ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

MUSTAPHA RAIS

La représentation coadjointe du groupe affine

Annales de l'institut Fourier, tome 28, nº 1 (1978), p. 207-237
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1978__28_1_207_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
28, 1 (1978), 207-237

LA REPRÉSENTATION COADJOINTE DU GROUPE AFFINE

par Mustapha RAIS

1. Les groupes produits semi-directs $G_{n,p}$.

1.1. Dans la suite, K est un corps commutatif de caractéristique zéro et n et p sont des entiers $\geqslant 1$. Pour chaque x dans $GL(n,K)$, on désigne par m_x la multiplication à gauche par x dans l'espace vectoriel $M_{n,p}(K)$ constitué par les matrices à n lignes et p colonnes, à coefficients dans K. La fonction $x \longmapsto m_x$ est une représentation linéaire de $GL(n)$ dans $M_{n,p}$ (on n'écrira plus K dorénavant sauf si cela devient nécessaire). Soit $G_{n,p} = M_{n,p} \times GL(n)$ le produit semi-direct du groupe additif $M_{n,p}$ par $GL(n)$ relativement à m. Pour simplifier les notations, on écrira G_0 pour désigner $GL(n)$ et G pour désigner $G_{n,p}$.

1.2. L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G s'identifie au produit semi-direct $M_{n,p} \times \mathfrak{g}_0$, où $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{gl}(n)$ est l'algèbre de Lie de G_0. La représentation adjointe Ad de G dans $\mathfrak{g}$ est telle que :

$$Ad(U, x)(V, Y) = (xV - xYx^{-1}U, xYx^{-1})$$

pour tous U et V dans $M_{n,p}$, Y dans $\mathfrak{g}_0$ et x dans G_0.

1.3. Soit m un entier. Soit $F : \mathfrak{g} \longrightarrow K$ une fonction polynôme telle que :

$$F(Ad(U, x)(V, Y)) = (\text{dét}\, x)^m\, F(V, Y)$$

pour tout (U, x) dans G et tout (V, Y) dans $\mathfrak{g}$. On a en particulier $F(V - YU, Y) = F(V, Y)$ pour tous U,V et Y et par suite

$F(O,Y) = F(V,Y)$ pour tous V et Y. Ainsi, il existe une fonction polynôme F_0 sur $\mathfrak{g}_0$ telle que $F(V,Y) = F_0(Y)$ pour tous V et Y. Mais alors on doit avoir $F_0(xYx^{-1}) = (\text{dét}\, x)^m F_0(Y)$ pour tous x et Y. Il en résulte immédiatement que $F_0 = 0$ si m est non nul et que F_0 est invariante par l'action adjointe de G_0 dans $\mathfrak{g}_0$ si $m = 0$. On peut donc énoncer : l'agèbre des fonctions polynômes sur $\mathfrak{g}$ qui sont *invariantes* par la représentation adjointe de G s'identifie à celle des fonctions ne dépendant que de la deuxième variable et qui sont invariantes par la représentation adjointe de G_0.

1.4. *Remarque.* – Il est facile de voir que tout caractère *rationnel* $f: G \longrightarrow K^*$ est de la forme : $f(U, x) = (\text{dét}\, x)^m$, où m est un entier convenable. Ce qui précède détermine donc les fonctions polynômes sur $\mathfrak{g}$ qui se transforment sous l'action adjointe de G suivant un caractère rationnel de G.

1.5. Identifions le dual $\mathfrak{g}^*$ de $\mathfrak{g}$ à l'espace vectoriel $M_{p,n} \times \mathfrak{g}_0$, produit de l'espace des matrices à p lignes et n colonnes par $\mathfrak{g}_0$, au moyen de la forme bilinéaire :

$$\langle (U,X)\,,\,(V,Y)\rangle = tr(UV) + tr(XY) = \langle U,V\rangle + \langle X,Y\rangle$$

où tr signifie trace. La représentation coadjointe Ad^* est alors donnée par les formules :

$$Ad^*(U, x)\,(V,Y) = (V x^{-1}, xYx^{-1} + UVx^{-1})$$

où (U, x) désigne un élément de G et (V,Y) décrit $\mathfrak{g}^*$.

1.6. Soit m un entier. On dira d'une fonction polynôme $F: \mathfrak{g}^* \longrightarrow K$ qu'elle est semi-invariante de poids m si

$$F(Ad^*(U,x)\,(V,Y)) = (\text{dét}\, x)^{-m}\, F(V,Y)$$

pour tout (U,x) dans G, et (V,Y) dans $\mathfrak{g}^*$. On doit donc avoir en particulier :

$$F(cV,Y) = c^{mn}\, F(V,Y)$$

pour tout scalaire $c \neq 0$, ce qui exprime que F est homogène de degré mn (partiellement) par rapport à la variable V. En particulier, si F est semi-invariante de poids zéro (ou encore invariante), elle est homogène de degré zéro par rapport à V et par suite il existe une fonction polynôme F_0 sur $\mathfrak{g}_0$ telle que $F(V,Y) = F_0(Y)$ pour tout (V,Y) dans $\mathfrak{g}^*$. Mais alors F_0 doit être telle que :

$$F_0(Y) = F_0(Y+UV)$$

pour tous U dans $M_{n,p}$ et V dans $M_{p,n}$. Comme l'espace vectoriel $\mathfrak{g}_0$ est engendré par les éléments de la forme UV (U décrivant $M_{n,p}$ et V décrivant $M_{p,n}$), il vient que F_0 est une fonction constante. Ainsi une fonction polynôme invariante par la représentation coadjointe est nécessairement *constante,* ou encore (avec les notations de [3]) : $Y(\mathfrak{g}) = K$.

1.7. Soit F une fonction polynôme non nulle sur $\mathfrak{g}^*$, semi-invariante de poids m. L'entier m est nécessairement positif ou nul. Soit D un opérateur différentiel à coefficients constants sur $\mathfrak{g}^*$, invariant par G. Alors DF est une fonction polynôme semi-invariante de même poids m. Parmi les fonctions polynômes non nulles et semi-invariantes de poids m, choisissons-en une F_0 qui soit homogène par rapport à la deuxième variable Y (ce qui est possible puisque ces fonctions sont homogènes de degré mn par rapport à la première variable V) et dont le degré d'homogénéité par rapport à Y soit minimal. Etant donné qu'un opérateur différentiel invariant D ne contient que des dérivations par rapport à Y (c'est ce que dit 1.3), on en déduit que DF_0 est nul chaque fois que D est un opérateur différentiel G-invariant *sans terme constant.* Autrement dit, F_0 est *G-harmonique.* Si on veut être plus précis, on écrit $F_0 = \sum_{|\alpha|=mn} V^\alpha P_\alpha(Y)$ et $DF_0 = \Sigma V^\alpha D P_\alpha(Y) = 0$, ce qui exprime que les P_α sont G_0-harmoniques. *Conclusion* : Soit H l'espace vectoriel des éléments harmoniques de l'algèbre symétrique $S(\mathfrak{g}_0)$. Soit $S_{mn}(M_{n,p})$ l'espace des éléments homogènes de degré mn de l'algèbre symétrique $S(M_{n,p})$. Alors, s'il existe une fonction F non nulle semi-invariante de poids m sur $\mathfrak{g}^*$, il en existe une non nulle dans $H \otimes S_{mn}(M_{n,p})$. Ceci est une façon d'expliquer le procédé utilisé par A. Joseph (lorsque $p = 1$) pour montrer l'existence d'une semi-invariant non nul de poids 1 ([8], 7.3).

2. Calculs d'indices.

2.1. La codimension *minimale* des orbites de G dans $\mathfrak{g}^*$ s'appelle l'*indice* de $\mathfrak{g}$. Un élément l de $\mathfrak{g}^*$ est dit *régulier* si sa G-orbite est de dimension maximale, ou encore si la dimension du stabilisateur infinitésimal $\mathfrak{g}^l$ de l est égale à l'indice de $\mathfrak{g}$. L'ensemble $\mathfrak{g}_r^*$ des éléments réguliers est un ouvert (de Zariski non vide) de $\mathfrak{g}^*$ ([3], 1.11.6). Lorsqu'on peut identifier $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}^*$, on peut parler d'éléments réguliers de $\mathfrak{g}$. On dira par exemple qu'une matrice X est un élément régulier de $\mathfrak{g}_0$ si la forme linéaire $l: \mathrm{Y} \longrightarrow tr(\mathrm{XY})$ qu'elle définit sur $\mathfrak{g}_0$ est un élément régulier de $\mathfrak{g}_0^*$. Il est facile de voir que si l et X sont comme on vient de le dire, alors $\mathfrak{g}^l$ est le commutant de X dans $\mathfrak{g}_0$, c'est-à-dire l'algèbre de Lie des matrices Z telles que $\mathrm{ZX} = \mathrm{XZ}$. Compte-tenu de [5] chap. VIII, §2, on voit que X est un élément régulier de $\mathfrak{g}_0$ si et seulement si le polynôme minimal de X coïncide avec son polynôme caractéristique.

