ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

BERNARD HOST

FRANÇOIS PARREAU

Sur un problème de I. Glicksberg : les idéaux fermés de type fini de $M(G)$

Annales de l'institut Fourier, tome 28, nº 3 (1978), p. 143-164

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1978__28_3_143_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
28, 3 (1978), 143-164

SUR UN PROBLÈME DE I. GLICKSBERG : LES IDÉAUX FERMÉS DE TYPE FINI DE M(G)

par **B. HOST** et **F. PARREAU**

1. Introduction.

1.1. G désigne un groupe abélien localement compact, Γ son dual, $M = M(G)$ l'algèbre de convolution des mesures de Radon bornées sur G, et $L^1 = L^1(G)$ est identifié à l'idéal de M formé des mesures absolument continues par rapport à la mesure de Haar m de G. Les autres notations d'analyse harmonique sont celles de [6].

Le but de cet article est de caractériser les mesures μ de M telles que $\mu * L^1$ soit fermé. Il est clair que, si μ est une mesure inversible dans M, ou idempotente, l'idéal $\mu * L^1$ est fermé ; plus généralement, c'est le cas si μ est la convoluée d'une mesure idempotente et d'une mesure inversible. I. Glicksberg a conjecturé la réciproque dans [4] et l'a démontrée pour quelques cas particuliers ; nous nous proposons de la démontrer dans le cas général (théorème 1).

Nous utilisons l'étude de I. Glicksberg [4], essentiellement ses théorèmes 1.4 et 1.6, et corollaire 1.5, résumés dans la proposition suivante.

PROPOSITION 1. – *Soit* μ *une mesure de* M. $\mu * L^1$ *est fermé si et seulement si* $\mu * M$ *est fermé ; alors*

a) *il existe un réel* $\epsilon > 0$ *tel que* $|\hat{\mu}(\gamma)| \geqslant \epsilon$ *pour tout* $\gamma \in \Gamma$ *tel que* $\hat{\mu}(\gamma) \neq 0$;

b) $\mu * L^1$ *est l'idéal des fonctions de* L^1 *dont la transformée de Fourier s'annule sur* $\hat{\mu}^{-1}(0)$;

c) $\mu * M$ *est l'idéal des mesures de* M *dont la transformée de Fourier-Stieltjes s'annule sur* $\hat{\mu}^{-1}(0)$.

COROLLAIRE. – *Si* $\mu * L^1$ *est fermé, et s'il existe une mesure idempotente* η *telle que* $\hat{\mu}^{-1}(0) = \hat{\eta}^{-1}(0)$, μ *est la convoluée de* η *et d'une mesure inversible.*

En effet, d'après la proposition 1, η appartient à $\mu * M$; soit $\nu \in M$ tel que $\mu * \nu = \eta$, et soit $\lambda = \mu + (\delta - \eta)$. λ est inversible :

$$\lambda * (\eta * \nu + (\delta - \eta)) = \delta,$$

et $\mu = \eta * \lambda$.

Les paragraphes suivants sont consacrés à la démonstration du théorème :

THEOREME 1. – *Soit* μ *une mesure de* M. *Si* $\mu * L^1$ *est fermé, ou si* $\mu * M$ *est fermé,* μ *est la convoluée d'une mesure idempotente et d'une mesure inversible.*

D'après le corollaire de la proposition 1, il nous suffira de montrer que *si* $\mu * L^1$ *est fermé il existe une mesure idempotente* η *telle que* $\hat{\mu}^{-1}(0) = \hat{\eta}^{-1}(0)$.

1.2. Nous groupons, au §2, les définitions et résultats utilisés sur le spectre Δ de l'algèbre de Banach M.

– Pour la partie technique (§3), on a surtout besoin des résultats de G. Brown sur les produits de Riesz et les caractères généralisés [1].

– La seconde partie de la démonstration (§4) utilise la méthode des points critiques de J.L. Taylor [7] ; mais nous travaillons ici dans l'adhérence $\overline{\Gamma}$ de Γ dans Δ, et nous devons montrer que les points critiques de $\overline{\Gamma}$ sont des points critiques de Δ au sens de J.L. Taylor ; son résultat essentiel se démontre d'ailleurs beaucoup plus simplement et rapidement dans ce cas. Nous reprenons au §2 des résultats de C. Dunkl et D. Ramirez [2] [3], et nous incluons une démonstration du théorème des idempotents de Cohen (il devient très simple après l'étude de l'adhérence de Γ dans $L^\infty(\eta)$, pour une mesure idempotente η).

Ce travail n'est pas indispensable si $G = \mathbf{T}$, et nous indiquons (§4) comment obtenir alors une démonstration plus directe du théorème 1.

Enfin, la dernière partie (§ 5) est la généralisation du théorème 1 aux idéaux $\sum_{1 \leq i \leq m} (\mu_i * L^1)$ ou $\sum_{1 \leq i \leq m} (\mu_i * M)$ fermés, avec le résultat que *tout idéal fermé de type fini de* M *est de la forme* $\eta * M$ *pour une mesure idempotente* η *de* M .

2. L'adhérence des caractères forts dans le spectre de M(G) .

2.1. Nous utiliserons les notations de [1] pour le spectre Δ de l'algèbre de Banach M. $\hat{\mu}$ désigne la transformée de Gelfand de $\mu \in M$.

Pour $\mu \in M$, la restriction d'un caractère $\chi \in \Delta$ à $L^1(\mu)$, identifié à un sous-espace de M, définit un élément χ_μ de $L^\infty(\mu)$. $\Delta(\mu)$ désigne l'ensemble de ces restrictions.

Dans Δ, le conjugué et le module d'un caractère χ, et le produit de deux caractères χ et φ, sont définis de façon que, pour tout $\mu \in M$,

$$(\bar{\chi}_\mu) = \overline{\chi_\mu} \quad , \quad |\chi|_\mu = |\chi_\mu| \quad , \quad \text{et} \quad (\chi\varphi)_\mu = \chi_\mu \, \varphi_\mu \; .$$

On définit une opération de Δ sur M de façon que, pour $\chi, \varphi \in \Delta$ et $\mu, \nu \in M$,

$$\chi_\mu = \chi_\mu \mu \quad , \quad \chi(\mu * \nu) = \chi\mu * \chi\nu \quad .$$

$$(\varphi\mu)\hat{}\,(\chi) = (\chi\mu)\hat{}\,(\varphi) = \hat{\mu}(\varphi\chi) \, .$$

Un caractère $\varphi \in \Delta$ est positif si pour toute mesure $\nu \geqslant 0, \hat{\nu}(\varphi)$ est positif ; alors, pour toute mesure $\mu \in M$, φ_μ est positif. L'ensemble Δ_+ des caractères positifs est ordonné de façon que $\varphi \leqslant \psi$ si et seulement si, pour $\nu \geqslant 0, \hat{\nu}(\varphi) \leqslant \hat{\nu}(\psi)$, ou, pour $\mu \in M, \varphi_\mu \leqslant \psi_\mu$.

Un élément γ de Γ définit un caractère de M par la transformation de Fourier-Stieltjes : $\hat{\mu}(\gamma) = \int \gamma \, d\mu$, pour $\mu \in M$. On appelle ces caractères *les caractères forts.* En particulier $1 \in \Gamma$ est identifié à l'élément 1 de Δ , tel que, pour tout $\mu \in M$, $1_\mu = 1$ et $\hat{\mu}(1) = \int d\mu$.

Les caractères forts sont de module 1. Inversement, si $\chi \in \Delta$ est de module 1, χ n'est pas identiquement nul sur L^1 , donc est un caractère fort.

2.2. Pour l'étude des topologies sur Δ, on pourra se reporter à [7], chapitre 5 (J.L. Taylor y présente Δ comme le dual $\hat{S}$ d'un semi-groupe S).

La *topologie faible de* Δ est la topologie de Gelfand ; elle correspond sur chaque $\Delta(\mu)$ à la topologie faible $\sigma(L^\infty(\mu), L^1(\mu))$.

Pour cette topologie, Δ est compact ; Δ_+, et pour $\varphi \in \Delta_+$ l'ensemble des caractères de module $\leqslant \varphi$ sont fermés ; la conjugaison est continue, mais la multiplication est seulement séparément continue et $\chi \longrightarrow |\chi|$ n'est pas continue.

Proposition 2. – *Si* $\chi_\alpha \longrightarrow \chi$ *et* $|\chi_\alpha| \longrightarrow \varphi$ *faiblement, on a* $|\chi| \leqslant \varphi$.

En effet, soit $\mu \geqslant 0$ et $f \in L^\infty(\mu)$ tel que $f\chi_\mu = |\chi_\mu|$ et $|f| \leqslant 1$;

$$\hat{\mu}(|\chi|) = (f\mu)\hat{}\,(\chi) = \lim\,(f\mu)\hat{}\,(\chi_\alpha) \leqslant \lim\,\hat{\mu}(|\chi_\alpha|) = \hat{\mu}(\varphi)\,.$$

Sauf mention explicite du contraire, la topolgie considérée sur Δ sera toujours la topologie faible.

