ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

LYLIANE BOUVIER
JEAN-JACQUES PAYAN

Sur la structure galoisienne du groupe des unités d'un corps abélien de type (p, p)

Annales de l'institut Fourier, tome 29, nº 1 (1979), p. 171-187
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1979__29_1_171_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
29, 1 (1979), 171-187

SUR LA STRUCTURE GALOISIENNE DU GROUPE DES UNITÉS D'UN CORPS ABÉLIEN DE TYPE *(p,p)*

par L. BOUVIER et J. J. PAYAN

Dédié à Monsieur Claude Chabauty.

Notations et rappels.

$K/\mathbf{Q}$ désigne une extension abélienne dont le groupe de Galois G est le type (p, p), réelle si $p = 2$. On note $k_1, k_2, \ldots, k_{p+1}$ les extensions intermédiaires de degré p et E (resp. E_i) le quotient du groupe des unités de K (resp. k_i) par $\{\pm 1\}$, H_i désigne le sous-groupe de G auquel appartient k_i. Le groupe E est muni canoniquement d'une structure de $\mathbf{Z}[G]$-module de type fini sans $\mathbf{Z}$-torsion et l'on voit facilement que, dans le cas présent, E^{H_i} (sous-module de E formé des éléments invariants sous l'action de H_i) est égal à E_i. On pose en outre $g_i = G/H_i$.

On dira que K (resp. k_i) admet une unité de Minkowski si E (resp. E_i) est $\mathbf{Z}[G]$-monogène, ce qui équivaut, d'après un résultat de N. Moser [8], à E (resp. E_i) est $\mathbf{Z}[G]$-isomorphe à $\mathbf{Z}[G]/\mathbf{Z}\widetilde{G}$ (resp. $\mathbf{Z}[g_i]/\mathbf{Z}\widetilde{g_i}$) où $\widetilde{G}$ (resp. $\widetilde{g_i}$) désigne l'élément de $\mathbf{Z}[G]$ (resp. $\mathbf{Z}[g_i]$) somme des éléments de G (resp. g_i).

On sait depuis Nehrkorn [10] que si h_K (resp. h_i) désigne le nombre de classes d'idéaux de K (resp. k_i), le quotient $h_k \Big/ \prod_{i=1}^{p+1} h_i$ est une puissance de p.

Un calcul élémentaire de régulateur montre que $h_K = \dfrac{a}{p^\alpha} \prod_{i=1}^{p+1} h_i$ où $a = [E : E_1 E_2 \ldots E_{p+1}]$ et $\alpha = \dfrac{p(p+1)}{2} - 1$ (pour la valeur de α cf. S. Kuroda [7]). Nous nous servirons de cette formule à la fin de ce travail pour donner un exemple numérique, elle fait intervenir l'indice a, invariant lié à la structure galoisienne de E.

1. Extensions de modules réalisables comme modules d'unités.

Nous dirons qu'un $\mathbf{Z}[G]$-module M est réalisable comme module d'unités s'il existe un sous-$\mathbf{Z}[G]$-module de E $\mathbf{Z}[G]$-isomorphe à M. Nous allons donc considérer des $\mathbf{Z}[G]$-modules M astreints aux conditions suivantes :

a) M est de type fini et sans $\mathbf{Z}$-torsion ;

b) $\mathbf{Q} \otimes_{\mathbf{Z}} M$ s'injecte par un $\mathbf{Z}[G]$-homomorphisme dans $\mathbf{Q} \otimes_{\mathbf{Z}} E$ qui est $\mathbf{Z}[G]$-isomorphe à $\mathbf{Q}[G]/\mathbf{Q}\widetilde{G}$.

Par abus de langage, on appellera longueur de M la longueur de $\mathbf{Q} \otimes_{\mathbf{Z}} M$ (en tant que $\mathbf{Q}[G]$-module).

On note $\mathcal{H}_M$ l'ensemble des sous-groupes d'ordre p de G qui laissent point par point invariant un sous-module non trivial de M et, pour tout H_i dans $\mathcal{H}_M$, M^{H_i} désigne le sous-module de M formé des éléments invariants sous l'action de H_i et σ_i un générateur de H_i.

Remarque 1.1. – Le cardinal de $\mathcal{H}_M$ est égal à la longueur de M.

Remarque 1.2. – $\bigoplus_{H \in \mathcal{H}_M} M^H$ est un sous-$\mathbf{Z}[G]$-module d'indice fini de M.

Remarque 1.3. – $M/\bigoplus_{H \in \mathcal{H}_M} M^H$ est d'exposant 1 ou p. On le voit en remarquant que $p.1 = \sum_{i=1}^{p+1} \widetilde{H}_i - \widetilde{G}$ et que $\widetilde{G}$ annule M, $\widetilde{H}_i$ désignant l'élément de $\mathbf{Z}[G]$ somme des éléments de H_i.

On dit que M est une extension de $\overline{M}$ par M_0 s'il existe une suite exacte

$$0 \longrightarrow M_0 \longrightarrow M \longrightarrow \overline{M} \longrightarrow 0$$

de $\mathbf{Z}[G]$-modules *scindée* sur $\mathbf{Z}$. Etant donnés M_0 et $\overline{M}$, l'extension M est déterminée par la donnée d'un cocycle ϵ de G à valeurs dans $T = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\overline{M}, M_0)$ avec l'action de G définie par $(g, t) \longrightarrow g \circ t \circ g^{-1}$; M s'identifie alors au produit $\mathbf{Z}$-direct $M_0 \times \overline{M}$ sur lequel G opère par $g \cdot (x, y) = (gx + \epsilon_g gy, gy)$.

Convenons de dire que deux extensions M et M' de $\overline{M}$ par M_0 sont isomorphes au sens restreint s'il existe un $\mathbf{Z}[G]$-isomorphisme

φ de M sur M' rendant commutatif le diagramme suivant (cf. [11]) :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M_0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & \overline{M} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \\ 0 & \longrightarrow & M_0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & \overline{M} & \longrightarrow & 0 . \end{array}$$

Le résultat suivant est classique :

PROPRIETE 1.1. – *Les classes d'isomorphismes au sens restreint d'extensions de* $\overline{M}$ *par* M_0 *sont associées bijectivement aux éléments de* $H^1(G,T)$ (cf. [2]).

Remarque 1.4. – La remarque 1.2 montre que tout $\mathbf{Z}[G]$-automorphisme d'une extension M de $\overline{M}$ par M_0 induit par restriction un $\mathbf{Z}[G]$-automorphisme de M_0 et par passage au quotient un $\mathbf{Z}[G]$-automorphisme de $\overline{M}$. En effet, $\mathcal{H}_M$ est, compte-tenu de l'injection de $\mathbf{Q} \otimes M$ dans $\mathbf{Q}[G]/\mathbf{Q}\widetilde{G}$, la réunion disjointe de $\mathcal{H}_{M_0}$ et de $\mathcal{H}_{\overline{M}}$.