2.2. Fixons $l = (\mathrm{V},\mathrm{Y})$ dans $\mathfrak{g}^*$. On dispose alors de l'application orbitale : $(\mathrm{U},\mathrm{X}) \longmapsto \mathrm{A}d^*(\mathrm{U},x)(\mathrm{V},\mathrm{Y})$ de G sur l'orbite $\mathrm{G}.l$ de l. La différentielle de cette application est l'application linéaire $\mathrm{L}: \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ définie par :

$$\mathrm{L}(\mathrm{U},\mathrm{X}) = (-\mathrm{VX},\ [\mathrm{X},\mathrm{Y}] + \mathrm{UV})$$

pour tout (U,X) dans $\mathfrak{g}$. L'image de L est l'espace tangent en l à l'orbite de l, dont la dimension est donc le rang de L. Le noyau de L est la sous-algèbre $\mathfrak{g}^l$ de $\mathfrak{g}$ qui stabilise l.

2.3. On introduit quelques notations : soit V dans $\mathrm{M}_{p,n}$. On désignera par q le rang de V, par $\mathfrak{g}_0(\mathrm{V})$ la sous-algèbre de $\mathfrak{g}_0$ constituée par les X tels que $\mathrm{VX} = 0$, et par $\mathrm{E_V}$ le sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}_0$ constitué par les matrices UV obtenues en faisant varier U dans $\mathrm{M}_{n,p}$.

2.4. Lemme. – *Soit s la dimension de l'orbite de $l = (\mathrm{V},\mathrm{Y})$. On a :*

$$\begin{aligned} s &= nq + \dim(\mathrm{E_V} + [\mathrm{Y}, \mathfrak{g}_0(\mathrm{V})]) \\ &= n^2 + nq - \dim(\mathfrak{g}_0(\mathrm{V}) \cap \ker ad\mathrm{Y}) - \dim(\mathrm{E_V} \cap [\mathrm{Y}, \mathfrak{g}_0(\mathrm{V})]) \end{aligned}$$

Démonstration. – Le noyau de la restriction à l'image de L de la première projection : $\mathrm{M}_{p,n} \times \mathfrak{g}_0 \longrightarrow \mathrm{M}_{p,n}$ est l'espace $\{0\} \times (\mathrm{E_V} + [\mathrm{Y}, \mathfrak{g}_0(\mathrm{V})])$, tandis que l'image de cette restriction est de dimension nq. D'où la première formule donnant s. La deuxième en résulte en écrivant que :

$$\dim(E_V + [Y, \mathfrak{g}_0(V)]) = \dim E_V + \dim [Y, \mathfrak{g}_0(V)] - \dim(E_V \cap [Y, \mathfrak{g}_0(V)])$$

et en remarquant que $\dim E_V = nq$ tandis que $\dim \mathfrak{g}_0(V) = n^2 - nq$.

2.5. *Remarque.* – On peut interpréter ce qui précède en introduisant l'idéal $\mathcal{R} = M_{n,p} \times \{0\}$ de $\mathfrak{g}$ et le sous-groupe correspondant R de G (isomorphe à K^{np}) constitué par les $(U, 1)$ où U décrit $M_{n,p}$. L'orbite de (V, Y) sous l'action de R (opérant au moyen de la restriction à R de la représentation coadjointe) est l'ensemble des $(V, Y + UV)$ où U décrit $M_{n,p}$. L'espace tangent à cette R-orbite au point (V, Y) est $\{0\} \times E_V$, et on peut l'identifier à E_V. Soit maintenant R^l le sous-groupe de G qui stabilise la restriction de l à $\mathcal{R}$ (G opère naturellement dans l'idéal $\mathcal{R}$, et par suite tout aussi naturellement dans le dual $\mathcal{R}^*$ de $\mathcal{R}$). Il est facile de voir que son algèbre de Lie $\mathcal{R}^l$ est telle que $\mathcal{R}^l = \mathcal{R} \oplus \mathfrak{g}_0(V)$ (on a identifié $\mathfrak{g}_0$ à la sous-algèbre $\{0\} \times \mathfrak{g}_0$ de $\mathfrak{g}$), de sorte qu'en fait on a : $\mathfrak{g}_0(V) = \mathcal{R}^l \cap \mathfrak{g}_0$. L'espace tangent en l à l'orbite de l sous l'action de $R^l \cap G_0$ est $\{0\} \times [Y, \mathfrak{g}_0(V)]$. L'espace tangent en l à l'orbite de l sous l'action de R^l est $\{0\} \times (E_V + [Y, \mathfrak{g}_0(V)])$. La première formule donnant s dit que la dimension de l'orbite de l sous l'action de G est la *somme* de la dimension de l'orbite de $l|_{\mathcal{R}}$ sous l'action de G_0 et de la dimension de l'orbite de l sous l'action du sous-groupe R^l qui stabilise $l|_{\mathcal{R}}$. C'est là un fait qui se produit chaque fois qu'on s'intéresse à un produit semi-direct $\mathcal{R} \times \mathfrak{g}_0$ avec $\mathcal{R}$ abélien.

2.6. Supposons dorénavant et jusqu'à 2.9 inclus que l'on a $n \leqslant p$. Soit $l = (V, Y)$ dans $\mathfrak{g}^*$ et soit s la dimension de l'orbite de l. D'après le lemme 2.4, on a $s \leqslant n^2 + nq \leqslant 2n^2$. Supposons $s = 2n^2$. Alors $n^2 + nq = 2n^2$, ou encore $q = n$. Réciproquement si V est de rang maximal n, on a $\mathfrak{g}_0(V) = \{0\}$, et la deuxième formule donnant s dans le lemme 2.4 dit que $s = n^2 + nq = 2n^2$. *Conclusions* : l'indice de $\mathfrak{g}$ est $n(p-n)$. L'élément l de $\mathfrak{g}^*$ défini par (V, Y) est régulier si et seulement si V est de rang n. En particulier, l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_{n,n}$ est d'indice zéro.

2.7. Soient $l_1 = (V_1, Y_1)$ et $l_2 = (V_2, Y_2)$ deux éléments réguliers de $\mathfrak{g}^*$. Si l_1 et l_2 sont G-conjugés, il existe x dans G_0 tel que $V_1 x^{-1} = V_2$, de sorte que V_1 et V_2 ont même image dans K^p (en interprétant chaque matrice V à p lignes et n colonnes comme un homomorphisme de K^n dans K^p). Supposons en sens inverse que V_1 et V_2 ont même image dans K^p, de sorte que $V_1 x^{-1} = V_2$ avec x convenable dans G_0. Ceci étant, il existe U dans $M_{n,p}$ tel que $x Y_1 x^{-1} + UV_2 = Y_2$ car $E_{V_2} = \mathfrak{g}_0$. Autrement dit, l_1 et l_2 sont G-conjugués. Il en résulte que le quotient de l'ouvert des éléments réguliers par G s'identifie à l'ensemble des sous-espaces de dimension n de K^p. En particulier, lorsque $n = p$, l'ouvert des éléments réguliers est constitué par une seule orbite, à savoir celle constituée par les couples (V, Y) avec V inversible.

2.8. Soit m un entier $\geqslant 0$. Soit $F : \mathfrak{g}^* \longrightarrow K$ une fonction polynôme semi-invariante de poids m (voir 1.6). On doit avoir $F(V, Y+UV) = F(V, Y)$ pour tout U dans $M_{n,p}$, et il en résulte que $F(V, Y) = F(V, 0)$ chaque fois que V est une matrice de rang n. On a donc bien $F(V, Y) = F(V, 0)$ pour tous V et Y. Ainsi F ne dépend que de V et tout revient à chercher les fonctions F' définies dans $M_{p,n}$ telles que $F'(Vx^{-1}) = (\det x)^{-m} F'(V)$ pour tout x dans $GL(n)$. Le théorème fondamental des invariants pour le groupe $GL(n)$ répond à la question : soient $F_1, \ldots, F_r$ les mineurs d'ordre n de la matrice V (r est le coefficient binomial $\binom{p}{n}$), considérés comme des fonctions de V. Tout semi-invariant de poids 1 est une combinaison linéaire à coefficients dans K de $F_1, \ldots, F_r$. Plus généralement, tout semi-invariant de poids m s'écrit sous la forme $\sum_{\alpha} c_\alpha F_1^{\alpha_1} \ldots F_r^{\alpha_r}$ la somme portant sur les multi-indices α tels que $|\alpha| = m$ ([10] théorème 2.6.A).

