ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

MICHEL DUFLO

Représentations de semi-groupes de mesures sur un groupe localement compact

Annales de l'institut Fourier, tome 28, nº 3 (1978), p. 225-249

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1978__28_3_225_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
28, 3 (1978), 225-249

REPRÉSENTATIONS DE SEMI-GROUPES DE MESURES SUR UN GROUPE LOCALEMENT COMPACT

par Michel DUFLO

Introduction.

Soit G un groupe de Lie. Une distribution T sur G est dite dissipative si elle satisfait au principe du maximum du module : pour toute fonction test f telle que $f(1) = \sup |f|$ on a $\mathrm{Re}\, \mathrm{T}(f) \leqslant 0$. C'est le cas en particulier des laplaciens généralisés. Une distribution dissipative engendre un unique semi-groupe (pour la convolution) de mesures de Radon μ_t $(t \geqslant 0)$ de variation totale $\leqslant 1$, vaguement continu, et tel que $\mu_0 = \delta$. Par définition, on a donc $\mathrm{T} = \lim\limits_{t \to 0} t^{-1}(\mu_t - \delta)$.

Soit π une représentation fortement continue de G dans un espace de Banach $\mathcal{H}$. Soit T une distribution à support compact sur G. On note $\mathrm{dom}\, \pi_1(\mathrm{T})$ l'ensemble des $h \in \mathcal{H}$ tels qu'il existe $k \in \mathcal{H}$ tel que l'on ait $\pi(f * \mathrm{T})h = \pi(f)k$ pour tout $f \in \mathcal{D}(\mathrm{G})$, et si $h \in \mathrm{dom}\, \pi_1(\mathrm{T})$ on pose $\pi_1(\mathrm{T})h = k$. L'opérateur $\pi_1(\mathrm{T})$ est fermé, de domaine dense contenant l'espace $\mathcal{H}^\infty$ des vecteurs différentiables de $\mathcal{H}$. On note $\pi_2(\mathrm{T})$ la clôture de la restriction de $\pi_1(\mathrm{T})$ à $\mathcal{H}^\infty$. On a $\pi_2(\mathrm{T}) \subset \pi_1(\mathrm{T})$, mais en général ces opérateurs ne sont pas égaux. Lorsque par exemple π est la représentation régulière droite dans un espace $\mathrm{L}^p(\mathrm{G})$ $(1 \leqslant p < \infty)$, ou $\mathrm{C}_0(\mathrm{G})$, $\pi_2(\mathrm{T})$ est la clôture de l'opérateur $f \longrightarrow f * \check{\mathrm{T}}$, défini sur $\mathcal{D}(\mathrm{G})$, et $\mathrm{dom}\, \pi_1(\mathrm{T})$ est l'ensemble des $f \in \mathcal{H}$ tels que $f * \check{\mathrm{T}}$ (calculé dans $\mathcal{D}'(\mathrm{G})$) appartienne à $\mathcal{H}$ (on a posé $d\check{\mathrm{T}}(x) = d\mathrm{T}(x^{-1})$). Si $\mathcal{H}$ est un Hilbert et si π est unitaire, on a $\pi_1(\mathrm{T})^* = \pi_2(\mathrm{T}^*)$ et $\pi_2(\mathrm{T})^* = \pi_1(\mathrm{T}^*)$ (on a posé $d\mathrm{T}^*(x) = \overline{d\mathrm{T}(x^{-1})}$).

Soient T une distribution dissipative à support compact, $\{\mu_t\}$ le semi-groupe de mesures qu'elle engendre, et π une représentation fortement continue de G dans un banach $\mathcal{H}$. Nous montrons que $\pi_1(T) = \pi_2(T)$; d'autre part pour tout $t \geqslant 0$, l'intégrale forte $\int \pi(g)\, d\mu_t(g)$ existe et définit dans $\mathcal{H}$ un semi-groupe fortement continu d'opérateurs bornés dont le générateur infinitésimal est $\pi_1(T)$.

Ces résultats se généralisent sans difficultés. On peut remplacer G par un groupe localement compact quelconque. On peut remplacer T par une distribution somme d'une distribution dissipative à support compact et d'une mesure ν telle que l'intégrale forte $\int \pi(g)\, d\nu(g)$ existe. On peut remplacer π par une représentation d'un sous-semi-groupe fermé convenable contenant le support des μ_t ; par exemple pour $G = \mathbf{R}$, du semi-groupe $[0, \infty[$, ou plus généralement, pour $G = \mathbf{R}^n$ de semi-groupes fermés contenant un cône d'intérieur non vide. On peut remplacer G par un espace homogène G/K avec K compact.

Ainsi généralisés ces résultats contiennent, unifient et précisent plusieurs cas particuliers déjà connus. Par exemple le cas où π est une représentation de norme $\leqslant 1$ de $[0, \infty[$ est traité dans R.S. Phillips [14] et J. Faraut [5]. G.A. Hunt dans l'article fondamental [11] a essentiellement traité le cas de la représentation régulière d'un groupe de Lie dans l'espace $C_0(G)$ et dans l'espace des fonctions uniformément continues bornées. E. Nelson et W.F. Stinespring [13] et Jorgensen [12] considèrent le cas où T est une distribution de support $\{1\}$ sur un groupe de Lie. Dans ce cas T définit sur G un opérateur différentiel hypo-elliptique (en un certain sens). Nos résultats permettent de déterminer ce qui dans [13] et [12] repose sur le principe du maximum, ou sur l'hypoellipticité.

Les résultats de cet article ont été annoncés dans [4]. Dans [4], prop. 5, est annoncée une majoration de μ_1 lorsque T est un laplacien généralisé à support compact. Je démontre ici une majoration plus faible, car elle suffit pour établir le théorème principal, et car sa démonstration (une simple adaptation d'un argument dû à A. Hulanicki pour les laplaciens) est beaucoup plus courte et élémentaire. Je n'écris pas ici ma démonstration de la prop. 2 de [4] (sur les opérateurs dissipatifs invariants dans $C_0(G)$) car il en existe une (complètement différente d'ailleurs) dans J.P. Roth, [15] théorème II.3.1.

1. Notations.

Dans toute la suite G est un groupe localement compact muni d'une mesure de Haar à droite dg, K est un sous-groupe compact de G et dk sa mesure de Haar normalisée, χ un homomorphisme continu de K dans **T** (le groupe des nombres complexes de module 1). On note $\mathcal{D}(G)$ l'ensemble des fonctions régulières à valeurs complexes à support compact sur G (au sens de F. Bruhat [3]), $\mathcal{D}'(G)$ l'espace des distributions, $*$ le produit de convolution des distributions. La mesure dg est utilisée pour identifier les fonctions localement sommables sur G à des distributions. On notera encore χ la distribution $f \longmapsto \int_K f(k)\chi(k)\,dk$. Si $f \in \mathcal{D}(G)$, on pose $\widetilde{f}(g) = f(g^{-1})$ et si $T \in \mathcal{D}'(G)$, on définit $\check{T}$ et T^* par les formules $\check{T}(f) = T(\widetilde{f})$ et $T^*(f) = T(\overline{\widetilde{f}})$.

Avec ces conventions, on a la formule suivante :

$$\int f(xy)\,dT(y) = f * \check{T}(x) \qquad \text{(pour presque tout } x) \tag{1}$$

si par exemple f est une fonction régulière et T une distribution à support compact, ou si f est mesurable bornée et T une mesure de Radon bornée.

On note $\mathcal{D}(G, \check{\chi})$ le sous-espace de $\mathcal{D}(G)$ formé des fonctions vérifiant $f * \check{\chi} = f$, c'est-à-dire telles que $f(gk) = \chi(k^{-1})f(g)$ pour tout $g \in G$ et tout $k \in K$. On note $\mathcal{D}(\check{\chi}, G, \check{\chi})$ le sous-espace de $\mathcal{D}(G)$ formé des fonctions f vérifiant $\check{\chi} * f * \check{\chi} = f$. On définit de même les espaces $\mathcal{D}'(\chi, G, \chi)$, $C_0(G, \check{\chi})$ etc.

2. Distributions dissipatives.

DÉFINITIONS. – *Une distribution* T *sur* G *est* χ*-dissipative si* $T \in \mathcal{D}'(\chi, G, \chi)$ *et si pour tout* $f \in \mathcal{D}(\check{\chi}, G, \check{\chi})$ *telle que* $f(1) = \sup_{g \in G} |f(g)|$ *on a* $\operatorname{Re} T(f) \leqslant 0$. *Si* $K = \{1\}$, *on dit que* T *est dissipative.*

Si χ *est le caractère unité de* K, *on dit qu'une distribution* T *sur* G *est un* χ*-laplacien généralisé si* $T \in \mathcal{D}'(\chi, G, \chi)$, *si* T *est réelle, et si pour toute fonction* f *réelle de* $\mathcal{D}(\check{\chi}, G, \check{\chi})$ *telle que* $f(1) \geqslant 0$ *et* $f(1) = \sup_{g \in G} f(g)$, *on a* $T(f) \leqslant 0$. *Si* $K = \{1\}$, *on parle simplement de laplacien généralisé.*

Lorsque χ est le caractère unité, il est clair qu'un χ-laplacien généralisé est une distribution χ-dissipative. La structure des laplaciens généralisés est bien connue, elle est donnée par la formule de Levy-Khinchine (dans le sens de Hunt [11], Hazod [7] ou Roth [15] théorème II.2.2). Nous verrons que celle des distributions dissipatives s'y ramène. Pour le moment, donnons juste un exemple.

Exemple. – Supposons que G soit un groupe de Lie et soit $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. Chaque élément X de $\mathfrak{g}$ définit une distribution (notée par la même lettre) de support $\{1\}$. On notera XY la distribution $X * Y$. Soient $X_1, \ldots, X_n, X$ et Y des éléments de $\mathfrak{g}$, et $c, d \in \mathbf{R}$. Alors la distribution $X_1^2 + \ldots + X_n^2 + X + c$ est un laplacien généralisé si $c \leqslant 0$. Si Y appartient à l'espace vectoriel engendré par $X_1, \ldots, X_n$, la distribution $X_1^2 + \ldots + X_n^2 + X + iY + c + id$ est dissipative si $X_1^2 + \ldots + X_n^2 + Y - c$ est $\geqslant 0$, considérée comme fonction sur le dual de $\mathfrak{g}$, comme il résulte facilement de la formule de Taylor. Les éléments $X_1, \ldots, X_n$, et $Y \in \mathbf{R} X_1 + \ldots + \mathbf{R} X_n$ étant fixés, c'est le cas dès que c est assez petit.

