ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

JEAN-RENÉ JOLY
CLAUDE MOSER

Ordre de grandeur de $L(1,\chi)$ et de $L'(1,\chi)$

Annales de l'institut Fourier, tome 29, nº 1 (1979), p. 125-135
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1979__29_1_125_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
29, 1 (1979), 125-135

ORDRE DE GRANDEUR DE $L(1,\chi)$ ET DE $L'(1,\chi)$

par J. R. JOLY et Cl. MOSER

Dédié à Monsieur Claude Chabauty.

1. Introduction.

Soit χ un caractère réel primitif non principal de conducteur k. Notons $S(y, \chi) = \sum_{n \leqslant y} \chi(n)$ $(y \geqslant 1)$ sa fonction sommatoire et $L(s, \chi) = \sum_{n \geqslant 1} \chi(n) n^{-s} = s \int_1^{\infty} S(y, \chi) y^{-s-1}\, dy$ $(s = \sigma + it,\ \sigma > 0)$ sa série L de Dirichlet. Pour χ variable, l'estimation de Landau $L(1, \chi) = \exp\left(\sum_p \chi(p) p^{-1} + O(1)\right)$ et les résultats de Chowla et d'Elliott [1], [2], [4] indiquent que les valeurs $L(1, \chi)$ ont tendance à se distribuer symétriquement autour d'un centre λ voisin de 1 (apparemment, $\lambda = (\pi^2/6)^{1/2} = 1{,}283$: [1], [9]). Cette symétrie est confirmée par les calculs numériques ([11], tables 3 à 6). Cependant, alors qu'une simple sommation d'Abel fournit une majoration $L(1, \chi) < c_1 \log k$ (avec $c_1 < 1$), on ne connait aucune démonstration d'une hypothétique minoration $L(1, \chi) > c_2/\log k$; on sait seulement qu'une telle minoration résulterait d'une majoration $\beta < 1 - (c_3/\log k)$ des zéros réels β des séries $L(s, \chi)$ (théorème de Hecke) ou d'une majoration $L'(1, \chi) < c_4$ (avec c_4 suffisamment petit) de la dérivée en $s = 1$ des séries $L(s, \chi)$ (résultat dû à Fluch [5] avec $c_4 = 1$; voir aussi un récent article de Pintz [8], notamment th. 1.)

L'objet de ce travail est de reprendre le résultat de Fluch d'un double point de vue :

(i) évaluation empirique de l'ordre de grandeur de $L'(1, \chi)$ (ce problème sera traité de façon plus précise dans une publication ultérieure) ;

(ii) amélioration de la borne $c_4 = 1$ utilisée par Fluch.

On arrive à deux conclusions convergentes :

(i) $L'(1, \chi)$ est en général inférieur à $\pi^2/6$;

(ii) pour tout $\epsilon > 0$, il existe une constante $c(\epsilon) > 0$ effectivement calculable telle que la majoration $L'(1, \chi) < (\pi^2/6) - \epsilon$ implique la minoration $L(1, \chi) > c(\epsilon)/\log k$.

En d'autres termes, les séries $L(s, \chi)$ avec zéro exceptionnel (s'il en existe) figurent parmi celles pour lesquelles la dérivée $L'(1, \chi)$ est très proche de $\pi^2/6$ (ou éventuellement supérieure à $\pi^2/6$). Ce résultat est analogue à celui de Pintz mentionné plus haut.

L'ordre de grandeur de $L'(1, \chi)$ est examiné au § 2, et la minoration conditionnelle de $L(1, \chi)$ est établie au § 4 (th. 4.1) ; le § 3 donne des lemmes et des estimations utiles à la démonstration du théorème 4.1. Les démonstrations (et les notations) sont inspirées de [5] et de [3], chap. 4 et 21. Pour une bibliographie détaillée sur l'ordre de grandeur de $L(1, \chi)$, voir notamment [7].