La *topologie forte* sur Δ est définie par l'opération de Δ sur M : χ_α tend fortement vers χ si, pour toute mesure μ, $\|\chi_\alpha\mu - \chi\mu\|$ tend vers 0. Pour cette topologie, la multiplication et les applications $\chi \longrightarrow \bar{\chi}$, $\chi \longrightarrow |\chi|$ sont continues.

Proposition 3. – *Si* χ_α *tend vers* χ *faiblement,* χ_α *tend fortement vers* χ *dès que l'une des hypothèses suivantes est vérifiée :*

a) $|\chi| \geqslant |\chi_\alpha|$

b) $\chi_\alpha \geqslant \chi$.

En particulier les topologies fortes et faibles coïncident sur les parties de Δ formées de caractères ayant le même module.

Proposition 4. – *Toute partie fortement fermée non vide de* Δ_+ *admet un élément minimal.*

Ces résultats sont démontrés par J.L. Taylor [7]. Il définit les points critiques qui sont les éléments minimaux des parties fortement ouvertes et fermées de Δ_+, et montre que ce sont les idempotents h_τ construits ci-dessous. Nous n'utiliserons pas ce résultat, mais nous ferons une construction analogue dans l'adhérence faible de Γ dans Δ.

2.3. Pour une topologie τ de groupe localement compact sur G plus fine que la topologie initiale, on note G_τ le groupe G muni de cette topologie, et $M(G_\tau)$ la sous-algèbre de M formée des mesures régulières pour cette topologie. Toute mesure de M admet une décomposition

$$\mu = \mu_\tau + \nu_\tau$$

où μ_τ appartient à $M(G_\tau)$ et ν_τ est étrangère à $M(G_\tau)$, c'est-à-dire que $|\nu_\tau|(K) = 0$ pour tout compact K de la topologie τ ; ces mesures forment un idéal, et le projecteur $\mu \longrightarrow \mu_\tau$ est un homomorphisme de M .

On définit un caractère h_τ *de* Δ *par*

$$\hat{\mu}(h_\tau) = \hat{\mu}_\tau(1) = \int d\mu_\tau \ ; \quad h_\tau \mu = \mu_\tau \ .$$

h_τ *est un caractère idempotent.*

Si φ appartient au dual $\overline{\Gamma}_\tau$ de G_τ, l'application $\mu \longrightarrow \hat{\mu}_\tau(\varphi)$ est un caractère de M, qui est de module h_τ. Les caractères de module h_τ forment un groupe d'élément unité h_τ, isomorphe à Γ_τ (de même que les caractères de module 1 forment un groupe identifié à Γ). Sur ce groupe les topologies forte et faible, ainsi que la topologie du dual de G_τ, coïncident.

2.4. *Notations.* – L'adhérence faible $\overline{\Gamma}$ de Γ dans Δ est un semi-groupe stable par conjugaison. On note $\overline{\Gamma}_+ = \overline{\Gamma} \cap \Delta_+$; si $\chi \in \overline{\Gamma}, |\chi|$ n'est pas en général dans $\overline{\Gamma}$, mais $|\chi|^2 = \chi\overline{\chi} \in \overline{\Gamma}_+$.

Si h est un idempotent de $\overline{\Gamma}_+$, les caractères de $\overline{\Gamma}$ de module h forment *un groupe d'élément unité h, qu'on note* Γ_h. Sur Γ_h les topologies forte et faible coïncident (proposition 3).

Par analogie avec les points critiques de J.L. Taylor, on définit :

DEFINITION. – *Soit* $h \in \overline{\Gamma}_+$ *un idempotent ; on dit que h est critique dans* $\overline{\Gamma}$ *si h n'est pas limite de caractères de* $\overline{\Gamma}_+$ *strictement inférieurs à h .*

Dans cette définition, les convergences forte et faible sont équivalentes. Il suffit (et d'ailleurs il faut) que *l'idempotent h soit un élément minimal d'une partie fortement ouverte et fermée de* $\overline{\Gamma}_+$.

THEOREME 2. – *Les idempotents critiques dans* $\overline{\Gamma}$ *sont les caractères* h_τ *associés aux topologies* τ *de groupe localement compact sur* G *plus fines que la topologie initiale.*

a) Soit h un idempotent critique dans $\overline{\Gamma}$ et $\varphi \in \Gamma_h$; si $\varphi_\alpha \longrightarrow \varphi$ avec $\varphi_\alpha \in \overline{\Gamma}$ et $|\varphi_\alpha| \leqslant |\varphi| = h$, la convergence est forte (proposition 3) et on a aussi

$$|\varphi_\alpha|^2 \longrightarrow |\varphi|^2 = h, \quad |\varphi_\alpha|^2 \leqslant h, \quad |\varphi_\alpha|^2 \in \overline{\Gamma}_+ \;;$$

donc $|\varphi_\alpha| = h$ pour α assez grand, c'est-à-dire $\varphi_\alpha \in \Gamma_h$.

Γ_h est donc ouvert dans l'ensemble compact des caractères de $\overline{\Gamma}$ de module inférieur ou égal à h ; Γ_h *est un groupe localement compact.*

C. Dunkl et D. Ramirez [2], [3], ont caractérisé les groupes localement compacts dans $\overline{\Gamma}$, avec le résultat donné par le théorème (le groupe Γ_h est alors isomorphe à un groupe Γ_τ). Nous en donnons une démonstration plus directe.

b) Soit G_h le groupe dual de Γ_h. L'homomorphisme $j : \gamma \longrightarrow h\gamma$ de Γ dans Γ_h est continu, d'image dense car

$$\overline{h\Gamma} = h\overline{\Gamma} = \{\chi \in \overline{\Gamma} \;; h\chi = \chi\} = \{\chi \in \overline{\Gamma} \;; |\chi| \leqslant h\} .$$

Donc l'adjoint $j^* : G_h \longrightarrow G$ de j est une injection continue.

Soit d'autre part δ_g la mesure de Dirac en $g \in G$; pour $\chi \in \Delta$, $\chi\delta_g$ est de la forme $\lambda\delta_g$; en intégrant on trouve $\lambda = \hat{\delta}_g(\chi) \neq 0$ puisque δ_g est inversible. Pour $\chi, \psi \in \Delta$, il vient

$$\chi\psi\delta_g = \hat{\delta}_g(\chi\psi)\,\delta_g = \hat{\delta}_g(\chi)\,\hat{\delta}_g(\psi)\,\delta_g \neq 0 .$$

$\varphi \longmapsto \hat{\delta}_g(\varphi)$ définit donc un caractère $\widetilde{g}$ continu sur Γ_h – en particulier $\hat{\delta}_g(h) = 1$ – et pour $\gamma \in \Gamma$

$$< \widetilde{g}, j(\gamma) > = \hat{\delta}_g(h\gamma) = \hat{\delta}_g(h)\,\hat{\delta}_g(\gamma) = \hat{\delta}_g(\gamma) = <g, \gamma>,$$

soit $g = j^*(\widetilde{g})$, ce qui montre que j^* est surjectif.

j^* est donc une bijection continue de G_h sur G ; on identifie G_h au groupe G muni de sa topologie τ plus fine que la topologie initiale de G.

c) Pour montrer $h = h_\tau$; il suffit de montrer que, pour $\mu \in M$, $h\mu \in M(G_\tau)$ et que, pour $\nu \in M(G_\tau)$, $h\nu = \nu$.

Soit $\mu \in \mathrm{M}$; comme $h|\mu| = |h\mu|$ et que toute mesure absolument continue par rapport à une mesure de $\mathrm{M}(\mathrm{G}_\tau)$ est dans $\mathrm{M}(\mathrm{G}_\tau)$, on peut se restreindre au cas où μ est positive. Alors la restriction de $\hat{\mu}$ à Γ_h est définie positive et continue ; c'est donc, d'après le théorème de Bochner, la transformée de Fourier-Stieltjes d'une mesure $\nu \in \mathrm{M}(\mathrm{G}_h)$. En identifiant G_h à G_τ, on a plongé $\mathrm{M}(\mathrm{G}_h)$ dans M de façon que, pour $\gamma \in \Gamma$,

$$\hat{\nu}(\gamma) = \hat{\nu}(j(\gamma)) = \hat{\mu}(h\gamma) = (h\mu)\hat{}\,(\gamma) \ ;$$

Alors $h\mu = \nu \in \mathrm{M}(\mathrm{G}_\tau)$.