LEMME 1. – *Soit* V *un voisinage de* K *et soit* T *une distribution* χ*-dissipative. Il existe une distribution* $T_1 \in \mathcal{D}'(\chi, G, \chi)$ *à support dans* V *telle que* $T - T_1$ *soit une mesure bornée. Si* $f \in \mathcal{D}(G)$ *et si* μ *est une mesure de Radon bornée sur* G, *on a*

$$\langle f * \check{T}, \mu \rangle = \langle \check{T}, \widetilde{f} * \mu \rangle . \tag{2}$$

Démonstration. – La première assertion du lemme est due à Faraut [5] prop. II.2 (pour $G = \mathbf{R}^n$, mais la démonstration s'applique au cas général). Le reste du lemme est trivial.

3. Semi-groupes de mesures.

Si μ est une mesure de Radon sur G nous notons $|\mu|$ sa valeur absolue et $\|\mu\|$ sa variation totale.

Nous noterons M(G) l'ensemble des mesures de radon μ telles que $\|\mu\| < \infty$. C'est le dual de $C_0(G)$. On le munit de la topologie faible. Un semi-groupe de mesures est une application faiblement continue $t \longmapsto \mu_t$ de $]0, \infty[$ dans M(G) telle que $\mu_{t+t'} = \mu_t * \mu_{t'}$ pour tout t et t'. Il est facile de voir que si $\|\mu_t\|$ est borné au voisinage de 0, le semi-groupe se prolonge de manière continue à $[0, \infty[$. Lorsque de plus $\|\mu_t\| \leqslant 1$ pour tout $t > 0$ (c'est le cas qui nous intéressera ci-dessous) μ_0 est une mesure vérifiant $\|\mu_0\| \leqslant 1$ et $\mu_0 * \mu_0 = \mu_0$. D'après [6] th. 2.1.4 ou bien $\mu_0 = 0$ (et dans ce cas $\mu_t \equiv 0$) ou bien μ_t est égale à la mesure de Haar normalisée d'un sous-groupe compact, multipliée par un homomorphisme continu de ce sous-groupe à valeurs dans T. Nous introduisons les notations suivantes :

$\mathfrak{M}(G, \chi)$ est l'ensemble des applications faiblement continues $t \longmapsto \mu_t$ de $[0, \infty[$ dans M(G) telles que $\|\mu_t\| \leqslant 1$ pour tout t, $\mu_0 = \chi$, et $\mu_{t+t'} = \mu_t * \mu_{t'}$ pour tout t et $t' \geqslant 0$;

lorsque χ est la mesure de Haar de K, $\mathcal{L}(G, \chi)$ est le sous-ensemble des éléments de $\mathfrak{M}(G, \chi)$ à valeurs positives.

Si f est une fonction sur G on note Zf la fonction sur $\mathbf{T} \times G$ telle que $Zf(z, g) = zf(g)$ pour $(z, g) \in \mathbf{T} \times G$.

LEMME 2. – *Soit* $\{\mu_t\} \in \mathfrak{M}(G, \chi)$. *Soit* K' *le sous-groupe de* $\mathbf{T} \times G$ *formé des éléments* $(\chi(k), k)$ $(k \in K)$ *et* χ' *le caractère unité de* K'. *Il existe* $\{\nu_t\} \in \mathcal{L}(\mathbf{T} \times G, K')$ *tel que l'on ait* $\mu_t(f) = \nu_t(zf)$ *pour tout* $f \in C_0(G)$.

Ce phénomène a été découvert par Faraut [5] pour $G = \mathbf{R}^n$, et par Roth [15] II.2.5 dans le cas général. En fait Roth ne considère que le cas où χ est le caractère trivial, mais la démonstration donne les résultats énoncés ici.

4. Générateur d'un semi-groupe de mesures.

PROPOSITION 3. – *Soit* $\{\mu_t\} \in \mathfrak{M}(G, \chi)$. *Lorsque* $t \longrightarrow 0$, $t^{-1}(\mu_t - \chi)$ *tend dans* $\mathcal{D}'(G)$ *vers un élément* χ*-dissipatif. Si* χ *est la mesure de Haar de* K *et si* $\{\mu_t\} \in \mathcal{L}(G, \chi)$, *la limite est un* χ*-laplacien généralisé.*

Démonstration. – Lorsque G est un groupe de Lie et $\{\mu_t\} \in \mathcal{L}(G, \chi)$ ce résultat est dû à G.A. Hunt [11], et il a été étendu aux groupes localement compacts par Hazod [7]. Il résulte du lemme 2 que ceci reste vrai pour $\{\mu_t\} \in \mathcal{M}(G, \chi)$. Remarquons qu'il est possible de démontrer la proposition 1 directement (i.e. sans utiliser le lemme 2), cf. [5] pour $G = \mathbf{R}^n$ et [4] pour le cas général.

PROPOSITION 4. – *Soit* T *une distribution* χ*-dissipative. Il existe un et un seul* $\{\mu_t\} \in \mathcal{M}(G, \chi)$ *tel que* $\lim_{t \to 0} t^{-1}(\mu_t - \chi) = T$ *dans* $\mathcal{D}'(G)$. *Si* χ *est la mesure de Haar de* K, *on a* $\{\mu_t\} \in \mathcal{L}(G, \chi)$ *si et seulement si* T *est un* χ*-laplacien généralisé.*

Démonstration. – Si T est un χ-laplacien généralisé, la proposition 2 est due à Hunt [11] si G est un groupe de Lie, et à Hazod [7] dans le cas général. Pour une distribution χ-dissipative, la proposition 4 a été démontrée par Faraut pour $G = \mathbf{R}^n$ et Roth [15] II.3.1 dans le cas général. Je rédige ici une autre démonstration, car elle est plus simple que toutes celles mentionnées ci-dessus.

Démontrons l'existence.

Comme dans Hunt, nous allons construire un semi-groupe de contractions dans l'espace de Banach $C_0(G, \check{\chi})$. Soit T une distribution χ-dissipative. On note A l'opérateur dans $C_0(G, \check{\chi})$ de domaine $\mathcal{D}(G, \check{\chi})$ définit par la formule $A(f) = f * \check{T}$. Ceci est possible à cause du lemme 1. Notons $|\cdot|_\infty$ la norme dans $C_0(G, \check{\chi})$. Comme T est χ-dissipative, on a $|\lambda f|_\infty \leqslant |\lambda f - A(f)|_\infty$ pour tout $\lambda > 0$ et tout $f \in \mathcal{D}(G, \check{\chi})$. Il en résulte que A est fermable et que A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe $\{P_t\}$ $(t \geqslant 0)$ fortement continu de contractions dans $C_0(G, \check{\chi})$ tel que $P_0 = \mathrm{Id}$ si et seulement si $\lambda - A$ est d'image dense pour tout $\lambda > 0$ (cf. [9] ch. II). Montrons que tel est le cas. D'après le théorème de Hahn-Banach, il suffit de montrer qu'étant donné $\lambda > 0$, toute mesure μ de Radon bornée sur G telle que $\mu * \chi = \mu$ et telle que $\langle \mu, \lambda f - f * \check{T} \rangle = 0$ pour tout $f \in \mathcal{D}(G, \check{\chi})$ est nulle. Il résulte du lemme 1 que l'on a $\langle \widetilde{f} * \mu, \lambda\delta - T \rangle = 0$. Comme la distribution T est χ-dissipative, en remplaçant f par une translatée convenable à gauche on voit que l'on a $\widetilde{f} * \mu = 0$ pour tout $f \in \mathcal{D}(G, \check{\chi})$. Il en résulte que $\mu = 0$. On note μ_t la mesure définie par la formule $\mu_t(f) = P_t(f * \check{\chi})$ (1) pour tout $f \in C_0(G)$. On a $\{\mu_t\} \in \mathcal{M}(G, \chi)$ et $\lim_{t \to 0} t^{-1}(\mu_t - \chi) = T$.

Démontrons l'unicité. Soit $\{\nu_t\} \in \mathcal{M}(G, \chi)$ tel que $\lim t^{-1}(\nu_t - \chi) = T$. Si $f \in C_0(G, \check{\chi})$, on pose $Q_t(f) = f * \nu_t$. Il est facile de voir que $\{Q_t\}$ est un semi-groupe faiblement continu de contractions dans $C_0(G, \check{\chi})$. Il est donc fortement continu. Pour démontrer que $\mu_t \equiv \nu_t$, il suffit de montrer que $Q_t \equiv P_t$, et donc que ces deux semi-groupes ont même générateur. Pour cela il suffit de montrer que pour tout $f \in \mathcal{D}(G, \check{\chi})$ et toute mesure de Radon bornée μ sur G, on a $\lim t^{-1} \langle f * \check{\nu}_t - f, \mu \rangle = \langle f * \check{T}, \mu \rangle$. (En effet les limites $\lim t^{-1}(Q_t - Id)$ au sens fort et au sens faible sont égales. Le générateur de $\{Q_t\}$ prolonge celui de $\{P_t\}$, et lui est donc égal). Par hypothèse $t^{-1}(f * \check{\nu}_t - f)$ converge vers $f * T$ simplement. Le théorème de convergence dominée de Lebesgue montre qu'il suffit de démontrer que $|t^{-1}(f * \check{\nu}_t - f)|_\infty$ est borné pour $t \leq 1$. Ceci est vrai car $f * \nu_t(g) - f(g) = \int_0^t f * T * \nu_s(g)\, ds$ pour tout $g \in G$, et donc $t^{-1} |f * \nu_t - f|_\infty \leq |f * T|_\infty$.

La dernière assertion de la proposition se démontre comme dans Hunt [11].

Dans les conditions de la proposition 4, nous dirons que T est le générateur infinitésimal de $\{\mu_t\}$.