2. Ordre de grandeur de $L'(1, \chi)$.

Soit $\lambda(n)$ la fonction de Liouville, et posons pour simplifier $\alpha(s) = \zeta(2s)/\zeta(s)$ $(\sigma > 1)$. On a $\sum\limits_{n \geq 1} \lambda(n) n^{-s} = \prod\limits_{p} (1 + p^{-s})^{-1} = \alpha(s)$, et une comparaison de produits eulériens donne, pour s réel > 1, l'encadrement classique $\alpha(s) < L(s, \chi) < \zeta(s)$. Un calcul direct sur les séries de Dirichlet donne par ailleurs, toujours pour $s > 1$, l'inégalité $L'(s, \chi) > \zeta(s)$, mais ne permet pas de comparer $\alpha'(s)$ et $L'(s, \chi)$. Le tracé de quelques courbes $w = L(s, \chi)$ semble cependant indiquer que l'inégalité $\alpha'(s) > L'(s, \chi)$ est également vérifiée, du moins pour k petit. Admettons donc *provisoirement* la *double* inégalité $\zeta'(s) < L'(s, \chi) < \alpha'(s)$ $(s > 1)$, et faisons tendre s vers 1 ; il vient, à la limite, $\zeta'(1) = -\infty \leq L'(1, \chi) \leq \pi^2/6 = \alpha'(1)$, ce qui suggère une propriété du genre suivant :

(I) pour χ variable, les valeurs $L'(1, \chi)$ doivent se distribuer approximativement entre $-\infty$ et $\pi^2/6$.

La comparaison des deux formules

$$L(1, \chi) = \int_1^\infty S(y, \chi) y^{-2}\, dy$$

et

$$L'(1, \chi) = \int_1^\infty (1 - \log y)\, S(y, \chi) y^{-2}\, dy,$$

et le tracé d'un certain nombre de courbes $w = L(s, \chi)$ $(s > 1)$, suggèrent une seconde propriété :

(II) il existe entre $L(1, \chi)$ et $L'(1, \chi)$ une corrélation ainsi décrite : quand $L(1, \chi)$ est petit, $L'(1, \chi)$ est positif, voisin de $\pi^2/6$; quand au contraire $L(1, \chi)$ est grand, $L'(1, \chi)$ est négatif, et très grand en valeur absolue.

Une étude numérique portant sur environ cinq cents caractères pairs ou impairs, avec $k < 20\,000$, $k = p, 4p, 8p, p_1 p_2$ ou $2p_1 p_2$ $(p, p_1, p_2$ premiers) a confirmé (autant qu'on pouvait l'espérer) la double tendance (I), (II). Le programme comportait, pour chaque caractère χ considéré, le calcul de $L(1, \chi)$ et celui de $L_0'(1, \chi) = -\sum_{n=1}^{k} (\log n)\, \chi(n) n^{-1}$; la différence $L'(1, \chi) - L_0'(1, \chi) = -\sum_{n=k}^{\infty} (\log n)\, \chi(n) n^{-1}$ se majore facilement par la formule d'Euler-Maclaurin périodique et est négligeable pour $k \geqslant 1000$. Cette étude a permis notamment d'observer

(i) les valeurs maxima et minima

$$L_0'(1, \chi) = 0{,}817 \quad (k = 1\,012\ ;\ L(1, \chi) = 0{,}395)$$

$$L_0'(1, \chi) = -5{,}507 \quad (k = 2\,279\ ;\ L(1, \chi) = 3{,}685)$$

parfaitement en accord avec (I) et (II) (rappel : $\pi^2/6 = 1{,}645$) ;

(ii) une corrélation entre $L(1, \chi)$ et $L'(1, \chi)$ (ou $L_0'(1, \chi)$) en accord avec (II) (cette corrélation est plus nette pour les caractères impairs que pour les caractères pairs) : voir figure 1.

Pour plus amples détails, voir [10].

Cet ensemble de considérations n'autorise aucune conjecture précise, mais permet de considérer $\pi^2/6$ comme valeur critique pour