2.9. Soit G' le sous-groupe de G constitué par les (U, x) tels que $\det x = 1$. Le raisonnement fait par F. Grosshans dans [6] (Note p. 251) montre qu'une fonction polynôme $F : \mathfrak{g}^* \longrightarrow K$ qui est invariante par G' est une somme de fonctions semi-invariantes par G, au moins lorsque le corps de base K est algébriquement clos, ce qu'on supposera toujours sans le dire dans tous les énoncés à venir où on trouvera les invariants de G' en utilisant les semi-invariants de G. Par exemple on en déduit que l'algèbre des fonctions polynômes définies dans $\mathfrak{g}^*$ et invariantes par G' est celle engendrée par les fonctions $F_1, F_2, \ldots, F_r$ (considérées comme des fonctions sur $M_{p,n} \times \mathfrak{g}_0$). Toutefois, il faut remarquer que les fonctions $F_1, \ldots, F_r$ ne sont pas algébriquement indépendantes (voir [10], théorème 2.14.A). Regardons plus particulièrement le cas où $n = p$. Les semi-invariants de G sont les puissances de $F_n : \mathfrak{g}^* \longrightarrow K$ qui est définie par $F_n(V,Y) = \text{dét}(V)$ et est un semi-invariant de poids 1. Soit F'_n la restriction de F_n à $(\mathfrak{g}')^*$ (on identifie $(\mathfrak{g}')^*$ au sous-espace de $\mathfrak{g}^*$ constitué par les (V,Y) avec Y de trace nulle). Alors l'algèbre $Y(\mathfrak{g}')$ des fonctions polynômes G'-invariantes (pour l'action coadjointe de G') est celle $K[F'_n]$ engendrée par F'_n.

2.10. On suppose désormais et jusqu'à 2.13 inclus que l'on a $n \geqslant p$. Soit $l = (V,Y)$ où on suppose que V est de rang p. On s'intéresse à la dimension s de l'orbite de l. Pour cela, on remarque d'abord qu'il existe x dans G_0 tel que $V_x = (O, 1_p)$ où 1_p est la matrice unité à p lignes et p colonnes et O est l'élément nul de $M_{p,n-p}$. On supposera donc désormais que $V = (O, 1_p)$. On remarque ensuite que l'espace E_V étant constitué par les éléments de $\mathfrak{g}_0$ dont les $(n-p)$ premières colonnes sont nulles, on peut trouver U dans $M_{n,p}$ tel que $Ad^*(U,1)\,(V,Y) = (V,Y'')$ où Y'' a ses p dernières colonnes nulles. On supposera donc désormais que :

$$Y = \begin{pmatrix} Y' & 0 \\ V' & 0 \end{pmatrix}$$

avec V' dans $M_{p,n-p}$ et Y' dans $M_{n-p,n-p}$.

2.11. Lemme. — *Soit* G' *le groupe* $G_{n-p,p}$ *(notation introduite dans 1.1) et soit* $\mathfrak{g}' = M_{n-p,p} \times \mathfrak{gl}(n-p)$ *son algèbre de Lie. Soit* l' *la forme linéaire sur* $\mathfrak{g}'$ *définie par* (V',Y') *et soit* s' *la dimension de l'orbite* $G'l'$ *de* l'. *On a alors :*

$$s = 2np + s'$$

$$\dim \mathfrak{g}^l = \dim (\mathfrak{g}')^{l'}$$

Démonstration. — Soit X dans $\mathfrak{g}_0(V)$, c'est-à-dire tel que $VX = 0$. Il est immédiat que :

$$X = \begin{pmatrix} X' & U' \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

avec U' dans $M_{n-p,p}$ et X' dans $\mathfrak{gl}(n-p)$. On a alors :

$$[X,Y] = \begin{pmatrix} [X',Y'] + U'V' & -Y'U' \\ -V'X' & -V'U' \end{pmatrix}$$

Comme l'espace E_V est celui des matrices ayant leurs $(n-p)$ premières colonnes nulles, on voit que la dimension de l'espace $E_V + [Y, \mathfrak{g}_0(V)]$ est la somme de celle de E_V et de celle de l'espace des matrices de la forme $(-V'X', [X',Y'] + U'V')$ obtenues en faisant varier U' et X' de toutes les manières possibles. On a donc :

$$\dim (E_V + [Y, \mathfrak{g}_0(V)]) = \dim (E_V) + s'$$

En appliquant la première formule du lemme 2.4, on trouve

$$s = np + \dim E_V + s' = 2np + s'.$$

On a alors : $\dim \mathfrak{g}^l = n^2 + np - s = n^2 - np - s' = \dim \mathfrak{g}' - s'$ ou encore $\dim \mathfrak{g}^l = \dim (\mathfrak{g}')^{l'}$.

2.12. *Remarque.* – Le deuxième renseignement donné par le lemme 2.11 dit que les deux espaces $\mathfrak{g}^l$ et $(\mathfrak{g}')^{l'}$ ont même dimension. On peut être plus précis. Posons en effet pour chaque (U',X') dans $\mathfrak{g}'$:

$$f(U',X') = \begin{pmatrix} Y'U' \\ V'U' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X' & U' \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(où V' et Y' sont les composantes de Y comme dans 2.10). Alors l'application f est un *isomorphisme d'algèbre de Lie* de $(\mathfrak{g}')^{l'}$ sur $\mathfrak{g}^l$.

2.13. LEMME. – *Soit $\mathfrak{g}_{n,p}$ l'algèbre de Lie de $G_{n,p}$ et soit $r_{n,p}$ l'indice de cette algèbre de Lie. On a alors :*

$$r_{n,p} = r_{n-p,p}.$$

Démonstration. – Dans l'ouvert constitué par les $l = (V,Y)$ où V est de rang p, la dimension minimale des stabilisateurs $\mathfrak{g}^l$ est égale à l'indice de $\mathfrak{g}_{n-p,p}$ (lemme 2.11). Le lemme 2.13 en résulte puisque l'ouvert considéré contient des éléments réguliers.

2.14. Soit r le reste de la division euclidienne de n par p. On a donc $n = pk + r$ où k est le quotient et r est un entier tel que $0 \leqslant r < p$. En appliquant plusieurs fois de suite le lemme 2.13, on trouve que $r_{n,p} = r_{n-kp,p}$. Comme $n - kp < p$, on peut calculer l'indice de $\mathfrak{g}_{n-kp,p}$ en utilisant 2.6, ce qui donne

$$r_{n,p} = (n - kp)\,(p - n + kp),$$

ou encore $r_{n,p} = r(p - r)$. On peut donc énoncer :

2.15. Proposition. – *Soient n et p des entiers $\geqslant 1$. Soit $r_{n,p}$ l'indice de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_{n,p}$ du groupe $\mathrm{G}_{n,p}$ défini dans 1.1. On a $r_{n,p} = r(p-r)$ où r est le reste de la division euclidienne de n par p.*

2.16. On voit en particulier que $\mathfrak{g}_{n,p}$ est d'indice zéro si et seulement si p divise n.

2.17. *Remarque.* – Soit $\mathrm{R}(\mathfrak{g})$ le corps des fractions de l'algèbre symétrique $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$. Le groupe G opère naturellement dans $\mathrm{R}(\mathfrak{g})$. Soit $\mathrm{Y}'(\mathfrak{g})$ l'ensemble des éléments G-invariants de $\mathrm{R}(\mathfrak{g})$. C'est un sous-corps de $\mathrm{R}(\mathfrak{g})$ et son degré de transcendance est l'indice de $\mathfrak{g}$ ([3], 4.9.24). La proposition 2.15 détermine donc le degré de transcendance de $\mathrm{Y}'(\mathfrak{g})$.

3. Le semi-invariant fondamental du groupe affine.

3.1. On suppose dans ce numéro 3 que $p = 1$. Il s'agit donc du groupe affine $\mathrm{G} = \mathrm{K}^n \times \mathrm{G}_0$ dont l'élément général est noté (u, x) où u est un vecteur (colonne) de K^n. On notera (u, X) l'élément général de $\mathfrak{g}$ et (v, Y), (où v est un vecteur ligne), celui de $\mathfrak{g}^*$. On sait d'après le numéro précédent que $\mathfrak{g}$ est d'indice zéro, ou encore que la dimension maximale des orbites de G dans $\mathfrak{g}^*$ est celle de $\mathfrak{g}^*$ (orbite ouverte). (Compte-tenu du lemme 2.11, il est facile de trouver les dimensions des autres orbites par récurrence sur n). Le résultat suivant donne une caractérisation intéressante des formes linéaires l dont l'orbite est ouverte.