5. Structure des distributions dissipatives.

PROPOSITION 5. — *Soit* T *une distribution* χ-*dissipative sur* G. *Il existe un* χ'-*laplacien généralisé* U *sur* $\mathbf{T} \times G$ *tel que* $T(f) = U(Zf)$ *pour tout* $f \in \mathcal{D}(G)$ *(avec les notations du lemme 2). Si* T *est à support compact, on peut choisir* U *à support compact.*

Démonstration. — Soit $\{\mu_t\}$ le semi-groupe de mesures engendré par T. On peut choisir U égal au générateur du semi-groupe $\{\gamma_t\}$ du lemme 2. On peut remplacer U par αU, où α est n'importe quelle fonction régulière sur G, $0 \leq \alpha \leq 1$, invariante à droite et à gauche par K, égale à 1 dans un voisinage du support de T, ce qui démontre la seconde assertion.

La proposition 5, dans le cas de $\mathbf{R}^n$, est due à Faraut [5].

6. Support d'un semi-groupe de mesures.

Soit C un sous-semi-groupe fermé de G. Nous dirons que $\{\mu_t\} \in \mathcal{M}(G, \chi)$ a son support contenu dans C si $\sup \mu_t \subset C$ pour tout $t \geq 0$.

PROPOSITION 6. — *Soit* T *une distribution* χ*-dissipative et soit* $\{\mu_t\}$ *le semi-groupe de mesures qu'elle engendre. Soit* C *un sous-semi-groupe fermé de* G *tel que* $KCK = C$. *Alors* C *contient le support de* $\{\mu_t\}$ *si et seulement si pour toute fonction* $f \in \mathcal{D}(\check{\chi}, G, \check{\chi})$ *telle que* $f(1) = \sup_{g \in C} |f(g)|$, *on a* $\operatorname{Re} T(f) \leqslant 0$.

Démonstration. — La condition est évidemment nécessaire. Réciproquement, supposons que l'on ait $\operatorname{Re} T(f) \leqslant 0$ pour tout $f \in \mathcal{D}(\check{\chi}, G, \check{\chi})$ telle que $f(1) = \sup_{g \in C} |f(g)|$. On a encore $\operatorname{Re} T(f) \leqslant 0$ pour tout $f \in \mathcal{D}(G, \check{\chi})$ telle que $f(1) = \sup_{g \in C} |f(g)|$. Il en résulte que si $f \in \mathcal{D}(G, \check{\chi})$ s'annule sur C, on a $T(f) = 0$, et donc $f * \check{T}$ s'annule dans C. On peut donc définir un opérateur A dans $C_0(C, \check{\chi})$ de la manière suivante : le domaine de A est l'ensemble des restrictions à C des éléments de $\mathcal{D}(G, \check{\chi})$, et si $f \in \mathcal{D}(G, \check{\chi})$ on pose $A(f | C) = f * T | C$. Comme dans la démonstration de la proposition 2 on voit que A admet une fermeture qui est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe $\{P_t\}$ $(t \geqslant 0)$ de contractions dans $C_0(C, \check{\chi})$. On note γ_t la mesure sur G définie par $\nu_t(f) = P_t(f * \check{\chi} | C)(0)$. On obtient ainsi un élément de $\mathcal{M}(G, \chi)$ à support dans C. Par construction, on a $\lim t^{-1}(\nu_t - \chi) = T$, et donc $\{\nu_t\}$ est le semi-groupe engendré par T.

Lorsque C est un cône dans $\mathbf{R}^n$, la proposition 6 est due à Faraut [5].

7. Généralités sur les représentations des sous-semi-groupes de G.

Le contenu de ce paragraphe est soit bien connu, soit à peu près évident. Il est cependant nécessaire pour la suite.

Dans ce paragraphe, C est un sous-semi-groupe fermé de G tel que 1 appartienne à l'adhérence de l'intérieur $\mathring{C}$ de C, et π est une représentation fortement continue de C dans un espace de Banach $\mathcal{H}$ telle que $\pi(1) = 1$. Pour toute mesure μ sur G dont le support est contenu dans C et telle que

$$\int \|\pi(g)\| \, d|\mu|(g) < \infty \tag{3}$$

on pose $\pi(\mu) = \int \pi(g) \, d\mu(g)$. C'est un opérateur borné dans $\mathcal{H}$

et l'on a $\|\pi(\mu)\| \leqslant \int \|\pi(g)\| \, d|\mu|(g)$. Rappelons que la mesure de Haar à droite nous permet d'identifier les fonctions localement sommables avec des mesures, de sorte que, par exemple, $\pi(f)$ est défini pour toutes les fonctions continues sur G à support compact contenu dans C.

Comme 1 est dans l'adhérence de $\mathring{C}$, on peut choisir une approximation de la mesure de Dirac par des éléments de $\mathcal{D}(G)$ à support dans $\mathring{C}$, de sorte que l'espace engendré par les $\pi(f)h$, où $f \in \mathcal{D}(G)$ est à support dans $\mathring{C}$ et $h \in \mathcal{H}$, est dense dans $\mathcal{H}$. Nous noterons $\mathcal{D}(\mathring{C})$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{D}(G)$ à support dans C, et $\mathcal{H}^g$ (g pour Garding) le sous-espace de $\mathcal{H}$ juste décrit.

Soit U une distribution à support compact sur G dont le support est contenu dans C. On définit un opérateur $\pi_2(U)$ dans $\mathcal{H}$: le domaine de définition $\operatorname{dom}\pi_2(U)$ est l'ensemble des $h \in \mathcal{H}$ tels qu'il existe $k \in \mathcal{H}$ tel que l'on ait $\pi(f)k = \pi(f * U)h$ pour tout $f \in \mathcal{D}(\mathring{C})$. En faisant tendre f vers la mesure de Dirac, on voit que k est uniquement déterminé, et l'on pose $\pi_2(U)h = k$. Par définition, on a donc la formule

$$\pi(f)\,\pi_2(U)\,h = \pi(f * U)\,h \tag{4}$$

pour tout $h \in \operatorname{dom}\pi_2(U)$ et $f \in \mathcal{D}(\mathring{C})$. Il est évident que $\pi_2(U)$ est un opérateur fermé. D'autre part $\operatorname{dom}\pi_2(U)$ contient $\mathcal{H}^g$. En effet, si $f \in \mathcal{D}(\mathring{C})$ et $h \in \mathcal{H}$, pour tout $f' \in \mathcal{D}(\mathring{C})$ on a $\pi(f' * U)\,\pi(f)\,h = \pi(f' * U * f)\,h = \pi(f')\,\pi(U * f)\,h$. On note $\pi_1(U)$ la clôture de la restriction de $\pi_2(U)$ à $\mathcal{H}^g$. On a en particulier

$$\pi_1(U)\,\pi(f)\,h = \pi_1(U * f)\,h \tag{5}$$

pour tout $h \in \mathcal{H}$ et $f \in \mathcal{D}(\mathring{C})$.

Lorsque $U * f = f * U$ pour tout $f \in \mathcal{D}(\mathring{C})$, il est facile de voir que $\pi_1(U) = \pi_2(U)$, en utilisant une approximation de la mesure de Dirac. C'est le cas par exemple si G est commutatif. Cependant, si G n'est pas commutatif, en général $\pi_2(U)$ prolonge strictement $\pi_1(U)$.

Exemple. – On suppose que $C = G$, que G est un groupe de Lie (pour simplifier), et que π est la représentation régulière droite de G dans une des espaces $\mathcal{H} = L^p(G)$ $(1 \leqslant p < \infty)$ ou

$\mathcal{H} = C_0(G)$. Pour tout $h \in \mathcal{H}$, la distribution $h * \check{U}$ est définie. Nous allons montrer que $\operatorname{dom} \pi_2(U)$ est l'ensemble des $h \in \mathcal{H}$ tels que $h * \check{U} \in \mathcal{H}$, et que si $h \in \operatorname{dom} \pi_2(U)$, on a $\pi_2(U) h = h * \check{U}$. En effet, soit $h \in \operatorname{dom} \pi_2(U)$. Posons $k = \pi_2(U) h$. Il résulte de (4) que pour tout $f \in \mathcal{D}(G)$ on a $k * \check{f} = h * (\check{U} * \check{f})$. Il en résulte que $k = h * \check{U}$ et donc que $h * \check{U}$ appartient à $\mathcal{H}$. La réciproque se démontre de manière analogue.

L'espace $\mathcal{D}(G)$ est dense dans $\mathcal{H}$, et contenu dans $\operatorname{dom} \pi_2(U)$. Nous allons montrer que $\pi_1(U)$ est la clôture de l'opérateur $f \longrightarrow f * \check{U}$, défini dans $\mathcal{D}(G)$. Notons A la clôture de cet opérateur. Le domaine de A contient en particulier les éléments de la forme $\pi(f) f' = f' * \check{f}$, où $f, f' \in \mathcal{D}(D)$. Comme A est fermé, il contient $\operatorname{dom} \pi_1(U)$. L'inclusion opposée résulte du lemme suivant.

LEMME 7. — *On suppose que* G *est un groupe de Lie. Soit* π *une représentation fortement continue de* G. *Le domaine de* $\pi_1(U)$ *contient le sous-espace* $\mathcal{H}^\infty$ *des vecteurs différentiables de* π. *(Donc* $\pi_1(U)$ *est la clôture de la restriction de* $\pi_2(U)$ *à* $\mathcal{H}^\infty$.)