Faisons alors opérer $\mathrm{Aut}_{\mathbf{Z}[G]} M_0$ et $\mathrm{Aut}_{\mathbf{Z}[G]} \overline{M}$ sur $Z^1(G,T)$ en associant au couple (α, β) de $\mathrm{Aut}_{\mathbf{Z}[G]} M_0 \times \mathrm{Aut}_{\mathbf{Z}[G]} \overline{M}$ et au cocycle $\sigma \longrightarrow \epsilon_\sigma$ à valeurs dans T, le cocycle $\sigma \longrightarrow \alpha \circ \epsilon_\sigma \circ \beta^{-1}$. On en déduit immédiatement une opération de $\mathrm{Aut}_{\mathbf{Z}[G]} M_0$ et de $\mathrm{Aut}_{\mathbf{Z}[G]} \overline{M}$ sur $H^1(G,T)$.

PROPRIETE 1.2. – *Les classes d'isomorphisme d'extensions de* $\overline{M}$ *par* M_0 *sont en correspondance bijective avec les doubles classes de* $H^1(G,T)$ *sous l'action de* $\mathrm{Aut}_{\mathbf{Z}[G]} M_0$ *et de* $\mathrm{Aut}_{\mathbf{Z}[G]} \overline{M}$.

Démonstration. – Il suffit d'adapter la démonstration du lemme 8.1.8 de [3] au cas particulier que nous considérons.

Remarque 1.5. – L'énoncé précédent reste évidemment valable si on remplace G par un groupe fini quelconque à condition de ne considérer comme isomorphes deux extensions de $\overline{M}$ par M_0 que si l'isomorphisme laisse M_0 globalement invariant.

Pour classifier les $\mathbf{Z}[G]$-modules réalisables comme modules d'unités, nous allons considérer les extensions

$$0 \longrightarrow M_0 \longrightarrow M \longrightarrow \overline{M} \longrightarrow 0$$

avec $\overline{\mathrm{M}}$ de longueur 1 et M_0 de longueur $r-1$. Nous posons

$$\mathcal{H}_{\mathrm{M}_0} = \mathcal{H}_0 = \{\mathrm{H}_1, \mathrm{H}_2, \ldots, \mathrm{H}_{r-1}\}$$

et

$$\mathcal{H}_{\overline{\mathrm{M}}} = \overline{\mathcal{H}} = \{\mathrm{H}_r\} = \{\overline{\mathrm{H}}\}.$$

Les remarques 1.1 et 1.2 montrent que $\mathcal{H}_{\mathrm{M}} = \mathcal{H}_0 \cup \overline{\mathcal{H}}$. On en déduit que $\mathrm{M}^{\mathrm{H}_r}$ s'injecte canoniquement sur un sous-module d'indice fini de $\overline{\mathrm{M}}$.

Le groupe G opère naturellement sur $\mathrm{H}^1(\mathrm{H}_r, \mathrm{T})$ en associant à $g \in \mathrm{G}$ et à $\epsilon \in \mathrm{Z}^1(\mathrm{H}_r, \mathrm{T})$ le cocycle $\sigma \longrightarrow g \circ \epsilon_\sigma \circ g^{-1}$ et en passant aux classes modulo les 1-cobords. Enonçons alors la

PROPRIETE 1.3. – $\mathrm{H}^1(\mathrm{G}, \mathrm{T})$ *est isomorphe à* $\mathrm{H}^1(\mathrm{H}_r, \mathrm{T})^{\mathrm{G}/\mathrm{H}_r}$.

Démonstration. – De la suite formée par inflation et restriction, on extrait (cf. [12], chap. VII, § 6) la suite exacte

$$\mathrm{H}^1(\mathrm{G}/\mathrm{H}_r, \mathrm{T}^{\mathrm{H}_r}) \longrightarrow \mathrm{H}^1(\mathrm{G}, \mathrm{T}) \longrightarrow \mathrm{H}^1(\mathrm{H}_r, \mathrm{T})^{\mathrm{G}/\mathrm{H}_r} \longrightarrow \mathrm{H}^2(\mathrm{G}/\mathrm{H}_r, \mathrm{T}^{\mathrm{H}_r}).$$

Il reste à voir que $\mathrm{T}^{\mathrm{H}_r} = \{0\}$: comme H_r opère trivialement sur $\overline{\mathrm{M}}$, cela revient à montrer que $\mathrm{M}_0^{\mathrm{H}_r} = \{0\}$; cette dernière assertion résulte de $\mathrm{H}_r \notin \mathcal{H}_0$.

La remarque suivante rappelle la structure des $\mathbf{Z}[\mathrm{G}]$-modules de longueur 1.

Remarque 1.6. – Il résulte facilement de la classification des $\mathbf{Z}[g_i]$-modules pour g_i cyclique d'ordre premier (cf. [11] ou des remarques de A. Brumer [1]) qu'un $\mathbf{Z}[\mathrm{G}]$-module de longueur 1 est indécomposable et isomorphe à un idéal $\mathfrak{a}$ de $\mathbf{Q}^{(p)}$, corps cyclotomique d'indice p, et que l'action d'un élément de $\mathrm{G} \setminus \mathrm{H}_i$ est la multiplication par une racine primitive p-ième de l'unité.

Ce qui précède suffit à démontrer la

PROPRIETE 1.4. – *Si la longueur de* M_0 *est égale à* 1, *le nombre de classes d'extensions de* $\overline{\mathrm{M}}$ *par* M_0 *est égal à* 2.

Démonstration. – D'après la propriété 1.3, le nombre de classes d'isomorphisme au sens restreint est égal au cardinal de $\mathrm{H}^1(\mathrm{H}_r, \mathrm{T})^{\mathrm{G}/\mathrm{H}_r}$. Or $\mathrm{H}^1(\mathrm{H}_r, \mathrm{T})$ est isomorphe à $\mathrm{T}/(\sigma_r - 1)\mathrm{T} \simeq (\mathrm{M}_0/(\sigma_r - 1)\mathrm{M}_0)^{p-1}$.

