

GILLES GODEFROY

**Espaces de Banach : existence et unicité
de certains préduaux**

Annales de l'institut Fourier, tome 28, n° 3 (1978), p. 87-105

http://www.numdam.org/item?id=AIF_1978__28_3_87_0

© Annales de l'institut Fourier, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

ESPACES DE BANACH : EXISTENCE ET UNICITÉ DE CERTAINS PRÉDUAUX

par Gilles GODEFROY

Soit E un espace de Banach. On dira dans ce travail qu'un espace de Banach X est un *préduale normique* de E si le dual X' de X , muni de la norme duale de celle de X , est isométrique à E .

Le but de ce travail est de donner pour certains espaces, une condition nécessaire et suffisante d'existence d'un préduale normique ; puis de montrer, pour de vastes catégories d'espaces duaux, l'unicité du préduale normique ; enfin, de tirer de ces résultats certaines conséquences sur la géométrie des espaces de Banach et des convexes compacts.

Il faut remarquer que l'on n'a pas, en toute généralité, de critère d'existence – ou de critère d'unicité – du préduale normique. Le théorème 4 donne un critère d'existence dans un cas particulier, où on a d'ailleurs unicité. Le lemme 7 est une condition suffisante d'unicité du préduale, qui joue un rôle essentiel dans ce travail.

Dans tout le travail, le terme "isométrie de E sur F " signifie : *bijection* linéaire isométrique entre E et F . De même, le terme "isométrie de E " signifie *bijection* linéaire isométrique de E sur E .

1. Existence d'un préduale normique.

Si E est un espace de Banach, on notera E' son dual et E'' son bidual ; ces espaces seront supposés munis des normes duales de celle de E . On notera i_E l'injection canonique d'un espace E dans son bidual E'' . On a la

PROPOSITION 1. — Soit E un espace de Banach. Soit

$$\mathcal{S}_E = \{F \text{ s.e.v. de } E'' \mid F \text{ est } \sigma(E'', E')\text{-fermé ; } i_E(E) \oplus F = E''\}.$$

On a l'équivalence :

- 1) Il existe un Banach X tel que X' soit isomorphe à E .
- 2) $\mathcal{S}_E \neq \emptyset$.

Démonstration.

$$1) \implies 2)$$

Soit φ un isomorphisme entre E et X' . L'espace $X_0 = {}^t\varphi(i_X(X))$ est un sous-espace fortement fermé et $\sigma(E', E)$ -dense de E' . On vérifie aisément que $E'' = i_E(E) \oplus X_0^\perp$, d'où $X_0^\perp \in \mathcal{S}_E$; par conséquent $\mathcal{S}_E \neq \emptyset$.

$$2) \implies 1)$$

Soit $F \in \mathcal{S}_E$. Soit G le s.e.v. de E' tel que $G^\perp = F$. L'espace G' est isomorphe à $E''/G^\perp = E''/F$, donc à E . C.Q.F.D.

Nous allons à présent donner une estimation "géométrique" de la distance qui sépare un espace de Banach E donné de l'ensemble des espaces de Banach duaux — en précisant le sens à donner à cette expression —. Si X et Y sont deux espaces de Banach, on appelle "distance de X à Y " le nombre

$$d(X, Y) = \inf \{ \|\varphi\| \cdot \|\varphi^{-1}\| \mid \varphi \text{ isomorphisme entre } X \text{ et } Y \}.$$

Si les deux espaces ne sont pas isomorphes, la distance est $+\infty$.

Si E est un Banach, soit

$$\mathcal{P}_E = \{X \text{ Banach} \mid \exists Y \subseteq E' \text{ tel que } Y \text{ soit isomorphe à } X\}.$$

On pose

$$d(E, \mathcal{D}) = \inf_{X \in \mathcal{P}_E} d(E, X').$$

Le nombre $d(E, \mathcal{D})$ exprime la distance de E à l'ensemble des duaux ; en effet tout espace X tel que $d(E, X') < +\infty$ appartient à \mathcal{P}_E . On a évidemment

$$E \text{ est isomorphe à un dual} \iff d(E, \mathcal{D}) < +\infty.$$

On peut donner l'estimation suivante de $d(E, \mathcal{D})$.

PROPOSITION 2. — Soit E un Banach. Si $S \in \mathcal{S}_E$, soit S_1 l'orthogonal de S dans E' .

$$\text{Soit } \alpha(S) = \inf \left\{ \frac{1}{\epsilon} \mid B_\epsilon(E') \subseteq \overline{S_1 \cap B_1(E')^{\sigma(E',E)}} \right\}.$$

$$\text{On a } d(E, \mathcal{D}) = \inf \{ \alpha(S) \mid S \in \mathcal{S}_E \}$$

(ci-dessus comme par la suite, $B_\alpha(X)$ désigne la boule fermée de rayon α et de centre 0 dans l'espace de Banach X).

Démonstration. — Montrons tout d'abord que pour tout $S \in \mathcal{S}_E$, on a $k = d(E, \mathcal{D}) \leq \alpha(S)$.

Soit donc $S \in \mathcal{S}_E$. On considère l'application

$$\begin{aligned} \psi : E &\longrightarrow (S_1)' \\ x &\longrightarrow x|_{S_1}. \end{aligned}$$

L'application ψ est un isomorphisme entre E et $(S_1)'$. On a immédiatement $\|\psi\| = 1$; et le théorème de Hahn-Banach permet de voir aisément que

$$\|\psi^{-1}\| = \inf \left\{ \frac{1}{\epsilon} \mid B_\epsilon(E') \subseteq \overline{S_1 \cap B_1(E')^{\sigma(E',E)}} \right\}$$

$$\text{soit } \|\psi^{-1}\| = \alpha(S).$$

$$\text{Par conséquent } d(E, \mathcal{D}) \leq \|\psi\| \cdot \|\psi^{-1}\| \leq \alpha(S).$$

$$\text{D'où } d(E, \mathcal{D}) \leq \inf \{ \alpha(S) \mid S \in \mathcal{S}_E \}.$$

Inversement, soit $\epsilon > 0$. Il existe un Banach X tel que $d(E, X') < k + \epsilon$; soit $\varphi : E \rightarrow X'$ un isomorphisme tel que $\|\varphi\| \cdot \|\varphi^{-1}\| < k + \epsilon$. On peut supposer que $\|\varphi\| = 1$ et $\|\varphi^{-1}\| < k + \epsilon$.