Inversement, soit $\nu \in \mathrm{M}(\mathrm{G}_\tau)$ et $\gamma_a \longrightarrow h$; $h\gamma_\alpha \longrightarrow h$, donc γ_α converge ver l'unité dans la topologie induite sur Γ par j, qui est la topologie sur Γ duale de la topologie τ sur G ; pour cette topologie $\hat{\nu}$ est continue, et pour tout $\gamma \in \Gamma$

$$\hat{\nu}(h\gamma) = \lim \hat{\nu}(\gamma_\alpha \gamma) = \hat{\nu}(\gamma) \ .$$

Donc $\nu = h\nu$, ce qui achève de démontrer que $h = h_\tau$.

d) Il reste à montrer que, pour toute topologie τ de groupe localement compact sur G plus fine que la topologie initiale, l'idempotent h_τ est un idempotent critique dans $\overline{\Gamma}$.

Soit Ω l'ensemble des caractères de $\overline{\Gamma}_+$ supérieurs ou égaux à h_τ ; Ω est fermé et $1 \in \Omega$, donc Ω admet un élément minimal h ; il est clair que $h^2 \leqslant h$ et $h^2 \in \Omega$, donc h est idempotent.

Soit μ une mesure de probabilité dans $\mathrm{L}^1(\mathrm{G}_\tau)$; si $\chi \in \overline{\Gamma}$ et si $\hat{\mu}(\chi) \neq 0$, la restriction de χ à $\mathrm{M}(\mathrm{G}_\tau)$, non nulle sur $\mathrm{L}^1(\mathrm{G}_\tau)$, est un caractère fort de $\mathrm{M}(\mathrm{G}_\tau)$, et $|\chi| \geqslant h_\tau$. Ω est donc aussi l'ensemble des caractères φ de $\overline{\Gamma}_+$ tels que $\hat{\mu}(\varphi) \neq 0$; c'est un ouvert de $\overline{\Gamma}_+$, et h est critique.

Soient alors $j : \Gamma \longrightarrow \Gamma_h$, $j_\tau : \Gamma \longrightarrow \Gamma_\tau$ et $k : \Gamma_h \longrightarrow \Gamma_\tau$ les homomorphismes définis par $j(\gamma) = h\gamma$, $j_\tau(\gamma) = h_\tau \gamma$ et $k(\varphi) = h_\tau \varphi$; ils sont continus et $j_\tau = k \circ j$; les adjoints de j et j_τ sont les identités continues $\mathrm{G}_h \longrightarrow \mathrm{G}$ et $\mathrm{G}_\tau \longrightarrow \mathrm{G}$; l'adjoint k^* de k est donc l'identité de G_τ dans G_h et est continu ; pour montrer $h_\tau = h$, il suffit d'après ce qui précède de montrer que k^* est un isomorphisme ; k est injectif et d'image dense (adjoint de l'identité) et il reste à vérifier que l'image réciproque par k d'un compact K de Γ_τ est un compact de Γ_h ; soit K' le compact de $\overline{\Gamma}$

$$\mathrm{K}' = \{\chi \in \overline{\Gamma} \ ; |\chi| \leqslant h \quad \text{et} \quad h_\tau \chi \in \mathrm{K}\} \ ;$$

$k^{-1}(\mathrm{K})$ est inclus dans K' et, si $\chi \in \mathrm{K}'$, $|h_\tau \chi| = h_\tau$ donc $|\chi| \geqslant h_\tau$; on a alors $h_\tau \leqslant |\chi^2| \leqslant h$, et, d'après la définition de h comme élément minimal de Ω, $|\chi|^2 = h$; χ est donc dans Γ_h , $\mathrm{K}' = k^{-1}(\mathrm{K})$. $k^{-1}(\mathrm{K})$ est compact, ce qui achève la démonstration du théorème 2.

Cette dernière partie de la démonstration (d) montre que pour toute topologie τ de groupe localement compact sur G plus fine que la topologie initiale et pour toute mesure $\mu \in \mathrm{M}$, on a

$$\hat{\mu}_\tau(\Gamma) \subset \overline{\hat{\mu}(\Gamma)} .$$

2.5. Dans la suite de ce paragraphe, nous étudions, pour une mesure η idempotente – plus généralement pour une mesure dont la transformée de Fourier-Stieltjes a ses valeurs entières, le *semi-groupe* $\overline{\Gamma}(\eta)$ des restrictions à $\mathrm{L}^1(\eta)$ des caractères de $\overline{\Gamma}$, qui est aussi l'adhérence pour la topologie $\sigma(\mathrm{L}^\infty(\eta), \mathrm{L}^1(\eta))$ du groupe $\Gamma(\eta)$ des caractères forts dans $\mathrm{L}^\infty(\eta)$.

PROPOSITION 5. – *Soit* η *une mesure telle que* $\hat{\eta}(\Gamma) \subset \mathbf{Z}$;

a) *La topologie forte est discrète dans* $\overline{\Gamma}(\eta)$,

b) *Tout* $\varphi \in \overline{\Gamma}(\eta)$ *a son module idempotent,*

c) $\overline{\Gamma}_+(\eta) = \{\varphi \in \overline{\Gamma}(\eta) \; ; \varphi \geqslant 0\}$ *est fini.*

a) On a encore $\hat{\eta}(\overline{\Gamma}) \subset \mathbf{Z}$, et si $\varphi , \psi \in \overline{\Gamma}(\eta)$ avec $\varphi \neq \psi$, $\varphi\eta$ est différente de $\psi\eta$; il existe donc un $\gamma \in \Gamma$ tel que

$$|(\varphi\eta)\hat{}(\gamma) - (\psi\eta)\hat{}(\gamma)| = |\hat{\eta}(\varphi\gamma) - \hat{\eta}(\psi\gamma)| \geqslant 1 ,$$

donc
$$\|\varphi\eta - \psi\eta\| \geqslant 1 .$$

b) Soit $\varphi \in \overline{\Gamma}(\eta)$; il suffit de montrer que $|\varphi^2|$ est idempotent ; on peut donc supposer $\varphi \geqslant 0$. Alors la suite (φ^n) converge fortement dans $\overline{\Gamma}(\eta)$, donc est stationnaire ; or si $\varphi^n = \varphi^{n+1}$ pour un n, il est clair que φ est idempotent.

c) On suppose que φ_α converge vers φ faiblement, avec $\varphi_\alpha , \varphi \in \overline{\Gamma}_+(\eta)$;

$$\|\varphi\eta - \varphi\varphi_\alpha\eta\| = \int (\varphi - \varphi\varphi_\alpha)\, d|\eta| = |\eta|\hat{}(\varphi) - |\eta|\hat{}(\varphi\varphi_\alpha) \longrightarrow 0$$

$$\|\varphi_\alpha\eta - \varphi\varphi_\alpha\eta\| = \int (\varphi_\alpha - \varphi\varphi_\alpha)\, d|\eta| = |\eta|\hat{}(\varphi_\alpha) - |\eta|\hat{}(\varphi\varphi_\alpha) \longrightarrow 0$$

donc $\|\varphi\eta - \varphi_\alpha\eta\| \longrightarrow 0$, la topologie faible (compacte) coïncide avec la topologie forte (discrète) sur $\overline{\Gamma}_+(\eta)$, qui est donc fini.

Le dernier argument montre plus généralement que pour un idempotent φ de Δ les convergences forte et faible vers φ dans Δ_+ sont équivalentes.

$\Gamma(\eta)$ est dense dans le groupe des caractères de module 1 de $\overline{\Gamma}(\eta)$, et celui-ci est discret car la topologie forte y coïncide avec la topologie faible ; dans $\overline{\Gamma}(\eta)$, tout caractère de module 1 est donc un caractère fort.

Soit H le groupe-support de η ; $H^\perp = \{\gamma \in \Gamma \ ; \gamma\eta = \eta\}$ est le noyau de la projection $\Gamma \longrightarrow \Gamma(\eta)$; $H^\perp$ est ouvert, donc H est compact.

On dira que η est une *mesure élémentaire* si 1 est le seul élément positif non nul de $\overline{\Gamma}(\eta)$. L'ensemble des $\varphi \in \overline{\Gamma}(\eta)$ tels que $\hat{\mu}(\varphi) \neq 0$, qui est compact, est alors contenu dans le groupe discret $\Gamma(\eta)$ des caractères de module 1 ; il est donc fini.