Ici $r = 2$, donc $H^1(H_2, T) \simeq T/(\sigma_2 - 1)T$ est un $\mathbf{F}_p$-espace vectoriel de dimension $p - 1$. L'élément σ_1 opère sur $H^1(H_2, T)$, comme σ_1 opère trivialement sur M_0, $1 + \sigma_1 + \ldots + \sigma_1^{p-1}$ annule T. Montrons que le polynôme minimal de σ_1 est $(X - 1)^{p-1}$; si ce n'était pas le cas ce polynôme minimal serait de la forme $(X-1)^\alpha$ avec $1 \leqslant \alpha < p-1$; on en déduirait que pour tout $t \in T$, $t(\sigma_1 - 1)^\alpha = (\sigma_2 - 1)t'$ avec $t' \in T$. Soit alors $\{e_1, e_2, \ldots, e_{p-1}\}$ une $\mathbf{Z}$-base de $\overline{M}$ telle que $\{pe_1, pe_2, \ldots, pe_\alpha, e_{\alpha+1}, \ldots, e_{p-1}\}$ soit une $\mathbf{Z}$-base de $(\sigma_1 - 1)^\alpha \overline{M}$. On considère un $\mathbf{Z}$-homomorphisme t de $\overline{M}$ dans M_0 tel que $t(e_{\alpha+1}) \notin (\sigma_2 - 1)M_0$, alors, puisque $e_{\alpha+1} \in (\sigma_1 - 1)^\alpha \overline{M}$, $t(\sigma_1 - 1)^\alpha$ ne serait pas de la forme $(\sigma_2 - 1)t'$ avec $t' \in T$: d'où l'assertion désirée. Ainsi $H^1(H_2, T)^{G/H_2}$ s'identifie au sous-espace propre de l'opérateur σ_1 de polynôme minimal $(X-1)^{p-1}$. Il est clair que $H^1(H_2, T)^{G/H_2}$ est isomorphe à $\mathbf{F}_p[\sigma_1]/(\sigma_1 - 1)^{p-1}$ et le sous-espace propre est de dimension 1.

Remarquons encore que $\mathrm{Aut}_{\mathbf{Z}[G]} M_0$ s'identifie par un raisonnement classique issu de la remarque 1.6 au groupe multiplicatif des unités du corps cyclotomique $\mathbf{Q}^{(p)}$ et que l'action de l'automorphisme associé à l'unité cyclotomique $\zeta_2^i - 1/\zeta_2 - 1$, i entier compris entre 1 et $p-1$, se ramène à la multiplication par la classe de i modulo p. On voit donc que tous les éléments non nuls de $H^1(G, T)$ donnent des extensions $\mathbf{Z}[G]$-isomorphes, celles-ci n'étant pas isomorphes à l'extension construite avec les 1-cobords puisque cette dernière est la seule, à isomorphisme au sens restreint près, à être décomposée.

Pour traiter le cas où M_0 est de longueur 2, nous précisons l'isomorphisme entre $H^1(G, T)$ et $H^1(H_3, T)^{G/H_3}$. Remarquons d'abord qu'un élément ϵ de $Z^1(H_3, T)$ est caractérisé par la donnée de ϵ_{σ_3} dans T et que l'invariance par l'action de G/H_3 de la classe de ϵ modulo les 1-cobords se traduit pas la condition

$$\tau \epsilon_{\sigma_3} \tau^{-1} - \epsilon_{\sigma_3} = (\sigma_3 - 1)t \tag{1}$$

où $\tau \in G \setminus H_3$ et $t \in T$ (t dépendant bien entendu du choix de τ). Le prolongement $\widetilde{\epsilon}$ de ϵ à G est alors défini par $\widetilde{\epsilon}_\tau = t$, $\widetilde{\epsilon}_{\sigma_3} = \epsilon_{\sigma_3}$, les valeurs de $\widetilde{\epsilon}$ pour les autres éléments de G s'en déduisent en utilisant la condition "bord" et le fait que τ et σ_3 engendrent G.

Achevons alors l'étude des extensions de modules de longueur 1.

THEOREME 1.5. – *M_0 et $\overline{M}$ étant de longueur 1, les deux extensions de $\overline{M}$ par M_0 sont caractérisées par $[M : M^{H_1} \oplus M^{H_2}] = 1$ ou p suivant que le cocycle ϵ servant à les construire est un cobord ou non.*

Démonstration. – $M = M_0 \times \overline{M}$ étant déterminé par la donnée de ϵ, déterminons les éléments de M invariants par H_2. Ce sont les (x, y) vérifiant

$$(\sigma_2 - 1)x + \epsilon_{\sigma_2} y = 0 . \qquad (2)$$

Si ϵ est un cobord, c'est-à-dire $\epsilon_{\sigma_2} = (\sigma_2 - 1)t$ avec $t \in T$, l'équation (2) s'écrit $(\sigma_2 - 1)(x + ty) = 0$, soit encore $x + ty = 0$ puisque le noyau de la multiplication par $\sigma_2 - 1$ est nul dans M_0. D'où $M^{H_2} = \{(-ty, y), y \in \overline{M}\}$. Si ϵ n'est pas un cobord alors $\epsilon_{\sigma_2}(\overline{M}) \not\subset (\sigma_2 - 1)M_0$, mais la condition (1) utilisée avec $\tau = \sigma_1$ s'écrit $\epsilon_{\sigma_2}(\sigma_1^{-1} - 1) = (\sigma_2 - 1)t$; on en déduit, comme ci-dessus, que les couples $(-tz, (\sigma_1^{-1} - 1)z)$ où z parcourt $\overline{M}$, sont dans M^{H_2}. D'autre part, si $y \notin (\sigma_1^{-1} - 1)\overline{M}$ l'équation (2) n'a pas de solution, donc $M^{H_2} = \{(-tz, (\sigma_1^{-1} - 1)z) \mid z \in \overline{M}\}$. Un calcul élémentaire montre que $M^{H_1} = M_0$. On en déduit facilement que :

si ϵ est un cobord $M^{H_1} \oplus M^{H_2} = M$;

si ϵ n'est pas un cobord, $M^{H_1} \oplus M^{H_2} = \{(x, (\sigma_1^{-1} - 1)z) \mid x \in M_0$ et $z \in \overline{M}\}$ et l'on voit que $[M : M^{H_1} \oplus M^{H_2}] = [\overline{M} : (\sigma_1^{-1} - 1)\overline{M}] = p$.

On obtient alors sans peine le

COROLLAIRE 1.5. – *Soit M un $\mathbf{Z}[G]$-module de longueur 2, posons $\mathcal{H}_M = \{H_1, H_2\}$ alors ou bien $M = M^{H_1} \oplus M^{H_2}$, ou bien M est indécomposable et $[M : M^{H_1} \oplus M^{H_2}] = p$.*

Notation. – Dans le cas où $[M : M^{H_1} \oplus M^{H_2}] = p$, nous poserons $M = (M^{H_1}, M^{H_2})_1$.