3.2. Proposition. – *Soit $l = (v, \mathrm{Y})$ fixé dans $\mathfrak{g}^*$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\mathcal{G}^l = 0$

(ii) $\mathcal{G}_0 = [\mathrm{Y}, \mathcal{G}_0(v)] \oplus \mathrm{E}_v$

(iii) *Les vecteurs* $v, v\mathrm{Y}, v\mathrm{Y}^2, \ldots, v\mathrm{Y}^{n-1}$ *sont linéairement indépendants.*

(iv) *Le stabilisateur* G^l *de* l *est trivial.*

Démonstration. – (i) $\Longrightarrow$ (ii) : Si l'orbite de l est de dimension n^2+n, la deuxième formule du lemme 2.4 dit que nécessairement $q=1$ (ou encore $v\neq 0$) et la première formule de ce même lemme montre alors que $\dim(\mathrm{E}_v + [\mathrm{Y}, \mathcal{G}_0(v)]) = n$ ou encore que $\mathcal{G}_0$ est somme de E_v et de $[\mathrm{Y}, \mathcal{G}_0(v)]$. Cette somme est directe puisque $\mathrm{E}_v \cap [\mathrm{Y}, \mathcal{G}_0(v)] = 0$ d'après la deuxième formule du lemme 2.4.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) : On a $\mathcal{G}_0 = [\mathrm{Y}, \mathcal{G}_0(v)] \oplus \mathrm{E}_v$. La dimension de E_v étant n (car v est nécessairement non nul), celle de $[\mathrm{Y}, \mathcal{G}_0(v)]$ est n^2-n. Il en résulte que le rang de $ad\,\mathrm{Y} : \mathcal{G}_0 \longrightarrow \mathcal{G}_0$ est n^2-n car il est bien connu que l'indice de $\mathcal{G}_0$ est n. Autrement dit, Y est un élément régulier de $\mathcal{G}_0$. Soit Z dans $\mathcal{G}_0$. Il existe X dans $\mathcal{G}_0(v)$ et u dans K^n tels que $\mathrm{Z} = [\mathrm{Y},\mathrm{X}] + uv$, de sorte que $tr(\mathrm{Z}\mathrm{Y}^k) = tr(uv\mathrm{Y}^k)$ pour tout entier $k \geqslant 0$. Soit P un polynôme à une indéterminée tel que $v\mathrm{P}(\mathrm{Y}) = 0$. On a alors $tr(\mathrm{Z}\mathrm{P}(\mathrm{Y})) = 0$ pour tout Z ou encore $\mathrm{P}(\mathrm{Y}) = 0$. Comme les n matrices $1, \mathrm{Y}, \mathrm{Y}^2, \ldots, \mathrm{Y}^{n-1}$ sont linéairement indépendantes, il vient que les vecteurs $v, v\mathrm{Y}, \ldots, v\mathrm{Y}^{n-1}$ forment une base de K^n.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) : Faisons d'abord la remarque suivante : Soit x dans $\mathrm{G}_0 \cap \mathrm{G}^l$, i.e. tel que $vx^{-1} = v$ et $x\mathrm{Y}x^{-1} = \mathrm{Y}$. Comme Y est régulier, on doit avoir $x = c_0 + c_1\mathrm{Y} + \ldots + c_{n-1}\mathrm{Y}^{n-1}$, les c_i étant des scalaires convenables. Mais on doit aussi avoir $v = vx = c_0 v + c_1 v\mathrm{Y} + \ldots + c_{n-1}v\mathrm{Y}^{n-1}$, ce qui implique en utilisant (iii) que $c_0 = 1, c_1 = c_2 = \ldots = c_{n-1} = 0$. On a donc $\mathrm{G}_0 \cap \mathrm{G}^l = \{1\}$. Pour montrer que (iii) $\Longrightarrow$ (iv), il reste donc à prouver que si (u, x) stabilise l, alors $u = 0$. En voici une démonstration : si (u, x) stabilise l, on a $v = vx$ et $x\mathrm{Y}x^{-1} + uv = \mathrm{Y}$. La deuxième égalité montre que $\langle u, v\rangle = tr(uv) = 0$. Par récurrence sur l'entier $p \geqslant 1$, on montre facilement que :

$$(\mathrm{Y} - uv)^p = \mathrm{Y}^p - \sum_{0\leqslant q\leqslant p-1} \mathrm{Y}^{p-q}\, uv\mathrm{Y}^q$$

et comme $Y - uv = xYx^{-1}$, il vient en calculant les traces : $p\langle u, vY^p\rangle = 0$. Ainsi le vecteur colonne u est orthogonal à chacun des vecteurs ligne $v, vY, \ldots, vY^{n-1}$. Il est donc nul.

3.3. La condition (ii) dans la proposition précédente s'interprète de la manière suivante : les orbites de l sous l'action des deux sous-groupes R et $R^l \cap G_0 = G_0(v)$ de G (les notations sont celles de 2.5), (qui sont toutes les deux contenues dans l'espace affine $\{v\} \times \mathfrak{G}_0$), sont *transverses* l'une à l'autre au point l.

3.4. Soit $l = (v, Y)$ tel que $\mathfrak{G}^l = \{0\}$. D'après 3.2, on sait que l'application orbitale $T : (u, x) \longmapsto Ad^*(u, x)l$ est une bijection de G sur l'orbite de l. Dans ce qui suit, on va s'intéresser à l'application inverse T^{-1}. Pour cela, prenons un point (w, Z) de l'orbite de l. On sait qu'il existe un unique (u, x) dans G tel que $Ad^*(u,x)l = (w, Z)$, c'est-à-dire tel que $vx^{-1} = w$ et $xYx^{-1} + uvx^{-1} = Z$. La dernière égalité montre que $wZ = vYx^{-1} + \langle x^{-1}u, v\rangle\, w$. On a donc $vYx^{-1} = wZ - \langle x^{-1}u, v\rangle\, w$. Supposons démontré pour un entier $p \geqslant 1$ la formule suivante :

$$vY^p x^{-1} = wZ^p - \sum_{1 \leqslant q < p} \langle x^{-1}u, vY^{q-1}\rangle\, wZ^{p-q}$$

On peut alors calculer

$$vY^{p+1}x^{-1} = (vY^p x^{-1})(xYx^{-1}) = vY^p x^{-1}(Z - uvx^{-1})$$
$$= (vY^p x^{-1})Z - \langle x^{-1}u, vY^p\rangle\, w$$

en utilisant la formule démontrée à l'ordre p. On démontre ainsi par récurrence sur p les formules suivantes où p varie de 1 à n :

$$vY^p x^{-1} = wZ^p - \sum_{1 \leqslant q \leqslant p} a_q\, wZ^{p-q}$$

avec $a_q = \langle x^{-1}u, vY^{q-1}\rangle$. Supposons maintenant que Y soit un élément nilpotent (régulier). En écrivant que $vY^n x^{-1} = 0$, on trouve que $w(Z^n - a_1 Z^{n-1} - \ldots - a_n) = 0$, et comme w est un générateur de K^n considéré comme module sur l'algèbre d'endomorphismes engendrée par Z on en déduit que $Z^n - a_1 Z^{n-1} - \ldots - a_n = 0$, ou encore que les nombres $a_1, \ldots, a_n$ sont au signe près les coefficients du polynôme caractéristique de Z. Posons maintenant pour chaque entier p tel que $0 \leqslant p \leqslant n-1$ (en convenant que $B_0(Z) = 1$) :

$$B_p(Z) = Z^p - a_1 Z^{p-1} - \ldots - a_p$$

On a alors $vY^p x^{-1} = wB_p(Z)$ si $0 \leqslant p \leqslant n-1$ et $\langle x^{-1}u, vY^{q-1}\rangle = a_q$ si $1 \leqslant q \leqslant n$. Ces formules déterminent entièrement x^{-1} et $x^{-1}u$ en fonction de (w, Z) puisque $(v, vY, \ldots, vY^{n-1})$ est une base de K^n.

3.5. La signification des fonctions polynômiales $B_p : \mathfrak{g}_0 \longrightarrow \mathfrak{g}_0$ qui interviennent ici est la suivante : désignons par $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ les fonctions polynômes sur $\mathfrak{g}_0$ qui sont les coefficients du polynôme caractéristique général, de sorte que :

$$\text{dét}\,(t-Z) = t^n - Q_1(Z)\,t^{n-1} - \ldots - Q_n(Z)$$

On a alors :

$$Q_{p+1}(Z+tY) = Q_{p+1}(Z) + t\,\langle Y, B_p(Z)\rangle \quad (\text{mod } t^2).$$

Autrement dit, la fonction B_p est la *différentielle* de la fonction Q_{p+1} ([9], lemme III-1).

3.6. Pour être plus précis en ce qui concerne les formules déterminant x^{-1} et $x^{-1}u$, on a besoin de quelques notations : soit $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ (1 à la i$^{\text{ème}}$ place) $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Si $w_1, w_2, \ldots, w_n$ sont des vecteurs lignes, on désignera par $C(w_1, w_2, \ldots, w_n)$ la matrice dont la première ligne est w_1, la deuxième est $w_2, \ldots$, la dernière est w_n, ou encore l'unique matrice M à n lignes et n colonnes telle que $e_i M = w_i$ lorsque $1 \leqslant i \leqslant n$. Enfin, on écrira $\text{dét}(w_1, w_2, \ldots, w_n)$ pour désigner le déterminant de la matrice $C(w_1, w_2, \ldots, w_n)$. Ceci étant, on va faire un choix particulier du point base $l = (v, Y)$: on prendra $v = e_n$ et $Y = Y_0 = C(0, e_1, e_2, \ldots, e_{n-1})$. Alors Y_0 est nilpotente régulière (c'est une matrice de Jordan) et on a $vY^p = e_{n-p}$ si $0 \leqslant p \leqslant n-1$. Bien entendu, la forme linéaire $l = (e_n, Y_0)$ est régulière. Soit alors (w, Z) un point de l'orbite de l. L'élément (u, x) de G qui amène (e_n, Y_0) sur (w, Z) est déterminé par les formules :

$$e_{n-p}\,x^{-1} = w\,B_p(Z) \qquad (0 \leqslant p \leqslant n-1)$$

$$x^{-1}u = \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_1 \end{pmatrix}$$

On voit que x^{-1} n'est autre que $C(wB_{n-1}(Z), wB_{n-2}(Z), \ldots, w)$, et que l'inverse (dans G) de (u, x), à savoir $(-x^{-1}u, x^{-1})$ s'exprime de façon *polynomiale* en fonction de w et Z.

