delta_\alpha \hat{\otimes} 1 - \gamma_\alpha \circ f^*.$$

Tout $\varphi \in \text{Hom}_{O_S}(\Omega_S, I \hat{\otimes}_{O_S} O_X) \simeq \text{Hom}_{O_S}(\Omega_S, I) \hat{\otimes}_{O_S} O_X$ s'écrit

$$\varphi = \sum_{i=1}^p \varphi_i \otimes \alpha_i = \sum_{i=1}^p \varphi_i \circ h_{\alpha_i} = \delta \otimes 1 - \gamma \circ f^*$$

avec

$$\delta = \sum_{i=1}^p \varphi_i \circ \delta_{\alpha_i} \quad \text{et} \quad \gamma = \sum_{i=1}^p \varphi_i \circ \gamma_{\alpha_i}. \quad \square$$

CHAPITRE 4

MORPHISMES STABLES ENTRE GERMES LISSES

Introduction.

Nous rappelons brièvement au § 1 la description des germes de morphismes stables de \mathbf{k}^n dans \mathbf{k}^p contenue dans la série d'articles de J. Mather [23]. Au § 2, nous définissons le déploiement généralisé d'un morphisme $f : X \rightarrow S$ comme un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X & \hookrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ S & \hookrightarrow & T \end{array} \quad \text{avec} \quad X = Y \times_T S$$
$$\text{Tor}_1^{O_T}(O_Y, O_S) = 0,$$

f est stable si tout déploiement généralisé de f est trivial, i.e. se rétracte sur f . Dans le cas où X et S sont lisses, cette définition est équivalente à la définition classique du § 1 et dans le cas où f est plat, c'est celle que nous avons donné précédemment. Nous indiquons, sur un exemple, où se trouve la difficulté pour étendre dans ce cadre général les résultats du Chapitre 3.

Au § 3, nous démontrons que le platificateur f d'un morphisme stable F de \mathbf{k}^n dans \mathbf{k}^p , c.à.d. la restriction du morphisme F à $X = F^{-1}(S)$ où S est le plus grand sous-espace analytique contenant 0 de \mathbf{k}^p au-dessus duquel F est plat, est stable; autrement dit, f est la déformation semi-universelle de la fibre de F multipliée par l'identité d'un espace lisse.

Au § 4, nous calculons la déformation semi-universelle du « point » X_0 ayant pour algèbre $C\{x,y,z\}/(x,y,z)^2$, qui est l'exemple le plus simple de morphisme stable et plat à base non lisse.

1. Rappels.

(4.1.1) DÉFINITIONS. — Soit $f : \mathbf{k}^n \rightarrow \mathbf{k}^p$ un morphisme. Un déploiement de f est un morphisme

$$\tilde{F} : \mathbf{k}^n \times \mathbf{k}^q \longrightarrow \mathbf{k}^p \times \mathbf{k}^q$$

telle que $\tilde{F}(x,t) = (F(x,t),t)$ et $F(x,0) = f(x)$.

Un déploiement \tilde{F} de f est dit trivial s'il existe un déploiement γ de l'identité de \mathbf{k}^n et un déploiement τ de l'identité de \mathbf{k}^p tels que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{k}^n \times \mathbf{k}^q & \xrightarrow{\gamma} & \mathbf{k}^n \times \mathbf{k}^q \\
 \downarrow \tilde{F} & \searrow & \swarrow \\
 & \mathbf{k}^q & \\
 \uparrow & \swarrow & \downarrow f \times \text{Id}_{\mathbf{k}^q} \\
 \mathbf{k}^p \times \mathbf{k}^q & \xrightarrow{\tau} & \mathbf{k}^p \times \mathbf{k}^q.
 \end{array}$$

Le morphisme f est dit stable si tout déploiement de f est trivial.

(4.1.2) THÉORÈME (J. Mather). — 1° Tous les morphismes stables de \mathbf{k}^n dans \mathbf{k}^p , n et p fixés, ayant des fibres isomorphes sont isomorphes.

2° La fibre d'un morphisme stable est soit une intersection complète à singularité isolée quand $n \geq p$, soit de dimension zéro quand $n < p$.

3° Considérons une présentation minimale de l'algèbre d'un germe d'espace du type précédent 2° :

$$\begin{aligned}
 Q &= \mathbf{k}\{x_1, \dots, x_a\}/(f) \quad \text{avec} \quad (f) = (f_1, \dots, f_b), \\
 x &= (x_1, \dots, x_a)
 \end{aligned}$$

nous allons écrire les conditions sur n et p pour que ce soit la fibre d'un morphisme stable de \mathbf{k}^n dans \mathbf{k}^p , puis la forme normale d'un tel morphisme : posons $c = (p-n) - (b-a)$, il faut que $c = 0$ si $a \geq b$ et $c \geq 0$ si $a < b$, définissons $q = \dim E$ où

$$E = \mathbf{k}\{x\}^{b+c} / \left(\mathbf{k}^{b+c} + f^{(b+c)} + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \right)$$

où $(f)^{b+c}$ et $\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)$ désignent les sous-modules de $\mathbf{k}\{x\}^{b+c}$ l'un formé par $b+c$ exemplaires de l'idéal (f) , l'autre engendré par les a éléments de

$$\mathbf{k}\{x\}^{b+c} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}, \dots, \frac{\partial f_b}{\partial x_i}, 0, \dots, 0 \right) \quad 1 \leq i \leq a;$$

il faut et il suffit alors qu'il existe un nombre entier s tel que

$$n = a + q + s \quad \text{et} \quad p = (b+c) + q + s.$$

Soient $g_1(x), \dots, g_q(x)$ des éléments de $\mathbf{k}\{x\}^{b+c}$ de la forme

$$(0, \dots, 0, x^a, 0, \dots, 0)$$

dont les classes dans E forment une base de cet espace vectoriel, le morphisme F suivant de \mathbf{k}^n dans \mathbf{k}^p est stable et a pour fibre Q :

$$\begin{aligned} \mathbf{k}^a \times \mathbf{k}^q \times \mathbf{k}^s &\longrightarrow \mathbf{k}^{b+c} \times \mathbf{k}^q \times \mathbf{k}^s \\ (x, t, z) &\longrightarrow \left(\begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 g_1(x) + \dots + t_q g_q(x), t, z \right). \end{aligned}$$

Références : [23], [25] et [36].