Pour simplifier l'étude des modules de longueur 3, nous utiliserons la

Remarque 1.7. – Soit

$$0 \longrightarrow M'_0 \oplus M''_0 \longrightarrow M \longrightarrow \overline{M} \longrightarrow 0$$

une suite exacte définissant une extension de $\overline{M}$ par la somme $\mathbf{Z}[G]$-

directe $M'_0 \oplus M''_0$. Le cocycle associé ϵ s'écrit $\epsilon' \oplus \epsilon''$ avec $\epsilon' \in Z^1(G, T')$ (resp. $\epsilon'' \in Z^1(G, T'')$). où $T' = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\overline{M}, M'_0)$ (resp. $T'' \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\overline{M}, M''_0)$). En outre, si $\epsilon'' \in B^1(G, T'')$ alors $M = M' \oplus M''_0$ où M' est l'extension de $\overline{M}$ par M'_0 construite avec le cocycle ϵ'.

Nous aurons besoin également par la suite d'un résultat sur l'application norme : M désignant encore une extension de $\overline{M}$ par M_0 construite avec le cocycle $\epsilon \in Z^1(G, T)$, on obtient

PROPRIETE 1.6. – *Soient* $\sigma_r \in \overline{H}$ *et* $\sigma \in G$ *tel que* σ *opère non trivialement sur* $\overline{M}$, *alors* $(\sigma_r - 1) S_\sigma = \widetilde{H} \epsilon_{\sigma_r}$ *où* H *est le sous-groupe de* G *engendré par* σ *et où* $S_\sigma = \sum_{i=0}^{p-1} \epsilon_{\sigma^i} \sigma^i$.

Démonstration. – De la relation $\sigma^i \epsilon_{\sigma_r} - \epsilon_{\sigma_r} \sigma^i = (\sigma_r - 1) \epsilon_{\sigma^i} \sigma^i$ on déduit $\widetilde{H} \epsilon_{\sigma_r} - \epsilon_{\sigma_r} \widetilde{H} = (\sigma_r - 1) S_\sigma$, comme $\widetilde{H}\overline{M} = 0$, on obtient la relation voulue.

Utilisons ce qui vient d'être obtenu pour un module indécomposable de longueur 2 :

PROPRIETE 1.7. – $\widetilde{H}_i (M^{H_1}, M^{H_2})_1$ *est un sous-module d'indice* p^{p-2} *de* M^{H_i}.

Démonstration. – Par symétrie, on se ramène à $i = 1$. En prenant $H = H_1$ dans la propriété 1.6, on montre que $\widetilde{H}_1 (M^{H_1}, M^{H_2})_1$ est formé des $\widetilde{H}_1 x + S_{\sigma_1} y$ où x parcourt M^{H_1} et y parcourt M/M^{H_1}. Or $(\sigma_2 - 1) S_{\sigma_1} = p \epsilon_{\sigma_2}$ et en notant $\dfrac{p}{\sigma_2 - 1}$ le produit $\prod_{i=2}^{p-1} (\sigma_2^i - 1)$, on voit que $\widetilde{H}_1 (M^{H_1}, M^{H_2})_1$ est formé des éléments de M^{H_1} de la forme $px + \dfrac{p}{\sigma_2 - 1} \epsilon_{\sigma_2} y$ où x (resp. y) parcourt M^{H_1} (resp. M/M^{H_1}). L'assertion découle de ce que $\epsilon_{\sigma_2}(\overline{M}) \not\subset (\sigma_2 - 1) M^{H_1}$.

2. Classification des modules de longueur 3.

M désigne maintenant un $\mathbf{Z}[G]$-module de longueur 3 vérifiant les hypothèses restrictives faites au début de 1. On pose $\mathcal{H}_M = \{H_1, H_2, H_3\}$ et on note M_i le sous-$\mathbf{Z}[G]$-module de M formé des x tels que $px \in M^{H_j} \oplus M^{H_k}$ où $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$. M_i est donc un facteur $\mathbf{Z}$-direct de M et M est une extension (au sens défini en 1) de M/M_i par M_i, M/M_i est de longueur 1 et $\mathcal{H}_{M/M_i} = \{H_i\}$ alors que la longueur de M_i est 2.

La classification des $\mathbf{Z}[G]$-modules de longueur 3 réalisables comme modules d'unités passe donc par la classification des extensions de $\overline{M}$ de longueur 1 par M_0 de longueur 2 avec $\mathcal{H}_{\overline{M}} = \{H_3\}$ et $\mathcal{H}_{M_0} = \{H_1, H_2\}$. Pour chaque i, σ_i désigne encore un générateur de H_i. On voit sans peine que $M^{H_i} = M_0^{H_i}$ pour $i = 1, 2$.

1^er^ cas. – $M_0 = M_0^{H_1} \oplus M_0^{H_2}$ et $\overline{M}$ sont donnés et M est construit avec le cocycle $\epsilon = \epsilon' + \epsilon''$ où $\epsilon' \in Z^1(G, T')$ et $\epsilon'' \in Z^1(G, T'')$ (voir remarque 1.7).

PROPRIETE 2.1. –

a) *Si* $\epsilon \in B^1(G, T)$ *alors* $M = M^{H_1} \oplus M^{H_2} \oplus M^{H_3}$ *(somme* $\mathbf{Z}[G]$*-directe).*

b) *Si* $\epsilon \notin B^1(G, T)$ *et* $\epsilon' \in B^1(G, T')$ *alors*
$$M = (M^{H_2}, M^{H_3})_1 \oplus M^{H_1}.$$

c) *Si* $\epsilon' \notin B^1(G, T')$ *et* $\epsilon'' \notin B^1(G, T'')$ *alors toutes les extensions ainsi construites sont indécomposables,* $\mathbf{Z}[G]$*-isomorphes et vérifient* $[M : M^{H_1} \oplus M^{H_2} \oplus M^{H_3}] = p$. *En outre, pour tout* i, *on a* $M_i = M^{H_j} \oplus M^{H_k}$, *avec* $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$, *et* M *est une extension de* M/M_i *par* M_i *associée à un cocycle* $\epsilon_i' + \epsilon_i''$ *où* $\epsilon_i' \in Z^1(G, T_i') \setminus B^1(G, T_i')$ *(resp.* $\epsilon_i'' \in Z^1(G, T_i'') \setminus B^1(G, T_i'')$*) avec* $T_i' = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(M/M_i, M^{H_j})$ *et* $T_i'' = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(M/M_i, M^{H_k})$.

Démonstration. – Les assertions a) et b) résultent du théorème 1.5 et de la remarque 1.7. On voit encore par application de la propriété 1.3 que les extensions de $\overline{M}$ par M_0 construites avec un cocycle vérifiant les conditions de b) sont $\mathbf{Z}[G]$-isomorphes.