Posons alors ${}^t\varphi(i_X(X)) = \phi(X)$. On a $\phi(X)^\perp \in \mathcal{S}_E$. De plus puisque $\|\varphi\| = 1$

$${}^t\varphi(i_X(B_1(X))) \subseteq B_1(\phi(X))$$

$$\text{et puisque } \|\varphi^{-1}\| < k + \epsilon, \forall x \in E, \frac{\|\varphi(x)\|}{\|x\|} > \frac{1}{k + \epsilon}.$$

Supposons que

$$\exists y_0 \in E' \text{ tel que } \|y_0\| < \frac{1}{k + \epsilon} \text{ et } y_0 \notin \overline{{}^t\varphi(i_X(B_1(X)))}^{\sigma(E', E)}.$$

On a alors

$$\exists x_0 \in E \text{ tel que } y_0(x_0) = 1 \text{ et } |y(x_0)| < 1 \quad \forall y \in \overline{{}^t\varphi(i_X(B_1(X)))}^{\sigma(E', E)},$$

d'où $\|x_0\| > k + \epsilon$ et $\|\varphi(x_0)\| < 1$

$$\text{d'où} \quad \frac{\|\varphi(x_0)\|}{\|x_0\|} < \frac{1}{k + \epsilon}$$

ce qui est absurde. On a donc $\overline{B_1(\Phi(X))}^{\sigma(E', E)} \supseteq \frac{B_1(E')}{k + \epsilon}$.

Il existe donc $S_0 = \Phi(X)^\perp$ dans \mathcal{S}_E tel que $\alpha(S_0) \leq k + \epsilon$.

Donc $\inf \{\alpha(S) \mid S \in \mathcal{S}_E\} \leq d(E, \mathcal{D})$ C.Q.F.D.

Remarques. — L'énoncé de la proposition 2 se comprend bien "géométriquement". L'espace E sera d'autant plus près d'être un dual qu'il existera des éléments de \mathcal{S}_E dont l'orthogonal "remplira bien" la boule unité de E' . Si E est isométrique à un dual X' , on a bien sûr $d(E, \mathcal{D}) = 1$ et $\alpha(\overline{{}^t\varphi(i_X(X))}^\perp) = 1$.

— Si $S \in \mathcal{S}_E$, l'espace S_1 est un sous-espace $\sigma(E', E)$ dense de E' , tel que

$$\exists \epsilon > 0 \text{ tel que } B_\epsilon(E') \subseteq \overline{S_1 \cap B_1(E')}^{\sigma(E', E)}$$

Il s'agit là d'un cas particulier ; on peut trouver des sous-espaces X de E' , $\sigma(E', E)$ denses dans E' , et tel que $\overline{X \cap B_1(E')}^{\sigma(E', E)}$ ne contienne aucune boule.

Exemple. — Soit $E = C_0(\mathbf{N})$, $E' = \ell^1(\mathbf{N})$. Soit $\mathbf{N} = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} X_n$ une partition de \mathbf{N} en ensembles infinis. Soit $\{x_k^n\}_{k \in \mathbf{N}}$ dans $\ell^\infty(\mathbf{N})$ définis par

$$\begin{cases} x_k^n = 0 & \text{si } k \notin X_n \\ x_{k_0}^n = n & \text{si } k_0 = \inf(X_n) \\ x_k^n = 1 & \text{si } k \in X_n, k \neq k_0. \end{cases}$$

Soit $X = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \text{Ker } f_n$. On vérifie aisément que X est $\sigma(\mathcal{L}^1, c_0)$ -dense dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{N})$, mais que $\overline{X \cap B_1(\mathcal{L}^1)}^{\sigma(\mathcal{L}^1, c_0)}$ ne contient aucune boule. Poursuivons par l'étude d'un type particulier d'espace.

LEMME 3. — Soit E un espace de Banach tel que E' ait la propriété de Radon-Nikodym. Soit

$$\mathcal{R}_E = \{f \in E'' \mid \text{ker } f \cap B_1(E') \text{ est } \sigma(E', E)\text{-dense dans } B_1(E')\}.$$

Alors \mathcal{R}_E est un s.e.v. $\sigma(E'', E')$ fermé de E'' .

Démonstration. — Rappelons qu'un point g_0 de $B_1(E')$ est dit "faiblement fortement exposé" dans $B_1(E')$ s'il existe $x_0 \in E$ tel que $y_0(x_0) = 1$, $\text{diam} \{y \in B_1(E') \mid y(x_0) > 1 - \eta\} \rightarrow 0$ quand $\eta \rightarrow 0$.

Si un dual E' a la propriété de Radon-Nikodym, alors $B_1(E')$ est l'enveloppe convexe $\sigma(E', E)$ -fermée de ses points faiblement fortement exposés. On a alors

$$(*) f \in \mathcal{R}_E \iff \forall y \text{ faiblement fortement exposé dans } B_1(E'), f(y) = 0.$$

En effet, l'implication \Leftarrow provient du résultat ci-dessus. Inversement si $f \in \mathcal{R}_E$, il existe, pour tout y , (x_α) dans $B_1(E')$ tels que

$$f(x_\alpha) = 0 \quad \forall \alpha, x_\alpha \xrightarrow{\mathcal{F}} y \text{ pour } \sigma(E', E).$$

Si y est faiblement fortement exposé, on a $\|x_\alpha - y\| \xrightarrow{\mathcal{F}} 0$, et donc $f(y) = 0$ puisque $\text{Ker } f$ est fortement fermé. D'où l'équivalence (*).

L'équivalence (*) montre alors que \mathcal{R}_E est un espace vectoriel, et qu'il est de plus $\sigma(E'', E')$ fermé. C.Q.F.D.

On peut à présent énoncer avec les mêmes notations.