2. Généralisation.

(4.2.1) DÉFINITIONS. — On appelle *déploiement généralisé d'un morphisme d'espaces analytiques* $f : X \rightarrow S$ tout diagramme d'espaces analytiques

$$(4.2.2) \quad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i'} & Y \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ S & \xrightarrow{i} & T \end{array}$$

commutatif cartésien où les morphismes i et i' sont des plongements et tel que :

$$(4.2.3) \quad \text{Tor}_1^0 \pi(O_Y, O_S) = 0.$$

On désignera souvent le déploiement généralisé par le morphisme $g : Y \rightarrow T$.

Deux déploiements généralisés g et g' de f sont dits isomorphes si on peut les placer dans un diagramme commutatif du type suivant où φ et φ' sont des isomorphismes :

$$\begin{array}{ccccc} & & Y & & \\ & \nearrow & \downarrow g & \searrow \varphi' & \\ X & \xrightarrow{\quad} & & & Y' \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow g' \\ & \nearrow & T & \searrow \varphi & \\ S & \xrightarrow{\quad} & & & T' \end{array}$$

Un déploiement généralisé est dit trivial si son diagramme (4.2.2) possède la propriété d'extension (3.1.1).

(4.2.4) PROPOSITION. — Soient $f : X \rightarrow S$ un morphisme et $g : Y \rightarrow T$ un déploiement généralisé de f , alors

a) tout déploiement généralisé $h : Z \rightarrow U$ de g est aussi un déploiement généralisé de f .

b) pour tout morphisme $\alpha : U \begin{array}{c} \longrightarrow T \\ \swarrow \quad \searrow \\ S \end{array}$ au-dessus de S , le morphisme

induit $h : Z = Y \times_T U \rightarrow U$ est un déploiement généralisé de f , qui est dit déduit de g par le changement de base α .

Preuve. — Montrons que dans chaque cas la condition (4.2.3) est vérifiée.

a) En tensorisant par O_Z sur O_U la suite exacte (1) on obtient la suite exacte (2) :

$$(1) \quad 0 \rightarrow I \rightarrow O_T \rightarrow O_S \rightarrow 0$$

$$(2) \quad \text{Tor}_1^{O_U}(O_Z, O_T) \rightarrow \text{Tor}_1^{O_U}(O_Z, O_S) \rightarrow I \otimes_{O_U} O_Z \rightarrow O_Y \rightarrow O_X \rightarrow 0.$$

Comme $\text{Tor}_1^{O_U}(O_Z, O_T) = 0$ et que la suite

$$0 \rightarrow I \otimes_{O_U} O_Z = I \otimes_{O_T} O_Y \rightarrow O_Y \rightarrow O_X \rightarrow 0$$

est exacte par hypothèse, on déduit que $\text{Tor}_1^{O_U}(O_Z, O_S) = 0$.

b) On considère la suite spectrale convergente

$$E_{p,q}^2 = \text{Tor}_p^{O_U}(\text{Tor}_q^{O_T}(O_Y, O_U), O_S) \Rightarrow \text{Tor}_{p+q}^{O_T}(O_Y, O_S)$$

d'où l'on déduit la suite exacte suivante

$$\text{Tor}_1^{O_T}(O_Y, O_S) \rightarrow \text{Tor}_1^{O_U}(O_Z, O_S) \rightarrow 0.$$

Comme $\text{Tor}_1^{O_T}(O_Y, O_S) = 0$, alors $\text{Tor}_1^{O_U}(O_Z, O_S) = 0$.

(4.2.5) Exemples et remarques. — 1° Dans le cas où f est un morphisme entre germes lisses, tout déploiement de f (au sens de (4.1.1)) est un déploiement généralisé de f .

2° Dans le cas où f est un morphisme plat, la condition (4.2.3) est équivalente à la condition « g est un morphisme plat ». En particulier, un morphisme est un déploiement généralisé de sa fibre si et seulement si il est plat.

3° Considérons le diagramme commutatif suivant où les carrés (1) et (2) sont cartésiens et les morphismes i et i' sont des plongements :

$$(4.2.6) \quad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i'} & Y \\ \downarrow f & & \downarrow g \\ S & \xrightarrow{i} & T \\ \downarrow & & \downarrow \alpha \\ \{.\} & \xrightarrow{(2)} & U \end{array} \quad \beta$$

alors si β est plat, g est un déploiement généralisé de f ; et si α est plat et g est un déploiement généralisé de f , β est plat.

Les diagrammes (4.2.6) où α et β sont plats ont été étudiés dans [30].

(4.2.7) PROPOSITION. — *Tout déploiement généralisé du morphisme $f : \mathbf{k}^n \rightarrow \mathbf{k}^p$ se déduit par changement de base d'un déploiement de f .*

Preuve. — Soit $g : Y \rightarrow T$ un déploiement généralisé de f . Il existe un entier q et un plongement $i : T \rightarrow \mathbf{k}^p \times \mathbf{k}^q$ qui induise l'inclusion canonique sur $\mathbf{k}^p \subset T$.

Notons

$$\begin{aligned} \mathbf{O}_{\mathbf{k}^n} &= \mathbf{k}\{x_1, \dots, x_n\}, & \mathbf{O}_{\mathbf{k}^p} &= \mathbf{k}\{s_1, \dots, s_p\} \\ \mathbf{O}_{\mathbf{k}^p \times \mathbf{k}^q} &= \mathbf{k}\{s_1, \dots, s_p, t_1, \dots, t_q\} & \text{et} & \quad g^*i^*(t_j) = \theta_j \end{aligned}$$

pour $1 \leq j \leq q$. On obtient à isomorphismes près :

$$\mathbf{O}_Y / (\theta_1, \dots, \theta_q) = \mathbf{k}\{x_1, \dots, x_n\}.$$

Choisissons des représentants ξ_k de x_k dans \mathbf{O}_Y , ($1 \leq k \leq n$). Définissons le plongement i' de Y dans $\mathbf{k}^n \times \mathbf{k}^q$ par

$$i'^*(x_k) = \xi_k \quad (1 \leq k \leq n), \quad i'^*(t_j) = \theta_j \quad 1 \leq j \leq q,$$

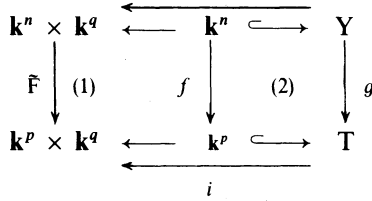
$i'^* : \mathbf{k}\{x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_q\} \rightarrow \mathbf{O}_Y$ est alors surjectif.