Examinons en détail le cas c). On voit sans difficulté que $M^{H_1} = M_0^{H_1}$ et $M^{H_2} = M_0^{H_2}$. M^{H_3} est formé des couples $(x_1 + x_2, y)$ de $(M^{H_1} \oplus M^{H_2}) \times \overline{M}$ tels que $(\sigma_3 - 1)(x_1 + x_2) + (\epsilon'_{\sigma_3} + \epsilon''_{\sigma_3})y = 0$, soit encore

$$\left\{\begin{aligned} &(\sigma_3 - 1)x_1 + \epsilon'_{\sigma_3} y = 0 \\ &(\sigma_3 - 1)x_2 + \epsilon''_{\sigma_3} y = 0 . \end{aligned}\right. \tag{2'}$$

Ecrivons la relation (1) avec $\tau = \sigma_1$ et $\tau = \sigma_2$, on obtient :

$$\epsilon'_{\sigma_3}(\sigma_1^{-1} - 1) = (\sigma_3 - 1)t' \quad \text{avec} \quad t' \in \mathrm{T}'$$

$$\epsilon''_{\sigma_3}(\sigma_2^{-1} - 1) = (\sigma_3 - 1)t'' \quad \text{avec} \quad t'' \in \mathrm{T}'' .$$

On en déduit en raisonnant comme dans la démonstration du théorème 1.5 que

$$M^{H_3} = \left\{ \left(- t'z - t'' \frac{\sigma_1^{-1} - 1}{\sigma_2^{-1} - 1} z , (\sigma_1^{-1} - 1)z \right) \middle| \, z \in \overline{M} \right\}$$

et en raisonnant comme dans le cas des extensions indécomposables de longueur 2 :

$$[M : M^{H_1} \oplus M^{H_2} \oplus M^{H_3}] = [\overline{M} : (\sigma_2 - 1)\overline{M}] = p .$$

Si M était décomposable, M s'écrirait comme somme $\mathbf{Z}$[G]-directe de deux sous-modules M' et M'' non triviaux. La semi-simplicité de $\mathbf{Q} \otimes M$ entrainerait alors l'existence de i tel que $\{M',M''\} = \{M_i, M^{H_i}\}$. C'est impossible avec $i = 3$ car on aurait alors $M = M^{H_1} \oplus M^{H_2} \oplus M^{H_3}$. C'est impossible avec $i = 1$ ou 2 car on aurait $M_i = (M^{H_j}, M^{H_k})_1$ et $M = M_i \oplus M^{H_i}$ et on se trouverait dans le cas b). M est donc indécomposable et la dernière assertion en découle.

Dans le cas c), on posera $M = ((M^{H_1} \oplus M^{H_2}), M^{H_3})_1$.

2^e cas. – $M_0 = (M_0^{H_1}, M_0^{H_2})_1$ et $\overline{M}$ sont donnés et M est construit avec le cocycle ϵ. On écrit la relation (1) sous la forme :

$$\epsilon_{\sigma_3}(\tau^{-1} - 1) = (\sigma_3 - 1)\tau^{-1}\epsilon_\tau + (\tau^{-1} - 1)\epsilon_{\sigma_3} . \tag{1'}$$

Le lemme suivant précise l'action de G sur M_0 :

LEMME 2.2. –

a) *Soit* $\tau \notin H_1 \cup H_2$, *alors* $(\tau - 1)M_0$ *est un sous-*$\mathbf{Z}$[G]-*module d'indice* p *de* $M_0^{H_1} \oplus M_0^{H_2}$.

b) $(\sigma_1 - 1)M_0 = M_0^{H_2}$ *et* $(\sigma_2 - 1)M_0 = M_0^{H_1}$.

Démonstration. – Un calcul direct dans M_0 considéré comme extension de $M_0/M_0^{H_1}$ par $M_0^{H_1}$ associée à un cocycle η non cobord montre que $(\tau - 1)M_0$ est contenu dans $M_0^{H_1} \oplus M_0^{H_2}$. On utilise alors une **Z**-base de M_0 dont tous les éléments sauf le dernier sont dans $M_0^{H_1} \oplus M_0^{H_2}$ et on écrit la matrice associée à l'application **Z**-linéaire de M_0 dans lui-même obtenue en multipliant un élément par $\tau - 1$. On voit alors que

$$[M_0 : (\tau - 1)M_0] = [M_0^{H_1} \oplus M_0^{H_2} : (\tau - 1)(M_0^{H_1} \oplus M_0^{H_2})]$$
$$= [M_0^{H_1} : (\tau - 1)M_0^{H_1}] \times [M_0^{H_2} : (\tau - 1)M_0^{H_2}] = p^2$$

qui achève la démonstration de a).

Pour b), on considère la suite exacte

$$0 \longrightarrow M_0^{H_1} \longrightarrow M_0 \longrightarrow M_0/M_0^{H_1} \longrightarrow 0$$

associée à $\eta \in Z^1(G, \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(M_0/M_0^{H_1}, M_0^{H_1}))$, η non cobord. Soit $(x, y) \in M_0^{H_1} \times M_0/M_0^{H_1}$, on voit que

$$(\sigma_2 - 1)(x, y) = ((\sigma_2 - 1)x + \eta_{\sigma_2} y, 0),$$

quand (x, y) parcourt $M_0^{H_1} \times M_0/M_0^{H_1}$, $(\sigma_2 - 1)x + \eta_{\sigma_2} y$ parcourt $M_0^{H_1}$ puisque $\eta_{\sigma_2}(M_0/M_0^{H_1}) \not\subset (\sigma_2 - 1)M_0^{H_1}$ (remarque déjà utilisée dans la démonstration du théorème 1.5). L'égalité $(\sigma_1 - 1)M_0 = M_0^{H_2}$ résulte de la "symétrie" de M_0 (corollaire 1.5).

Nous sommes donc conduits à distinguer 3 cas pour le cocycle ϵ, à savoir :

Cas 2.1. – $\epsilon_{\sigma_3}(\overline{M}) \subset (\sigma_3 - 1)M_0$

Cas 2.2. – $\epsilon_{\sigma_3}(\overline{M}) \subset M_0^{H_1} \oplus M_0^{H_2}$

$\epsilon_{\sigma_3}(\overline{M}) \not\subset (\sigma_3 - 1)M_0$

Cas 2.3. – $\epsilon_{\sigma_3}(\overline{M}) \not\subset M_0^{H_1} \oplus M_0^{H_2}$.

Nous sommes en mesure de prouver la

PROPRIETE 2.2. – *Dans les cas 2.1, 2.2 et 2.3,* $M^{H_1} = M_0^{H_1}$ *et* $M^{H_2} = M_0^{H_2}$,

dans le cas 2.1 : $M = M_0 \oplus M^{H_3}$;

dans le cas 2.2 : $[M : M_0 \oplus M^{H_3}] = p$;

dans le cas 2.3 : $[M : M_0 \oplus M^{H_3}] = p^2$.