Démonstration. — Si $q \in \mathbf{N}$, on note $\mathcal{D}^q(G)$ l'espace des fonctions de classe C^q à support compact sur G. Il existe un entier q tel que $U * f$ soit continue pour tout $f \in \mathcal{D}^q(G)$. Soit $f \in \mathcal{D}^q(G)$ et soit $h \in \mathcal{H}$. On a $\pi(f) h \in \operatorname{dom} \pi_1(U)$. En effet, soit $f_i \in \mathcal{D}(G)$ tendant vers la mesure de Dirac. Les vecteurs $\pi(f * f_i) h = \pi(f) \pi(f_i) h$ tendent vers $\pi(f) h$, et les vecteurs

$$\pi_1(U) \pi(f * f_i) h = \pi(U * f * f_i) h = \pi(U * f) \pi(f_i) h$$

tendent vers $\pi(U * f) h$. Il suffit pour prouver le lemme de démontrer que tout élément $k \in \mathcal{H}^\infty$ est combinaison linéaire d'éléments de la forme $\pi(f) h$ avec $h \in \mathcal{H}$ et $f \in \mathcal{D}^q(G)$. On sait ([2] p. 250) qu'il existe $f \in \mathcal{D}^q(G)$, et une distribution D de support $\{1\}$ telles que $f * D = \delta + f'$, avec $f' \in \mathcal{D}(G)$. On a donc

$$k = \pi(\delta) k = \pi(f * D) h - \pi(f') h = \pi(f) \pi_2(D) h - \pi(f') h .$$

LEMME 8. — *Soit* π *une représentation unitaire de* G, *fortement continue, dans un espace de Hilbert* $\mathcal{H}$. *On a* $\pi_1(U)^* = \pi_2(U^*)$ *et* $\pi_2(U)^* = \pi_1(U^*)$.

Démonstration. – Il suffit de démontrer la première égalité. Soit $h \in \operatorname{dom} \pi_2(U^*)$ et soit $k = \pi_2(U^*)h$. Pour tout $y \in \mathcal{H}$, $f \in \mathcal{D}(G)$, on a $(\pi_1(U)\,\pi(f)y, h) = (\pi(U * f)y, h) = (y, \pi(U * f)^*h)$ $= (y, \pi(f^* * U^*)h) = (y, \pi(f^*)k) = (y, \pi(f)^*k) = (\pi(f)y, k)$. Il en résulte que si $x \in \operatorname{dom} \pi_1(U)$, on a $(\pi_1(U)x, h) = (x, k)$, et donc que $h \in \operatorname{dom} \pi_1(U)^*$ et $\pi_1(U)^*h = k$.

Soit $h \in \operatorname{dom} \pi_1(U)^*$ et $k = \pi_1(U)^*h$. Pour tout $y \in \mathcal{H}$, $f \in \mathcal{D}(G)$, on a $(\pi_1(U)\,\pi(f)y, h) = (\pi(f)y, k)$. Comme plus haut, on en déduit $(y, \pi(f^* * U^*)h) = (y, \pi(f^*)k)$, et donc $\pi(f^* * U^*)h = \pi(f^*)k$, ce qui prouve que $h \in \operatorname{dom} \pi_2(U^*)$ et que $\pi_2(U^*)h = k$.

8. Un lemme.

Dans ce paragraphe T est une distribution χ-dissipative *à support compact*, C est un sous-semi-groupe fermé de G tel que 1 soit adhérent à $\overset{\circ}{C}$, et qui contient le support du semi-groupe de mesures $\{\mu_t\}$ engendré par T, π est une représentation fortement continue de C dans un espace de Banach $\mathcal{H}$ telle que $\pi(1) = 1$.

LEMME 9. – *On suppose que l'on a*

$$\sup_{t \in [0,1]} \int \|\pi(g)\|\, d|\mu_t|(g) < \infty .$$

Pour tout $t \geqslant 0$, *on a* $\int \|\pi(g)\|\, d|\mu_t|(g) < \infty$. *L'application* $t \longmapsto \pi(\mu_t)$ $(t \geqslant 0)$ *est un semi-groupe fortement continu d'opérateurs bornés dans* $\mathcal{H}$. *On note* A *son générateur infinitésimal, i.e. la limite forte pour* $t \longrightarrow 0$ *de* $t^{-1}(\pi(\mu_t) - \pi(\chi))$. *On a* $\pi_1(T) \subset A \subset \pi_2(T)$.

Démonstration. – Les raisonnements qui suivent sont classiques. Tout d'abord, on a $|\mu_t| * |\mu_{t'}| \geqslant |\mu_{t+t'}|$ pour tout $t, t' \geqslant 0$, de sorte que, si l'on pose $c_t = \int \|\pi(g)\|\, d|\mu_t|(g)$, on a $c_{t+t'} \leqslant c_t\, c_{t'}$. Il résulte de l'hypothèse que c_t est localement bornée sur $[0, \infty[$. Il est clair que $\pi(\mu_t)$ est un semi-groupe d'opérateurs bornés.

Soient $h \in \mathcal{H}$ et $f \in \mathcal{D}(\overset{\circ}{C})$. Nous avons vu dans la dernière partie de la démonstration de la proposition 4 que $t^{-1}(\check{f} * \check{\mu}_t - \check{f} * \check{\chi})$

tend uniformément vers 0 quant $t \longrightarrow 0$. Il en est de même de $t^{-1}(\check{f} * \check{\mu}_{t+s} - \check{f} * \check{\mu}_s)$ pour tout $s \geqslant 0$. Pour toute fonction continue à support compact f' sur G on a donc

$$\langle \mu_s * f - \chi * f, f' \rangle = \int_0^s \frac{d}{dt} \langle \mu_t * f, f' \rangle \, dt = \int_0^s \langle \mu_t * \mathrm{T} * f, f' \rangle \, dt.$$

Notons γ_s la mesure définie par l'intégrale faible $\nu_s = \int_0^s \mu_t \, dt$.

Il est facile de voir que si φ est une fonction borélienne sur C majorée par un multiple de $\|\pi(g)\|$, alors φ est intégrable pour ν_s et $\langle \nu_s, \varphi \rangle = \int_0^s \langle \mu_t, \varphi \rangle \, dt$. Il résulte de tout ceci que l'on a

$$\pi(\mu_s)\, \pi(f) - \pi(\chi)\, \pi(f) = \pi(\nu_s)\, \pi(\mathrm{T} * f) \quad \text{pour tout } s \geqslant 0. \quad (6)$$

Il résulte de l'hypothèse que $\|\pi(\nu_s)\| = 0(\mathrm{s})$ quand $s \longrightarrow 0$, et donc que $\|\pi(\mu_s)\, \pi(f)h - \pi(\chi)\, \pi(f)h\| = 0(\mathrm{s})$ quand $s \longrightarrow 0$. Comme les vecteurs de la forme $\pi(f)h$ sont denses dans $\mathcal{H}$, et comme $\|\pi(\mu_s)\|$ est localement bornée dans $[0, \infty[$, le semi-groupe $\{\pi(\mu_s)\}$ est fortement continu.

Soient $h \in \mathcal{H}$ et $f \in \mathcal{D}(\mathring{\mathrm{C}})$. Calculons

$$\epsilon(s) = \pi(\mu_s)\, \pi(f)h - \pi(\chi)\, \pi(f)h - s\, \pi(\mathrm{T} * f)h.$$

On a $$\epsilon(s) = \int_0^s (\pi(\mu_t)\, (\mathrm{T} * f)h - \pi(\chi)\, \pi(\mathrm{T} * f)h)\, dt$$

et donc $$\|\epsilon(s)\| \leqslant \int_0^s \|\pi(\mu_t)k - \pi(\chi)k\| \, dt,$$

où l'on a posé $k = \pi(\mathrm{T} * f)h$. Comme on a $\|\pi(\mu_t)k - \pi(\chi)k\| = \mathrm{o}(1)$ d'après ce qui précède, on a $\epsilon(s) = \mathrm{o}(s)$. Ceci démontre que l'on a $\pi_1(\mathrm{T}) \subset \mathrm{A}$.

Soit $\mathcal{H}'$ l'espace de Banach dual de $\mathcal{H}$. On note $\mathcal{H}^*$ le sous-espace fermé de $\mathcal{H}'$ engendré par les éléments de la forme ${}^t\pi(f)u$ où $f \in \mathcal{D}(\mathring{\mathrm{C}})$, $u \in \mathcal{H}'$, et ${}^t.$ désigne le transposé d'un opérateur. L'application $c \longrightarrow {}^t\pi(c)$ induit dans $\mathcal{H}^*$ une représentation fortement continue du semi-groupe C_0 opposé à C. Si $h \in \mathcal{H}$ vérifie $\langle {}^t\pi(f)u, h \rangle = 0$ pour tout $f \in \mathcal{D}(\mathring{\mathrm{C}})$ et tout $u \in \mathcal{H}'$, on a $\langle u, \pi(f)h \rangle = 0$, et donc $\pi(f)h = 0$, d'après le théorème d'Hahn-Banach. Il en résulte que $h = 0$.

Soit $h \in \operatorname{dom} \mathrm{A}$ et soit $k = \mathrm{A}h$. Soit $f \in \mathcal{D}(\mathring{\mathrm{C}})$. Pour démontrer que $\mathrm{A} \subset \pi_2(\mathrm{T})$, nous devons montrer que $\pi(f)k = \pi(f * \mathrm{T})h$.

Il suffit pour cela de montrer que pour tout $u \in \mathcal{H}^*$ on a $\langle u, \pi(f)k\rangle = \langle u, \pi(f * \mathrm{T})h\rangle$. On a

$$\begin{aligned}\langle u, \pi(f)k\rangle &= \lim_{t\to 0} t^{-1}\langle u, \pi(f)\,(\pi(\mu_t) - \pi(\chi))h\rangle \\ &= \lim_{t\to 0} t^{-1}\langle ({}^t\pi(\mu_t) - {}^t\pi(\chi))\,{}^t\pi(f)u, h\rangle .\end{aligned}$$

Appliquons à la représentation $c \longrightarrow {}^t\pi(c)$ de C_0 dans $\mathcal{H}^*$ l'inclusion $\mathrm{A} \supset \pi_1(\mathrm{T})$. On trouve

$$\lim_{t\to 0} t^{-1}({}^t\pi(\mu_t) - {}^t\pi(\chi))\,{}^t\pi(f)u = {}^t\pi(f * \mathrm{T})u .$$

On obtient donc $\langle u, \pi(f)k\rangle = \langle u, \pi(f * \mathrm{T})h\rangle$.

9. Majoration du semi-groupe de mesures engendré par un laplacien généralisé à support compact.

Dans ce paragraphe, χ est la fonction caractéristique de K, T un χ-laplacien généralisé à support compact, φ un poids sur G, c'est-à-dire une fonction borélienne, telle que $\varphi(gg') \leqslant \varphi(g)\,\varphi(g')$ pour tout $g, g' \in \mathrm{G}$. Pour tout entier $m \geqslant 1$, on pose $\varphi_m = \inf(\varphi, m)$. Il est facile de voir que φ_m est un poids. On note $\{\mu_t\}$ le semi-groupe de mesures positives engendré par T.