Dans ce cas, $\hat{\eta}$ est nul sauf sur une réunion finie de classes $\gamma_j H^\perp$, sur chacune desquelles $\hat{\eta}$ a une valeur constante $n_j \in \mathbf{Z}$. On trouve donc, si m_H désigne la mesure de Haar de H,

$$\eta = \sum_{1 \leqslant j \leqslant k} n_j \gamma_j m_H .$$

Dans le cas général $\hat{\eta}(\Gamma) \subset \mathbf{Z}$, pour tout $\varphi \in \overline{\Gamma}_+(\eta)$, on définit une *partie élémentaire de* η *associée à* φ,

$$\epsilon_\varphi = \Big(\prod_{\psi < \varphi} (\varphi - \psi)\Big)\, \eta = \Big(\varphi - \operatorname*{Sup}_{\psi < \varphi} \psi\Big)\, \eta .$$

ϵ_φ est une combinaison à coefficients entiers de mesures $\psi\eta$, donc $\hat{\epsilon}_\varphi$ a ses valeurs entières. ϵ_φ est bien une mesure élémentaire, car tout élément $\theta \in \overline{\Gamma}_+(\epsilon_\varphi)$ est la restriction d'un élément θ_0 de $\overline{\Gamma}_+(\eta)$ (si $\gamma_\alpha \longrightarrow \theta$ dans $\overline{\Gamma}(\epsilon_\varphi)$, et si θ_1 est un point adhérent de (γ_α) dans $\overline{\Gamma}(\eta)$, $\theta_0 = |\theta_1|^2$ a aussi θ pour restriction dans $\overline{\Gamma}(\epsilon_\varphi)$) ; et

– si $\theta_0 \geqslant \varphi$, on a $\theta_0\psi = \psi$ pour tout $\psi \leqslant \varphi$, donc $\theta_0 \epsilon_\varphi = \epsilon_\varphi$, et $\theta = 1$,

– sinon $\theta_0\varphi < \varphi$ et $\theta_0(\varphi - \theta_0\varphi) = 0$, donc $\theta_0\epsilon_\varphi = 0$, et $\theta = 0$.

De plus, η est la somme de ses parties ϵ_φ pour $\varphi \in \overline{\Gamma}_+(\eta)$.

Cette décomposition de η en une somme finie de mesures élémentaires de la forme $\Sigma n_j \gamma_j m_H$ est celle du *théorème des idempotents de Cohen.*

3. Les lemmes techniques.

3.1. Pour la démonstration du théorème 1, dans ce paragraphe et le suivant, on considère une mesure μ de M telle que $\mu * L^1$ soit fermé. D'après la proposition 1, toute mesure dont la transformée de Fourier-Stieltjes s'annule sur $\hat{\mu}^{-1}(0)$ est dans $\mu * M$ et il existe un réel $\epsilon > 0$ tel que $|\hat{\mu}(\gamma)| \geqslant \epsilon$ si $\hat{\mu}(\gamma) \neq 0$.

Notation. – Pour deux nombres complexes s, t, *on écrira* $s \sim t$ *si* s *et* t *sont tous les deux nuls, ou tous les deux non nuls.*

Etant donné que 0 est isolé dans $(0) \cup \hat{\mu}(\Gamma)$, pour toute mesure idempotente η l'ensemble $\{\chi \in \overline{\Gamma} \,;\, \hat{\mu}(\chi) \sim \hat{\eta}(\chi)\}$ est un ouvert et fermé de $\overline{\Gamma}$. Il suffit de trouver une mesure idempotente η telle que cet ensemble soit $\overline{\Gamma}$ entier (d'après la remarque à la fin de 1.1).

Dans la démonstration du lemme qui suit, on utilise des produits de Riesz, avec les définitions et les résultats de G. Brown [1] ; nous rappelons simplement les propriétés qui interviennent ici.

Soit L un groupe abélien compact, m_L sa mesure de Haar ; une suite $(\gamma_n)_{n \geqslant 1}$ d'éléments $\neq 1$ de $\hat{L}$ est dite *dissociée* si, pour toute suite $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ d'entiers de valeur absolue $\leqslant 2$,

$$\prod_{1 \leqslant k \leqslant n} \gamma_k^{\epsilon_k} = 1$$

si et seulement si $\gamma_k^{\epsilon_k} = 1$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$.

Pour $0 < r \leqslant \frac{1}{2}$, si la suite (γ_n) est dissociée, le produit

$$\prod_{n \geqslant 1} (1 + r\gamma_n + r\overline{\gamma}_n) \,.\, m_L$$

converge vaguement dans M(L) vers une mesure de probabilité ρ appelée *produit de Riesz*. Les γ_n sont appelés les *lettres* et les produits finis $\prod_{1 \leqslant k \leqslant n} \gamma_k^{\epsilon_k}$ avec $|\epsilon_k| \leqslant 1$, sont appelés les *mots* du produit de Riesz ; la longueur d'un mot est le nombre d'exposants non nuls qui y figurent.

Pour $\gamma \in \hat{L}$, $\hat{\rho}(\gamma)$ est non nul si et seulement si γ est un mot, avec alors, si $\gamma \neq 1$, $0 < \hat{\rho}(\gamma) \leqslant 2r$.

Pour tout caractère φ de M(L) adhérent à la suite (γ_n), d'après (1), φ_ρ est une constante non nulle. Alors, pour le caractère $h = |\varphi|^\circ = \lim\limits_{\epsilon \to 0} |\varphi|^\epsilon$ (pour la définition de ces caractères, on pourra se reporter à [1]), on a $h_\rho = 1$. Par contre, comme γ_n tend vers l'infini dans $\hat{\mathrm{L}}$, on a $\varphi m_\mathrm{L} = 0$, $hm_\mathrm{L} = 0$, et $h\sigma = 0$ pour toute mesure σ absolument continue par rapport à m_L.

Si L est un sous-groupe compact de G, on dira que la suite (γ_n) dans Γ est *dissociée sur* L si sa projection dans $\hat{\mathrm{L}} = \Gamma/\mathrm{L}^\perp$ est dissociée. On a alors les mêmes propriétés pour le produit de Riesz construit sur L, un caractère φ adhérent à la suite (γ_n) dans $\overline{\Gamma}$, et l'idempotent $h = |\varphi|^\circ$ de Δ.

3.2. LEMME 1. – *Soit* $\chi \in \overline{\Gamma}$; *si* $\hat{\mu}(|\chi^2|\gamma) \neq 0$ *pour tout* $\gamma \in \Gamma$, *on a* $\hat{\mu}(\chi) \neq 0$.

a) On suppose $\hat{\mu}(\chi) = 0$.

On construit par récurrence une suite $(\gamma_n)_{n \geq 1}$ dans Γ de façon que, pour tout $n \geq 1$ et pour tout $p < n$,

$$\left.\begin{aligned} &\hat{\mu}(\gamma_n) = 0\,,\\ &\hat{\mu}(\gamma_n \overline{\gamma}_p \gamma) \neq 0 \quad \text{et} \quad \hat{\mu}(\overline{\gamma}_n \gamma_p \gamma) \neq 0\,,\\ &\text{pour tout } \gamma \text{ appartenant à l'ensemble}\\ &\mathrm{A}_p = \Big\{ \prod_{1 \leq k < p} \gamma_k^{\epsilon_k} \;;\; |\epsilon_k| \leq 3 \Big\}\,. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(I)}$$

Soit en effet $\gamma_\alpha \longrightarrow \chi$ $(\gamma_\alpha \in \Gamma)$; on suppose construits pour $n < q$ des termes γ_n satisfaisant les conditions (I) et tels que, pour tout $n < q$ et tout $\gamma \in \mathrm{A}_n$,

$$\hat{\mu}(\overline{\gamma}_n \chi\gamma) \neq 0 \quad \text{et} \quad \hat{\mu}(\gamma_n \overline{\chi}\gamma) \neq 0\,.$$

Pour α assez grand, 0 étant isolé dans $(0) \cup \hat{\mu}(\Gamma)$, on a pour $n < q$ et $\gamma \in \mathrm{A}_n$,

$$\hat{\mu}(\gamma_\alpha) = 0, \quad \hat{\mu}(\overline{\gamma}_n \gamma_\alpha \gamma) \neq 0 \quad \text{et} \quad \hat{\mu}(\gamma_n \overline{\gamma}_\alpha \gamma) \neq 0\,.$$

De plus $\overline{\gamma}_\alpha \chi$ et $\gamma_\alpha \overline{\chi}$ convergent vers $|\chi^2|$, et, $\hat{\mu}(|\chi^2|\gamma)$ étant non nul pour tout γ, on a aussi pour α assez grand, pour tout $\gamma \in \mathrm{A}_q$,

$$\hat{\mu}(\overline{\gamma}_\alpha \chi\gamma) \neq 0 \quad \text{et} \quad \hat{\mu}(\gamma_\alpha \overline{\chi}\gamma) \neq 0\,.$$

On peut donc choisir γ_q parmi les γ_α, satisfaisant les conditions (I) et la condition supplémentaire ci-dessus.

Dans la suite, on extrait des sous-suites de (γ_n) – les conditions (I) restent vérifiées – sans changer la notation.

b) On suppose que γ_n converge faiblement dans $\overline{\Gamma}(\mu)$ vers $f \in \overline{\Gamma}(\mu)$, et que, pour toute suite (p_n) telle que $n < p_n$, $\overline{\gamma}_n \gamma_{p_n}$ converge vers $|f^2|$ dans $\overline{\Gamma}(\mu)$.