Choisissons des représentants η_l de $i'^{-1}[g^*i^*(s_l)]$ dans $\mathbf{k}\{x, t\}$ ($1 \leq l \leq p$). Définissons enfin le déploiement

$$\begin{aligned} \tilde{F} : \mathbf{k}^n \times \mathbf{k}^q &\rightarrow \mathbf{k}^p \times \mathbf{k}^q, & F(x, 0) &= f(x) \\ (x, t) &\mapsto (F(x, t), t) \end{aligned}$$

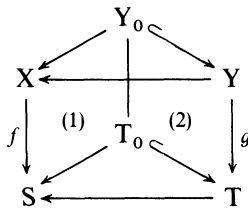
en posant $F^*(s_l) = \eta_l$ ($1 \leq l \leq p$) et $F^*(t_j) = t_j$ ($1 \leq j \leq q$).

On obtient alors le diagramme commutatif suivant :



où les carrés (1) et (2) sont cartésiens. Comme $\text{Tor}_1^{\text{O}_Y, \text{O}_{\mathbf{k}^p}} = 0$, on peut appliquer le Lemme (4.2.8) suivant et conclure que le troisième carré est cartésien, puisque le déploiement généralisé g se déduit du déploiement généralisé $\tilde{\mathbf{F}}$ par le changement de base i .

(4.2.8) LEMME. — Soit



un diagramme commutatif où les carrés (1) et (2) sont cartésiens. Si on suppose que :

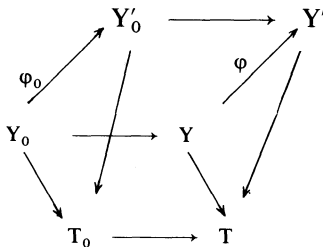
$$\text{Tor}_1^{\text{O}_Y, \text{O}_{\mathbf{T}_0}} = 0,$$

(hypothèse vérifiée si g est plat), le troisième carré est aussi cartésien.

Preuve. — Formons les produits fibrés

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{X} \times_{\mathbf{S}} \mathbf{T} \quad \text{et} \quad \mathbf{Y}'_0 = \mathbf{Y} \times_{\mathbf{T}_0} \mathbf{T}_0$$

et considérons le diagramme commutatif suivant :



où φ_0 est un isomorphisme. Pour montrer que φ est plat, formons la suite spectrale

$$E_{p,q}^2 = \text{Tor}_p^{\mathcal{O}_{Y'}}(\text{Tor}_q^{\mathcal{O}_T}(\mathcal{O}_{T_0}, \mathcal{O}_Y), \mathcal{O}_Y)$$

qui aboutit à $\text{Tor}_1^{\mathcal{O}_T}(\mathcal{O}_{T_0}, \mathcal{O}_Y)$. Elle permet d'obtenir la suite exacte suivante :

$$\text{Tor}_1^{\mathcal{O}_T}(\mathcal{O}_{T_0}, \mathcal{O}_Y) \rightarrow \text{Tor}_1^{\mathcal{O}_{Y'}}(\mathcal{O}_{Y_0}, \mathcal{O}_Y) \rightarrow 0.$$

On en déduit que $\text{Tor}_1^{\mathcal{O}_{Y'}}(\mathcal{O}_{Y_0}, \mathcal{O}_Y) = 0$, puis que φ est plat car $\varphi_0 : Y_0 \rightarrow Y'_0$ est plat.

On conclut que φ est un isomorphisme car il est plat et de fibre un point simple.

(4.2.9) DÉFINITION. — *Un morphisme $f : X \rightarrow S$ est stable si tout déploiement généralisé de f est trivial.*

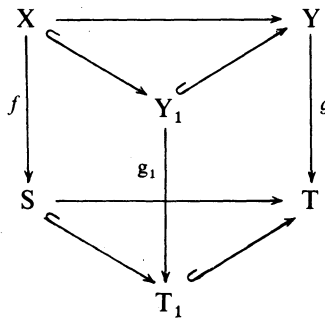
Un morphisme $f : X \rightarrow S$ est infinitésimalement stable si tout déploiement généralisé $g : Y \rightarrow T$ de f tel que T soit un épaissement de S , est trivial.

(4.2.10) PROPOSITION. — *Un morphisme $f : \mathbf{k}^n \rightarrow \mathbf{k}^p$ est stable si et seulement si il est stable au sens de Thom-Mather (4.1.1).*

Un morphisme $f : X \rightarrow S$ plat est stable si et seulement si il est stable au sens du Chapitre 3 (3.1.4).

(4.2.11) Remarque. — *Lorsqu'on tente de démontrer que tout morphisme infinitésimalement stable est stable, le premier obstacle est le suivant :*

Soit $g : Y \rightarrow T$ un déploiement généralisé de $f : X \rightarrow S$, notons I l'idéal de \mathcal{O}_T définissant S dans T , soient T_1 le sous-espace de T défini par l'idéal I^2 de \mathcal{O}_T et $g_1 : Y_1 \rightarrow T_1$ le morphisme obtenu par changement de base



alors la condition $\text{Tor}_1^{\text{Op}}(\text{O}_Y, \text{O}_S) = 0$ n'implique pas la condition

$$\text{Tor}_1^{\text{Op}}(\text{O}_Y, \text{O}_{T_1}) = 0.$$

Exemple : $\text{O}_T = \mathbf{k}\{t_1, t_2, t_3\}$, $\text{O}_Y = \mathbf{k}\{t_1, t_2\}$

$$I = (t_1^2 - t_2 t_3^2, t_2^2 - t_1 t_3, t_1 t_2 - t_3^3).$$

3. Relation entre un morphisme stable entre germes lisses et la déformation semi-universelle de sa fibre.

(4.3.1) THÉORÈME. — Soient $F : \mathbf{k}^n \rightarrow \mathbf{k}^p$ un morphisme stable et $F_p : X_p \rightarrow Y_p$ son platificateur local (1.4.4).