LEMME 10. – *Soit $f \in \mathcal{D}(\mathrm{G})$, $f \geqslant 0, f \neq 0$. Il existe une constante $a > 0$ telle que $\varphi_m \leqslant a\, \varphi_m * f$ pour tout $m \geqslant 1$.*

Démonstration. – On a $\varphi_m * f(x) = \int \varphi_m(xy^{-1})\, f(y)\, dy$. On a $\varphi_m(x) = \varphi_m(xy^{-1}y) \leqslant \varphi_m(xy^{-1})\,\varphi_m(y)$ et donc

$$\varphi_m(xy^{-1}) \geqslant \varphi_m(x)\,\varphi_m(y)^{-1} \geqslant \varphi_m(x)\,\varphi(y)^{-1} .$$

On a $\varphi_m * f(x) \geqslant \varphi_m(x) \int \varphi(y)^{-1} f(y)\, dy$, ce qui prouve l'inégalité.

LEMME 11. – *Pour toute fonction ψ uniformément continue à gauche bornée sur G et tout $f \in \mathcal{D}(\mathrm{G})$, la fonction $t \longrightarrow \langle \psi * f, \mu_t\rangle$ est dérivable, et l'on a $\frac{d}{dt}\langle \psi * f, \mu_t\rangle = \langle \psi * f * \check{\mathrm{T}}, \mu_t\rangle$ pour tout $t \geqslant 0$.*

Démonstration. – On note π la représentation régulière droite de G dans l'espace $\mathcal{H}$ des fonctions uniformément continues à gauche, bornées sur G, muni de la norme uniforme. Elle est fortement continue. L'inclusion $\pi_1(\mathrm{T}) \subset \mathrm{A}$ du lemme 9 entraîne que dans $\mathcal{H}$ on a $\frac{d}{dt}\ \psi * f * \check{\mu}_t = \psi * f * \check{\mathrm{T}} * \check{\mu}_t$, ce qui entraîne le lemme.

LEMME 12. – *On a* $\sup_{t\in[0,1]} \int \varphi(g)\, d\mu_t(g) < \infty$.

Démonstration. – On fixe $f \neq 0$, $f \geqslant 0$, $f \in \mathcal{D}(\mathrm{G})$. Pour $t \geqslant 0$, on pose $h_m(t) = \langle \varphi_m * f, \mu_t \rangle$. On a d'après le lemme 11, en posant $k = f * \check{\mathrm{T}}$, $h'_m(t) = \langle \varphi_m * k, \mu_t \rangle$, et donc

$$h'_m(t) \leqslant |h'_m(t)| \leqslant \iint \varphi_m(xy^{-1})\, |k(y)|\, d\mu_t(x)\, dy \leqslant b\, \langle \varphi_m, \mu_t \rangle,$$

où l'on a posé $b = \int \varphi(y^{-1})\, |k(y)|\, dy$. Il résulte du lemme 10 que l'on a $h'_m(t) \leqslant ab\, h_m(t)$. On a donc $h_m(t) \leqslant e^{\mathrm{tab}}\, h_m(0)$. Posons $h(t) = \langle \varphi * f, \mu_t \rangle$. On a $h(t) = \lim_{m\to\infty} h_m(t)$ et donc $h(t) \leqslant e^{\mathrm{tab}}\, h(0)$. On déduit du lemme 10 que l'on a $\langle \varphi, \mu_t \rangle \leqslant c\, e^{\mathrm{tab}}$ pour tout $t \geqslant 0$, où $c = a\, h(0) = a \int \varphi(ky^{-1})\, f(y)\, dy$.

Remarque. – La démonstration du lemme est adaptée de [10], paragraphe 4.

LEMME 13. – *Soit* V *un voisinage de* K. *On a*

$$\int_{\mathrm{G}-\mathrm{V}} \varphi(g)\, d\mu_t(g) = \mathrm{o}(1) \quad \textit{quand} \quad t \longrightarrow 0.$$

Démonstration. – Soit $\mathcal{H}$ l'espace des fonctions continues ψ sur G telles que $\sup_{x\in \mathrm{G}} |\psi(x)|\, \varphi(x)^{-1} < \infty$, et

$$\lim_{y\to 1}\ \sup_{x\in \mathrm{G}} |\psi(xy) - \psi(x)|\, \varphi(x)^{-1} = 0.$$

Muni de la norme $\|\psi\| = \sup |\psi(x)|\, \varphi(x)^{-1}$ c'est un espace de Banach. Les translations à droite y induisent une représentation fortement continue π de G, et on a $\|\pi(x)\| \leqslant \varphi(x)$ pour tout $x \in \mathrm{G}$. Soit $f \in \mathcal{D}(\mathrm{G})$, $f \neq 0$, $f \geqslant 0$. Posons $\psi = (\varphi\theta) * f$, où θ est la fonction caractéristique de $\mathrm{G} - \mathrm{V}$. On a $\psi \in \mathcal{H}$. On choisit le support de f assez petit, pour que le support de ψ soit contenu dans le complémentaire de K. D'autre part, un raisonnement analogue à celui du lemme 10 montre qu'il suffit de démontrer que l'on a $\langle \psi, \mu_t \rangle = o(1)$. Le lemme 12 montre que les hypothèses du lemme 9 sont vérifiées. Lorsque $t \longrightarrow 0$, $\pi(\mu_t)\psi$ tend dans $\mathcal{H}$ vers $\pi(\chi)\psi$. En particulier, en considérant les valeurs à l'origine, $\langle \psi, \mu_t \rangle$ tend vers $\langle \psi, \chi \rangle = 0$, ce qu'il fallait démontrer.

La proposition ci-dessous donne notre majoration de μ_t. On remarquera d'autre part qu'en utilisant des processus de Markov on peut obtenir de meilleurs résultats (cf. [4] proposition 5 et [1]).

PROPOSITION 14. – *Soit* T *un* χ*-laplacien généralisé sur* G *à support compact, et soit* $\{\mu_t\}$ *le semi-groupe de mesures positives qu'il engendre. Soit* V *un voisinage du support de* T *tel que* $1 \in \mathrm{V}$ et $\mathrm{V}^{-1} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{V}^n$. *Pour tout entier* $n \geqslant 1$ *et tout* $k \geqslant 1$, *il existe une constante* $d > 0$ *telle que* $\mu_t(\mathrm{G} - \mathrm{V}^p) \leqslant d t^{n+1} k^{-p}$ *pour tout* $p \geqslant n$ *et tout* $1 \geqslant t \geqslant 0$.

Démonstration. – Soit φ un poids sur G. Nous allons montrer pour commencer que, étant donné $n \geqslant 1$, on a

$$\int_{\mathrm{G}-\mathrm{V}^n} \varphi(g)\, d\mu_t(g) = \mathrm{O}(t^{n+1}). \tag{7}$$

Nous employons les notations $\mathcal{H}$ et π de la démonstration du lemme 9. Nous choisissons un voisinage W du support de T et un voisinage U de 1 tels que $\mathrm{W}\,\mathrm{U} \subset \mathrm{V}$. Soit θ la fonction caractéristique de W^n. Soit $f \in \mathcal{D}(\mathrm{G})$, $f \geqslant 0$, $f \neq 0$, à support dans U. Soit $x \in \mathrm{G} - \mathrm{V}$. On a $x \in \mathrm{G} - \mathrm{W}\,\mathrm{U}$, et donc

$$(\varphi\theta) * f(x) = \int \varphi(xy^{-1})\, \theta(xy^{-1})\, f(y)\, dy \geqslant \varphi(x) \int \varphi(y)^{-1} f(y)\, dy$$

(cf. la démonstration du lemme 10). Il suffit donc de démontrer $\langle (\varphi\theta) * f, \mu_t \rangle = \mathrm{O}(t^{n+1})$. Soit U′ un voisinage de 0 tel que $\mathrm{U}'^2 \subset \mathrm{U}$, et soit $f' \in \mathcal{D}(\mathrm{G})$, $f' \neq 0$, $f' \geqslant 0$. Ce qui précède s'applique à $f = f' * f'$. On pose $\psi = (\varphi\theta) * f'$. C'est un élément de $\mathcal{H}$. On a $\psi * f' = \pi(\check{f}')\psi$. Le lemme 12 permet d'utiliser le lemme 9. Il résulte de l'inclusion $\pi_1(\mathrm{T}) \subset \mathrm{A}$ du lemme 9 que la fonction $t \longrightarrow \pi(\mu_t)\, \pi(\check{f}')\, \psi$ (à valeurs dans $\mathcal{H}$) est dérivable de dérivée $t \longrightarrow \pi(\mu_t)\, \pi(\mathrm{T} * \check{f}')\, \psi$. Le même raisonnement montre qu'elle est q fois dérivable, de dérivée $q^{\text{ième}}$ $t \longmapsto \pi(\mu_t)\,\pi(\mathrm{T}^q * \check{f}')\,\psi$ pour tout entier $q \geqslant 1$. Evaluons les éléments de $\mathcal{H}$ en 1. La fonction $t \longmapsto \langle \psi * f', \mu_t \rangle$ est q fois dérivable, et sa dérivée $q^{\text{ième}}$ est $t \longmapsto \langle \psi * f' * \check{\mathrm{T}}^q, \mu_t \rangle$. En particulier, la dérivée $q^{\text{ième}}$ à l'origine est $\langle \psi * f' * \check{\mathrm{T}}^q, \chi \rangle = \langle \psi * f', \mathrm{T}^q \rangle$. Si le support de f' est assez petit, ce que nous supposons, ces dérivées sont nulles pour $q = 0, 1, \ldots, n$. La formule de Taylor montre que l'on a $\langle \psi * f', \mu_t \rangle = \mathrm{O}(t^{n+1})$, ce qui prouve (7).