C'est possible si le compact $\overline{\Gamma}(\mu)$ est métrisable, quitte à prendre une sous-suite : si γ_n tend vers f, $\overline{\gamma}_n f$ tend vers $|f^2|$ et $\overline{\gamma}_n \gamma_p$ tend vers $\overline{\gamma}_n f$ pour n fixé.

Dans le cas général, soit Γ' le sous-groupe fermé de Γ engendré par les γ_n, G' son dual et μ' la projection de μ dans $M(G')$

$L^1(\mu')$ est un quotient de $L^1(\mu)$; $L^\infty(\mu')$ s'identifie à un sous-espace faiblement fermé de $L^\infty(\mu)$, et $\overline{\Gamma}'(\mu')$ au semi-groupe fermé de $\overline{\Gamma}(\mu)$ engendré par les γ_n. Or Γ' est séparable, Γ' est total dans $L^1(\mu')$ qui est donc séparable, et la boule unité de $L^\infty(\mu')$ est faiblement métrisable. Les γ_n sont donc contenus dans un sous-semi-groupe compact métrisable de $\overline{\Gamma}(\mu)$, et on peut extraire des sous-suites convergentes comme précédemment.

c) On définit un sous-groupe fermé de G, L, par

$$L^\perp = \{\gamma \in \Gamma \; ; \gamma \hat{\mu}^{-1}(0) = \hat{\mu}^{-1}(0)\}.$$

$L^\perp$ est un sous-groupe ouvert de Γ car 0 est isolé dans $(0) \cup \hat{\mu}(\Gamma)$, et $\hat{\mu}$ est uniformément continue ; donc L *est compact.*

Quitte à prendre une nouvelle sous-suite, on pourra supposer,

1/ Si γ_n^2 tend vers l'infini modulo $L^\perp$, $\gamma_n^2 \notin A_n L^\perp$;

2/ Sinon, que γ_n^2 est constant modulo $L^\perp$.

Soit alors, pour $n \geqslant 1$, $\theta_n = \overline{\gamma}_{2n+1} \gamma_{2n}$.

La suite (θ_n) *est dissociée sur* L. Soit en effet

$$\theta = \prod_{1 \leqslant k \leqslant n} \theta_k^{\epsilon_k}$$

avec $|\epsilon_k| \leqslant 2$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$ et $\theta_n^{\epsilon_n} \neq 1$ modulo $L^\perp$.

– Si $|\epsilon_n| = 2$, $\gamma_{2n}^{\epsilon_n} \prod_{1 \leqslant k < n} \theta_k^{\epsilon_k}$ est dans A_{2n+1} et l'hypothèse faite dans le cas 1 montre que θ n'est pas dans $L^\perp$; dans le cas 2, les θ_n ont tous leurs carrés dans $L^\perp$ et on n'a pas à considérer $|\epsilon_n| = 2$.

– Si $|\epsilon_n| = 1$, et si θ était dans $L^\perp$, on aurait, d'après la définition de ce groupe $\hat{\mu}(\gamma) \sim \hat{\mu}(\gamma\theta)$ pour tout $\gamma \in \Gamma$. Or $\hat{\mu}(\gamma_1) = 0$,

$$\gamma_1 \prod_{1 \leqslant k < n} (\overline{\gamma}_{2k+1}\ \gamma_{2k})^{\epsilon_k} \in A_{2n}$$

donc

$$\hat{\mu}(\gamma_1 \theta) = \hat{\mu}((\overline{\gamma}_{2n+1}\ \gamma_{2n})^{\epsilon_n}\ \gamma_1 \prod_{1 \leqslant k < n} (\overline{\gamma}_{2k+1}\ \gamma_{2k})^{\epsilon_k}) \neq 0\,.$$

d) On peut donc construire sur L le produit de Riesz

$$\rho_n = \prod_{p \geqslant 1} (1 + 2^{-n}\ \theta_p + 2^{-n}\ \overline{\theta}_p).\ m_L\,.$$

L'ensemble des zéros de $\hat{\mu}$ dans Γ, et celui de $\hat{\rho}_n$, sont des réunions de classes modulo $L^\perp$. On va montrer qu'il n'existe qu'un nombre fini de ces classes sur lesquelles $\hat{\mu}$ est nulle mais $(\overline{\gamma}_n \rho_n)\hat{}$ non nulle.

En effet, si $(\overline{\gamma}_n \rho_n)\hat{}(\gamma) = \hat{\rho}_n(\overline{\gamma}_n \gamma) \neq 0$, $\overline{\gamma}_n \gamma$ est modulo $L^\perp$ un mot de ρ_n qui s'écrit

$$\prod_{1 \leqslant k \leqslant p} (\overline{\gamma}_{2k+1}\ \gamma_{2k})^{\epsilon_k} \quad \text{avec } |\epsilon_k| \leqslant 1,\ |\epsilon_p| = 1\,.$$

Si $n < 2p$,

$$\alpha = \gamma_n \prod_{1 \leqslant k < p} (\overline{\gamma}_{2k+1}\ \gamma_{2k})^{\epsilon_k} \in A_{2p}\ ,$$

et
$$\hat{\mu}(\gamma) \sim \hat{\mu}\ ((\overline{\gamma}_{2p+1}\ \gamma_{2p})^{\epsilon_p}\ \alpha) \neq 0\,.$$

Donc, si $\hat{\mu}(\gamma) = 0$ et $(\overline{\gamma}_n \rho_n)\hat{}(\gamma) \neq 0$, $\overline{\gamma}_n \gamma$ est dans la classe d'un mot de ρ_n de longueur $\leqslant n/2$; le nombre de ces classes est au plus $3^{n/2}$, et pour chaque γ, sauf si $\overline{\gamma}_n \gamma \in L^\perp$, $|(\overline{\gamma}_n \rho_n)\hat{}(\gamma)| \leqslant 2^{1-n}$.

On définit donc *une mesure* $\sigma_n \in L^1(L)$, *de norme* $\leqslant 2$, par

$$\sigma_n = \Sigma (\overline{\gamma}_n\ \rho_n)\hat{}(\gamma)\,\overline{\gamma}\,.\,m_L\ ,$$

la somme étant prise pour l'ensemble des $\gamma \in \hat{L} = \Gamma/L^\perp$ tels que $\hat{\mu}$ s'annule sur la classe modulo $L^\perp$ définie par γ.

Soit enfin

$$\omega_n = \overline{\gamma}_n\,\rho_n - \sigma_n\,.$$

$\hat{\omega}_n(\gamma)$ est nul sur $\hat{\mu}^{-1}(0)$; donc ω_n est dans $\mu * M$, et il existe pour tout n une mesure λ_n telle que $\omega_n = \mu * \lambda_n$.

De plus, les mesures ω_n ayant toutes leur norme $\leqslant 3$, on peut, d'après le théorème de l'application ouverte de Banach, choisir les λ_n de norme uniformément bornée par une constante A .

e) Soit φ un caractère adhérent à la suite (θ_n) dans $\overline{\Gamma}$, et $h = |\varphi|^\circ \in \Delta$. On sait (3.1)

$$h\rho_n = \rho_n \quad \text{et} \quad h\sigma_n = 0 \;;$$

donc $h\omega_n = \overline{\gamma}_n \rho_n$ et en particulier

$$\hat{\omega}_n (h\gamma_n) = (\overline{\gamma}_n \rho_n)\hat{}(\gamma_n) = 1 .$$

D'autre part h est un idempotent $\geqslant |\varphi|$, et $\varphi_\mu = |f^2|$ d'après b) ; donc $h_\mu f = f$, et

$$\lim \hat{\mu}(h\gamma_n) = \int h_\mu f \, d\mu = \int f d\mu = 0 .$$

Or, pour tout n et pour tout caractère $\psi \in \Delta$,

$$|\hat{\omega}_n(\psi)| = |\hat{\mu}(\psi)\, \lambda_n(\psi)| \leqslant A|\hat{\mu}(\psi)| ,$$

donc

$$\lim \hat{\omega}_n (h\gamma_n) = 0 .$$

On obtient donc un contradiction.

3.3. COROLLAIRE. – *Soient* H *un sous-groupe compact de* G, *et* χ *un caractère appartenant à* $\overline{\mathrm{H}^\perp}$, *l'adhérence dans* Δ *de l'orthogonal* $\mathrm{H}^\perp$ *de* H .

– *Si, pour tout* $\gamma \in \mathrm{H}^\perp$, $\hat{\mu}(|\chi|^2 \gamma) \neq 0$, *alors* $\hat{\mu}(\chi) \neq 0$.

– *Si, pour tout* $\gamma \in \mathrm{H}^\perp$, $\hat{\mu}(|\chi|^2\gamma) = 0$, *alors* $\hat{\mu}(\chi) = 0$.