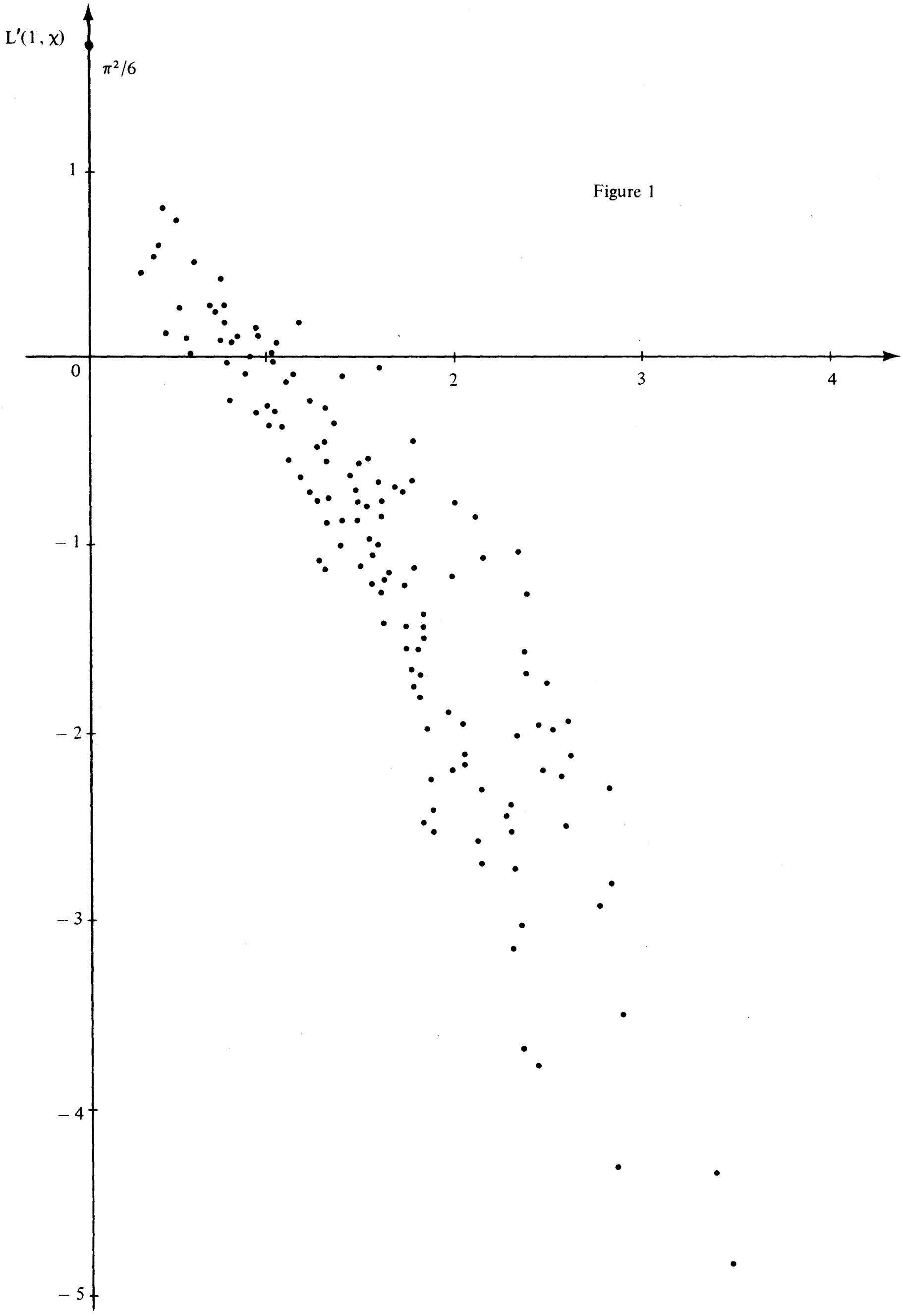

Figure 1

$L'(1,\chi)$, et de qualifier d'exceptionnels les caractères χ tels que $L'(1,\chi) > (\pi^2/6) - \epsilon$; ceci sera confirmé dans une certaine mesure par le théorème 4.1 (§ 4). Signalons par ailleurs que la démonstration du théorème 4.1 permet de *prouver* que (pour $L'(1,\chi) < 0$), on a $-L'(1,\chi) = O(L(1,\chi)(\log k))$. Cette estimation est évidemment à rapprocher de l'estimation élémentaire $|L'(1,\chi)| = O((\log k)^2)$, qu'elle améliore doublement : (i) en distinguant le cas $L'(1,\chi) < 0$ du cas $L'(1,\chi) > 0$; (ii) en remplaçant dans le O un facteur $\log k$ par un facteur $L(1,\chi)$ (lequel est en général $O(\log\log k)$: [4]). Cette estimation est également à rapprocher de la forme vaguement exponentielle de la courbe de corrélation entre $L(1,\chi)$ et $L'(1,\chi)$ (fig. 1).