Démonstration. – Les assertions concernant M^{H_1}, M^{H_2} et le cas 2.1 sont évidentes. Pour déterminer les deux dernières, on évalue M^{H_3}, c'est-à-dire l'ensemble des $(x, y) \in M_0 \times \overline{M}$ vérifiant $(\sigma_3 - 1)x + \epsilon_{\sigma_3} y = 0$. Dans le cas 2.2, il existe $t \in T$ tel que $\epsilon_{\sigma_3}(\sigma_1^{-1} - 1) = (\sigma_3 - 1)t$. On le voit en utilisant la condition (1′) et le lemme 2.2. On en déduit, comme dans la démonstration du théorème 1.5 que $M^{H_3} = \{(-tz, (\sigma_1^{-1} - 1)z) \mid z \in \overline{M}\}$ et $[M : M_0 \oplus M^{H_3}] = [\overline{M} : (\sigma_1^{-1} - 1)\overline{M}] = p$. Dans le cas 2.3, la condition (1′) et l'assertion b) du lemme 2.2 entrainent

$$\epsilon_{\sigma_3}(\sigma_1^{-1} - 1)\overline{M} \subset (\sigma_3 - 1)M_0 + M^{H_2}$$

d'où, en utilisant encore la formule (1′),

$$\epsilon_{\sigma_3}(\sigma_1^{-1} - 1)^2 \overline{M} \subset (\sigma_3 - 1)M_0 ,$$

il en résulte l'existence d'un $t \in T$ tel que $\epsilon_{\sigma_3}(\sigma_1^{-1} - 1)^2 = (\sigma_3 - 1)t$. On en déduit encore $M^{H_3} = \{(-tz, (\sigma_1^{-1} - 1)^2 z) \mid z \in \overline{M}\}$ et

$$[M : M_0 \oplus M^{H_3}] = [\overline{M} : (\sigma_1^{-1} - 1)^2 \overline{M}] = p^2 .$$

Remarque 2.1. – L'éventualité 2.3 implique $p \neq 2$. En effet, si $p = 2$, $(\sigma_3 - 1)M_0 = 2M_0$ et $(\sigma_1^{-1} - 1)\overline{M} = 2\overline{M}$, ϵ_{σ_3} étant un $\mathbf{Z}$-homomorphisme, $\epsilon_{\sigma_3}(2\overline{M}) \subset (\sigma_3 - 1)M_0 = 2M_0$ et on se trouve dans le cas 2.1 ou dans le cas 2.2.

Notations. – Une extension M correspondant au cas 2.2 (resp. 2.3) sera notée $((M^{H_1}, M^{H_2})_1, M^{H_3})_1$ (resp. $((M^{H_1}, M^{H_2})_1, M^{H_3})_2$).

Rassemblons l'ensemble des résultats dans le

THEOREME 2.3. – *Soit* M *un module de longueur 3 avec* $\mathcal{H}_M = \{H_1, H_2, H_3\}$, *quitte à modifier convenablement l'indexation des* H_i, M *est de l'une des formes suivantes (les sommes* $\oplus$ *sont* $\mathbf{Z}[G]$*-directes) :*

① $M = M^{H_1} \oplus M^{H_2} \oplus M^{H_3}$

② $M = (M^{H_1}, M^{H_2})_1 \oplus M^{H_3}$

③ $M = ((M^{H_1} \oplus M^{H_2}), M^{H_3})_1$

④ $M = ((M^{H_1}, M^{H_2})_1, M^{H_3})_1$

⑤ $M = ((M^{H_1}, M^{H_2})_1, M^{H_3})_2$ (*cas impossible si* $p = 2$).

Les modules des cas ③ , ④ *et* ⑤ *sont indécomposables et "symétriques" relativement aux* M^{H_i}. *En outre* M^{H_1}, M^{H_2} *et* M^{H_3} *étant donnés, les modules du cas* ① *(resp.* ② , *resp.* ③ , *resp.* ④ , *resp.* ⑤ *) sont* $\mathbf{Z}[G]$*-isomorphes.*

Démonstration. – L'assertion sur l'isomorphie de M avec l'un des modules évoqués résulte des propriétés 2.1 et 2.2. L'indécomposabilité du cas ③ a fait l'objet de l'assertion b) de la propriété 2.1. Les deux autres cas se traitent de façon analogue. La symétrie se voit comme suit dans le cas ④ : M_3 est nécessairement égal à $(M^{H_2}, M^{H_3})_1$, sinon $((M^{H_1}, M^{H_2})_1, M^{H_3})_1$ serait une extension d'un module de longueur 1 par $M^{H_2} \oplus M^{H_3}$ et $M^{H_1} \oplus M^{H_2} \oplus M^{H_3}$ serait d'indice p^2, ce qui est impossible d'après la propriété 2.1, $((M^{H_1}, M^{H_2})_1, M^{H_3})_1$ est donc une extension d'un module de longueur 1 par $(M^{H_2}, M^{H_3})_1$ et nécessairement, d'après la propriété 2.2, de la forme $((M^{H_2}, M^{H_3})_1, M^{H_1})_1$. On procède de manière analogue dans le cas ⑤ .

Le $\mathbf{Z}[G]$-isomorphisme est évident dans le cas ① , et résulte de la propriété 1.4 dans le cas ② . Montrons que les modules du cas ③ , $M^{H_1}, M^{H_2}, M^{H_3}$ étant fixés, sont $\mathbf{Z}[G]$-isomorphes : un tel module M est déterminé par la donnée de $M^{H_1} \oplus M^{H_2}$, celle de M et celle de ϵ' (resp. ϵ'') dans $Z^1(G, T')$ (resp. $Z^1(G, T'')$) et non cobords. On conclut, comme dans la démonstration de la proposition 1.4, en utilisant le fait que

$$\mathrm{Aut}_{\mathbf{Z}[G]}(M^{H_1} \oplus M^{H_2}) = \mathrm{Aut}_{\mathbf{Z}[G]} M^{H_1} \oplus \mathrm{Aut}_{\mathbf{Z}[G]} M^{H_2}.$$

On fera de même avec les extensions du cas ④ en utilisant le fait que les éléments de $M_0/(\sigma_3 - 1)M_0$ (avec $M_0 = (M^{H_1}, M^{H_2})_1$) annulés par $\sigma_2 - 1$ forment un sous-$\mathbf{F}_p$-espace vectoriel de dimension 1.

Complétons ces résultats par l'évaluation des images par la "norme", par analogie avec la propriété 1.7.

PROPRIETE 2.4. – *L'indice des* $\widetilde{H}_i M$ *dans* M^{H_i} *est donné, suivant la classification mise en évidence dans le théorème 2.3, par :*

cas ① : $[M^{H_i} : \widetilde{H}_i M] = p^{p-1}$

cas ② : $[M^{H_3} : \widetilde{H}_3 M] = p^{p-1}$ *et si* $i = 1$ *ou* 2

$[M^{H_i} : \widetilde{H}_i M] = p^{p-2}$

cas ③ : $[M^{H_i} : \widetilde{H}_i M] = p^{p-2}$

cas ④ : $[M^{H_i} : \widetilde{H}_i M] = p^{p-2}$

cas ⑤ : $[M^{H_i} : \widetilde{H}_i M] = p^{p-3}$.