THEOREME 4. — Soit E un Banach tel que E' ait la propriété de Radon-Nikodym. On a l'équivalence

- 1) E isométrique au dual d'un espace de Banach
- 2) $E'' = i_E(E) \oplus \mathcal{R}_E$.

Démonstration.

1) \implies 2)

Soit X un Banach tel que X' soit isométrique à E . Soit $\varphi : E \rightarrow X'$ une isométrie. Soit $\mathfrak{K} = {}^t\varphi(i_X(X))$. On a

$$\left. \begin{array}{l} E'' = i_E(E) \oplus \mathfrak{K}^\perp \\ R_E \supseteq \mathfrak{K}^\perp \\ R_E \cap i_E(E) = \{0\} \\ R_E \text{ est un espace vectoriel} \end{array} \right\} \implies R_E = \mathfrak{K}^\perp$$

2) \implies 1)

D'après le lemme 3, on a $R_E \in \mathcal{S}_E$; de plus $\alpha(R_E) = 1$; en effet $(R_E)_\perp \cap B_1(E')$ contient tous les points faiblement fortement exposés et par conséquent $\overline{(R_E)_\perp \cap B_1(E')^{\sigma(E',E)}} = B_1(E')$. D'après la proposition 2, E est isométrique au dual d'un Banach — on vérifie en fait aisément que E est isométrique au dual de $(R_E)_\perp$. C.Q.F.D.

La démonstration du théorème 4 montre implicitement que le préduel normique de E — à savoir $(R_E)_\perp$ — est, si il existe, unique à une isométrie près. C'est cette propriété que nous allons étudier en détail dans la deuxième partie.

2. Unicité du préduel normique.

Commençons par une définition.

DEFINITION 5. — Soit E un espace de Banach. On dira que E est unique préduel normique de E' si pour tout Banach F tel que F' soit isométrique à E' , et toute isométrie I de E' sur F' on a

$${}^tI(i_F(F)) = i_E(E).$$

On a immédiatement

PROPOSITION 6. — Si E est unique préduel normique de E' , alors tout Banach F tel que F' soit isométrique à E' est isométrique à E .

En effet l'application $\mathfrak{S} = i_E^{-1} \circ {}^t I \circ i_F$ est une isométrie de F dans E .

Remarques. — Je n'ai pas d'exemple de Banach E vérifiant la conclusion de la proposition 6, et qui ne soit pas unique préduel normique de E' au sens de la définition 5.

— Il convient de remarquer qu'on n'a pas E unique préduel normique de $E' \implies$ si F' est isomorphe à E' , alors F est isomorphe à E . Nous verrons des exemples par la suite.

Démontrons à présent une série de lemmes utiles pour la suite.

LEMME 7. — Soit E un espace de Banach. Soit

$$R'_E = \{f \in E^{(3)} \mid \text{Ker } f \cap B_1(E'') \text{ est } \sigma(E'', E')\text{-dense dans } B_1(E'')\}.$$

Si R'_E est un espace vectoriel, E est l'unique préduel normique de E' ($E^{(3)}$ désigne le tridual de E).

Démonstration. — On a $i_E(E)^\perp \subseteq R'_E$. De plus, on a $E^{(3)} = i_{E'}(E') \oplus i_E(E)^\perp$ et $i_{E'}(E') \cap R'_E = \{0\}$. Si R'_E est un espace vectoriel, ceci implique que $i_E(E)^\perp = R'_E$, donc que $i_E(E) = (R'_E)_\perp$ (orthogonal de R'_E dans E'').

Soit maintenant I une isométrie entre E' et un dual F' . On voit aisément que $({}^t I(i_F(F)))^\perp \subseteq R'_E$, et que $E^{(3)} = i_{E'}(E') \oplus ({}^t I(i_F(F)))^\perp$. On a donc $({}^t I(i_F(F)))^\perp = R'_E$, d'où ${}^t I(i_F(F)) = (R'_E)_\perp = i_E(E)$.

C.Q.F.D.

LEMME 8. — Soit E un espace de Banach. Supposons qu'il existe un sous-ensemble A de $B_1(E'')$, $\sigma(E'', E')$ -dense, tel que pour tout sous-ensemble convexe X de $B_1(E'')$: $X \subset B_1(E'')$ fortement fermé, $\sigma(E'', E')$ -dense dans $B_1(E'')$ $\implies X \supseteq A$. Alors E est unique préduel normique de E' .

Démonstration. — Soit f et g dans R'_E . On a

$$\text{Ker}(\lambda f + \mu g) \cap B_1(E'') \supseteq \text{Ker } f \cap \text{Ker } g \cap B_1(E'').$$

Or $\text{Ker } f \cap B_1(E'')$ est fortement fermé et $\sigma(E'', E')$ -dense dans $B_1(E'')$; d'où $\text{Ker } f \cap B_1(E'') \supseteq A$.

De même $\text{Ker } g \cap B_1(E'') \supseteq A$, donc

$$\text{Ker}(\lambda f + \mu g) \cap B_1(E'') \supseteq A,$$

et comme A est $\sigma(E'', E')$ -dense dans $B_1(E'')$, on a $\lambda f + \mu g \in R'_E$. L'ensemble R'_E est donc un espace vectoriel, et le lemme 7 termine la démonstration.

C.Q.F.D.

LEMME 9. — Soit E un espace de Banach. Soit \mathcal{C} l'ensemble des points de continuité de l'application identité de $(B_1(E''), \sigma(E'', E'))$ dans $(B_1(E''), \|\cdot\|)$. Si $\text{conv}(\mathcal{C})$ est $\sigma(E'', E')$ -dense dans $B_1(E'')$, l'espace E est unique préduel normique de E' .

Démonstration. — Soit $x \in \mathcal{C}$. Soit X un sous-ensemble convexe et $\sigma(E'', E')$ dense de $B_1(E'')$. Il existe (x_α) dans X tels que $x_\alpha \xrightarrow{\mathfrak{S}} x$ pour $\sigma(E'', E')$; et puisque $x \in \mathcal{C}$, on a $\|x_\alpha - x\| \xrightarrow{\mathfrak{S}} 0$. Si X est fortement fermé, on a donc $x \in X$; d'où $X \supseteq \mathcal{C}$. Enfin, $\text{conv}(\mathcal{C}) \subseteq X$ car X est convexe. L'ensemble $A = \text{conv}(\mathcal{C})$ vérifie donc, s'il est dense, les hypothèses du lemme 8; d'où le résultat. C.Q.F.D.