3.7. On est ainsi amené à introduire la fonction polynôme $F_1 : \mathfrak{g}^* \longrightarrow K$ qui est définie par :

$$F_1(v, Y) = \text{dét}(vB_{n-1}(Y), vB_{n-2}(Y), \ldots, v)$$

pour tout (v, Y) dans $\mathfrak{g}^*$. Compte-tenu de 3.2 (iii), on voit que l'ouvert $\mathfrak{g}_r^*$ de $\mathfrak{g}^*$ constitué par les formes l régulières est exactement celui des l dans $\mathfrak{g}^*$ telles que $F_1(l) \neq 0$. En effet, il est immédiat, vu la définition des B_p que l'on a aussi bien :

$$F_1(v, Y) = \text{dét}(vY^{n-1}, vY^{n-2}, \ldots, v)$$

pour tout (v, Y) dans $\mathfrak{g}^*$. On peut maintenant résumer ce qui précède de la manière suivante :

3.8. THEOREME. – 1) *Soit* $l_0 = (e_n, Y_0)$ (*on rappelle que* $e_n = (0,0,\ldots,1)$ *et* Y_0 *est la matrice de Jordan* $C(0, e_1, \ldots, e_{n-1})$). *La forme linéaire* l_0 *est régulière. L'orbite de* l_0 *sous l'action coadjointe de* G *est l'ouvert* $\mathfrak{g}_r^*$ *des éléments réguliers de* $\mathfrak{g}^*$, *ou encore l'ouvert constitué par les* l *telles que* $F_1(l) \neq 0$.

2) *Soit* (v, Y) *un élément régulier. L'unique élément* (u, x) *de* G *tel que* $\text{Ad}^*(u, x)l_0 = (v, Y)$ *est tel que :*

$$x^{-1} = C(vB_{n-1}(Y), vB_{n-2}(Y), \ldots, v)$$

$$x^{-1}u = \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_1 \end{pmatrix}$$

où $a_1, \ldots, a_n, B_0, \ldots, B_{n-1}$ *sont comme plus haut.*

3) *La fonction* F_1 *est un semi-invariant de poids 1. Toute fonction semi-invariante de poids* m (*m étant un entier* $\geqslant 0$) *est de la forme* $c\,F_1^m$ *où* c *est un scalaire.*

Démonstration. – Les deux premières parties du théorème ont été démontrées plus haut sauf l'affirmation que tout élément régulier est dans l'orbite de l_0, dont la preuve est facile. Pour démontrer que F_1 est un semi-invariant de poids 1, on peut procéder comme suit : soit (v, Y) un élément régulier. Fixons (u, x) dans G et posons $(w, Z) = Ad^*(u,x)\,(v, Y)$. D'après 3.4, on a :

$$vY^p x^{-1} = wZ^p - \sum_{1 \leqslant q \leqslant p} a_q\, wZ^{p-q}$$

si $1 \leqslant p \leqslant n$, les a_q étant des scalaires convenables. On en déduit immédiatement que :

$$\text{dét}\,(vY^{n-1}x^{-1}\,,\ vY^{n-2}x^{-1}, \ldots, vx^{-1}) = \text{dét}\,(wZ^{n-1}\,,\ wZ^{n-2}, \ldots, w).$$

Sachant que le premier membre de cette égalité est le produit de $F_1(v, Y)$ par $(\text{dét}\,x)^{-1}$ et que le deuxième est $F_1(w, Z)$, on voit qu'on a démontré :

$$F_1(Ad^*(u, x)\,(v, Y)) = (\text{dét}\,x)^{-1}\ F_1(v, Y)$$

chaque fois que $F_1(v, Y) \neq 0$, pour tout (u, x) dans G. On en déduit le résultat annoncé. Soit maintenant F une fonction semi-invariante de poids m. Chaque (w, Z) dans $\mathfrak{g}_r^*$ s'écrit de manière unique sous la forme $Ad^*(u,x)\ (e_n, Y_0)$ avec $x^{-1} = C(wB_{n-1}(Z), .., w)$ de sorte que $\text{dét}\,(x^{-1}) = F_1(w, Z)$. On a donc

$$F(w, Z) = (F_1(w, Z))^m\, F\,(e_n, Y_0)$$

et cette égalité est vraie dans $\mathfrak{g}_r^*$, donc partout.

3.9. La fonction F_1 peut être appelée le semi-invariant *fondamental* du groupe G, à cause de sa propriété exprimée dans la troisième partie du théorème 3.8.

3.10. *Remarques.* – 1) Supposons que le corps de base K soit le corps des nombres réels. Désignons par G^0 le sous-groupe de G constitué par les (u, x) tel que : $\text{dét}(x) > 0$. Alors l'orbite du point

(e_n, Y_0) sous l'action de G^0 est l'ensemble des l tels que $F_1(l) > 0$, et son complémentaire dans $\mathfrak{g}_r^*$ est aussi une orbite de G^0.

2) Supposons que le corps de base soit algébriquement clos. Désignons par G' le sous-groupe de G constitué par les (u, x) tels que $\det(x) = 1$ et par $\mathfrak{g}'$ son algèbre de Lie, de sorte que le dual de $\mathfrak{g}'$ s'identifie au sous-espace de $\mathfrak{g}^*$ constitué par les (v, Y) où Y est de trace nulle (voir 2.9). L'algèbre des fonctions polynômes définies dans $\mathfrak{g}^*$ et invariantes par G' est l'algèbre engendrée par F_1. L'algèbre des fonctions polynômes définies dans $(\mathfrak{g}')^*$ et invariantes par la représentation coadjointe est engendrée par la restriction de F_1 à $(\mathfrak{g}')^*$.

3.11. Soit $l_0 = (e_n, Y_0)$ comme dans le théorème 3.8. On sait que si $Ad^*(u, x)\,(e_n, Y_0) = (v, Y)$ alors $x^{-1} = C(vB_{n-1}(Y), \ldots, v)$. Le passage à x se fait évidemment en calculant l'inverse de la matrice $C(vB_{n-1}(Y), \ldots, v)$ au moyen de ses mineurs d'ordre $(n-1)$ et de son déterminant $F_1(v, Y)$. Mais il est peut-être intéressant de remarquer que x a une forme particulière. Pour être plus explicite, on introduit la notation suivante : chaque fois que $u_1, u_2, \ldots, u_n$ sont des vecteurs colonnes, on désignera par $L(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ la matrice à n lignes et n colonnes dont la première colonne est u_1, la deuxième colonne est $u_2, \ldots,$ la dernière étant u_n. On peut maintenant énoncer :

3.12. Lemme. – *Soit $l = (v, Y)$ un élément régulier. Soit u_0 l'unique vecteur colonne tel que :* $\langle u_0, vB_{n-1}(Y)\rangle = 1$ *et* $\langle u_0, vB_p(Y)\rangle = 0$ *lorsque* $0 \leqslant p \leqslant n-2$. *Alors l'inverse* x *de la matrice* $C(vB_{n-1}(Y), \ldots, v)$ *est la matrice* $L(u_0, Yu_0, \ldots, Y^{n-1}u_0)$.

Démonstration. – On va démontrer que $\langle Y^q u_0, vB_p(Y)\rangle$ vaut 1 si $p+q=n-1$ et 0 sinon, pour tous les entiers p et q variant entre 0 et $n-1$. Les égalités correspondant au cas $q=0$ sont écrites dans les hypothèses du lemme. Supposons qu'on ait démontré les égalités suivantes :

$$\langle Y^k u_0, vB_p(Y)\rangle = 1 \qquad \text{si } p+k=n-1$$

$$\langle Y^k u_0, vB_p(Y)\rangle = 0 \qquad \text{sinon}$$

pour tout p tel que $0 \leqslant p \leqslant n-1$ et pour tous les entiers k tels que $0 \leqslant k \leqslant q$, où q est un entier donné compris entre 0 et $n-2$. On a alors : $\langle Y^{q+1} u_0 , vB_p(Y) \rangle = \langle Y^q u_0 , vB_p(Y)Y \rangle$ et comme $B_{p+1}(Y) = B_p(Y)Y - a_{p+1}$, on voit que

$$\langle Y^{q+1} u_0 , vB_p(Y) \rangle = \langle Y^q u_0 , vB_{p+1}(Y) \rangle + a_{p+1} \langle Y^q u_0 , v \rangle.$$

On en déduit immédiatement les égalités à l'ordre $q+1$ car $\langle Y^q u_0 , v \rangle = 0$. L'inverse de $C(vB_{n-1}(Y), \ldots, v)$ est donc bien $L(u_0 , Yu_0 , \ldots , Y^{n-1} u_0)$.