Alors F_p est un morphisme stable.

Démonstration :

(4.3.2) LEMME. — Soient X_0 la fibre d'un morphisme $F : \mathbf{k}^n \rightarrow \mathbf{k}^p$ et $\varphi : X \rightarrow Y$ une déformation plate de X_0 . Supposons Y plongé dans un espace libre \mathbf{k}^r .

a) Il existe un plongement i de X dans $\mathbf{k}^n \times Y$ tel que φ soit le composé :

$$X \xrightarrow{i} \mathbf{k}^n \times Y \xrightarrow{pr_2} Y$$

et il existe un morphisme $\psi : \mathbf{k}^n \times Y \rightarrow \mathbf{k}^p$ tel que :

$$\psi(x, 0) = F(x) \quad \forall x \in \mathbf{k}^n, \text{ et } iX = \psi^{-1}(0).$$

b) Il existe un déploiement \tilde{G} de F tel que le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} X_0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{i} & \mathbf{k}^n \times Y & \longrightarrow & \mathbf{k}^n \times \mathbf{k}^r \\ \downarrow & & \varphi \downarrow & & \tilde{\Psi} \downarrow & & \tilde{G} \downarrow \\ \{0\} & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & \mathbf{k}^p \times Y & \longrightarrow & \mathbf{k}^p \times \mathbf{k}^r \end{array}$$

où $\tilde{\Psi}$ est défini par $\tilde{\Psi}(x, y) = (\psi(x, y), y)$ et les flèches non normées sont canoniques, soit commutatif et ait tous ses carrés cartésiens.

Preuve. — Le a) est démontré en Annexe. Le b) est une façon d'exprimer le a) et le plongement de Y dans l'espace lisse \mathbf{k}^r . \square

(4.3.3) Soit $Q = \mathbf{k}\{x_1, \dots, x_a\}/(f_1, \dots, f_b)$ une présentation minimale de l'algèbre locale de la fibre X_0 de F . D'après le Théorème (4.1.2) et avec les mêmes notations, il existe un morphisme stable $F' : \mathbf{k}^a \times \mathbf{k}^q \rightarrow \mathbf{k}^{b+c} \times \mathbf{k}^q$ et un entier s , tels que F soit isomorphe à $F' \times \text{Id}_{\mathbf{k}^s}$.

D'après le Théorème (3.1.7), il nous suffit donc de montrer que le platicateur $F'_p : X'_p \rightarrow Y'_p$ est la déformation semi-universelle de X_0 . Pour simplifier l'écriture, supposons $s = 0$ et supprimons le signe '.

Pour toute déformation plate $\varphi : X \rightarrow Y$ de la fibre X_0 du morphisme stable $F : \mathbf{k}^n \rightarrow \mathbf{k}^p$, le lemme précédent implique l'existence d'un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \longrightarrow & \mathbf{k}^n \times \mathbf{k}^r & \overset{\curvearrowright}{\longleftarrow} & \mathbf{k}^n & \longleftarrow & X_p \\
 \varphi \downarrow & (1) & \tilde{G} \downarrow & & F \downarrow & & F_p \downarrow \\
 Y & \longrightarrow & \mathbf{k}^p \times \mathbf{k}^r & \overset{\curvearrowright}{\longleftarrow} & \mathbf{k}^p & \longleftarrow & Y_p
 \end{array}$$

où le carré (1) est cartésien. Comme F est stable, le déploiement \tilde{G} se rétracte sur F et φ se déduit de F par changement de base; φ étant plat ce changement de base se factorise par Y_p . On en déduit que toute déformation plate de X_0 s'obtient par changement de base à partir de F_p , c'est-à-dire que F_p est une déformation verselle de X_0 .

Pour que F_p soit semi-universelle, il nous suffit à présent de montrer la proposition suivante.

(4.3.4) PROPOSITION. — *Toute déformation plate*

$$\varphi : X \rightarrow D = \text{Spec}(\mathbf{k}[\varepsilon]/\varepsilon^2)$$

de X_0 se déduit de F par un unique changement de base

$$h : D \rightarrow \mathbf{k}^p = \mathbf{k}^{b+c} \times \mathbf{k}^q.$$

Preuve. — Soit $\varphi : X \rightarrow D$ une déformation plate de X_0 . D'après (4.3.3) il existe un changement de base $h : D \rightarrow \mathbf{k}^{b+c} \times \mathbf{k}^q$ défini par :

$$h^*(y_i) = \varepsilon \eta_i \quad (1 \leq i \leq b+c)$$

et

$$h^*(t_k) = \varepsilon \theta_k \quad (1 \leq k \leq q),$$

tel que le diagramme en traits pleins

$$\begin{array}{ccccc}
 O_{x_0} = \frac{\mathbf{k}\{x\}}{(f)} & \xleftarrow{\tau^*} & O_x = \frac{\mathbf{k}\{x,\varepsilon\}}{(f + \varepsilon\theta \cdot g - \varepsilon\eta, \varepsilon^2)} & \xleftarrow{l^*} & \mathbf{k}\{x,t\} \\
 \uparrow & & \uparrow \varphi^* & & \uparrow F^* \\
 \mathbf{k} & \xleftarrow{\quad} & \mathbf{k}[\varepsilon]/\varepsilon^2 & \xleftarrow{\frac{h^*}{h^*}} & \mathbf{k}\{y,t\}
 \end{array}$$

où $\varphi^*(\varepsilon) = \bar{\varepsilon}$ = classe de ε dans O_x , $l^*(t_k) = \bar{\varepsilon}\theta_k$ ($1 \leq k \leq q$) et $l^*(x_j) = \bar{x}_j$ = classe de x_j dans O_x ($1 \leq j \leq a$), soit commutatif.