On peut à présent aborder le résultat essentiel.

THEOREME 10. — Dans chacun des cas suivants, E est unique préduel normique de son dual.

- 1) E' ne contient pas de sous-espace isomorphe à $\ell^1(\mathbf{N})$.
- 2) E a la propriété de Radon-Nikodym.
- 3) E est localement uniformément convexe.
- 4) E est séparable et $(B_1(E), \sigma(E, E'))$ est un espace de Baire.

Démonstration.

1) D'après la caractérisation de Rosenthal des espaces qui ne contiennent pas $\ell^1(\mathbf{N})$, on a (voir [1]) $E' \not\supset \ell^1(\mathbf{N}) \implies$ Pour toute $f \in E^{(3)}$ l'ensemble des points de continuité de

$$f : B_1(E''), \sigma(E'', E') \longrightarrow \mathbf{R}$$

est un \mathcal{G}_δ dense de $B_1(E''), \sigma(E'', E')$:

Soit alors $f \in R'_E$. On a

$$f \in R'_E \implies f(x_0) = 0 \text{ en tout point } x_0 \text{ de continuité}$$

$$\implies f \text{ est nulle sur un } \mathcal{G}_\delta \text{ dense de } B_1(E''), \sigma(E'', E') :$$

Si $f, g \in R'_E$, $\text{Ker}(\lambda f + \mu g) \supseteq \text{Ker } f \cap \text{Ker } g$.

Comme l'intersection de deux \mathcal{G}_δ -denses est dense, on a $\lambda f + \mu g \in R'_E$. Le lemme 7 termine la démonstration.

2) Rappelons qu'un point x_0 de $B_1(E)$ est dit "fortement exposé" si :

$$\exists y \in E' \text{ tel que : } y(x_0) = 1 ; \text{ diam } \{x \in B_1(E) \mid y(x) > 1 - \eta\} \longrightarrow 0$$

quand $\eta \longrightarrow 0$

Soit alors x_0 fortement exposé dans $B_1(E)$. Soit $\epsilon > 0$.

$$\exists \eta \text{ tel que } \{x \in B_1(E) \mid y(x) > 1 - \eta\} \subseteq (x_0 + B_\epsilon(E)) \cap B_1(E).$$

Soit alors $\Omega = \{x'' \in B_1(E'') \mid x''(y) > 1 - \eta\}$

On a : $\Omega \subseteq \overline{i_E(\{x \in B_1(E) \mid y(x) > 1 - \eta\})}$

l'adhérence étant prise par la topologie $\sigma(E'', E')$. Et par conséquent

$$\Omega \subseteq \overline{i_E((x_0 + B_\epsilon(E)) \cap B_1(E))}$$

soit $\Omega \subseteq (i_E(x_0) + B_\epsilon(E'')) \cap B_1(E'')$.

Ceci montre que $i_E(x_0)$ est un point de continuité de l'application $Id : (B_1(E''), \sigma(E'', E')) \longrightarrow (B_1(E'), \|\cdot\|)$.

Si E a la propriété de Radon-Nikodym, la boule unité $B_1(E)$ de E est l'enveloppe convexe fortement fermée de ses points fortement exposés ; soit $\mathfrak{F} \mathfrak{E}(E)$ l'ensemble des points fortement exposés de $B_1(E)$. On a donc $B_1(E) = \text{conv}(\mathfrak{F} \mathfrak{E}(E))$. Par conséquent l'ensemble $\text{conv}(i_E(\mathfrak{F} \mathfrak{E}(E)))$ est dense dans $(B_1(E''), \sigma(E'', E'))$. Mais d'après ce qui précède, on a, avec les notations du lemme 9

$$\text{Conv}(i_E(\mathfrak{F} \mathfrak{E}(E))) \subseteq \text{conv}(\mathcal{C})$$

le lemme 9 termine la démonstration.

3) Si E est localement uniformément convexe, on a

$$\forall x \in E, \|x\| = 1 ; x_\alpha \in B_1(E), x_\alpha \xrightarrow{\mathfrak{F}} x \text{ pour } \sigma(E, E') \implies \|x_\alpha - x\| \xrightarrow{\mathfrak{F}} 0.$$

Une méthode analogue à la méthode employée dans la démonstration de 2) montre alors que $\forall x \in E, \|x\| = 1 ; x_\alpha \in B_1(E''), x_\alpha \xrightarrow{\mathfrak{F}} i_E(x)$ pour $\sigma(E'', E') \implies \|x_\alpha - x\| \xrightarrow{\mathfrak{F}} 0$ ce qui montre que pour tout $x \in E$ de norme 1, le point $i_E(x)$ appartient à \mathcal{C} . On peut donc, là encore, appliquer le lemme 9.

4) Considérons l'application

$$Id^* : (B_1(E), \sigma(E, E')) \longrightarrow (B_1(E), \|\cdot\|).$$

Soit $\epsilon > 0$. Soit A_ϵ la réunion des ouverts de la topologie $\sigma(E, E')$ de diamètre inférieur ou égal à ϵ . Soit $S = \left\{ x \mid \|x\| \leq \frac{\epsilon}{2} \right\}$. Puisque E est séparable, il existe $\{x_n\}$ dans $B_1(E)$ tels que

$$B_1(E) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (x_n + S) \cap B_1(E).$$

Les ensembles $(x_n + S) \cap B_1(E)$ sont fermés pour $\sigma(E, E')$. On a, puisque $B_1(E)$ est un espace de Baire pour $\sigma(E, E')$,

$O_\epsilon = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overbrace{(x_n + S) \cap B_1(E)}^{\circ}$ dense dans $B_1(E)$. Or on a $O_\epsilon \subseteq A_\epsilon$; ce qui montre que A_ϵ est un ouvert $\sigma(E, E')$ dense de $B_1(E)$. Soit $\Omega = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_{\frac{1}{n}}$. L'ensemble Ω est dense dans $(B_1(E), \sigma(E, E'))$; or Ω est précisément l'ensemble des points de continuité de l'application Id^* . Considérons alors l'application

$$Id : B_1(E''), \sigma(E'', E') \longrightarrow (B_1(E''), \|\cdot\|).$$

La méthode habituelle — cf. démonstration de 2) — permet de montrer que si $x \in \Omega$, $i_E(x)$ est un point de continuité de Id . Or, $i_E(\Omega)$ est $\sigma(E'', E')$ dense dans $B_1(E'')$; le lemme 9 termine la démonstration. C.Q.F.D.