Démonstration. – Les cas ① et ② sont évidents, ce dernier se ramenant en partie à la propriété 1.7. Dans les cas ③, ④ et ⑤ un argument de symétrie nous ramène à l'évaluation de $[M^{H_1} : \widetilde{H}_1 M]$, dans le cas ③ on conclut alors par analogie avec la démonstration de la propriété 1.7. Dans les cas ④ et ⑤, en utilisant les notations de la propriété 1.6 avec $\sigma_1 = \sigma$ et de la propriété 2.2, on voit que $\widetilde{H}_1 M$ est formé des $\widetilde{H}_1 x + S_\sigma y$ où x (resp. y) parcourt M_0 (resp. $\overline{M}$). Dans le cas ④, $\epsilon_{\sigma_3} = \epsilon'_{\sigma_3} \oplus \epsilon''_{\sigma_3}$ avec $\epsilon'_{\sigma_3}(\overline{M}) \subset M^{H_1}$ et $\epsilon''_{\sigma_3}(\overline{M}) \subset M^{H_2}$, en outre l'égalité de la propriété 1.6 s'écrit $(\sigma_3 - 1)S_{\sigma_1} = p\,\epsilon'_{\sigma_3}$ et $\widetilde{H}_1 M$ est formé des $\widetilde{H}_1 x + \dfrac{p}{\sigma_3 - 1}\,\epsilon'_{\sigma_3} y$. On en déduit encore que $[M^{H_1} : \widetilde{H}_1 M] = p^{p-2}$. Dans le cas ⑤, on sait que $pM^{H_1} + \widetilde{H}_1 \epsilon_{\sigma_3} \overline{M} = \widetilde{H}_1 M_0$ est d'indice p^{p-2} dans M^{H_1} d'après la propriété 1.7, donc de la forme $\dfrac{p}{\sigma_3 - 1} M^{H_1}$. On a vu que $\widetilde{H}_1 M = \widetilde{H}_1 M_0 + S_{\sigma_1} \overline{M}$, ($S_{\sigma_1}$ a été défini dans la propriété 1.6) ; d'où

$$(\sigma_3 - 1)\widetilde{H}_1 M = (\sigma_3 - 1)\widetilde{H}_1 M_0 + (\sigma_3 - 1) S_{\sigma_1} \overline{M}$$

soit encore, compte tenu de la propriété 1.6,

$$(\sigma_3 - 1)\widetilde{H}_1 M = pM^{H_1} + \widetilde{H}_1 \epsilon_{\sigma_3} \overline{M} = \widetilde{H}_1 M_0 ,$$

soit encore $\widetilde{H}_1 M = \dfrac{p}{(\sigma_3 - 1)^2} M^{H_1}$.

3. Application à l'existence d'unités de Minkowski.

Dans tout ce qui suit, on pose $L = \mathbf{Z}[G]/\mathbf{Z}\widetilde{G}$.

PROPRIETE 3.1. –

1) *Si* $i \neq j$ *alors* $L^{H_i} \oplus L^{H_j}$ *est facteur* **Z**-*direct de* L.

2) *Si* $p = 2$, $[L : L^{H_1} \oplus L^{H_2} \oplus L^{H_3}] = 2$.

3) *Si* $p = 3$, $[L : L^{H_1} \oplus L^{H_2} \oplus L^{H_3} \oplus L^{H_4}] = 3^3$.

Démonstration. –

1) On montre que L^{H_i} admet comme $\mathbf{Z}$-base $\{\sigma\widetilde{H}_i$, σ parcourant un système de représentants de $G/G_i \setminus H_i\}$. Considérons alors le sous $\mathbf{Z}$-module N de $\mathbf{Q} \otimes_{\mathbf{Z}} L$ engendré par les $\sigma\widetilde{H}_i/p$, $\sigma \in G$ et $i \in \{1, 2, \ldots, p+1\}$, il admet comme $\mathbf{Z}$-base $\{\sigma\widetilde{H}_i/p$, σ parcourant un système de représentants de $(G/H_i) \setminus H_i$, $i = 1, \ldots, p+1\}$. Or si $x \in E$, $px \in E_1 \oplus E_2 \oplus \ldots \oplus E_{p+1}$, car $p = \sum_{i=1}^{p+1} \widetilde{H}_i$ dans L ; donc $N \supset L$. En faisant les calculs dans la base de N considérée ci-dessus et dans la base "canonique" de L, on montre que si $x \in L$ et $px \in L^{H_i} \oplus L^{H_j}$, $i \neq j$, alors $x \in L^{H_i} \oplus L^{H_j}$, donc que $L^{H_i} \oplus L^{H_j}$ est facteur direct de L.

2) Pour $p = 2$, un calcul simple montre que
$$[L : L^{H_1} \oplus L^{H_2} \oplus L^{H_3}] = 2 .$$

3) Pour $p = 3$, en utilisant la $\mathbf{Z}$-base de N considérée plus haut, on peut montrer que $[L : L^{H_1} \oplus L^{H_2} \oplus L^{H_3} \oplus L^{H_4}] = 3^3$.

Regardons alors le cas $p = 2$, le théorème 2.3 nous donne la classification complète, à $\mathbf{Z}[G]$-isomorphisme près, des modules de caractère égal à celui de la représentation d'augmentation. On voit également qu'il y a une unité de Minkowski si et seulement si on se trouve dans le cas ③.

T. Kubota a donné dans [6] les unités fondamentales de K en fonction des unités fondamentales $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ des corps quadratiques intermédiaires. Le tableau ci-dessous donne, dans chaque cas, la structure galoisienne de E suivant la classification du théorème 2.3.

Unités fondamentales de K	*Structure galoisienne de* E
$\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$	①
$\sqrt{\epsilon_1}, \epsilon_2, \epsilon_3$	①
$\sqrt{\epsilon_1}, \sqrt{\epsilon_2}, \epsilon_3$	①
$\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2}, \epsilon_2, \epsilon_3$	②
$\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2}, \sqrt{\epsilon_2}, \epsilon_3$	②
$\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2}, \sqrt{\epsilon_2\epsilon_3}, \sqrt{\epsilon_3\epsilon_1}$	④
$\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3}, \epsilon_2, \epsilon_3$	③

Remarque 3.1. – Dans le cas où $\sqrt{\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3}, \epsilon_2, \epsilon_3$ forment un système complet d'unités fondamentales de K, on voit que $\sqrt{\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3}$ est une unité de Minkowski de K.