Posons $\mathrm{G}' = \bigcup_{q=1}^{\infty} \mathrm{V}^q$. C'est un sous-groupe ouvert, et donc fermé, de G et il résulte de la proposition 4 que le support de $\{\mu_t\}$ est contenu dans G'. On peut donc supposer que $\mathrm{G} = \mathrm{G}'$. Pour tout $x \in \mathrm{G}$, on note $\tau(x)$ le plus petit entier $m \geqslant 1$ tel que $x \in \mathrm{V}^m$. Soit $k \geqslant 1$. La fonction φ définie par $\varphi(x) = k^{\tau(x)}$ est un poids sur G, et l'on a $\varphi(x) = k^{m+1}$ si $x \in \mathrm{V}^{m+1} - \mathrm{V}^m$. Posons $c_q = \mu_t(\mathrm{G} - \mathrm{V}^q)$ de sorte que $\mu_t(\mathrm{V}^{q+1} - \mathrm{V}^q) = c_q - c_{q+1}$. On a

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{G}-\mathrm{V}^n} \varphi(x)\, d\mu_t(x) &= k^{n+1}(c_n - c_{n+1}) + k^{n+2}(c_{n+1} - c_{n+2}) + \ldots \\ &= k^{n+1} c_n + c_{n+1}(k^{n+2} - k^{n+1}) + \ldots \\ &= k^{n+1} c_n + (k-1)(c_{n+1} k^{n+1} + c_{n+2} + \ldots).\end{aligned}$$

Il existe d'après (7) une constante $a > 0$ telle que la somme de cette série soit majorée par $a\, t^{n+1}$ pour tout $t \leqslant 1$. Il en est de même de chacun des termes de la série, ce qui donne $c_p \leqslant (k-1)^{-1}\, a\, t^{n+1}\, k^{-p}$ pour tout $p \geqslant n$ si $t \leqslant 1$.

10. L'équation $\psi * \check{\mathrm{T}} = \lambda \psi * \check{\chi}$.

Dans ce paragraphe, T est une distribution χ-dissipative à support compact sur G et φ un poids sur G. On note $\{\mu_t\}$ le semi-groupe de mesures engendré par T. On pose $c_t = \int \varphi(g)\, d\,|\mu_t|\,(g)$. On suppose que G est limite projective de groupes de Lie.

LEMME 15. – *On a* $c_t < \infty$ *et* $c_{t+t'} \leqslant c_t\, c_{t'}$ *pour tout* $t, t' \in [0, \infty[$. *Il existe* $\omega \geqslant 0$ *tel que* $\lim_{t \to \infty} t^{-1} \log c_t = \omega$. *De plus* c_t *est borné dans* $[0, 1]$.

Démonstration. – Soit U un χ'-laplacien généralisé sur $\mathbf{T} \times G$, à support compact, tel que $U(Zf) = T(f)$ pour tout $f \in \mathcal{D}(G)$ (proposition 5). Soit $\{\nu_t\}$ le semi-groupe de mesures qu'il engendre, de sorte que $\gamma_t(Zf) = \mu_t(f)$ pour tout $t \geqslant 0$ et tout $f \in \mathcal{D}(G)$. On a

$$c_t \leqslant \int_{\mathbf{T}\times G} \varphi(g)\, d\nu_t(z, g),$$

et cette intégrale est finie et bornée dans $[0, 1]$ d'après le lemme 12. La seconde assertion du lemme est évidente, et la troisième résulte de [8] th. 7.6.1.

Soit C un sous-semi-groupe fermé de G contenant le support de $\{\mu_t\}$ et tel que 1 soit adhérent à $\overset{\circ}{C}$.

LEMME 16. – *Soit ψ une fonction borélienne localement sommable sur* G, *majorée en module par φ. Soit $\lambda > \omega$. On suppose que pour tout $f \in \mathcal{D}(\overset{\circ}{C})$ on a $\langle \psi, (T - \lambda\chi) * f\rangle = 0$ (resp. $\langle \psi, f * (T - \lambda\chi)\rangle = 0$). Alors $\check{\chi} * \psi = 0$ (resp. $\psi * \check{\chi} = 0$) dans $\overset{\circ}{C}$.*

Démonstration. – Nous démontrerons le seconde assertion. (La démonstration de la première est analogue).

Soit $t \geqslant 0$ et soit $f \in \mathcal{D}(G)$. Posons $\theta = \tilde{f} * \varphi * \check{\mu}_t$. Il existe $c > 0$ tel que $|\theta| \leqslant c\varphi$ et θ est régulière. Soit U la distribution sur $\mathbf{T} \times G$ définie dans la démonstration du lemme 10, et soit V un voisinage de 1 dans G tel que $V = V^{-1}$ et tel que $\mathbf{T} \times V$ soit un voisinage du support de U. Soit $\alpha \in \mathcal{D}(G)$ une fonction égale à 1 dans un voisinage de V. Posons $\theta_1 = \alpha\theta$ et $\theta_2 = (1 - \alpha)\theta$. Comme $\theta_1 \in \mathcal{D}(G)$, on a $\lim\limits_{u\to 0} u^{-1} \langle \theta_1, \mu_u - \chi\rangle = \langle \theta_1, T\rangle = \langle \theta, T\rangle$. D'autre part, $|\langle \theta_2, \mu_u - \chi\rangle| = |\langle \theta_2, \mu_u\rangle| \leqslant c \int_{G-V} \varphi(g)\, d|\mu_u|(g)$ $\leqslant c \int_{\mathbf{T}\times G - \mathbf{T}\times V} \varphi(g)\, d\nu_u(z, g)$ (où ν_u est défini comme dans la démonstration du lemme 15. Il résulte de (7) que l'on a $\langle \theta_2, \mu_u - \chi\rangle = o(u)$. Nous avons donc démontré que $\lim\limits_{u\to 0} u \;\langle \theta, \mu_u - \chi\rangle = \langle \theta, T\rangle$.

Posons $h(t) = \langle \varphi, f * \mu_t\rangle$ pour tout $t \geqslant 0$. On a

$$h(t + u) - h(t) = \langle \tilde{f} * \psi, \mu_{t+u} - \mu_t\rangle = \langle \theta, \mu_u - \chi\rangle$$

si $u \geqslant 0$. Il en résulte que h est dérivable à droite, et qu'en notant h' la dérivée à droite, on a $h'(t) = \langle \tilde{f} * \psi * \check{\mu}_t, T\rangle$. En calculant formellement, on trouve $h'(t) = \langle \widetilde{f} * \psi, \mathrm{T} * \mu_t \rangle = \langle \widetilde{f} * \psi, \mu_t * \mathrm{T} \rangle$, ou encore :

$$h'(t) = \langle \widetilde{f} * \psi * \check{\mathrm{T}}, \mu_t \rangle. \tag{8}$$

Nous justifierons cette formule plus bas. (A priori, il n'est même pas évident que $\widetilde{f} * \varphi * \check{\mathrm{T}}$ soit μ_t-intégrable).

De l'égalité $\langle \psi, f * f'' * (\mathrm{T} - \lambda\chi) \rangle = 0$ pour tout $f, f'' \in \mathcal{D}(\mathring{\mathrm{C}})$ (qui est vérifiée par hypothèse), on déduit

$$\langle \widetilde{f} * \psi * \check{\mathrm{T}}, f'' \rangle = \lambda \langle \widetilde{f} * \psi * \check{\chi}, f'' \rangle$$

de sorte que les fonctions $\widetilde{f} * \psi * \check{\mathrm{T}}$ et $\lambda \widetilde{f} * \psi * \check{\chi}$ (qui sont des fonctions régulières sur G) coïncident dans $\mathring{\mathrm{C}}$, et donc dans C. Donc $\langle \widetilde{f} * \psi * \mathrm{T}, \mu_t \rangle = \lambda \langle \widetilde{f} * \psi, \mu_t \rangle$. Donc $h'(t) = \lambda h(t)$, ce qui donne $h(t) = e^{t\lambda} \langle \varphi, f * \chi \rangle$. Comme d'autre part on a $|h(t)| \leqslant c\, c_t$, et comme $\lambda > \omega$, en regardant le comportement de $h(t)$ au voisinage de l'infini on obtient $\langle \psi, f * \chi \rangle = 0$. Comme f est arbitraire dans $\mathcal{D}(\mathring{\mathrm{C}})$, on en déduit que $\psi * \check{\chi}$ s'annule dans $\mathring{\mathrm{C}}$.

Il reste à prouver la formule (8). Appliquons l'égalité $h'(t) = \widetilde{f} * \psi * \check{\mu}_t$ aux translatées de f. On obtient que pour tout $g \in \mathrm{G}$, on a $\frac{d}{dt} \widetilde{f} * \psi * \check{\mu}_t(g) = \widetilde{f} * \psi * \check{\mu}_t * \check{\mathrm{T}}(g)$. D'autre part, $h'(t) = \lim\limits_{u \to 0} u^{-1} \langle \widetilde{f} * \psi, \mu_{t+u} - \mu_t \rangle = \lim\limits_{u \to 0} u^{-1} \langle \widetilde{f} * \psi * (\check{\mu}_u - \check{\chi}), \mu_t \rangle$. Le théorème de convergence dominée montre que pour prouver (8), il suffit de montrer que pour $u \in [0,1]$ la fonction $u^{-1} \widetilde{f} * \psi * (\check{\mu}_u - \check{\chi})$ est majorée en valeur absolue par une fonction fixe μ_t-intégrable. D'après ce qui précède, pour tout $g \in \mathrm{G}$, on a

$$\widetilde{f} * \psi * (\check{\mu}_u - \check{\chi})(g) = \int_0^u \widetilde{f} * \psi * \check{\mu}_s * \check{\mathrm{T}}(g)\, ds.$$

Il nous suffit donc de montrer que pour $s \in [0,1]$ la fonction $\widetilde{f} * \psi * \check{\mu}_s * \check{\mathrm{T}}$ est majorée par une fonction fixe μ_t-intégrable.