Soit m_H la mesure de Haar de H. $\chi m_\mathrm{H} = m_\mathrm{H}$ et si $\hat{\mu}(|\chi|^2\gamma) = 0$ pour tout $\gamma \in \mathrm{H}^\perp$, $m_\mathrm{H} * |\chi|^2 \mu = |\chi|^2 (m_\mathrm{H} * \mu) = 0$. Alors

$$\chi(m_\mathrm{H} * \mu) = 0, \quad \text{et} \quad (m_\mathrm{H} * \mu)\hat{}(\chi) = m_\mathrm{H}(\chi)\ \hat{\mu}(\chi) = \hat{\mu}(\chi) = 0 .$$

D'autre part, l'algèbre M(G/H), quotient de M, s'identifie à la sous-algèbre $m_\mathrm{H} * \mathrm{M}$ de M, l'image d'une mesure ν de M étant identifiée à $m_\mathrm{H} * \nu$. $m_\mathrm{H} * \mu * \mathrm{M}$ est fermé, car la convolution par m_H est un projecteur de $\mu * \mathrm{M}$; si μ' est l'image de μ dans M(G/H) , $\mu' * \mathrm{M(G/H)}$ est donc fermé.

La projection de M sur M(G/H) induit une inclusion du spectre de M(G/H) dans Δ , $\mathrm{H}^\perp$ étant l'image du groupe $(\mathrm{G/H})\hat{}$ des caractères forts de M(G/H) ; $\chi \in \overline{\mathrm{H}^\perp}$ est l'image par cette inclusion d'un caractère $\chi' \in (\mathrm{G/H})\hat{}$.

Alors, si $\hat{\mu}(|\chi|^2\gamma) \neq 0$ pour tout $\gamma \in H^\perp$, μ' et χ' satisfont les hypothèses du lemme 1 sur G/H, et $\hat{\mu}(\chi) = \hat{\mu}'(\chi') \neq 0$.

LEMME 2. – *Soient* $\chi \in \overline{\Gamma}$ *et* η *une mesure idempotente de* M *tels que, pour tout* $\gamma \in \Gamma$, $\hat{\mu}(|\chi|^2 \gamma) \sim \hat{\eta}(|\chi|^2\gamma)$. *Alors* $\hat{\mu}(\chi) \sim \hat{\eta}(\chi)$.

D'après l'étude de $\overline{\Gamma}(\eta)$ en 2.5, la projection de χ dans $\overline{\Gamma}(\eta)$ est de module idempotent, et la projection de χ dans $\overline{\Gamma}(|\chi|^2 \eta)$ est de module 1, donc appartient au groupe discret $\Gamma(|\chi|^2 \eta)$; l'orthogonal $H^\perp$ du groupe-support H de $|\chi|^2\eta$ est le noyau de la projection $\Gamma \longrightarrow \Gamma(|\chi|^2\eta)$, et il existe un $\gamma_0 \in \Gamma$ tel que

$$\chi \in \gamma_0 \overline{H^\perp} \quad \text{et} \quad \hat{\eta}(\chi) = (|\chi|^2 \eta)\hat{}\,(\gamma_0) \sim \hat{\mu}(|\chi|^2 \gamma_0) .$$

$\hat{\mu}(|\chi|^2 \gamma_0\gamma)$ est toujours nul ou toujours non nul pour $\gamma \in H^\perp$, et on peut appliquer le corollaire précédent à $\mu_0 = \gamma_0\mu$ et $\chi_0 = \overline{\gamma}_0 \chi \in \overline{H^\perp}$;

$$\hat{\mu}(\chi) = \hat{\mu}_0(\chi_0) \sim \hat{\mu}_0(|\chi_0|^2) = \hat{\mu}(|\chi|^2\gamma_0) \sim \hat{\eta}(\chi) .$$

4. Démonstration du théorème 1.

4.1. *Cas particulier* $G = \mathbf{T}$.

Soit μ_d la partie discrète de μ , 0 est encore isolé dans $(0) \cup \hat{\mu}_d(\Gamma)$, qui est contenu dans $(0) \cup \hat{\mu}(\overline{\Gamma})$ d'après 2.4.

$\{\gamma \in \Gamma \ ; \gamma\hat{\mu}_d^{-1}(0) = \hat{\mu}_d^{-1}(0)\}$ est donc la trace sur $\Gamma = \mathbf{Z}$ d'un sous-groupe ouvert du compactifié de Bohr de $\mathbf{Z}$, et son orthogonal H est un sous-groupe fini de $\mathbf{T}$. $\hat{\mu}_d^{-1}(0)$ est une réunion finie de classes $\gamma H^\perp$.

Si $\hat{\mu}^{-1}(0) = \hat{\eta}^{-1}(0)$ pour une mesure idempotente η, le théorème est démontré (1.1) ; sinon, $\hat{\mu}^{-1}(0)$ ne coïncide pas avec $\hat{\mu}_d^{-1}(0)$ à un ensemble fini près, et il existe un $\gamma_0 \in \Gamma$ tel que l'ensemble

$$E = \{\gamma \in \gamma_0 H^\perp \ ; \hat{\mu}(\gamma) \not\sim \hat{\mu}_d(\gamma_0)\} \qquad \text{soit infini.}$$

On peut supposer $\gamma_0 = 1$, quitte à remplacer μ par $\gamma_0\mu$.

E est de densité nulle, car il existe $\epsilon > 0$ tel que

$$|\hat{\mu}(\gamma) - \hat{\mu}_d(\gamma)| \geqslant \epsilon \quad \text{pour} \quad \gamma \in E \quad ;$$

on peut donc construire une suite (γ_n) dans E telle que, pour tout n et pour tout $p > n$, E^c contienne un intervalle de centre $\overline{\gamma}_n\gamma_p$ dont la longueur tend vers l'infini avec n ; on peut supposer de plus que γ_n converge faiblement dans $L^\infty(\mu)$ vers $f \in L^\infty(\mu)$, et que pour toute suite (p_n) telle que $n < p_n$, $\overline{\gamma}_n \gamma_{p_n}$ converge vers $|f|^2$.

Alors, pour tout caractère χ adhérent à la suite (γ_n), $\chi \in \overline{H^\perp}$ et

$$\hat{\mu}(\chi) = \lim \hat{\mu}(\gamma_n) \not\sim \hat{\mu}_d(1)\,,$$

$$\hat{\mu}(|\chi|^2\gamma) = \lim \hat{\mu}(\overline{\gamma}_n \gamma_{p_n} \gamma) \sim \hat{\mu}_d(1) \qquad \text{pour tout } \gamma \in H^\perp\,.$$

On obtient donc une contradiction en appliquant le corollaire du lemme 1.

4.2. DÉFINITION. — *On appelle* Λ *l'ensemble des caractères* $\varphi \in \overline{\Gamma}_+$ *pour lesquels il existe une mesure idempotente* η *telle que, pour tout* $\gamma \in \Gamma$,

$$\hat{\mu}(\varphi\gamma) \sim \hat{\eta}(\varphi\gamma)$$

On note alors η_φ *la mesure idempotente* $\varphi\eta$, *caractérisée par*

$$\hat{\eta}_\varphi^{-1}(0) = (\varphi\mu)^{\wedge -1}(0)\,.$$

De plus $\varphi\eta_\varphi = \eta_\varphi$, et $\hat{\mu}(\varphi\chi) \sim \hat{\eta}_\varphi(\chi)$ pour tout $\chi \in \overline{\Gamma}$. En particulier, si $\varphi, \psi \in \Lambda$, $\hat{\eta}_\varphi(\psi\gamma) \sim \hat{\mu}(\varphi\psi\gamma) \sim \hat{\eta}_\psi(\varphi\gamma)$ pour tout $\gamma \in \Gamma$, donc

$$\psi\eta_\varphi = \varphi\eta_\psi\,.$$

LEMME 3. — *Soit* h *un idempotent critique dans* $\overline{\Gamma}$ *; on suppose que tout caractère* $\varphi \in \overline{\Gamma}_+$ *strictement inférieur à* h *appartient à* Λ. *Alors* $h \in \Lambda$.

Soit $\Lambda_h = \{\varphi \in \overline{\Gamma}_+ \ ;\ \varphi < h\}$. On suppose $\Lambda_h \subset \Lambda$.

a) Pour une mesure idempotente η, *l'ensemble des* $\varphi \in \Lambda_h$ *tels que* $\eta_\varphi = \eta$ *est ouvert dans* Λ_h.