On déduit encore des résultats de T. Kubota et du paragraphe 2 :

PROPRIETE 3.2. – *Pour que* $K/\mathbf{Q}$ *réelle de groupe de Galois isomorphe au groupe de Klein admette une unité de Minkowski, il faut et il suffit que* $h_K = 1/2\ h_1 h_2 h_3$ *et que* $E_i \oplus E_j$ *soit un facteur* **Z**-*direct de* E *quels que soient* i *et* j *distincts.*

Dans le cas $p = 3$, on voit facilement que si $E^{(i)}$ désigne l'ensemble des x de E tels que $px \in E_j \oplus E_k \oplus E_\ell$ avec $\{i, j, k, \ell\} = \{1, 2, 3, 4\}$, alors $E^{(i)}$ est un $\mathbf{Z}[G]$-module de longueur 3 correspondant au cas ③ du théorème 2.3. Posons $\overline{E^{(i)}} = E/E^{(i)}$, on peut énoncer :

PROPRIETE 3.3. – *Pour que* $K/\mathbf{Q}$, *de groupe de Galois isomorphe à* $(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})^2$ *admette une unité de Minkowski, il faut que pour tout* i, $E^{(i)}$ *soit de type* ③ *(dans la classification du théorème 2.3) et que le cocycle* $\epsilon^{(i)}$ *associé à l'extension* E *de* $\overline{E^{(i)}}$ *par* $E^{(i)}$ *vérifie*

$$\begin{cases} \epsilon_{\sigma_i}(\tau - 1)^2\, \overline{E^{(i)}} \subset (\sigma_i - 1) E^{(i)} \\ \epsilon_{\sigma_i}(\tau - 1)\, \overline{E^{(i)}} \not\subset (\sigma_i - 1) E^{(i)} . \end{cases}$$

Compte tenu de l'assertion 3) de la propriété 3.1 et de la formule $h_k = \dfrac{a}{3^5}\, h_1 h_2 h_3 h_4$, on peut énoncer la

Remarque 3.2. – Pour que $K/\mathbf{Q}$ de groupe de Galois isomorphe à $(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})^2$ admette une unité de Minkowski, il faut que $\dfrac{h_K}{h_1 h_2 h_3 h_4} = \dfrac{1}{3^2}$.

Soient alors p_1 et p_2 deux nombres premiers distincts, avec $p_1 \equiv p_2 \equiv 1$ modulo 3 et tels que p_1 (resp. p_2) ne soit pas reste cubique modulo p_2 (resp. p_1). On note k_1 (resp. k_2) le corps cubique de discriminant p_1^2 (resp. p_2^2) et $K = k_1 k_2$, k_3 et k_4 sont les deux corps cubiques intermédiaires de discriminant $p_1^2 p_2^2$. On sait, voir G. Gras (cf. [4]) et J. Martinet (cf. [9]), que 3 ne divise ni h_1, ni h_2, que 3 divise h_3 et h_4 et que les 3-sous-groupes des classes d'idéaux de k_3 et k_4 sont cycliques, on a de nombreux exemples où ces sous-groupes sont d'ordre 3, on sait alors (cf. H. Kisilevski dans [5]) que 3 ne divise pas h_K. Un tel K peut donc avoir une unité de Minkowski.

Enonçons, en guise de conclusion, une conjecture (vérifiée dans les cas très particuliers envisagés ici) :

Soient G un groupe abélien fini et M et N deux $\mathbf{Z}[G]$-modules de type fini sans $\mathbf{Z}$-torsion tels que $\mathbf{Q} \otimes M = \mathbf{Q} \otimes N$ et $\mathbf{Q} \otimes M \hookrightarrow \mathbf{Q}[G]$. Notons $\mathcal{S}$ (resp. $\mathcal{C}$) l'ensemble des sous-groupes (resp. des sous-groupes à quotient cyclique) de G. Pour que M et N soient $\mathbf{Z}[G]$-isomorphes il faut et il suffit que

1) pour tout H de $\mathcal{C}$, M^H et N^H soient $\mathbf{Z}[G]$-isomorphes ;

2) pour tout couple de sous-$\mathbf{Z}[G]$-modules M', N' facteurs $\mathbf{Z}$-directs respectifs de M et de N vérifiant $\mathbf{Q} \otimes M' = \mathbf{Q} \otimes N'$ et toute relation de dépendance $\mathbf{Z}$-linéaire de caractères rationnels de la forme $\sum_{H \in \mathcal{S}} a_H \, 1_H^G = 0$ (où 1_H^G désigne le caractère rationnel de G induit par le caractère trivial de H) alors : $\prod_{H \in \mathcal{S}} [M'^H : N'^H]^{a_H} = 1$.

Cette conjecture a été suggérée par l'étude des travaux de C.D. Walter qui démontre dans [13] que la condition énoncée est nécessaire.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Brumer, On the group of units of an absolutely cyclic number field of prime degree, *J. Math. Soc. Japan,* (1969), 357-358.

[2] H. Cartan et S. Eilenberg, Homological algebra, *Princeton Univ. Press,* Princeton, N.J., 1956.

[3] C.W. Curtis et I. Reiner, Representation theory of finite groups and associative algebras, *Pure and Appl. Math.*, vol XI, Interscience, New York, 1962.

[4] G. Gras, 1ère partie : Sur les ℓ-classes d'idéaux dans les extensions cycliques relatives de degré premier ℓ, *Annales de l'Institut Fourier,* 23, 3 (1973), 1-48.

[5] KISILEVSKI, Some results related to Hilbert's theorem 94, *J. Number theory,* 2 (1970), 199-206.

[6] T. KUBOTA, Uber den bizyklischen biquadratischen Zahlkörper, *Nagoya Math. J.,* 10 (1956), 65-85.

[7] S. KURODA, Uber die Klassenzahlen algebraischer Zahlkörper, *Nagoya Math. J.,* 1 (1950), 1-10.

[8] N. MOSER, Unités et nombre de classes d'une extension galoisienne de $\mathbf{Q}$, Thèse de 3^e cycle, Grenoble (1975).

[9] J. MARTINET, A propos de classes d'idéaux, *Séminaire de Th. des Nombres,* Bordeaux (1971-1972), exposé n° 5.

[10] H. NEHRKORN, Über absolute Idealklassengruppen und Einheiten in algebraischen Zahlkörpern, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg,* 9 (1933), 319-334.

[11] I. REINER, A survey of integral representation theory, *Bull. of Ann. Math. Soc.;* vol. 16, n° 2 (1970).

[12] J.P. SERRE, Corps locaux, Hermann, Paris, 1968.

[13] C.D. WALTER, Brauer's class number relation, *Acta Arithmetica,* (à paraître).

Manuscrit reçu le 10 octobre 1978.

L. BOUVIER et J.J. PAYAN,
Université de Grenoble I
Institut Fourier
Laboratoire de Mathématiques Pures
Associé au CNRS
B.P. 116
38402 Saint-Martin d'Hères France.