Comme G est supposé limite projective de groupes de Lie, il existe, par définition des fonctions régulières, un sous-groupe compact invariant L tel que f soit invariante par L. Notons ξ la mesure de Haar sur L. On identifie les distributions η sur G vérifiant $\eta * \xi = \eta$ et les distributions sur le groupe $\mathrm{G}' = \mathrm{G}/\mathrm{L}$. Posons $\mathrm{T}' = \mathrm{T} * \xi$. Il existe des mesures ν_i à support compact sur G′ et des distributions u_i de support $\{1\}$ sur G′ telles que $\check{\mathrm{T}}' = \Sigma\, \nu_i * u_i$. On identifie les distributions de support $\{1\}$ dans G′ et l'algèbre enveloppante $\mathfrak{U}$ de la complexifiée de l'algèbre de

Lie de G'. On choisit un entier $m \geqslant 0$ tel que tous les u_i soient de degré $\leqslant m$, et on choisit une base w_j du sous-espace $\mathfrak{U}_m$ des éléments de $\mathfrak{U}$ de degré $\leqslant m$. Le groupe G (ou G') agit dans $\mathfrak{U}_m$ par la représentation adjointe. On pose $g\,u_i = \Sigma\, \alpha_{ij}(g) w_j$ pour tout $g \in \mathrm{G}$. Il existe un poids γ sur G qui majore en valeur absolue toutes les fonctions α_{ij}.

$$\text{On a } \widetilde{f} * \psi * \check{\mu}_s * \check{\mathrm{T}}(g) = \Sigma\, \widetilde{f} * \psi * \check{\mu}_s * \nu_i * u_i(g)$$
$$= \Sigma\, (g u_i) * \widetilde{f} * \psi * \check{\mu}_s * \nu_i(g) = \Sigma\, \alpha_{ij}(g)\, w_j * \widetilde{f} * \psi * \check{\mu}_s * \nu_i(g).$$

Il résulte du lemme 12 que chacune des fonctions $\widetilde{(w_j * f)} * \psi * \check{\mu}_s * \nu_i$ est majorée sur G en valeur absolue par un multiple de φ indépendant de $s \in [0,1]$. La fonction $f * \psi * \check{\mu}_s * \check{\mathrm{T}}$ est majorée en valeur absolue par un multiple du poids $\gamma\varphi$, indépendant de $s \in [0,1]$. Le poids $\gamma\varphi$ est μ_t-intégrable d'après le lemme 15 appliqué au poids $\gamma\varphi$.

Le lemme 16, appliqué à $\mathrm{C} = \mathrm{G}$, donne le résultat suivant.

PROPOSITION 17. – *Soient* ψ *une fonction borélienne localement sommable sur* G *majorée en module par un multiple de* φ, *et* $\lambda > \omega$. *On suppose que l'on a* $\psi * \check{\mathrm{T}} = \lambda \psi * \check{\chi}$. *Alors* $\psi * \check{\chi} = 0$.

11. Image d'un semi-groupe de mesure par une représentation.

Dans ce paragraphe, T est une distribution χ-dissipative, $\{\mu_t\}$ le semi-groupe de mesures qu'elle engendre, C un sous-semi-groupe fermé de G contenant le support de $\{\mu_t\}$, π une représentation fortement continue de C dans un espace de Banach $\mathcal{H}$ telle que $\pi(1) = 1$. On suppose qu'il existe un voisinage compact V de K tel que

$$\int_{\mathrm{C}-\mathrm{V}} \|\pi(c)\|\, d\,|\mathrm{T}|\,(c) < \infty \tag{9}$$

(Rappelons que dans $\mathrm{G} - \mathrm{V}$ la distribution T est une mesure d'après le lemme 1).

PROPOSITION 18. – *La fonction* $t \longmapsto \int \|\pi(c)\|\, d\,|\mu_t|\,(c)$ *est localement bornée sur* $[0, \infty[$. *Pour tout* $t \geqslant 0$ $\pi(\mu_t)$ *est un opérateur borné dans* $\mathcal{H}$, *et* $\{\pi(\mu_t)\}$ *est un semi-groupe fortement continu.*

Démonstration. – Supposons pour commencer que T soit à support compact. Soit, comme dans la proposition 5, U un χ'-laplacien généralisé à support compact sur $\mathbf{T} \times G$ tel que $T(f) = U(Zf)$ pour tout $f \in \mathcal{D}(G, \check{\chi})$. Soit $\{\nu_t\}$ le semi-groupe de mesures positives sur $\mathbf{T} \times G$ engendré par U, de sorte que l'on a $\langle \mu_t, f \rangle = \langle \nu_t, Zf \rangle$ pour tout $f \in \mathcal{D}(G)$.

Soit W un ouvert relativement compact de G contenant 1, contenant le support de T et tel que $W = W^{-1}$. Posons $G' = \bigcup_{n=1}^{\infty} W^n$.

C'est un sous-groupe ouvert, et donc fermé, de G qui, d'après la proposition 4, contient le support de $\{\mu_t\}$. On peut donc, pour démontrer la proposition, supposer que $G = G'$. On définit pour tout $x \in G$ le nombre $\tau(x)$ qui est le plus petit des entiers $n \geqslant 1$ tels que $x \in W^n$. On note d un majorant de $\|\pi(c)\|$ lorsque c parcourt $W \cap C$. On pose $\varphi(x) = d^{\tau(x)}$. Alors φ est un poids sur G, et l'on a $\|\pi(c)\| \leqslant \varphi(c)$ pour tout $c \in C$. Soit V un voisinage de K. L'ensemble $\mathbf{T} \times V$ est un voisinage de K'. Il résulte du lemme 13 que l'on a, en posant $X = \mathbf{T} \times G - \mathbf{T} \times V$, $\int_X \varphi(g)\, d\nu_t(z, g) = o(1)$. On a donc $\int_{G-V} \varphi(g)\, d|\mu_t|(g) = o(1)$, ce qui entraîne en particulier la première assertion. Pour démontrer la seconde, il suffit de démontrer que le semi-groupe est faiblement continu. Soient u un élément du dual de $\mathcal{H}$ et $h \in \mathcal{H}$. Posons $\psi(c) = \langle u, \pi(c)h \rangle$ pour tout $c \in C$. Il faut montrer que lorsque $t \longmapsto 0$, $\langle \psi, \mu_t \rangle \longrightarrow \langle \psi, \chi \rangle$. Soit f une fonction continue à support compact sur C égale à 1 dans un voisinage de K. On a $\langle f\psi, \mu_t \rangle \longrightarrow \langle f\psi, \chi \rangle$, car le semi-groupe est vaguement continu. On a $\langle (1-f)\psi, \mu_t \rangle \longrightarrow 0$, d'après ce qui précède. Comme $\langle f\psi, \chi \rangle = \langle \psi, \chi \rangle$, notre assertion en résulte.

Considérons maintenant le cas général. On peut écrire $T = T_1 + \nu$, où T_1 est une distribution χ-dissipative à support compact telle que $\mathrm{Re}\langle T_1, f \rangle \leqslant 0$ pour tout $f \in \mathcal{D}(\check{\chi}, G, \check{\chi})$ telle que $f(1) = \sup_{c \in C} |f(c)|$, et ν une mesure de Radon bornée sur C telle que $\int \|\pi(c)\|\, d|\nu|(c) < \infty$. En effet, soit α une fonction sur G, régulière à support compact, invariante par K à droite et à gauche, égale à 1 dans un voisinage de 1, et telle que $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. On peut prendre $T_1 = \alpha T$, et $\nu = T - T_1$. On note $\{\lambda_t\}$ le semi-groupe de mesures engendré par T_1. Pour tout $n \geqslant 0$ on définit par récurrence une mesure λ_t^n. On pose $\lambda_t^0 = \lambda_t$, et $\lambda_t^{n+1} = \int_0^t \lambda_{t-u} * \nu * \lambda_u^n \, du$. On a $\mu_t = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_t^n$. En effet, pour le voir, il suffit de vérifier que les opérateurs $f \longrightarrow f * \check{\mu}_t$ et $f \longrightarrow f * (\Sigma \check{\lambda}_t^n)$ dans $C_0(G)$ sont égaux. Ceci résulte de la formule de perturbation des semi-groupes d'opérateurs donnée dans [8] (13.2.4).

Posons $P_t = \pi(\lambda_t)$ et $B = \pi(\nu)$. D'après ce qui précède, $\{P_t\}$ est un semi-groupe fortement continu. Nous notons A son générateur infinitésimal. D'après [8] th. 13.2.1, A + B est le générateur d'un semi-groupe fortement continu $\{Q_t\}$, et l'on a $Q_t = \sum_{n=0}^{\infty} P_t^n$, où les opérateurs P_t^n sont définis par récurrence par les formules $P_t^0 = P_t$ et $P_t^{n+1} = \int_0^t P_{t-u} \, B \, P_u^n \, du$. On a donc $Q_t = \pi(\mu_t)$, ce qui termine la démonstration de la proposition.

12. Image d'une distribution dissipative par une représentation.

Dans ce paragraphe, T est une distribution χ-dissipative sur G, $\{\mu_t\}$ le semi-groupe de mesures engendré, C un sous-semi-groupe fermé de G tel que 1 soit adhérent à $\overset{\circ}{C}$ et contenant le support de $\{\mu_t\}$, π une représentation fortement continue de C dans un espace de Banach $\mathcal{H}$, telle que $\pi(1) = 1$. On suppose qu'il existe un voisinage compact V de K tel que $\int_{C-V} \|\pi(c)\| \, d|T|(c) < \infty$.

Nous noterons A le générateur infinitésimal du semi-groupe $\{\pi(\mu_t)\}$ (voir proposition 18). D'autre part, écrivons $T = T_1 + \nu$, où ν est une mesure bornée sur C telle que $\int \|\pi(c)\| \, d|\nu|(c) < \infty$ et où T_1 est à support compact. On pose $\pi_1(T) = \pi_1(T_1) + \pi(\nu)$ et $\pi_2(T) = \pi_2(T_1) + \pi(\nu)$, où $\pi_1(T_1)$ et $\pi_2(T_1)$ sont définis comme dans le paragraphe 6.

THEOREME. – *On a* $\pi_1(T) = A = \pi_2(T)$.