3. Coefficients de Taylor de $\zeta(s)\,L(s,\chi)$.

Conservons les conventions des §§ 1-2, et notons $D = \chi(-1)k$ le discriminant de χ, $K = \mathbf{Q}(D^{1/2})$ le corps quadratique associé à χ, et $F(s) = \zeta(s)\,L(s,\chi) = \sum_{n\geqslant 1} a_n n^{-s}$, $\sigma > 1$ la fonction zêta de K. Pour tout $n \geqslant 1$, on a $a_n = \sum_{d|n} \chi(d)$ = le nombre d'idéaux entiers $\mathfrak{a}$ de K tels que $N\mathfrak{a} = n$, d'où évidemment

$$a_n \geqslant 0 \quad \text{pour tout } n\,; \quad a_n \geqslant 1 \quad \text{si } n \text{ est un carré}. \tag{1}$$

$F(s)$ admet un prolongement méromorphe au demi-plan $\sigma > 0$, avec unique pôle simple de résidu $L(1,\chi)$ en $s = 1$. Si on pose

$$G(s) = F(s) - L(1,\chi)(s-1)^{-1}, \tag{2}$$

$G(s)$ est donc holomorphe dans le demi-plan $\sigma > 0$. Les développements

$$\zeta(s) = (s-1)^{-1} + \gamma + O(s-1),$$

$$L(s,\chi) = L(1,\chi) + L'(1,\chi)(s-1) + O((s-1)^2),$$

donnent facilement

$$G(1) = L'(1,\chi) + \gamma L(1,\chi). \tag{3}$$

Introduisons maintenant les développements de Taylor modifiés de $F(s)$ et $G(s)$ autour de $s_0 = 2$; on a d'une part

$$F(s) = \sum_{m\geqslant 0} b_m (2-s)^m, \quad |2-s| < 1, \tag{4}$$

$$b_m = \frac{1}{m\,!} \sum_{n \geqslant 1} a_n (\log n)^m n^{-2}\,, \tag{4'}$$

et d'autre part, puisque $(s-1)^{-1} = \sum_{m \geqslant 0} (2-s)^m$ pour $|2-s| < 1$,

$$\mathrm{G}(s) = \sum_{m \geqslant 0} c_m (2-s)^m\,, \quad |2-s| < 2\,, \tag{5}$$

$$c_m = b_m - \mathrm{L}(1, \chi)\,. \tag{5'}$$

Posons également, pour simplifier l'écriture,

$$\beta_m = \frac{(-2)^m}{m!}\, \zeta^{(m)}(4)\,. \tag{6}$$

Alors $\beta_m \geqslant 0$, et

$$\sum_{m \geqslant 0} \beta_m = \zeta(2) = \pi^2/6\,. \tag{7}$$

(En effet, β_m peut aussi s'écrire $\frac{\zeta^{(m)}(4)}{m!}(2-4)^m$, terme général du développement de Taylor de $\zeta(s)$ autour de $s_0 = 4$, et pour $s = 2$.) D'autre part,

LEMME 3.1. – *Pour tout* $m \geqslant 0$, *on a l'inégalité*

$$b_m \geqslant \beta_m\,. \tag{8}$$

L'égalité (4′) et la double minoration (1) donnent en effet, en écrivant $n = \nu^2$ lorsque n est un carré,

$$b_m \geqslant \frac{1}{m!} \sum_{\nu \geqslant 1} (\log(\nu^2))^m (\nu^2)^{-2}\,,$$

et le second membre se transforme immédiatement en

$$\frac{2^m}{m!} \sum_{\nu \geqslant 1} (\log \nu)^m \nu^{-4} = \frac{(-2)^m}{m!}\, \zeta^{(m)}(4) = \beta_m\,.$$

LEMME 3.2. – *Pour tout* $m \geqslant 0$, *on a l'estimation*

$$|\beta_m - (1/3)(2/3)^m| \leqslant (1/2)^m\,. \tag{9}$$

Il suffit évidemment de démontrer l'inégalité

$$\left| \frac{(-1)^m}{m!}\, \zeta^{(m)}(4) - 3^{-m-1} \right| \leqslant 4^{-m}\,. \tag{10}$$