Supposons que $h' : D \rightarrow \mathbf{k}^{b+c} \times \mathbf{k}^q$ défini par

$$h'^*(y_i) = \varepsilon\eta'_i \quad (1 \leq i \leq b+c), \quad h'^*(t_k) = \varepsilon\theta'_k \quad (1 \leq k \leq q)$$

soit un autre changement de base qui convienne. Il existe alors un morphisme $l'^* : \mathbf{k}\{x,t\} \rightarrow O_x$ tel que

$$l'^* \circ F^* = \varphi^* \circ h'^* \quad \text{et} \quad \tau^* \circ l'^* = \tau^* \circ l^*.$$

D'où

$$l'^*(t_k) = l'^* \circ F^*(t_k) = \varphi^* \circ h'^*(t_k) = \bar{\varepsilon}\theta'_k \quad (1 \leq k \leq q);$$

par ailleurs $\mathbf{k}\{x\}/(f)$ étant une présentation minimale de O_{x_0} , on a

$$\tau^* \circ l'^*(x_j) = \text{classe de } x_j \text{ dans } O_{x_0}, \quad (1 \leq j \leq a),$$

il existe alors $\delta_j(x) \in \mathbf{k}\{x\}$ tel que $l'^*(x_j) = x_j + \varepsilon\delta_j(x)$ dans O_x . Donc

$$l'^* \circ F^*(y_i) - \varphi^* \circ h'^*(y_i) = f'_i(x + \varepsilon\delta(x)) + \varepsilon \sum_{k=1}^q \theta'_k g'_i{}^k(x) - \varepsilon\eta'_i = 0$$

dans O_x , ($1 \leq i \leq b+c$).

C'est-à-dire qu'il existe des $\lambda_i^m(x) + \varepsilon\mu_i^m(x) \in \mathbf{k}\{x,\varepsilon\}/\varepsilon^2$ tels que dans $\mathbf{k}\{x,\varepsilon\}/\varepsilon^2$, on ait les égalités ($1 \leq i \leq b+c$) :

$$\begin{aligned}
 f'_i(x) + \varepsilon \sum_{j=1}^a \frac{\partial f'_i}{\partial x_j} \cdot \delta_j(x) + \varepsilon \sum_{k=1}^q \theta'_k g'_i{}^k(x) - \varepsilon\eta'_i \\
 = \sum_{m=1}^{b+c} (\lambda_i^m(x) + \varepsilon\mu_i^m(x)) (f_m(x) + \varepsilon \sum_{k=1}^q \theta_k g_m^k(x) - \varepsilon\eta_m);
 \end{aligned}$$

La platitude de φ (voir l'Annexe) implique que la relation

$$f'_i(x) = \sum \lambda_i^m(x) f_m(x),$$

obtenue en « faisant » $\varepsilon = 0$, se prolonge en la relation :

$$f_i(x) + \varepsilon \sum \theta_k g_i^k(x) - \varepsilon \eta_i = \sum \lambda_i^m(x)(f_m(x) + \varepsilon \sum \theta_k g_m^k(x) - \varepsilon \eta_m) + \sum \mu_i^m(x) f_m(x) ;$$

en soustrayant, on obtient dans $\mathbf{k}\{x\}$:

$$\sum_{k=1}^q (\theta_k - \theta'_k) g_i^k(x) - (\eta_i - \eta'_i) + \sum_{j=1}^q \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \cdot \delta_{f_j}(x) - \sum_{m=1}^{b+c} (\mu_i^m(x) - \mu_i'^m(x)) f_m(x) = 0 \quad (1 \leq i \leq b+c).$$

On conclut que $\eta_i = \eta'_i$ ($1 \leq i \leq b+c$) puis que $\theta_k = \theta'_k$ ($1 \leq k \leq q$) en se rappelant que les classes de g_1, \dots, g_q dans

$$\mathbf{k}\{x\}^{b+c} / (\mathbf{k}^{b+c} + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + (f)^{(b+c)})$$

forment une base de ce \mathbf{k} -espace vectoriel.

4. Un exemple.

Pour illustrer les résultats précédents, nous étudions la déformation semi-universelle du point de \mathbf{C}^3 défini par le carré de l'idéal maximal de $\mathbf{C}\{x,y,z\}$, $X_0 = (0, \mathbf{C}\{x,y,z\}/(x,y,z)^2)$.

Nous obtenons ainsi l'exemple le plus simple de morphisme stable et plat à but non lisse, car la déformation semi-universelle d'un point de \mathbf{C}^2 est à base lisse.

(4.4.1) *Présentation minimale de X_0 .* — X_0 est la fibre de l'application

$$\begin{aligned} f_0 : \mathbf{C}^2 &\longrightarrow \mathbf{C}^6 \\ (x,y,z) &\longrightarrow (x^2, y^2, z^2, xy, yz, zx). \end{aligned}$$

Formons le quotient :

$$\left[\frac{\mathbf{C}\{x,y,z\}}{(x^2, y^2, z^2, xy, yz, zx)} \right]^6 / \left[\mathbf{C}^6 + \begin{pmatrix} 2x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2z \end{pmatrix} \right]$$

$$\begin{matrix} y & x & 0 \\ 0 & z & y \\ z & 0 & x \end{matrix}$$

C'est un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension 15, on en choisit une base de monômes.