Démonstration. – Soit G_0 un sous-groupe ouvert de G qui soit limite projective de groupes de Lie. Posons $G_1 = \bigcap_{k \in K} k \, G_0 \, k^{-1}$ et $G_2 = K \, G_1$. L'ensemble G_2 est un sous-groupe ouvert de G limite projective de groupes de Lie. Soit W un voisinage relativement compact de K dans G_2 tel que $W = W^{-1}$. On pose $G' = \bigcup_{n=1}^{\infty} W^n$. C'est un sous-groupe ouvert de G limite projective de groupes de Lie. On écrit $T = T_1 + \nu$, où ν est une mesure bornée à support dans C, Et T_1 une distribution χ-dissipative à support dans W (voir la démonstration de la proposition 18). Comme dans la démonstration de la proposition 18, on voit qu'il suffit de démontrer le théorème pour T_1. Changeant les notations, nous pouvons supposer que G est limite projective de groupes de Lie, et engendré par un voisinage compact de K, et que T est à support compact.

Notons φ un poids sur G tel que $\|\pi(c)\| \leqslant \varphi(c)$ pour tout $c \in C$. On définit ω comme dans le lemme 15. Posons $\mathcal{H}_0 = \pi(\chi)\,\mathcal{H}$. Soit $\lambda > \omega$. Dans $\mathcal{H}_0$, l'opérateur $A - \lambda$ est inversible, et son inverse est partout défini et borné (cf. [8]). D'après le lemme 9 on a $\pi_1(T) \subset A$. Pour démontrer que $\pi_1(T) = A$ il suffit de montrer que $\pi_1(T - \lambda\chi)$ et $A - \lambda\pi(\chi)$ ont même image. Pour cela il suffit de prouver que $\pi_1(T - \lambda\chi)(\mathcal{H}^g)$ est dense dans $\mathcal{H}_0$ (cf. paragraphe 7). Notons $\mathcal{H}'$ l'espace dual de $\mathcal{H}$. Soit u un élément de $\mathcal{H}'$ nul sur $\pi_1(T - \lambda\chi)(\mathcal{H}^g)$. Soient $f \in \mathcal{D}(\mathring{C})$ et $h \in \mathcal{H}$. On a $\langle u, \pi_1(T - \lambda\chi)\,\pi(f)h\rangle = 0$, et donc $\langle u, \pi_1((T - \lambda\chi) * f)h\rangle = 0$. Notons ψ la fonction sur G nulle en dehors de C telle que $\psi(c) = \langle u, \pi(c)h\rangle$ pour tout $c \in C$. On a $\langle \psi, (T - \lambda\chi) * f\rangle = 0$ pour tout $f \in \mathcal{D}(\mathring{C})$. Il résulte du lemme 16 que l'on a $\check{\chi} * \psi = 0$. En particulier, on a $\langle u, \pi(\chi)h\rangle = 0$. Ceci étant vrai pour tout $h \in \mathcal{H}$, on voit que u s'annule sur $\mathcal{H}_0$. Le théorème de Hahn-Banach montre que $\pi_1(T - \lambda\gamma)(\mathcal{H}^g)$ est dense dans $\mathcal{H}_0$.

D'après le lemme 9, on a $A \subset \pi_2(T)$. Pour démontrer que $\pi_2(T) = A$, il suffit de montrer que $\pi_2(T) - \lambda$ est injectif dans $\mathcal{H}_0$. Soit $h \in \operatorname{dom} \pi_2(T) \cap \mathcal{H}_0$ tel que $\pi_2(T)h = \lambda h$. Pour tout $u \in \mathcal{H}'$ et tout $f \in \mathcal{D}(\mathring{C})$, on a, avec les notations ci-dessus,

$$0 = \langle u, \pi(f)\,\pi_2(T - \lambda\chi)h\rangle = \langle u, \pi(f * (T - \lambda\chi))h\rangle$$
$$= \langle \psi, f * (T - \lambda\chi)\rangle.$$

Il résulte du lemme 16 que l'on a $\psi * \check{\chi} = 0$ et, comme $h \in \mathcal{H}$, que $\psi = 0$, ce qui entraîne $h = 0$.

Exemples. — Dans les exemples, on suppose que G est un groupe de Lie et que $K = \{1\}$.

1) Supposons $G = \mathbf{R}$ et $C = [0, \infty[$. Dans ce cas $\{\pi(t)\}$ est un semi-groupe fortement continu d'opérateurs bornés dans $\mathcal{H}$ et $\{\pi(\mu_t)\}$ le semi-groupe obtenu par subordination. Lorsque $\{\pi(t)\}$ est un semi-groupe de contractions, ces résultats sont très classiques : cf. Phillips [14] et Faraut [5].

2) Supposons que $\mathcal{H}$ soit un des espaces $L^p(G)$ $(1 \leqslant p < \infty)$ ou $C_0(G)$, muni de la représentation régulière droite. Alors $\pi(\mu_t)h = h * \check{\mu}_t$ pour $h \in \mathcal{H}$, $t \geqslant 0$. Le générateur infinitésimal de $\{\pi(\mu_t)\}$ est égal à la clôture de l'opérateur $f \longmapsto f * \check{T}$ (défini dans $\mathcal{D}(G)$). Il est aussi égal à l'opérateur $h \longmapsto h * \check{T}$ définit dans l'ensemble des $h \in \mathcal{H}$ tels que $h * \check{T} \in \mathcal{H}$. (voir le paragraphe 7).

3) Supposons que $\mathcal{H}$ soit l'espace des fonctions uniformément continues à gauche et bornées sur G. Alors $\pi(\mu_t)h = h * \check{\mu}_t$ pour $h \in \mathcal{H}$, $t \geqslant 0$. Le générateur infinitésimal du semi-groupe $\{\pi(\mu_t)\}$ est la clôture de l'opérateur $h \longmapsto h * \check{T}$ défini dans l'espace engendré par les $h' * f$ où $h' \in \mathcal{H}$, $f \in \mathcal{D}(G)$. Il est aussi égal à l'opérateur $h \longmapsto h * \check{T}$ défini dans l'espace des $h \in \mathcal{H}$ tels que $h * \check{T} \in \mathcal{H}$.

Les exemples 2 et 3 précisent des résultats de Hunt [11].

4) Supposons que $\mathcal{H}$ soit un espace de Hilbert et que π soit unitaire. L'adjoint de $\pi_1(T)$ est alors $\pi_1(T^*)$ (lemme 8). En particulier, si $T = T^*$, la restriction à $\mathcal{H}^\infty$ de $\pi_1(T)$ est essentiellement self-adjointe.

Par exemple, soient $X_1, \ldots, X_n \in \mathfrak{G}$, $Y \in \mathbf{R}X_1 + \ldots + \mathbf{R}X_n$, $X \in \mathfrak{G}$. Soit $T = X_1^2 + \ldots + X_n^2 + iY + X$ (voir paragraphe 2). Alors l'adjoint de $\pi(T)$ (défini dans $\mathcal{H}^\infty$)) est la clôture de $\pi(T - 2X)$ (défini dans $\mathcal{H}^\infty$). En particulier, si $X = 0$, $\pi(T)$ est essentiellement self-adjoint. On retrouve ainsi des résultats de Nelson et Stinespring [13] et Jorgensen [12] cor. 1.1. Notons que ces auteurs utilisent des propriétés d'hypoellipticité de T, ce qui n'est pas le cas dans notre démonstration.

5) Soient $X_1, \ldots, X_n, Y$ et X comme ci-dessus et $T = X_1^2 + \ldots + X_n^2 + iY + X$. Alors la clôture de $\pi(T)$ (défini dans $\mathcal{H}^\infty$) est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe d'opérateurs bornés fortement continu. Ce semi-groupe est de la forme

$\pi(\mu_t)$, où μ_t est un semi-groupe de mesures bornées vérifiant, pour tout voisinage V de 1 dans G les majorations de la proposition 14. Pour $Y = 0$, on retrouve encore des résultats de [13] et de [12] th. 3.1.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. AZENCOTT, Behaviour of diffusion semi-groups at infinity, *Bull. Soc. Math. Fr.,* 102 (1974), 193-240.

[2] P. BERNAT et coll., Représentations des groupes de Lie résolubles, Dunod, Paris 1972.

[3] F. BRUHAT, Distributions sur un groupe localement compact et applications à l'étude des représentations des groupes *p*-adiques, *Bull. Soc. Math. Fr.,* 89 (1961), 43-75.

[4] M. DUFLO, Semi-groups of complex measures on a locally compact group, *Lecture notes,* 466 (1975), 56-64.

[5] J. FARAUT, Semi-groupes de mesures complexes et calcul symbolique sur les générateurs infinitésimaux de semi-groupes d'opérateurs, *Ann. Inst. Fourier,* 20 (1970), 235-301.

[6] F.P. GREENLEAF, Norm decreasing homomorphisms of group algebras, *Pacific Journal of Math.,* 15 (1965), 1187-1219.

[7] W. HAZOD, Uber die Lévy-Hincin Formel auf lokalkompacten Gruppen, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb.,* 25 (1973), 301-322.

[8] E. HILLE and R.S. PHILLIPS, Functional analysis and semi-groups, *Amer. Math. Soc. Colloquium Pubications,* 1957.

[9] F. HIRSCH, Familles résolvantes, générateurs, cogénérateurs, potentiels, *Ann. Inst. Fourier,* 22, 1 (1972), 89-210.

[10] A. HULANICKI, Subalgebra of $L_1(G)$ associated with laplacian on a Lie group. A paraître.

[11] G.A. HUNT, Semi groups of measures on Lie groups, *Trans. Amer Math. Soc.,* 81 (1956), 264-293.

[12] P.E.T. JØRGENSEN, Representations of differential operators on a Lie group, *Journal of Funct. Analysis,* 20 (1975), 105-135.

[13] E. NELSON and W. STINESPRING, Representation of ellipic operators in an enveloping algebra, *Amer. Journal of Math.*, 81 (1959), 547-560.

[14] R.S. PHILLIPS, On the generation of semi-groups of linear operators, *Pacific Journal of Math.*, 2 (1952), 343-369.

[15] J.P. ROTH, Opérateurs dissipatifs et semi-groupes dans les espaces de fonctions continues, *Ann. Inst. Fourier*, 26, 4 (1976), 1-97.

Manuscrit reçu le 15 juillet 1977
Proposé par G. Choquet.

Michel DUFLO,
Université Paris VII
U.E.R. de Mathématiques
Tour 45-55, 5ème étage
2, place Jussieu
75221 Paris Cedex 05.