3.13. PROPOSITION. – *Soient* $l_0 = (e_n , Y_0)$ *comme dans le théorème 3.8,* $l = (v, Y)$ *un élément régulier dans* $\mathfrak{g}^*$ *et* u_0 *l'unique vecteur colonne tel que* $\langle u_0 , v \rangle = \langle u_0 , vY \rangle = \ldots = \langle u_0 , vY^{n-2} \rangle = 0$ *et* $\langle u_0 , vY^{n-1} \rangle = 1$. *L'unique élément* (u,x) *de* G *tel que* $\mathrm{Ad}^*(u,x) l_0 = l$ *est donné par les égalités :*

$$x = L(u_0 , Yu_0 , \ldots , Y^{n-1} u_0)$$
$$u = Y^n u_0 .$$

Démonstration. – Il reste seulement à démontrer que $u = Y^n u_0$. Or d'après le théorème 3.8, on doit avoir :

$$u = L(u_0 , Yu_0 , \ldots , Y^{n-1} u_0) \begin{pmatrix} a_n \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_1 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire $u = a_1 Y^{n-1} u_0 + a_2 Y^{n-2} u_0 + \ldots + a_n u_0$. Comme $Y^n = a_1 Y^{n-1} + \ldots + a_n$, on a bien $u = Y^n u_0$.

4. Les invariants du groupe affine.

4.1. Il s'agit encore dans ce numéro du groupe affine. On sait depuis 1.6 que l'algèbre $Y(\mathfrak{g})$ des fonctions polynômes définies dans $\mathfrak{g}^*$ et invariantes sous l'action coadjointe de G est réduite aux fonctions constantes. Par ailleurs, l'utilisation de l'orbite ouverte dans $\mathfrak{g}^*$ a permis de trouver les fonctions semi-invariantes. Dans ce qui suit, on va voir qu'il est encore possible d'utiliser la même méthode pour résoudre diverses questions de la théorie des invariants.

4.2. Supposons que le groupe affine G opère sur un ensemble E. Il opère alors de manière naturelle dans l'ensemble de toutes les fonctions $f : \mathfrak{g}^* \longrightarrow E$, et la recherche des telles fonctions f qui sont invariantes sous cette action naturelle de G (on dit aussi qu'elles sont équivariantes, ou que ce sont des concomitants) est un problème classique de la théorie des invariants, surtout lorsque E est un espace vectoriel (sur K) où G opère linéairement (voir [2], chap. 1) et f est polynomiale ou rationnelle. En tout cas, chaque fois que $l = (v, Y)$ est régulier, on aura $f(v, Y) = f(\mathrm{A}d^*(u, x)\,(e_n, Y_0)) = \rho(u, x) f(e_n, Y_0)$ où ρ est la représentation donnée de G dans E et (u, x) est déterminé en fonction de (v, Y) par les formules données en 3.13. Voici un exemple d'application de ce procédé :

4.3. Soit $f : \mathfrak{g}^* \longrightarrow M_n$ une fonction *polynomiale* à valeurs dans l'espace des matrices carrées à n lignes et n colonnes telle que : $f(\mathrm{A}d^*(u, x)l) = f(l)x^{-1}$ pour tous l dans $\mathfrak{g}^*$ et (u, x) dans G. On doit donc avoir :

$$f(v, Y) = f(e_n, Y_0)\; C(vB_{n-1}(Y), \ldots, v)$$

pour tout (v, Y) régulier, donc en fait pour tout (v, Y) dans $\mathfrak{g}^*$. Il reste à voir que la fonction $f_1 : (v, Y) \longrightarrow C(vB_{n-1}(Y), \ldots, v)$ est effectivement une fonction invariante. Remarquons pour cela que chacune des lignes de la matrice $C(vB_{n-1}(Y), \ldots, v)$ se transforme sous l'action du sous-groupe $G_0 = GL(n, K)$ de la manière voulue (c'est une vérification immédiate). Il reste à voir l'invariance sous l'action du sous-groupe vectoriel $R = \{(u, 1)\}$, qui est une conséquence du lemme suivant (lequel décrit la perturbation du polynôme caractéristique d'une matrice lorsqu'on ajoute à cette matrice une matrice de rang 1) :

4.4. LEMME. – *Soient* $Q_1\ Q_2, \ldots, Q_n$ *les coefficients du polynôme caractéristique général (voir 3.5),* u *un vecteur colonne et* v *un vecteur ligne. On a :*

$$Q_p(Z+uv) = Q_p(Z) + \langle u, vB_{p-1}(Z)\rangle$$

pour toute matrice Z, *et tout entier* $p = 1, 2, \ldots, n$.

Démonstration. – Ajouter uv à Z revient à ajouter le vecteur $u_1 v$ à la première ligne de Z, le vecteur $u_2 v$ à la deuxième ligne de $Z, \ldots,$ le vecteur $u_n v$ à la dernière ligne de Z (on a désigné par $u_1, \ldots, u_n$ les coordonnées de u). Comme Q_p est la somme des mineurs principaux d'ordre p, on voit que la fonction polynomiale $v \longrightarrow Q_p(Z+uv)$ ne contient pas de terme homogène de degré supérieur ou égal à 2. On en déduit en utilisant la formule de Taylor pour les fonctions polynômes et le fait que la fonction B_{p-1} est la différentielle de la fonction Q_p (voir 3.5) :

$$Q_p(Z+uv) = Q_p(Z) + \langle uv, B_{p-1}(Z) \rangle$$

et il reste seulement à écrire que

$$\langle uv, B_{p-1}(Z) \rangle = tr(uvB_{p-1}(Z)) = \langle u, vB_{p-1}(Z) \rangle.$$

4.5. On peut maintenant montrer que chaque ligne de la matrice $C(vB_{n-1}(Y), \ldots, v)$ est invariante par R. C'est évident pour la dernière ligne. Supposons qu'on ait $vB_{p-1}(Y+uv) = vB_{p-1}(Y)$ pour tous Y, u et v. On a alors :

$$\begin{aligned} vB_p(Y+uv) &= v(B_{p-1}(Y+uv)\ (Y+uv) - Q_p(Y+uv)) \\ &= v(B_{p-1}(Y)\, Y - Q_p(Y)) + vB_{p-1}(Y)uv - \langle u, vB_{p-1}(Y) \rangle v \end{aligned}$$

d'après la formule admise à l'ordre $p-1$ et le lemme 4.4. Comme $vB_{p-1}(Y)uv = \langle u, vB_{p-1}(Y) \rangle v$, on trouve bien que

$$vB_p(Y + uv) = vB_p(Y).$$

On peut maintenant énoncer :

4.6. Proposition. – 1) *La fonction polynomiale* $f_1 : \mathfrak{G}^* \longrightarrow M_n$ *définie par* $f_1(v, Y) = C(vB_{n-1}(Y), \ldots, v)$ *est invariante par* G *au sens suivant :*

$$f_1(\mathrm{A}d^*(u, x)l) = f(l)x^{-1}$$

pour tous (u, x) *dans* G *et* l *dans* $\mathfrak{G}^*$.

2) *Soit* $f : \mathfrak{G}^* \longrightarrow M_{p,n}$ *une fonction polynomiale à valeurs dans l'espace* $M_{p,n}$ *des matrices à* p *lignes et* n *colonnes, telle que :*

$$f(\mathrm{A}d^*(u, x)l) = f(l)x^{-1}$$

pour tous (u, x) *dans* G *et* l *dans* G*. *Alors il existe une et une seule matrice* A *dans* $M_{p,n}$ *telle que* $f(v, Y) = AC(vB_{n-1}(Y), \ldots, v)$

pour tout (v, Y) *dans* $\mathfrak{g}^*$. *En particulier lorsque* $p = 1$, *les lignes de la matrice* $\mathrm{C}(v\mathrm{B}_{n-1}(\mathrm{Y}), \ldots, v)$, *considérées comme des fonctions de* (v, Y), *forment une base de l'espace vectoriel des fonctions invariantes* $f : \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathrm{M}_{1,n}$.

Démonstration. – La première partie de l'énoncé a été démontrée plus haut. Dans la deuxième partie, l'existence de la matrice A résulte de 4.2 $(\mathrm{A} = f(e_n, \mathrm{Y}_0))$ et son unicité peut être expliquée par exemple en disant que si $f(v, \mathrm{Y}) = \mathrm{AC}(v\mathrm{B}_{n-1}(\mathrm{Y}), \ldots, v)$, alors on a nécessairement $f(e_n, \mathrm{Y}_0) = \mathrm{A}$, ou bien en remarquant que la matrice $\mathrm{C}(v\mathrm{B}_{n-1}(\mathrm{Y}), \ldots, v)$ est inversible lorsque (v, Y) est régulier. On remarquera que cette deuxième partie de l'énoncé dit en réalité que l'espace *vectoriel* des fonctions polynomiales invariantes $f : \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathrm{M}_{p,n}$ est de dimension np et en fournit une base.