En effet, si cette propriété était fausse, il existerait $\varphi \in \Lambda_h$, avec $\eta_\varphi = \eta$, (φ_α) dans Λ_h et (γ_α) dans Γ tels que

$$\varphi_\alpha \longrightarrow \varphi \qquad \text{et} \qquad \hat{\mu}(\varphi_\alpha\gamma_\alpha) \not\sim \hat{\eta}(\gamma_\alpha).$$

Pour α assez grand, $\varphi_\alpha\eta = \varphi\eta = \eta$ (proposition 5), donc $\hat{\eta}(\gamma_\alpha) = \hat{\eta}(\varphi_\alpha\gamma_\alpha)$; on peut supposer $\varphi_\alpha\gamma_\alpha \longrightarrow \chi \in \overline{\Gamma}$, de sorte que

$$\hat{\mu}(\chi) \not\sim \hat{\eta}(\chi)\,.$$

D'après la proposition 2, on a $|\chi| \leqslant \lim |\varphi_\alpha \gamma_\alpha| = \varphi$, donc $|\chi|^2 \leqslant \varphi$. $|\chi|^2$ est dans Λ_h, et la projection de φ dans $\overline{\Gamma}(\eta_{|\chi|^2})$ est égale à 1, car elle est supérieure ou égale à celle de $|\chi|^2$ (et $|\chi|^2\ \eta_{|\chi|^2} = \eta_{|\chi|^2}$), donc

$$\eta_{|\chi|^2} = \varphi\eta_{|\chi|^2} = |\chi|^2\ \eta\ ;$$

$$\hat{\mu}(|\chi|^2\gamma) \sim \hat{\eta}(|\chi|^2\ \gamma) \qquad \text{pour tout } \gamma \in \Gamma.$$

Alors $\hat{\mu}(\chi) \sim \hat{\eta}(\chi)$ d'après le lemme 2, ce qui est contradictoire.

b) Λ_h est compact, puisque h est critique, et il n'existe donc qu'*un nombre fini de mesures* η_φ *distinctes.*

Pour $\varphi, \psi \in \Lambda$, on a vu $\psi\eta_\varphi = \varphi\eta_\psi$, c'est-à-dire que η_φ et η_ψ ont la même partie dans $\varphi^{\mathrm{M}} \cap \psi^{\mathrm{M}}$. *On va construire une mesure idempotente* η *telle que, pour tout* $\varphi \in \Lambda_h$, $\eta_\varphi = \varphi\eta$.

Soit, pour $\psi \in \Lambda_h$, ϵ_ψ la partie élémentaire

$$\epsilon_\psi = \prod_{\theta\eta_\psi \neq \eta_\psi} (\psi - \theta)\ \eta_\psi\ .$$

Avec les notations de 2.5, c'est la partie élémentaire de η_ψ associée à l'élément 1 de $\overline{\Gamma}_+(\eta_\psi)$. Mais si $\varphi \in \Lambda_h$ et $\psi\eta_\varphi = \eta_\psi$, ϵ_ψ est aussi la partie élémentaire de η_φ associée à ψ, avec alors $\varphi\epsilon_\psi = \epsilon_\psi$;

Par contre, si $\eta_\psi \neq \psi\eta_\varphi = \varphi\eta_\psi$, la projection de φ dans $\overline{\Gamma}_+(\eta_\psi)$ est strictement inférieure à 1, et $\varphi\epsilon_\psi = 0$.

Pour $\varphi \in \Lambda_h$, toutes les parties élémentaires de η_φ sont de la forme ϵ_ψ pour un $\psi \in \Lambda_h$; on a en tout un nombre fini de mesures ϵ_ψ distinctes ; soient $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ ces mesures et $\eta' \doteq \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} \epsilon_j$; pour tout $\varphi \in \Lambda_h$,

$$\eta_\varphi = \sum_{\varphi\epsilon_j = \epsilon_j} \epsilon_j = \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} \varphi\epsilon_j = \varphi\eta'\ .$$

η' est une mesure dont la transformée de Fourier-Stieltjes a ses valeurs entières ; on peut la remplacer par la mesure idempotente η telle que $\hat{\eta}^{-1}(0) = \hat{\eta}'^{-1}(0)$, donc $\hat{\eta}(\chi) \sim \hat{\eta}'(\chi)$ pour tout $\chi \in \overline{\Gamma}$, et

$$\hat{\mu}(\varphi\gamma) \sim \hat{\eta}_\varphi(\gamma) \sim \hat{\eta}'(\varphi\gamma) \sim \hat{\eta}(\varphi\gamma)$$

pour tout $\varphi \in \Lambda_h$ et tout $\gamma \in \Gamma$.

c) Soit $\qquad \Phi = \{\chi \in h\overline{\Gamma}\ ;\ \hat{\mu}(\chi) \not\sim \hat{\eta}(\chi)\}$;

C'est un ensemble compact ouvert dans $h\overline{\Gamma}$.

Si $\chi \in h\overline{\Gamma}$ et $|\chi| < h$, $|\chi|^2$ appartient à Λ_h ; donc

$$\hat{\mu}(|\chi|^2\gamma) \sim \hat{\eta}(|\chi|^2\gamma)$$

pour tout $\gamma \in \Gamma$, et d'après le lemme 2 $\hat{\mu}(\chi) \sim \hat{\eta}(\chi)$.

Donc Φ est inclus dans $\Gamma_h = \{\chi \in \Gamma \ ; \ |\chi| = h\}$.

D'après le théorème 2, si G_h est le groupe dual de Γ_h, $M(G_h)$ se plonge dans M de façon que la transformée de Fourier-Stieltjes (sur Γ_h) d'une mesure $\nu \in M(G_h)$ coïncide avec la restriction de $\hat{\nu}$ à $\Gamma_h \subset \Delta$.

Soit alors ϵ_h la mesure élémentaire dans $L^1(G_h)$ telle que pour tout $\gamma \in \Gamma_h$

$$\hat{\epsilon}_h(\gamma) = \begin{cases} 0 & \text{si } \gamma \notin \Phi \ , \\ 1 & \text{si } \gamma \in \Phi \quad \text{et} \quad \hat{\eta}(\gamma) = 0 \ , \\ -1 & \text{si } \gamma \in \Phi \quad \text{et} \quad \hat{\eta}(\gamma) = 1 \ . \end{cases}$$

$\eta_h = \eta + \epsilon_h$ est une mesure idempotente telle que, pour tout $\gamma \in \Gamma$,

$$\hat{\mu}(h\gamma) \sim \hat{\eta}_h(h\gamma) \ .$$

Donc h appartient à Λ .

4.3. a) Λ *est fortement ouvert et fermé dans* $\overline{\Gamma}_+$.

Soit (φ_α) une suite généralisée dans $\overline{\Gamma}_+$ convergeant fortement vers $\varphi \in \overline{\Gamma}_+$; pour un réel $\epsilon > 0$, on a pour α assez grand $\|\varphi_\alpha\mu - \varphi\mu\| < \epsilon$, donc pour tout $\gamma \in \Gamma$, $|\hat{\mu}(\varphi_\alpha\gamma) - \hat{\mu}(\varphi\gamma)| < \epsilon$. Ceci implique que pour α assez grand

$$\hat{\mu}(\varphi_\alpha\gamma) \sim \hat{\mu}(\varphi\gamma) \qquad \text{pour tout} \quad \gamma \in \Gamma \ .$$

– Si $\varphi \in \Lambda$, on a aussi $\varphi_\alpha\eta_\varphi = \varphi\eta_\varphi = \eta_\varphi$ pour α assez grand, et $\hat{\mu}(\varphi_\alpha\gamma) \sim \hat{\eta}_\varphi(\gamma)$ pour tout $\gamma \in \Gamma$, donc $\varphi_\alpha \in \Lambda$.

– Si $\varphi_\alpha \in \Lambda$, $\hat{\eta}_{\varphi_\alpha}^{-1}(0) = (\varphi_\alpha\mu)^{\wedge -1}(0)$ est stationnaire, η_{φ_α} est une mesure idempotente fixe η pour α assez grand, avec $\varphi_\alpha\eta = \eta$ donc $\varphi\eta = \eta$, et, pour tout $\gamma \in \Gamma$, $\hat{\mu}(\varphi\gamma) \sim \hat{\mu}(\varphi_\alpha\gamma) \sim \hat{\eta}(\gamma)$; donc $\varphi \in \Lambda$.

b) Si Λ n'est pas $\overline{\Gamma}_+$ tout entier, il existe un élément minimal φ dans l'ensemble fortement fermé $\overline{\Gamma}_+ \setminus \Lambda$. Si φ est un idempotent, il est critique dans $\overline{\Gamma}$ puisque Λ est aussi fortement fermé : d'après le lemme 3, $\varphi \in \Lambda$, ce qui est absurde.

Si φ n'est pas un idempotent, $\varphi^2 < \varphi$, donc $\varphi^2 \in \Lambda$, et il existe une mesure idempotente η telle que pour tout $\gamma \in \Gamma$

$$\hat{\mu}(\varphi^2 \gamma) \sim \hat{\eta}(\varphi^2 \gamma) .$$

On peut appliquer le lemme 2, pour $\alpha \in \Gamma$, à $\chi = \varphi\alpha, |\chi|^2 = \varphi^2$; on trouve encore $\hat{\mu}(\varphi\alpha) \sim \hat{\eta}(\varphi\alpha)$ pour tout $\alpha \in \Gamma$, et donc $\varphi \in \Lambda$.