(4.4.2) *Présentation de X_0 comme fibre d'une application stable f .* — X_0 est la fibre de l'application f suivante qui est stable d'après le Théorème (4.1.2) :

$$f : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^{15} \longrightarrow \mathbb{C}^6 \times \mathbb{C}^{15}$$

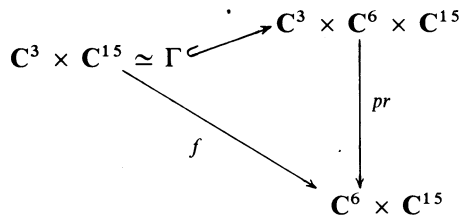
qui à

$$((x, y, z), (a, a', a'', b, b', b'', c, c', c'', d, d', d'', x_0, y_0, z_0))$$

associe $((f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6), (a, a', \dots, y_0, z_0))$ avec

$$\begin{aligned} f_1 &= x^2 - (2x_0 + a)x - by + cz \\ f_2 &= y^2 - (2y_0 + a')y - b'z + c'x \\ f_3 &= z^2 - (2z_0 + a'')z - b''x + c''y \\ f_4 &= xy - y_0x - (x_0 + d)y \\ f_5 &= yz - z_0y - (y_0 + d')z \\ f_6 &= zx - x_0z - (z_0 + d'')x \end{aligned}$$

(4.4.3) *Platificateur de f .* — Le platificateur de f est le morphisme $X \rightarrow S$ déduit de f par changement de base $S \rightarrow \mathbb{C}^6 \times \mathbb{C}^{15}$, le sous-espace S étant déterminé par la Définition (1.4.5). Pour calculer les équations de S , considérons le graphe Γ de f :



le graphe Γ a pour équations : $f_1 - u_1, f_2 - u_2, \dots, f_6 - u_6$. Il nous faut donc calculer l'idéal J de $\mathbb{C}\{u_1, \dots, u_6, a, a', \dots, y_0, z_0\}$ déterminé par la Proposition (1.2.8) avec

$$\mathcal{M} = (f_1 - u_1, \dots, f_6 - u_6) \subset \mathbb{C}\{x, y, z, u_1, \dots, u_6, a, \dots, z_0\}.$$

(4.4.4) *Équations de la base du platificateur.* — Pour calculer des générateurs de J , on considère une famille de générateurs des relations entre $(x^2, y^2, z^2, xy, yz, zx)$, on applique ces relations à

$$(f_1 - u_1, \dots, f_6 - u_6),$$

on divise par \mathcal{M} et on prend tous les coefficients des monômes qui restent sous l'escalier.

Dans notre exemple, on considère 8 relations génératrices :

$$\begin{array}{lll} y \cdot x^2 - x \cdot xy, & z \cdot y^2 - y \cdot yz, & x \cdot z^2 - z \cdot zx, \\ z \cdot x^2 - x \cdot zx, & x \cdot y^2 - y \cdot xy, & y \cdot z^2 - z \cdot yz, \\ z \cdot xy - x \cdot yz, & x \cdot yz - y \cdot zx. & \end{array}$$

Elles nous donnent 8 éléments de \mathcal{M} :

$$y(f_1 - u_1) - x(f_4 - u_4), \quad z(f_2 - u_2) - y(f_5 - u_5), \dots$$

Pour chacun de ces éléments, on remplace x^2 par

$$x^2 - f_1 = (2x_0 + a)x + by - cz, \quad y^2 \text{ par } y^2 - f_2 \text{ etc...};$$

dans les 8 expressions obtenues, les 32 coefficients de 1, x , y , z sont les générateurs de J que nous cherchons.

Après élimination des générateurs redondants, il reste :

$$\begin{array}{l} -u_1 = x_0(x_0 + a) + by_0 - cz_0 + a'b + d(a-d) \\ -u_2 = y_0(y_0 + a') + b'z_0 - c'x_0 + a''b' + d'(a' - d') \\ -u_3 = z_0(z_0 + a'') + b''x_0 - c''y_0 + ab'' + d''(a'' - d'') \\ -u_4 = y_0(x_0 + d) + dd' \\ -u_5 = z_0(y_0 + d') + d'd'' \\ -u_6 = x_0(z_0 + d'') + d''d \end{array}$$

et les 12 équations suivantes dans \mathbf{C}^{15} où n'apparaissent que les 12 variables $d, d', d'', c, c', c'', b, b', b'', e, e', e''$ et où on a posé $e = a - d, e' = a' - d', e'' = a'' - d''$:

$$\begin{array}{lll} bb' = cd' & cc'' = bd'' & bc' = dd' \\ b'b'' = c'd'' & c'c = b'd & b'c'' = d'd'' \\ b''b = c''d & c''c' = b''d' & b''c = d''d \\ de + be' + ce'' = 0 \\ c'e + d'e' + b'e'' = 0 \\ b''e + c''e' + d''e'' = 0. \end{array}$$

Remarquons que les 9 premières équations expriment que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} d & b & c \\ c' & d' & b' \\ b'' & c'' & d'' \end{pmatrix}$$

est de rang inférieur ou égal à 1; ce sont les équations dans \mathbf{C}^9 du cône

centré à l'origine sur le plongement de Segré de $\mathbf{P}^2 \times \mathbf{P}^2$ dans \mathbf{P}^8 défini par :

$$((\lambda, \lambda', \lambda''), (\mu, \mu', \mu'')) \longrightarrow (\lambda\mu, \lambda'\mu, \lambda''\mu, \dots, \lambda''\mu'').$$

Si les 9 premières équations sont satisfaites, les 3 dernières sont proportionnelles.

Interprétation. — La base S de la déformation quasi-universelle du point

$$(0, \mathbf{C}\{x, y, z\}/(x, y, z)^2)$$

est le produit par le germe lisse \mathbf{C}^3 , correspondant aux variables (x_0, y_0, z_0) , du cône centré à l'origine de \mathbf{C}^{12} sur un fibré localement trivial de rang 2 et de base le plongement de degré de $\mathbf{P}^2 \times \mathbf{P}^2$ dans \mathbf{P}^8 . S est donc un germe d'espace analytique de dimension 10, de dimension de plongement 15, S est à singularité isolée et rigide, c'est-à-dire n'admet pas de déformation infinitésimale non triviale.

ANNEXE

UN CRITÈRE (BIEN CONNU) DE PLATITUDE

1. LEMME. — Soit un morphisme d'espaces analytiques $f : X \rightarrow S$, si sa fibre X_0 est plongée dans l'espace lisse \mathbf{k}^n , il existe un plongement i de X dans $\mathbf{k}^n \times S$ tel que f soit le composé de i et de la projection $pr_2 : \mathbf{k}^n \times S \rightarrow S$.