4.7. Soit $g_1 : \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathrm{M}_n$ la fonction *rationnelle* définie par :

$$g_1(v, \mathrm{Y}) = \mathrm{L}(u_0, \mathrm{Y}u_0, \ldots, \mathrm{Y}^{n-1}u_0)$$

où u_0 est l'unique vecteur colonne (fonction de v et Y) tel que $\langle u_0, v\mathrm{B}_{n-1}(\mathrm{Y})\rangle = 1$ et $\langle u_0, v\mathrm{B}_p(\mathrm{Y})\rangle = 0$ si $0 \leqslant p \leqslant n-2$ (voir 3.13). Du fait que la matrice $g_1(v, \mathrm{Y})$ est l'inverse de la matrice $f_1(v, \mathrm{Y})$ de 4.6 lorsque (v, Y) est régulier, on voit que g_1 est invariante par G au sens suivant :

$$g_1(\mathrm{A}d^*(u, x)l) = x\, g_1(l)$$

pour tous (u, x) dans G et l dans $\mathfrak{g}^*_r$. On peut déduire de ceci un énoncé analogue à celui de la proposition 4.6 concernant cette fois-ci les fonctions *rationnelles* $g : \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathrm{M}_{n,p}$ invariantes sous l'action de G. On se contentera des remarques suivantes : l'espace vectoriel des fonctions rationnelles invariantes $g : \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathrm{M}_{n,1}$ (à valeurs dans l'espace $\mathrm{M}_{n,1}$ des vecteurs colonnes) est de dimension n et admet comme base les colonnes de $g_1(v, \mathrm{Y})$ (considérées comme fonctions de (v, Y)). En particulier le premier vecteur u_0 est caractérisé comme suit : c'est l'unique fonction rationnelle $u_0 : \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathrm{M}_{n,1}$ telle que $u_0(\mathrm{A}d^*(u, x)(v, \mathrm{Y})) = xu_0(v, \mathrm{Y})$ pour tous (u, x) dans G et l dans $\mathfrak{g}^*_r$ et $u_0(e_n, \mathrm{Y}_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

4.8. L'intérêt de la fonction invariante $f_1 : \mathfrak{g}^* \longrightarrow M_n$ réside en ce qu'elle a une relation étroite avec les fonctions invariantes par le sous-groupe distingué R. On sait déjà que chacune des n^2 fonctions scalaires $h_{ij} : (v, Y) \longrightarrow \langle E_{ij}, f_1(v, Y) \rangle$ (où $(E_{ij})_{ij}$ est une base choisie de M_n), (autrement dit chaque fonction coefficient de f_1), est invariante par R (voir 4.5). En sens inverse, considérons une fonction polynomiale scalaire $h : \mathfrak{g}^* \longrightarrow K$, invariante par R. Si (v, Y) est régulier, on a

$$h(v, Y) = h(\mathrm{Ad}^*(u, x)\,(e_n, Y_0)) = h(\mathrm{Ad}^*(u, 1)\,\mathrm{Ad}^*(0, x)\,(e_n, Y_0))$$

avec les notations du théorème 3.8. On a donc en fait

$$h(v, Y) = h(e_n x^{-1}, xY_0 x^{-1}) = h(v, xY_0 x^{-1})$$

avec évidemment $x^{-1} = C(vB_{n-1}(Y), \ldots, v) = f_1(v, Y)$ et $x = L(u_0, Yu_0, \ldots, Y^{n-1}u_0)$. Dans le dernier membre des égalités écrites, tout est polynomial en (v, Y) sauf x dont les éléments contiennent en dénominateur le semi-invariant fondamental F_1. Un raisonnement élémentaire montre alors qu'il existe un entier $d \geqslant 0$ tel que le produit $F_1^d h$ soit une fonction polynomiale en les n^2 fonctions h_{ij}. Comme F_1 est elle-même une fonction polynomiale en les h_{ij}, on voit que h appartient au corps de fractions engendré par les h_{ij}. On peut énoncer :

4.9. Proposition. – *Les fonctions h_{ij} sont algébriquement indépendantes. Le corps des fonctions rationnelles de $\mathfrak{g}^*$ qui sont invariantes par* R *est engendré par $h_{11}, \ldots, h_{nn}$.*

Démonstration. – Reprenons la fonction $f_1 : \mathfrak{g}^* \longrightarrow M_n$. Il est immédiat que l'image de f_1 contient le groupe $GL(n, K)$ des éléments inversibles de l'algèbre associative M_n. En effet, la restriction de f_1 à l'ouvert $\mathfrak{g}_r^*$ n'est autre que la projection $(u, x) \longrightarrow x^{-1}$ de G sur G_0 une fois $\mathfrak{g}_r^*$ identifié à G au moyen de l'application orbitale de (e_n, Y_0). Ainsi l'image de l'application polynomiale f_1 est Zariski-dense dans M_n et par suite les n^2 fonctions $h_{11}, \ldots, h_{nn}$ sont algébriquement indépendantes. Soit maintenant $h = P_1/P_2$ une fraction rationnelle invariante, P_1 et P_2 étant des fonctions polynômes. On a alors $P_1(v, Y)\,P_2(v, xY_0x^{-1}) = P_2(v, Y)\,P_1(v, xY_0x^{-1})$ pour tout (v, Y) régulier, sachant que $x = f_1(v, Y)$. On voit en multipliant éventuellement les deux membres de l'égalité écrite par une puissance convenable de F_1, qu'il existe deux fonctions polynômes p_1 et p_2 sur M_n telles que :

$$P_1(v, Y)\, p_1(f_1(v, Y)) = P_2(v, Y)\, p_2(f_1(v, Y))$$

pour tout (v, Y) dans $\mathfrak{g}^*$.

4.10. *Remarques.* – 1) Le groupe G_0 opère naturellement dans le corps $K(h_{11}, \ldots, h_{nn})$ des fonctions rationnelles de $\mathfrak{g}^*$ invariantes par le sous-groupe distingué R. En fait, cette opération provient d'une représentation *linéaire* de G_0 dans l'espace vectoriel $\sum_{i,j} K\, h_{ij}$, qui n'est pas autre chose que celle par multiplications à droite $X \longrightarrow Xx^{-1}$ dans l'espace M_n, une fois $Kh_{11} \oplus \ldots \oplus Kh_{nn}$ identifié convenablement à M_n (on a en effet $f_1(vx^{-1}, xYx^{-1}) = f_1(v, Y)x^{-1}$). Bien entendu, on peut déduire de ce résultat, celui des semi-invariants du groupe G tel qu'il est énoncé dans le théorème 3.8, à condition d'appliquer le théorème fondamental des invariants du groupe $GL(n)$ ([10], théorème 2.6.A).

2) On a vu dans 4.8 que toute fonction polynomiale h sur $\mathfrak{g}^*$ qui est invariante par R est dans le localisé de $K[h_{11}, \ldots, h_{nn}]$ par rapport à F_1. Je pense qu'en fait l'algèbre des fonctions polynômes R-invariantes est $K[h_{11}, \ldots, h_{nn}]$ (il en est bien ainsi lorsque $n = 2$).

5. Application à la théorie classique des invariants de $GL(n)$.

5.1. Il est utile d'étudier la manière dont le groupe $G_0 = GL(n)$ opère dans l'ouvert $\mathfrak{g}_r^*$. Soit (v, Y) dans $\mathfrak{g}_r^*$. On sait que $(v, Y) = Ad^*(u, x)\,(e_n, Y_0) = Ad^*(0, x)\, Ad^*(x^{-1}u, 1)\,(e_n, Y_0)$, avec $x = g_1(v, Y)$ (notation expliquée dans 4.7) et $x^{-1}u$ est le vecteur colonne fonction de (v, Y) déterminé dans le théorème 3.8. On a donc $(v, Y) = Ad^*(0, x)\,(e_n, Y_0 + (x^{-1}u)e_n)$. Comme la matrice $(x^{-1}u)e_n$ a ses $(n-1)$ premières colonnes nulles tandis que la dernière est le vecteur $x^{-1}u$, on voit qu'en fait la matrice $Y_0 + x^{-1}ue_n$ n'est autre que la *matrice compagnon*

$$\widetilde{Y} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & & a_n \\ 1 & 0 & & & a_{n-1} \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & 0 & \\ 0 & & & 1 & a_1 \end{pmatrix}$$

de Y, qu'on désignera aussi par $s(a_1, \ldots, a_n)$ lorsqu'on voudra insister sur la manière dont elle dépend de $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

5.2. PROPOSITION. – 1) *Soit* m *un entier* $\geqslant 0$, *et soit* $F : \mathfrak{g}^* \longrightarrow K$ *une fonction polynôme telle que :*

$$F(vx^{-1}, xYx^{-1}) = (\text{dét}\, x)^{-m}\, F(v, Y)$$

pour tous x *dans* G_0 *et* (v, Y) *dans* $\mathfrak{g}^*$. *Alors* F *est le produit de* F_1^m *par une fonction polynôme* G_0*-invariante.*

2) *L'algèbre des fonctions polynômes* G_0*-invariantes est celle* $K[Q_1, \ldots, Q_n]$ *engendrée par les fonctions* $Q_1, \ldots, Q_n$, *(coefficients du polynôme caractéristique introduites en 3.5) (considérées comme des fonctions sur* $\mathfrak{g}^*$, *indépendantes de la première variable* v*).*

3) *Soit* $Q : \mathfrak{g}_r^* \longrightarrow K^n$ *la fonction polynomiale définie par* $Q(v, Y) = (Q_1(Y), \ldots, Q_n(Y))$ *pour tout* (v, Y). *L'application* Q *est surjective, partout de rang maximum, et ses fibres sont les orbites de* G_0 *dans* $\mathfrak{g}_r^*$.