Λ est donc $\overline{\Gamma}_+$ tout entier, en particulier $1 \in \Lambda$, et il existe une mesure idempotente η telle que

$$\hat{\mu}^{-1}(0) = \hat{\eta}^{-1}(0) ,$$

ce qui, d'après 1.1, achève la démonstration du théorème 1.

5. Généralisation à une suite finie de mesures.

5.1. On obtient pour les idéaux $\sum\limits_{1 \leq i \leq m} (\mu_i * L^1)$ ou $\sum\limits_{1 \leq i \leq m} (\mu_i * M)$ fermés une caractérisation analogue à celle des idéaux fermés définis par une mesure.

PROPOSITION 6. – *Soient* $\mu_1, \ldots, \mu_m \in M$, $\mu = \sum\limits_{1 \leq i \leq m} \mu_i * \widetilde{\mu}_i$,

$$I = \sum_{1 \leq i \leq m} (\mu_i * L^1) \quad et \quad J = \sum_{1 \leq i \leq m} (\mu_i * M) .$$

I *est fermé si et seulement si* J *est fermé ; alors*

a) *il existe un réel* $\epsilon > 0$ *tel que* $\hat{\mu}(\gamma) \geq \epsilon$ *pour tout* $\gamma \in \Gamma$ *tel que* $\hat{\mu}(\gamma) \neq 0$;

b) I *est l'idéal des fonctions de* L^1 *dont la transformée de Fourier s'annule sur* $\hat{\mu}^{-1}(0)$;

c) J *est l'idéal des mesures de* M *dont la transformée de Fourier-Stieltjes s'annule sur* $\hat{\mu}^{-1}(0)$.

Ces propriétés ne sont pas intégralement énoncées par I. Glicksberg [4], mais la démonstration ne présente aucune difficulté supplémentaire par rapport au cas d'une seule mesure.

$\hat{\mu}^{-1}(0) = \bigcap_{1 \leqslant i \leqslant m} \hat{\mu}_i^{-1}(0)$ est l'ensemble des $\gamma \in \Gamma$ tels que $\hat{f}(\gamma) = 0$ pour tout $f \in$ I. I. Glicksberg [4, § 4, p. 424] remarque que si I est fermé, il existe un $\epsilon > 0$ tel que $\Sigma |\hat{\mu}_i(\gamma)| \geqslant \epsilon$ en dehors de cet ensemble.

En particulier, $\hat{\mu}^{-1}(0)$ est ouvert si I est fermé, et I contient alors toutes les fonctions de L^1 dont la transformée de Fourier s'annule sur $\hat{\mu}^{-1}(0)$.

Dans ce cas, si $\nu \in M$ et $\hat{\nu}(\gamma) = 0$ sur $\hat{\mu}^{-1}(0)$, $\nu * L^1$ est inclus dans I, et, d'après le théorème 1.6 de [4], $\nu \in \Sigma(\mu_i * M)$; J contient toutes les mesures dont la transformée de Fourier-Stieltjes s'annule sur $\hat{\mu}^{-1}(0)$, et il est alors fermé.

Inversement, si J est fermé, il existe (d'après le théorème de Banach) une constante A telle que, pour $\nu \in J$, il existe des mesures $\nu_1, \dots, \nu_m$ vérifiant

$$\nu = \Sigma \mu_i * \nu_i \quad \text{et} \quad \operatorname{Sup} \|\nu_i\| \leqslant A \|\nu\| .$$

Ceci est vrai en particulier si ν est une fonction $f = \Sigma f_i * \mu_i$ de I.

Soit alors (k_α) une approximation de l'unité de norme 1 dans L^1. $f_1, \dots, f_m$ appartenant à L^1,

$$f = \Sigma \mu_i * f_i = \Sigma \mu_i * \nu_i \ ,$$

$$f * k_\alpha = \Sigma \mu_i * f_i * k_\alpha = \Sigma \mu_i * \nu_i * k_\alpha \ ;$$

pour α assez grand, on a, pour $1 \leqslant i \leqslant m$, $\|f_i - f_i * k_\alpha\| \leqslant \|f\|$, et

$$g_i = (f_i - f_i * k_\alpha) + \nu_i * k_\alpha \in L^1 ,$$

$$\|g_i\| \leqslant (A + 1) \|f\| ,$$

$$f = \Sigma \mu_i * g_i .$$

L'application $(f_1, \dots, f_m) \longrightarrow \Sigma \mu_i * f_i$ est donc ouverte sur son image, ce qui montre que I est fermé.

5.2. THEOREME 3. – *Soient* $\mu_1, \dots, \mu_m \in M$; *si* $I = \sum_{1 \leqslant i \leqslant m} (\mu_i * L^1)$ *est fermé, ou si* $J = \sum_{1 \leqslant i \leqslant m} (\mu_i * M)$ *est fermé, il existe une mesure idempotente* η *de* M *telle que* $I = \eta * L^1$ *et* $J = \eta * M$.

On considère toujours $\mu = \Sigma \mu_i * \widetilde{\mu}_i$. Il est clair, d'après la proposition 6 (b et c), qu'il suffit de trouver une mesure idempotente η telle que $\hat{\mu}^{-1}(0) = \hat{\eta}^{-1}(0)$.

Il existe un réel $\epsilon > 0$ tel que $|\hat{\mu}(\gamma)| \geqslant \epsilon$ si $\hat{\mu}(\gamma) \neq 0$, et toute la démonstration ne dépend que de cette propriété et du lemme 1 : *il suffit de vérifier que le lemme 1 reste vrai pour cette mesure* μ.

On considère la suite (γ_n), le caractère idempotent h de Δ, et les mesures ω_n construits dans la démonstration du lemme 1.

Soit $\nu = \Sigma |\mu_i|$; on peut supposer que γ_n converge faiblement dans $\overline{\Gamma}(\nu)$ vers $f \in \overline{\Gamma}(\nu)$, et que, pour toute suite (p_n) telle que $n < p_n$, $\overline{\gamma}_n \gamma_{p_n}$ converge vers $|f|^2$ (de même qu'en b de la démonstration du lemme 1).

Alors $h_\nu \geqslant |f|^2$ et $h_\nu \gamma_n \longrightarrow h_\nu f = f$ dans $\Delta(\nu)$; donc, pour $1 \leqslant i \leqslant m$,

$$\lim \hat{\mu}_i(h\gamma_n) = \int f \, d\mu_i = \lim \hat{\mu}_i(\gamma_n) = 0 .$$

$\hat{\omega}_n$ est nul sur $\hat{\mu}^{-1}(0)$, donc $\omega_n \in \mathrm{J}$, et les mesures ω_n ayant toutes leur norme $\leqslant 3$, il doit exister des mesures $\lambda_{i,n}(1 \leqslant i \leqslant m,\ n \geqslant 1)$ de norme uniformément bornée par une constante A, telles que pour tout n

$$\omega_n = \sum_{1 \leqslant i \leqslant m} \mu_i * \lambda_{i,n} .$$

Alors

$$|\hat{\omega}_n(h\gamma_n)| \leqslant \mathrm{A} \sum_{1 \leqslant i \leqslant m} |\hat{\mu}_i(h\gamma_n)| \longrightarrow 0 .$$

On retrouve la contradiction obtenue à la fin de la démonstration du lemme 1, car les mesures ω_n sont construites pour vérifier $\hat{\omega}_n(h\gamma_n) = 1$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] G. Brown, Riesz products and generalized characters, *Proc. London Math. Soc.*, (3) 30 (1975), 209.

[2] C.F. Dunkl et D.E. Ramirez, Bounded projections on Fourier-Stieltjes transforms, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 31, n° 1 (1972), 122.

[3] C.F. DUNKL et D.E. RAMIREZ, Locally compact subgroups of the spectrum of the measure algebra,
I, *Semigroup Forum,* 3 (1971), 95,
II, *Semigroup Forum,* 3 (1971), 267.
III, *Semigroup Forum,* 5 (1972), 65.

[4] I, GLICKSBERG, When is $\mu * L^1$ closed ? *Trans. Amer. Math. Soc.,* 160 (1971), 419.

[5] I. GLICKSBERG, Fourier-Stieltjes transforms with an isolated value, Conference on harmonic analysis, Maryland (1971), *Lecture Notes in Math.,* n° 266, Springer-Verlag.

[6] W. RUDIN, Fourier analysis on groups, *Interscience tracts in Math.,* n° 12, Interscience, New-York (1962).

[7] J.L. TAYLOR, Measure algebras, *Regional conference series in Math.,* n° 16, Conference Board of the Mathematical Sciences (1973).

Manuscrit reçu le 28 juillet 1977
Proposé par J.P. Kahane.

B. HOST et F. PARREAU,
Département de Mathématiques
C.S.P., Université Paris-Nord
Avenue J.B. Clément
93 430 Villetaneuse.