Preuve. — Notons y_1, \dots, y_r un système de paramètres de l'idéal maximal \mathfrak{M}_S de O_S et η_1, \dots, η_r les images de ces éléments par $f^* : O_S \rightarrow O_X$. D'après l'hypothèse, O_{X_0} admet la présentation $O_{X_0} = \mathbf{k}\{x_1, \dots, x_n\}/J$, d'où l'isomorphisme :

$$O_X/(\eta_1, \dots, \eta_r) = \mathbf{k}\{x_1, \dots, x_n\}/J.$$

Pour tout $j = 1, \dots, n$ choisissons un élément ξ_j de O_X tel que dans O_{X_0} sa classe soit égale à celle de x_j .

Définissons $i^* : O_{\mathbf{k}^n \times S} = O_S\{x_1, \dots, x_n\} \rightarrow O_X$ par

$$i^*(y_k) = \eta_k \quad (1 \leq k \leq r) \quad \text{et} \quad i^*(x_j) = \xi_j \quad (1 \leq j \leq n).$$

Le morphisme i^* est bien défini, surjectif et vérifie l'égalité

$$i^* \circ pr_2^* = f^*. \quad \square$$

2. LEMME. — Soit $f : X \rightarrow S$ un morphisme d'espaces analytiques, d'après le lemme précédent O_X admet la présentation

$$O_X = O_S\{x\}/I, \quad x = (x_1, \dots, x_n),$$

notons $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_S$ l'idéal maximal de O_S . Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(i) le morphisme f est plat

(ii) $I \cap \mathfrak{M} \cdot O_S\{x\} = \mathfrak{M} \cdot I$.

Preuve. — On a le diagramme commutatif suivant où les flèches verticales sont les flèches de tensorisation par \mathbf{k} sur O_S et les lignes sont des suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 & \longrightarrow & I & \longrightarrow & O_S\{x\} & \longrightarrow & O_X & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow \chi & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & \text{Tor}_{O_S}^1(O_X, \mathbf{k}) & \longrightarrow & I/\mathfrak{M}.I & \longrightarrow & \mathbf{k}\{x\} & \longrightarrow & O_{X_0} & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

On voit immédiatement que (ii) est vraie si et seulement si

$$\text{Tor}_{O_S}^1(O_X, \mathbf{k}) = 0$$

donc si et seulement si f est plat d'après le critère de platitude de Bourbaki [6]. Remarquons que l'on a le même énoncé lorsqu'on remplace O_X par un $O_S\{x\}$ -module de type fini. \square

3. LEMME. — Soit $f : X \rightarrow S$ un morphisme plat et soit $O_S\{x\}/I$

$$x = (x_1, \dots, x_n)$$

une présentation de O_X , notons $\chi : O_S\{x\} \rightarrow \mathbf{k}\{x\}$ la surjection canonique. Si I' est un idéal de $O_S\{x\}$ inclus dans I tel que $\chi(I) = \chi(I')$, alors $I = I'$.

Preuve. — Si $I' \neq I$, d'après le Théorème de Krull, il existerait un plus grand entier r tel que $I' + \mathfrak{M}^r \cdot O_S\{x\}$ contienne I , \mathfrak{M} désignant l'idéal maximal de O_S . Soit alors

$$H \in I \quad \text{et} \quad H \notin I' + \mathfrak{M}^{r+1} \cdot O_S\{x\},$$

par hypothèse il existe $H' \in I'$ tel que $\chi(H) = \chi(H')$ donc

$$H - H' \in \ker \chi \cap I = \mathfrak{M} \cdot I \subset \mathfrak{M} \cdot I' + \mathfrak{M}^{r+1} \cdot O_S\{x\}$$

par le lemme précédent, d'où une contradiction. \square

4. COROLLAIRE. — Si dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 X' & \xrightarrow{i} & X \\
 f' \searrow & & \swarrow f \\
 & & S
 \end{array}$$

où i est un plongement et f est plat, les morphismes f et f' ont même fibre alors i est un isomorphisme.

5. CRITÈRE DE PLATITUDE. — Soient $f : X \rightarrow S$ un morphisme de germes d'espaces analytiques et

$$\mathcal{O}_{X_0} = \mathbf{k}\{x\}/(f_1, \dots, f_p) \quad x = (x_1, \dots, x_n)$$

une présentation de l'algèbre locale de la fibre X_0 de f .

Notons χ la surjection canonique $\mathcal{O}_S\{x\} \rightarrow \mathbf{k}\{x\}$. Le morphisme f est plat si et seulement si :

1° il existe une présentation de l'algèbre \mathcal{O}_X du type suivant

$$\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_S\{x\}/(F_1, \dots, F_p)$$

avec

$$\chi(F_i) = f_i \quad (1 \leq i \leq p),$$

2° pour toute relation $\sum_{i=1}^p g_i f_i = 0$, $g_i \in \mathbf{k}\{x\}$, il existe une relation

$$\sum_{i=1}^p G_i F_i = 0 \quad \text{avec } G_i \in \mathcal{O}_S\{x\} \text{ et } \chi(G_i) = g_i \quad (1 \leq i \leq p).$$

Preuve. — Supposons f plat. Le point 1° résulte du lemme précédent, démontrons le point 2° : si $\sum_{i=1}^p g_i f_i = 0$, $g_i \in \mathbf{k}\{x\}$, alors

$$\sum_{i=1}^p g_i F_i \in \mathcal{I} \cap \mathfrak{M} \cdot \mathcal{O}_S\{x\} = \mathfrak{M} \cdot \mathcal{I}$$

où \mathcal{I} désigne l'idéal (F_1, \dots, F_p) de $\mathcal{O}_S\{x\}$ et \mathfrak{M} l'idéal maximal de \mathcal{O}_S , donc il existe $m_i \in \mathfrak{M}$ ($1 \leq i \leq p$) tels que

$$\sum_{i=1}^p g_i F_i = \sum_{i=1}^p m_i F_i \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^n (g_i - m_i) F_i = 0.$$

Réciproquement, montrons que $\mathcal{I} \cap \mathfrak{M} \cdot \mathcal{O}_S\{x\} = \mathfrak{M} \cdot \mathcal{I}$ et appliquons le lemme 2. Pour tout $H = \sum_{i=1}^p G_i F_i \in \mathcal{I} \cap \mathfrak{M} \cdot \mathcal{O}_S\{x\}$ en notant $g_i = \chi(G_i)$

on obtient $\sum_{i=1}^p g_i f_i = 0$; il existe alors $G'_i \in \mathcal{O}_S\{x\}$ ($1 \leq i \leq p$) tels que

$$\chi(G'_i) = \chi(G_i) \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^p G'_i F_i = 0,$$

d'où $H = \sum_{i=1}^p (G_i - G'_i) F_i \in \mathfrak{M} \cdot \mathcal{I}$. \square