Posons pour cela $f_m(x) = (\log x)^m x^{-4}$ $(x \geqslant 1)$, $\mathrm{S}_m = \sum_{n \geqslant 1} f_m(n)$, $\mathrm{I}_m = \int_1^\infty f_m(x)\,dx = m!\,3^{-m-1}$ (cette valeur s'obtient par m

intégrations par parties, ou par le changement de variable $y = \log x$). On a $f'_m(x) = (m - 4\log x)(\log x)^{m-1}x^{-5}$; $f_m(x)$ est donc croissante entre 1 et $\exp(m/4)$, décroissante entre $\exp(m/4)$ et $+\infty$, avec un maximum égal à $(m/4e)^m$ en $\exp(m/4)$. Une comparaison facile série/intégrale donne alors $|S_m - I_m| \leqslant (m/4e)^m$, soit, en remarquant que $S_m = (-1)^m \zeta^{(m)}(4)$ et en divisant par $m!$,

$$\left|\frac{(-1)^m}{m!}\zeta^{(m)}(4) - 3^{-m-1}\right| \leqslant \frac{(m/e)^m}{m!}\,4^{-m}.$$

Mais une seconde comparaison série/intégrale donne

$$\log(m!) = \sum_{\nu\leqslant m}\log\nu > \int_1^m(\log x)\,dx = m(\log m) - m = \log(m/e)^m\,;$$

le facteur précédant 4^{-m} dans la dernière majoration est donc inférieur à 1, et l'inégalité (10) se trouve démontrée.

Remarque. – Cette inégalité est plus explicite que celle résultant de l'application à $\zeta(s) - (s-1)^{-1}$ des inégalités de Cauchy (avec $s_0 = 4$, $R = 4$). Signalons qu'en appliquant à S_m la formule d'Euler-Maclaurin à l'ordre $2j$ ($j \geqslant 1$) pour $m > 2j$ (ce qui précise la comparaison série/intégrale utilisée ci-dessus), on obtient une estimation

$$\left|\frac{(-1)^m}{m!}\zeta^{(m)}(4) - 3^{-m-1}\right| \leqslant A_j\binom{m}{2j}(4 + 2j - 1)^{-m}$$

qui donne directement le prolongement holomorphe de $\zeta(s) - (s-1)^{-1}$ au disque $|4 - s| < 4 + 2j - 1$, donc en fait (puisque j est quelconque) au plan complexe tout entier.

LEMME 3.3. – *Pour* $m \geqslant 7$, *on a l'encadrement*

$$(1/6)(2/3)^m \leqslant \beta_m \leqslant (1/2)(2/3)^m. \tag{11}$$

C'est une conséquence facile de (9).

LEMME 3.4. – *Pour* $M \geqslant 6$, *les sommes partielles de la série (divergente)* $\sum_{m\geqslant 0} b_m$ *vérifient l'inégalité*

$$\sum_{m\leqslant M} b_m > (\pi^2/6) - (2/3)^M. \tag{12}$$

On a en effet (lemme 3.1)

$$\sum_{m\leqslant M} b_m \geqslant \sum_{m\leqslant M}\beta_m = \sum_{m\geqslant 0}\beta_m - \sum_{m>M}\beta_m,$$

et il suffit pour obtenir (12) d'utiliser le lemme 3.3, et de se rappeler (voir (7)) que $\sum_{m\geqslant 0} \beta_m = \pi^2/6$.

LEMME 3.5. – *Pour tout* $m \geqslant 0$, *on a l'inégalité*

$$|c_m| \leqslant 21\, k^{1/2}\,(2/3)^m\,. \tag{13}$$

Les inégalités de Cauchy appliquées à $\mathrm{G}(s)$ avec $s_0 = 2$ et $\mathrm{R} = 3/2$ donnent en effet

$$|c_m| \leqslant \mathrm{A}(2/3)^m\,,\quad \mathrm{A} = \sup|\mathrm{G}(s)|\,, \tag{14}$$

le sup, dans cette formule et les suivantes, étant pris sur le cercle $|2 - s| = 3/2$. Sur ce cercle, on a $|(s-1)^{-1}| \leqslant 2$, et aussi $|\zeta(s)| \leqslant 2$ (écrire

$$\zeta(s) = \frac{1}{2}\,\frac{s+1}{s-1} + \frac{s}{12} - \frac{s(s+1)}{2}\int_1^\infty \mathcal{B}_2(x)\,x^{-s-2}\,dx$$

et majorer la deuxième fonction de Bernoulli $\mathcal{B}_2(x)$ par $1/6$). D'où la majoration

$$\mathrm{A} \leqslant 2\sup|\mathrm{L}(s\,,\chi)| + 2\mathrm{L}(1\,,\chi)\,. \tag{15}$$