On peut déduire du résultat précédent le

THEOREME 11. — *Soit E un espace de Banach qui vérifie l'une des hypothèses suivantes*

- 1) E ne contient pas de sous-espace isomorphe à $\mathcal{Q}^1(\mathbb{N})$
- 2) E' a la propriété de Radon-Nikodym
- 3) E' est localement uniformément convexe.

Alors si E a un préduel normique X , l'espace X est unique préduel normique de E .

Démonstration. — L'assertion 1) est une ré-écriture de l'assertion 1) du théorème 10. Les assertions 2) et 3) proviennent des assertions 2) et 3) et du fait que les propriétés "Radon-Nikodym" ou "être localement uniformément convexe" sont héréditaires.

Dans le cas “ E' a la propriété de Radon-Nikodym”, le résultat s'obtient également à partir du lemme 3. C.Q.F.D.

Exemples. – Si E est un sous-espace d'un dual WCG, alors E a la propriété de Radon-Nikodym ; donc E est unique préduel normique de E' . C'est le cas, par exemple, de tout dual séparable – ou de tout sous-espace d'un dual séparable.

Si E est tel que E'' soit WCG, alors E est unique préduel normique de E' . Deux méthodes :

a) E'' a la propriété de Radon-Nikodym, donc E aussi.

b) Si E'' est WCG, alors $E'' \not\cong \ell^1(\Gamma)$ pour Γ non dénombrable, et alors $E' \not\cong \ell^1(\mathbf{N})$.

– Si E est séparable et si $i_E(E)$ est un \mathcal{G}_δ de $(E'', \sigma(E'', E'))$, alors $(B_1(E), \sigma(E, E'))$ est un espace de Baire ; par conséquent E est unique préduel normique de E' . De même, si E est localement uniformément convexe alors $(B_1(E), \sigma(E, E'))$ est un espace de Baire ; l'assertion 3) du théorème 10, est – dans le cas séparable – une conséquence de l'assertion 4).

– Dans le cas où $E = \ell^1(\Gamma)$, ou bien E'' séparable, on peut donner des démonstrations directes très simples du fait que E est unique préduel normique de E' (voir fin du travail).

– Si $(B_1(E), \sigma(E, E'))$ est un espace polonais, alors E est l'unique préduel normique de E' ; ceci se produira chaque fois que E'' sera séparable ; cette condition n'est cependant pas nécessaire.

– Des méthodes tout à fait différentes – algèbres de Von Neumann – permettent de montrer qu'un espace $L^1(\mu)$ est toujours unique préduel de $L^\infty(\mu)$. Les espaces $L^1(\mu)$ n'entrent dans aucune des catégories définies par le théorème 10. On vérifie aisément que si μ est une mesure diffuse, l'ensemble $R'_{L^1(\mu)}$ n'est pas un espace vectoriel.

– Voilà un exemple simple d'espace qui *n'est pas* unique préduel normique de son dual : Soit K un compact métrisable infini. Pour tout compact métrisable K' de même cardinal, on a $\mathcal{C}(K)'$ isométrique à $\mathcal{C}(K')$. Cependant, $\mathcal{C}(K)$ et $\mathcal{C}(K')$ ne sont pas isométriques dès que K et K' ne sont pas homéomorphes. Par conséquent, si K est un compact métrisable $\mathcal{C}(K)$ n'est jamais unique préduel normique de son dual.

3. Quelques conséquences : isométries – propriétés des convexes compacts.

Exprimons à présent les résultats précédents en termes d'isométries et de "géométrie" des convexes compacts.

THEOREME 12. – Soit E un espace de Banach, unique préduel normique de son dual E' . Soit F un espace de Banach tel qu'il existe une isométrie I de E' sur F' . Alors I est la transposée d'une isométrie de F sur E .

Démonstration. – Soit donc $I : E' \longrightarrow F'$ une isométrie. On a ${}^t I(i_F(F)) = i_E(E)$. L'application $\mathfrak{S} = i_E^{-1} \circ {}^t I \circ i_F$ est donc une isométrie de F sur E . Et on a $\forall y \in E', \forall x \in F$

$$({}^t \mathfrak{S}(y), x) = (y, \mathfrak{S}(x)) = ({}^t I(i_F(x)), y) = (i_F(x), I(y)) = (I(y), x)$$

par conséquent ${}^t \mathfrak{S} = I$.

C.Q.F.D.

On en déduit immédiatement le

COROLLAIRE 13. – Soit E un espace de Banach, unique préduel normique de E' . Alors toute isométrie de E' est la transposée d'une isométrie de E .

Le théorème suivant permet de mieux comprendre ces résultats.

THEOREME 14. – Soit E espace de Banach. Soit K la boule unité $B_1(E')$ de E' munie de la topologie $\sigma(E', E)$. On a l'équivalence

- 1) E est unique préduel normique de E' .
- 2) Toute bijection affine entre K et un convexe compact \mathcal{K} d'un e.l.c. (X, τ) est un homéomorphisme.