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. ARTIN, On the solutions of Analytic Equations, *Invent. Mat.*, Vol 5 (1968), 277-291.
- [2] M. ARTIN, Versal deformations and algebraic stacks, *Invent. Mat.*, Vol 27 (1974), 165-189.
- [3] J. BRIANÇON. Weierstrass préparé à la Hironaka, *Astérisque*, n° 7 et 8 (1973), 67-76.
- [4] J. BRIANÇON, Description de $\text{Hilb}^n \mathbb{C}\{x,y\}$, Thèse, Univ. de Nice (1976), *Inv. Math.* vol. 41 (1977), 45-89.
- [5] J. BRIANÇON et A. GALLIGO, Déformations de points de \mathbb{R}^2 ou \mathbb{C}^2 , *Astérisque*, n° 7 et 8 (1973), 129-138.
- [6] N. BOURBAKI, Algèbre commutative, Hermann éditeur.
- [7] J. DIEUDONNÉ et A. GROTHENDIECK, E.G.A. Public. Math. I.H.E.S.
- [8] A. DOUADY, Le problème des modules... *Ann. Inst. Fourier*, 16, 1 (1966), 1 à 95.
- [9] R. ELKIK, Algébrisation du module des singularités isolées, *Astérisque*, n° 16 (1974), 133-144.
- [10] A. M. GABRIELOV, The formal relation between analytic functions, *Functional Anal. Appl.*, (1971), 318-319.
- [11] A. GALLIGO, A propos du théorème de préparation, *Lecture Notes*, n° 409 (1973) 543-579.
- [12] A. GALLIGO et C. HOUZEL, Déformations semi-universelles..., *Astérisque*, n° 7 et 8 (1973), 139-164.
- [13] H. GRAUERT, Über die deformationen isolierter singularitäten, *Invent. Mat.*, Vol. 15, fasc 3 (1972).
- [14] C. HOUZEL, Géométrie analytique locale I, Séminaire H. Cartan, n° 18, 1960-1961.
- [15] H. HIRONAKA, Bimeromorphic smoothing of complex analytic spaces, Preprint Université de Warwick, 1971.
- [16] H. HIRONAKA, M. LEJEUNE et B. TESSIER, Platificateur local... *Astérisque*, n° 7 et 8 (1973), 441-463.
- [17] L. ILLUSIE, Complexe cotangent et déformations I, *Lectures Notes*, n° 239 (1971).
- [18] O. A. LAUDAL, Modules formels, Manuscrits à paraître.
- [19] A. H. M. LEVELT, Sur la représentabilité de certains foncteurs..., *Notes Katholieke Univ. Nijmegen*. Netherlands.
- [20] M. LEJEUNE et B. TESSIER, Contribution à l'étude des singularités, Thèses Université de Paris VII (1973).
- [21] B. MALGRANGE, Frobenius avec singularités 1, *Public. Math. I.H.E.S.*, 46 (1976).
- [22] J. MARTINET, Déploiements versels des applications différentielles... Preprint Université de Strasbourg (1976).
- [23] J. MATHER, Stability of C^∞ -mappings I, II, III, IV, V et VI. Voir le cours de C.T.C. Wall dans *Lecture Notes* n° 192 (1971), 178-206.
- [24] J. F. MATTEL, Projections génériques d'un germe... Thèse de 3^e Cycle, Univ. de Dijon (1976).
- [25] F. PHAM, Remarque sur l'équisingularité universelle. Classification des singularités, Preprints Université de Nice, 1970, 71.

- [26] G. POURCIN, Déformations de singularités isolées, *Astérisque*, n° 16 (1974), 161-173.
- [27] M. RAYNAUD, Flat modules in algebraic geometry, *Composito Mat.*, 24 (1972), 11-31.
- [28] M. RAYNAUD et GRUSON, Critères de platitude et de projectivité, *Inv. Mat.*, 13 (1971), 1-89.
- [29] G. RUGET, Déformations de germes d'espaces analytiques, *Astérisque*, n° 16 (1974), 133-144.
- [30] V. S. RETAKH, The « universal » deformation of germs of holomorphic mappings, *Funkt. ana. i ego Prilo.*, vol. 8 n° 1, (1974), 86-87.
- [31] M. SCHLESSINGER, Functors of Artin rings, *Trans. Am. Mat. Soc.*, Vol 130 n° 2 (1968), 208-222.
- [32] H. SPATH, Der Weierstrassche Vobereitungssatz., *Crelle Journ.*, 161 (1929), 95-100.
- [33] G. N. TJURINA, Locally semi-universal flat deformation... *Mat. of USSR Isv.*, vol. 3 n° 5 (1969), 967-999.
- [34] B. TEISSIER. The hunting of invariants in the geometry of discriminants, Real and Complex singularities. Oslo (1976).
- [35] WEIERSTRASS, Vobereitungssatz Werk, Vol. 2.
- [36] J. DAMON et A. GALLIGO, A topological invariant for stable map germs, *Invent. Mat.*, 32 (1976), 103-132.
- [37] J. DAMON, Partial topological classification for stable map germs, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 82 (1976), 105-107.
- [38] J. DAMON, Topological stability in the nice dimensions $n \leq p$, To appear *Bull. Amer. Math. Soc.*
- [39] J. DAMON, The relation between C^∞ and topological stability, Preprint.
- [40] A. IARROBINO, Punctual Hilbert Schemes, *Memoirs. Amer. Math. Soc.*, Vol. 10 (1977), 188.
- [41] J. BRIANÇON et A. IARROBINO, Dimensions of the punctual Hilbert Schemes, Preprint.

Manuscrit reçu le 20 octobre 1977.

André GALLIGO,
Université de Nice
Institut de Mathématiques
et Sciences Physiques
Parc Valrose
06034 Nice Cedex.