Posant pour simplifier $\mathrm{Y} = (2/\pi)\,k^{1/2}\log k$, on a par ailleurs, pour $\sigma > 0$,

$$|\mathrm{L}(s\,,\chi)| \leqslant |s|\,(\mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2)\,,$$

$$\mathrm{I}_1 = \int_1^{\mathrm{Y}} |\mathrm{S}(y\,,\chi)|\,y^{-\sigma-1}\,dy\,,$$

$$\mathrm{I}_2 = \int_{\mathrm{Y}}^{\infty} |\mathrm{S}(y\,,\chi)|\,y^{-\sigma-1}\,dy\,.$$

Sur le cercle $|2 - s| \leqslant 3/2$, on a évidemment $\sigma \geqslant 1/2$ et $|s| \leqslant 7/2$; de plus, on peut, dans I_1, majorer $|\mathrm{S}(y\,,\chi)|$ par y, et, dans I_2, la majorer par Y (inégalité de Polya ; voir par exemple [6]). D'où $\mathrm{I}_1 \leqslant 2\mathrm{Y}^{1/2}$, $\mathrm{I}_2 \leqslant \mathrm{Y}(2\mathrm{Y}^{-1/2}) = 2\mathrm{Y}^{1/2}$, $|\mathrm{L}(s\,,\chi)| \leqslant (7/2)\,(4\mathrm{Y}^{1/2})$, et par conséquent

$$\sup|\mathrm{L}(s\,,\chi)| \leqslant 14(2/\pi)^{1/2}\,k^{1/4}\,(\log k)^{1/2}\,. \tag{16}$$

Mais l'étude de la fonction $(\log x)/x^{1/2}$ $(x \geqslant 1)$ montre qu'elle est maxima et égale à $2/e$ pour $x = e^2$. D'où $\log k \leqslant (2/e)\,k^{1/2}$. Il suffit alors de porter cette inégalité dans (16), d'utiliser la majoration $\mathrm{L}(1\,,\chi) < \log k \leqslant (2/e)\,k^{1/2}$ et de reporter le tout dans (15) pour obtenir $\mathrm{A} \leqslant [28(4/\pi e)^{1/2} + (4/e)]\,k^{1/2}$, et donc (13) (la constante entre crochets valant 20,634).

4. Minoration conditionnelle de $L(1,\chi)$.

THEOREME 4.1. – *Pour tout* $\epsilon > 0$, *il existe deux constantes positives* $c(\epsilon)$ *et* $k_0(\epsilon)$, *effectivement calculables, telles que, si* $k \geqslant k_0(\epsilon)$ *et si* $L'(1,\chi) \leqslant (\pi^2/6) - \epsilon$, *alors on ait* $L(1,\chi) > c(\epsilon)/\log k$.

Démonstration. – D'après (3) et (5), (5'), on a

$$L'(1,\chi) + \gamma L(1,\chi) = \sum_{m \geqslant 0} c_m = \sum_{m \geqslant 0} (b_m - L(1,\chi)). \quad (17)$$

Soient $M = M(\epsilon) \geqslant 6$ et $H = H(k) \geqslant 1$ deux entiers (dont la dépendance par rapport à ϵ et à k sera définie plus loin). L'égalité (17) peut se détailler en

$$L'(1,\chi) + \gamma L(1,\chi) = \sum_{m \leqslant M} (b_m - L(1,\chi)) + \sum_{m=M+1}^{M+H} (b_m - L(1,\chi)) + \sum_{m > M+H} c_m ,$$

ce qui s'écrit aussi

$$(M + H + \gamma + 1) L(1,\chi) = S_1 + S_2 + S_3 , \quad (18)$$

avec $S_1 = \Big(\sum_{m \leqslant M} b_m \Big) - L'(1,\chi)$, $S_2 = \sum_{m=M+1}^{M+H} b_m$ et $S_3 = \sum_{m > M+H} c_m$.