Démonstration.

$$1) \implies 2)$$

Soit \mathcal{K} convexe compact dans l'e.l.c. (X, τ) et $\varphi : K \longrightarrow \mathcal{K}$ une bijection affine. Le convexe K étant équilibré, le convexe \mathcal{K} l'est aussi ; on peut donc supposer que \mathcal{K} est un tonneau de X . Soit

$\mathcal{A}_0(\mathcal{X})$ l'espace des fonctions affines continues sur \mathcal{X} , nulles en 0. Si $j_{\mathcal{X}}$ est la jauge de \mathcal{X} , l'espace $(X, j_{\mathcal{X}})$ s'identifie au dual de $(\mathcal{A}_0(K), \|\cdot\|_{\infty})$ — par l'isométrie $\epsilon : X \longrightarrow \mathcal{A}_0(K)'$ définie par $\epsilon(x)(f) = j_{\mathcal{X}}(x)f\left(\frac{x}{j_{\mathcal{X}}(x)}\right)$.

Soit alors $\tilde{\varphi}$ le prolongement de φ en une isométrie de E' sur $(X, j_{\mathcal{X}})$. D'après le théorème 12, $\tilde{\varphi}$ est la transposée d'une isométrie de $\mathcal{A}_0(K)$ sur E . Or, la topologie $\mathcal{I}_{\mathcal{X}}$ induite sur \mathcal{X} par \mathcal{I} est la topologie $\sigma(X, \mathcal{A}_0(\mathcal{X}))$; l'application $\tilde{\varphi}$ étant continue de $(E', \sigma(E', E))$ dans $(X, \sigma(X, \mathcal{A}_0(\mathcal{X})))$, sa restriction φ à K est continue de K sur \mathcal{X} .

2) \implies 1)

Supposons que K vérifie 2). Soit F un Banach, et I une isométrie de E' sur F' . Soit φ la restriction de l'isométrie I à $B_1(E')$; c'est une bijection entre K et le convexe compact $\mathcal{X} = (B_1(F'), \sigma(F', F))$. La restriction de I à $B_1(E')$ est donc continue de $B_1(E'), \sigma(E', E)$ sur $B_1(F'), \sigma(F', F)$. Soit alors $y \in F$. On a

$$\forall x \in E', ({}^t I(i_F(y)), x) = (y, I(x)) = (y \circ I)(x)$$

ce qui montre que la restriction de ${}^t I(i_F(y))$ à $B_1(E')$ est continue (pour $\sigma(E', E)$); le théorème de Banach-Dieudonné montre alors que ${}^t I(i_F(y)) \in i_E(E)$. On a donc ${}^t I(i_F(F)) \subseteq i_E(E)$. Et si l'inclusion était stricte, il existerait $x_0 \in E' - \{0\}$ tel que

$$y \in F, ({}^t I(i_F(y)), x_0) = 0,$$

soit $(I(x_0), y) = 0 \quad \forall y \in F,$

ce qui est absurde car $I(x_0) \neq 0$. On a donc bien ${}^t I(i_F(F)) = i_E(E)$
C.Q.F.D.

Remarques. — L'implication 1) \implies 2) du théorème 14 peut s'exprimer ainsi : soit E un espace unique préduel normique de E' . Alors il n'y a qu'une seule topologie d'espace compact sur $B_1(E')$ qui soit induite par une topologie d'e.l.c. sur E' .

— Sans hypothèses sur E , on peut avoir des résultats tout à fait différents. Soit par exemple $E = \mathcal{C}([0, 1])$; on a

$$B_1(E') = B_1(\mathcal{M}([0, 1])).$$

Pour tout compact K métrisable non dénombrable, il existe une

topologie d'e.l.c. sur E' tel que $B_1(E')$ soit compact, et tel que l'ensemble $\text{Ext}(B_1(E'))$ des points extrémaux de $B_1(E')$ soit homéomorphe à $\{K\} \cup \{K\}$.

– Supposons que E soit unique préduel normique de son dual ainsi que ses sous-espaces – par exemple E.l.u.c, où E a la propriété de Radon-Nikodym – Soit \mathcal{K} un convexe compact dans un e.l.c., et $\varphi : K \rightarrow \mathcal{K}$ affine. – où $K = (B_1(E'), \sigma(E', E))$ – . On a alors φ continue $\iff \varphi(K)$ est fermé dans \mathcal{K} et $\varphi^{-1}(\varphi(0))$ est fermé dans K .

– Il est essentiel que, dans le théorème 14, le convexe \mathcal{K} soit *a priori* supposé compact ; comme on le voit en prenant $E = \ell^1(N)$, soit $K = [-1, +1]^N$, pour \mathcal{K} la boule unité de $\ell^\infty(N)$ muni de sa norme, et pour bijection φ l'identité.

L'implication 1) \implies 2) du théorème 14 peut encore s'énoncer sous la forme

THEOREME 15. – *Soit K un tonneau compact d'un e.l.c. Y qui vérifie l'une des hypothèses suivantes*

- 1) $(Y, j_{\mathcal{K}})$ ne contient pas de sous-espace isomorphe à $\ell^1(N)$.
- 2) $(\mathcal{A}_0(K), \|\cdot\|_\infty)$ a la propriété de Radon-Nikodym.
- 3) $(\mathcal{A}_0(K), \|\cdot\|_\infty)$ est localement uniformément convexe.

4) K est métrisable et la boule unité $B_1(\mathcal{A}_0(K))$ de $\mathcal{A}_0(K)$ est un espace de Baire – pour la topologie de la convergence simple sur K – Alors toute bijection affine entre K est un convexe compact \mathcal{K} d'un e.l.c. est un homéomorphisme.

Voyons maintenant ce qu'on obtient en itérant le théorème 12 :

PROPOSITION 16. – *Soit E un espace de Banach unique préduel normique de E' , et tel que E' soit unique préduel normique de E'' . Alors toute isométrie I de E'' est la bitransposée d'une isométrie de E , et on a $I(i_E(E)) = i_E(E)$.*

Démonstration. – Il suffit de remarquer que I est la bitransposée d'une isométrie de E – à savoir $i_E^{-1} \circ I \circ i_E$ – si et seulement si $I(i_E(E)) = i_E(E)$. C.Q.F.D.

On en déduit immédiatement

THEOREME 17. — Soit E un Banach tel que E'' soit séparable — ou tel que E'' ne contienne pas de sous-espace isomorphe à $\ell^1(N)$ — Alors toute isométrie de E'' est la bitransposée d'une isométrie de E .

Démonstration. — Si E'' est séparable, alors E' est séparable, donc E' a la propriété de Radon-Nikodym ; de plus E est isométrique à un sous-espace de E'' , donc E a aussi la propriété de Radon-Nikodym. Le théorème 10 montre qu'on peut appliquer la proposition 16.

Si E'' ne contient pas $\ell^1(N)$, alors E' ne contient pas $\ell^1(N)$. En effet $E' \supset \ell^1(N) \implies \ell^\infty(N)$ est quotient de E''

$$\implies \exists X \subseteq E'' \text{ tel que } \ell^1(N) \text{ soit quotient de } X$$

$$\implies \exists X \subseteq E'' \text{ tel que } X \supseteq \ell^1(N).$$

On termine alors par le théorème 10 et la proposition 16. C.Q.F.D.

On pourrait énoncer des résultats analogues au théorème 17 en itérant n fois — avec $n > 2$ — le théorème 12.

Terminons par des corollaires plus "géométriques".

COROLLAIRE 18. — Soit E un espace de Banach tel que E' et E'' aient la propriété de Radon-Nikodym. Soit $\text{Ext}(B_1(E''))$ l'ensemble des points extrémaux de $B_1(E'')$. Si les isométries de E'' agissent transitivement sur $\text{Ext}(B_1(E''))$, alors E est réflexif.

Démonstration. — Si I est une isométrie de E'' , d'après la proposition 16 on a $I(i_E(E)) = i_E(E)$. On a de plus

$$\text{Ext}(B_1(E'')) \cap i_E(E) \neq \emptyset.$$

En effet, E a la propriété de Radon-Nikodym, donc il existe x_0 fortement exposé dans $B_1(E)$; et alors $i_E(x_0)$ sera fortement exposé, donc extrémal, dans $B_1(E'')$. Si les isométries agissent transitivement sur $\text{Ext}(B_1(E''))$, on a alors $\text{Ext}(B_1(E'')) \subseteq i_E(E)$; et puisque E'' a la propriété de Radon-Nikodym, $B_1(E'')$ est l'enveloppe convexe fortement fermée de ses points extrémaux. Donc $i_E(E) = E''$. C.Q.F.D.

On en déduit immédiatement

COROLLAIRE 19. — Soit E un espace de Banach tel que E'' soit séparable. Soit $\text{Ext}(B_1(E''))$ l'ensemble des points extrémaux de $B_1(E'')$. Si les isométries de E'' agissent transitivement sur $\text{Ext}(B_1(E''))$, alors E est réflexif.

Exemples et démonstrations annexes.

1) $\mathcal{L}^1(\Gamma)$ est l'unique prédual de $\mathcal{L}^\infty(\Gamma)$.

Soit $\beta\Gamma$ le compactifié de Stone-Čech de Γ . On identifie $\mathcal{L}^\infty(\Gamma)$ à $\mathcal{C}(\beta\Gamma)$ et $\mathcal{L}^\infty(\Gamma)'$ à $\mathcal{M}(\beta\Gamma)$. Soit X un sous-espace de $\mathcal{L}^\infty(\Gamma)'$, tel que $B_1(X)$ soit $\sigma(\mathcal{L}^\infty(\Gamma)', \mathcal{L}^\infty(\Gamma))$ dense dans $B_1(\mathcal{L}^\infty(\Gamma)')$. On a $X \supset i(\mathcal{L}^1(\Gamma))$; en effet si K est compact et x isolé dans K , tout filtre de mesures de norme inférieure ou égale à 1, qui converge vaguement vers ϵ_x , converge en norme vers ϵ_x ; et $i(\mathcal{L}^1(\Gamma))$ est l'enveloppe convexe des $\pm \epsilon_x$, où x est isolé dans $\beta\Gamma$. Si I est une isométrie entre $\mathcal{L}^\infty(\Gamma)$ et F' , on a donc ${}^tI(i_F(F)) \supseteq i(\mathcal{L}^1(\Gamma))$, d'où ${}^tI(i_F(F)) = i(\mathcal{L}^1(\Gamma))$ – voir fin de la démonstration du théorème 14 –.

2) Si E'' est séparable, alors E est unique prédual normique de E' .

On voit aisément que si E'' est séparable, tout sous-espace de E'' est un \mathcal{G}_δ pour la topologie $\sigma(E'', E')$. Soit

$$\mathcal{L} = \{X \subseteq E'' \mid B_1(E'') \cap X \text{ est } \sigma(E'', E')\text{-dense dans } B_1(E'')\}.$$

L'espace $i_E(E)$ est minimal dans \mathcal{L} ; de même si I est une isométrie de E' sur F' , l'espace ${}^tI(i_F(F))$ est minimal dans \mathcal{L} ; mais \mathcal{L} a un seul élément minimal – car l'intersection de deux \mathcal{G}_δ -denses est dense – et donc $i_E(E) = {}^tI(i_F(F))$.

3) Stabilité des tonneaux $\sigma(\mathcal{L}^\infty, \mathcal{L}^1)$ -compacts de $\mathcal{L}^\infty(N)$.

Soit T un tonneau $\sigma(\mathcal{L}^\infty, \mathcal{L}^1)$ -compact de $\mathcal{L}^\infty(N)$. C'est la boule unité du dual de $\mathcal{L}^1(N)$ muni d'une norme équivalente à la norme usuelle. L'espace $\mathcal{L}^1(N)$ ayant la propriété de Radon-Nikodym, on peut en déduire : \mathcal{K} convexe compact, $\varphi : T \rightarrow \mathcal{K}$ -affine.

φ continue $\iff \varphi(K)$ fermé dans \mathcal{K} et $\varphi^{-1}(\varphi(0))$ fermé dans T .

En particulier toute bijection affine de T sur \mathcal{K} est continue.

On sait de plus que toute forme affine borélienne sur T est continue. Enfin, dans $\mathcal{L}^1(N)$, les sous-ensembles faiblement et fortement compacts coïncident; par conséquent les topologies $\mathfrak{C}(\mathcal{L}^\infty, \mathcal{L}^1)$ et $\sigma(\mathcal{L}^\infty, \mathcal{L}^1)$ coïncident sur T . On en déduit aisément que, si C est convexe dans un e.l.c. X , toute bijection affine borélienne φ de

T sur C est un homéomorphisme. Le théorème de Souslin-Lusin permet alors de montrer que si C est un convexe lusinien – c'est-à-dire borel-isomorphe à $[0,1]$ – et si ψ est une bijection continue affine de C sur T , alors ψ est un homéomorphisme.