Choisissons maintenant M assez grand pour que $(2/3)^M \leqslant \epsilon/2$. L'hypothèse sur $L'(1,\chi)$ et le lemme 3.4 impliquent alors $S_1 > \epsilon/2$. Les inégalités $M \geqslant 6$, $H \geqslant 1$ impliquent d'autre part $M + 1 \geqslant 7$ et $S_2 \geqslant b_{M+1} \geqslant \beta_{M+1} \geqslant (1/9)(2/3)^M$ (lemmes 3.1 et 3.3). Enfin, on a évidemment (lemme 3.5)

$$S_3 \geqslant - \sum_{m > M+H} |c_m| \geqslant -42\, k^{1/2} (2/3)^M (2/3)^H .$$

Comme $\gamma = 0{,}577 < 1$, (18) donne donc

$$(M + H + 2) L(1,\chi) > \epsilon/2 + (2/3)^M [(1/9) - 42\, k^{1/2} (2/3)^H]. \quad (19)$$

Choisissons alors H assez grand pour que $(1/9) \geqslant 42\, k^{1/2} (2/3)^H$: l'inégalité (19) devient

$$L(1,\chi) > \epsilon/2(M + H + 2) ; \quad (20)$$

d'où le résultat annoncé, puisque les inégalités définissant le choix de M et de H sont effectives, et que le choix de H peut être réalisé avec $H = H(k) = c \log k + c'$ (c, c', constantes absolues).

Pour $\epsilon \geqslant 2(2/3)^6 = 0{,}176$, on peut prendre $M = 6$, $H = (5/4)(\log k) + 16$: le théorème 4.1 (ou plutôt l'inégalité (20)) admet donc le

COROLLAIRE 4.2. – *Pour tout caractère* χ *tel que*

$$L'(1, \chi) < (\pi^2/6) - 2(2/3)^6 = 1{,}469,$$

on a la minoration explicite $L(1, \chi) > \dfrac{0{,}07}{20 + \log k}$.

Pour $\epsilon < 2(2/3)^6$, on peut prendre $M = (5/2)\log(\epsilon^{-1}) + 2$, et conserver la valeur de H indiquée ci-dessus ; de là le

COROLLAIRE 4.3. – *Pour tout caractère* χ *tel que*

$$L'(1, \chi) < (\pi^2/6) - \epsilon, \quad \epsilon < 0{,}176,$$

on a la minoration explicite $L(1, \chi) > \dfrac{\epsilon}{5\log(\epsilon^{-1}) + 20 + (5/2)\log k}$.

Terminons en remarquant (voir d'ailleurs la fin du § 2) que si $L'(1, \chi) < 0$ ($< 1{,}469$) le raisonnement qui a mené au corollaire 4.2 donne en fait l'inégalité

$$(\pi^2/6) - L'(1, \chi) < (5/4)\, L(1, \chi)\,(20 + \log k)$$

soit

$$- L'(1, \chi) = O(L(1, \chi) \log k).$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. CHOWLA, Improvement of a result of Linnik and Walfisz, *Proc. London Math. Soc.*, 50 (1949), 423-429.

[2] S. CHOWLA, On the class number of the corpus $P(\sqrt{-k})$, *Proc. Nat. Inst. Sc. India*, 13 (1947), 197-200.

[3] H. DAVENPORT, Multiplicative number theory, Markham, Chicago (1967).

[4] P.D.T.A. ELLIOTT, On the size of $L(1, \chi)$, *J. reine angew Math.*, 236 (1969), 26-36.

[5] W. FLUCH, Zur Abschätzung von $L(1, \chi)$, *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math. Phys.*, (1964), 101-102.

[6] J.R. JOLY, Suites périodiques et inégalité de Polya, *Bull. Sc. Math.*, 102 (1978), 3-13.

[7] P.T. JOSHI, The size of $L(1, \chi)$ for real characters χ with prime modulus, *J. Number Theory*, 2 (1970), 58-73.

[8] J. PINTZ, Elementary methods in the theory of L-functions, II, *Acta Arithm.*, 31 (1976), 273-289.

[9] J.E. LITTLEWOOD, On the class number of the corpus $P(\sqrt{-k})$, *Proc. London Math. Soc.*, 28 (1927), 358-372.

[10] C. MOSER, Distribution des valeurs de $L'(1, \chi)$, *Sém. Th. Nombres*, Grenoble.

[11] D. SHANKS, Littlewood bounds, *Proc. Symp. Pure Math. A.M.S.*, Analytic Number Theory, XXIV (1973).

Manuscrit reçu le 20 juin 1978.

J.R. JOLY et Cl. MOSER,
Université de Grenoble I
Laboratoire de Mathématiques Pures
Associé au CNRS
Institut Fourier
B.P. 116
38402 Saint-Martin d'Hères (France).