Soit alors \mathfrak{C} une topologie sur T qui vérifie

$$\alpha) \text{ l'application } f : T \times T \times [0,1] \longrightarrow T \quad \text{est continue}$$

$$(x, y, \lambda) \longrightarrow \lambda x + (1 - \lambda) y$$

$\beta)$ tout point de T a une base de voisinages formée d'ouverts convexes.

On sait qu'alors il existe une topologie \mathfrak{C}_1 d'e.l.c. sur $\mathcal{L}^\infty(N)$ telle que la restriction de \mathfrak{C}_1 à T soit \mathfrak{C} (voir [2]).

Si l'une des hypothèses suivantes est vérifiée.

1) l'espace (T, \mathfrak{C}) est compact.

2) la tribu $\mathcal{B}(\mathfrak{C})$ des boréliens de \mathfrak{C} est contenue dans la tribu $\mathcal{B}(\sigma(\mathcal{L}^\infty, \mathcal{L}^1)_{|T})$ des boréliens de la topologie induite par $\sigma(\mathcal{L}^\infty, \mathcal{L}^1)$ sur T .

3) \mathfrak{C} est plus fine que $\sigma(\mathcal{L}^\infty, \mathcal{L}^1)_{|T}$ et $(T, \mathcal{B}(\mathfrak{C}))$ est borel-isomorphe à $[0,1]$.

Alors les topologies \mathfrak{C} et $\sigma(\mathcal{L}^\infty, \mathcal{L}^1)_{|T}$ coïncident.

On voit donc que la topologie $\sigma(\mathcal{L}^\infty, \mathcal{L}^1)_{|T}$ – c'est-à-dire la topologie induite par la topologie produit – est vraiment "canonique" et a de remarquables propriétés de stabilité. Remarquons enfin qu'on montre aisément que ces propriétés sont vérifiées par toute image affine continue d'un tel tonneau T .

4) Si E a la propriété de Radon-Nikodym toute isométrie de E' est la transposée d'une isométrie de E .

Remarquons que si E a la propriété de Radon-Nikodym, alors $i_E(E) \cap B_1(E'')$ est l'enveloppe convexe fortement fermée des points "faiblement fortement exposés" de $B_1(E'')$. Or, si I est une isométrie de E' , et si $y \in B_1(E'')$ est fortement exposé par $x \in E'$, alors ${}^t I(y)$ est fortement exposé par $I^{-1}(x) \in E'$. Ceci montre que ${}^t I(i_E(E)) \subseteq i_E(E)$, donc ${}^t I(i_E(E)) = i_E(E)$.

5) Un ensemble d'utilisation des topologies faibles.

Commençons par deux lemmes faciles.

LEMME A. — Soit E un Banach tel que E' soit séparable. Alors $(B_1(E), \sigma(E, E'))$ est un espace polonais.

Il est en effet, aisé, en utilisant $i_E(E)^\perp \subseteq E^{(3)}$, de faire apparaître $B_1(E)$ comme un \mathcal{G}_δ du compact métrisable $(B_1(E'), \sigma(E', E'))$.

LEMME B. — Soit E un Banach de dimension infinie. Supposons que $\text{Card}(\text{Ext}(B_1(E'))) = \aleph_0$. Alors $(B_1(E), \sigma(E, E'))$ est maigre.

En effet, on a $B_1(E) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_{1-\frac{1}{n}}(E) \cup S_1(E) \dots$ et $S_1(E) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x \mid x_n(x) = 1\}$, où $\{x_n\} = \text{Ext}(B_1(E'))$. Il est aisé de voir que $B_{1-\frac{1}{n}}(E)$ et $F_n = \{x \mid x_n(x) = 1\}$ sont des fermés d'intérieur vide de $B_1(E)$.

On en déduit alors

PROPOSITION C. — Soit E un Banach tel que

$$\text{Card}(\text{Ext}(B_1(E'))) = \aleph_0.$$

Alors tout sous-espace de dimension infinie de E a un bidual non séparable.

En effet, on voit aisément qu'un tel sous-espace vérifie les hypothèses du lemme B ; et d'après le lemme A, son bidual ne peut être séparable.

COROLLAIRE D. — Soit E un Banach tel que

$$\text{Card}(\text{Ext}(B_1(E'))) = \aleph_0.$$

Alors tout sous-espace réflexif de E est de dimension finie.

En effet, on voit aisément que E' est nécessairement séparable — par exemple avec la représentation intégrale des points de $B_1(E')$ — et donc que E est séparable.

Ce corollaire peut d'ailleurs être obtenu directement par des méthodes analogues.

Exemples d'application. — $E = c_0(\mathbb{N})$ ou $E =$ un préduel normique quelconque de $\mathcal{L}^1(\mathbb{N})$.

Remarquons enfin qu'il est aisé de déduire du fait que les topologies $\sigma(\mathcal{L}^1, c_0)$ et $\sigma(\mathcal{L}^1, \mathcal{L}^\infty)$ coïncident sur la sphère unité de $\mathcal{L}^1(\mathbb{N})$ le résultat — bien connu — suivant : l'espace $c_0(\mathbb{N})$ ne contient aucun dual de dimension infinie.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] E. ODELL and H.P. ROSENTHAL, A double dual characterization of separable Banach spaces containing ℓ^1 , *Israel J. of Math.*, 20 (1975), 375-384.
- [2] R.E. JAMISON, R.C. O'BRIEN et P.D. TAYLOR, On embedding a compact convex set into a locally convex space, *Queen's Mathematics Preprint* 1974-18, Queen's University, Kingston, Ontario, Canada.

Manuscrit reçu le 4 juillet 1977

Proposé par G. Choquet.

Gilles GODEFROY,
18, Villa du Danube
75019 Paris.