4) *Soit* $S : K^n \longrightarrow \mathfrak{g}_r^*$ *définie par :*

$$S(a_1, \ldots, a_n) = (e_n, s(a_1, \ldots, a_n))$$

L'application S *est une section de l'application* Q. *Le sous-espace affine de* $\mathfrak{g}^*$ *qui est l'image de* S *est une sous-variété transverse aux orbites de* G_0 *dans* $\mathfrak{g}_r^*$.

Démonstration. – Soit F comme dans l'énoncé. D'après ce qui a été dit dans 5.1, on : $F(v, Y) = (F_1(v, Y))^m\, F(e_n, \widetilde{Y})$ lorsque (v, Y) est régulier, et par suite pour tout (v, Y). Ceci démontre à la fois les deux premières parties de l'énoncé. Les deux dernières sont des extensions triviales de résultats bien connus dans le cadre de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_0$.

5.3. Voici un problème apparemment plus difficile : on fait opérer le groupe G_0 dans l'espace vectoriel des $(u_1, u_2, \ldots, u_j; v; Y)$ où $u_1, \ldots, u_j$ des vecteurs colonnes, v est un vecteur ligne et Y est une matrice, de la manière suivante :

$$x(u_1, \ldots, u_j; v; Y) = (xu_1, \ldots, xu_j; vx^{-1}; xYx^{-1})$$

(Il y a donc j vecteurs covariants $u_1, u_2, \ldots, u_j$ et un vecteur contravariant v). On cherche les fonctions polynomiales F telles que :

$$F(x(u_1, \ldots, u_j; v; Y)) = (\text{dét}\, x)^{-m}\ F(u_1, \ldots, u_j; v; Y)$$

(où m est un entier $\geqslant 0$) pour tout x dans G_0, "identiquement" en $u_1, \ldots, u_j, v, Y$. Le cas où j est nul a été examiné ci-dessus. Pour trouver ces fonctions F, on raisonne de la manière suivante : dans l'ouvert où $F_1(v, Y)$ est non nul, on a :

$$F(u_1, \ldots, u_j; v; Y) = F(xx^{-1}u_1, \ldots, xx^{-1}u_j; e_n x^{-1}; x\widetilde{Y}x^{-1})$$

avec $x^{-1} = C(vB_{n-1}(Y), \ldots, v)$, de sorte que :

$$F(u_1, \ldots, u_j; v; Y) = (F_1(v, Y))^m\ F(x^{-1}u_1, \ldots, x^{-1}u_j; e_n, \widetilde{Y})$$

Mais les coordonnées de chaque vecteur colonne $x^{-1}u_k$ $(1 \leqslant k \leqslant j)$ sont les "produits scalaires" $\langle u_k, vB_p(Y)\rangle$ (p variant de 0 à $(n-1)$). Posons $F_{kp}(u_1, \ldots, u_j; v; Y) = \langle Y^p u_k, v\rangle$ (p variant de 0 à $(n-1)$ et k de 1 à j). Chaque fonction F_{kp} est une fonction polynomiale invariante par G_0 et on a ainsi démontré le résultat suivant :

5.4. PROPOSITION. – *Soient* $Q_1, \ldots, Q_n$ *des fonctions polynômes sur* $\mathfrak{g}_0$ *qui engendrent l'algèbre des fonctions polynômes* G_0-*invariantes sur* $\mathfrak{g}_0$. *L'algèbre des fonctions polynômes* F *dépendant de* j *vecteurs covariants* $u_1, \ldots, u_j$, *d'un vecteur contravariant* v, *et d'une matrice* Y, *qui sont invariantes par l'action de* G_0 *décrite plus haut est engendrée par* $Q_1, \ldots, Q_n$ *et les fonctions* $F_{kp}(1 \leqslant k \leqslant j, 0 \leqslant p \leqslant n-1)$. *Une fonction* F *semi-invariante sous cette action de* G_0, *de poids* $m \geqslant 0$, *est le produit de* F_1^m *par une fonction polynôme invariante.*

5.5. Dans la situation examinée dans 5.3, on n'a pas parlé des semi-invariants de poids négatif. Pour chaque vecteur covariant u et chaque matrice X, posons :

$$L_1(u,x) = \text{dét}(u, Xu, \dots, X^{n-1}u)$$

le second membre étant le déterminant de la matrice $L(u, Xu, \dots, X^{n-1}u)$. La fonction L_1 est une fonction polynôme non nulle, semi-invariante de poids -1, ce qui signifie :

$$L_1(xu, xXx^{-1}) = (\text{dét}\, x)\, L_1(u, X)$$

pour tous x, u et X. On remarquera que cette fonction L_1 est susceptible d'une interprétation analogue à celle donnée pour F_1 dans 3.9, comme on le voit en passant de l'espace des (v, Y) à celui des (u, X) par l'opération de transposition des matrices. Voici un exemple de la théorie classique des invariants :

5.6. PROPOSITION. – *Soit* $F : (u, v, Y) \longrightarrow F(u, v, Y)$ *une fonction polynôme dépendant d'un vecteur covariant* u, *d'un vecteur contravariant* v *et d'une matrice* Y. *Soit* m *un entier. Supposons que* $F(xu, vx^{-1}, xYx^{-1}) = (\text{dét}\, x)^{-m} F(u, v, Y)$ *pour tout* x *dans* $GL(n)$. *Si* m *est positif (resp. négatif), la fonction* F *est le produit de* F_1^m (resp. L_1^{-m}) *par une fonction polynôme invariante. L'algèbre des fonctions invariantes est engendrée par les* $2n$ *fonctions* $Q_1(Y), \dots, Q_n(Y), \langle u, v \rangle, \langle Yu, v \rangle, \dots, \langle Y^{n-1}u, v \rangle$.

Le théorème 30.1 du chapitre VI de [7] énonce une partie de la partie de la proposition précédente relative aux invariants. La détermination des semi-invariants est utile parce qu'elle fournit les invariants de $G_0' = SL(n)$.

5.7. COROLLAIRE. – *L'algèbre des fonctions polynômes* $F(u, v, Y)$ *invariantes par* $SL(n)$ *est engendrée par les* $(2n+2)$ *fonctions* $Q_1(Y), \dots, Q_n(Y), \langle u, v \rangle, \dots, \langle Y^{n-1}u, v \rangle, F_1(v, Y), L_1(u, Y)$. *Soit* $A(u, v, Y)$ *le déterminant de la matrice à* n *lignes et* n *colonnes dont l'élément se trouvant à la place* (i, j) *est* $\langle Y^{i-1}u, vY^{n-j} \rangle$. *La fonction* A *est* G_0*-invariante et la "seule relation" entre les générateurs de l'algèbre des fonctions* $SL(n)$*-invariantes est la suivante* : $F_1 L_1 = A$.

5.8. Bien que les résultats ne soient plus aussi complets que ci-dessus, les mêmes méthodes permettent de trouver les fonctions *rationnelles* dépendant de plusieurs vecteurs covariants ou contravariants et de plusieurs matrices. Soit v un vecteur contravariant et soit Y une matrice à qui on fera jouer un rôle privilégié. Soit w un autre vecteur contravariant. On s'intéresse au vecteur ligne $wg_1(v,\mathrm{Y}) = w\mathrm{L}(u_0, \mathrm{Y}u_0, \ldots, \mathrm{Y}^{n-1}u_0)$ où u_0 est l'unique vecteur colonne (fontion de v et Y) tel que $\langle u_0, v\mathrm{B}_{n-1}(\mathrm{Y})\rangle = 1$ et $\langle u_0, v\mathrm{B}_p(\mathrm{Y})\rangle = 0$ si $0 \leqslant p \leqslant n-2$ (on suppose évidemment que $\mathrm{F}_1(v,\mathrm{Y})$ est non nul, voir 4.7). La première coordonnée de ce vecteur ligne est le produit scalaire $\langle u_0, w\rangle$ et on voit immédiatement en utilisant les formules de Cramer donnant les coordonnées de u_0 que $\langle u_0, w\rangle = \mathrm{dét}(w, v\mathrm{B}_{n-2}(\mathrm{Y}), .., v)/\mathrm{F}_1(v,\mathrm{Y})$. On a de même pour les autres coordonnées $\langle \mathrm{Y}^p u_0, w\rangle$ $(0 \leqslant p \leqslant n-1)$: $\langle \mathrm{Y}^p u_0, w\rangle = \mathrm{dét}(w\mathrm{Y}^p, v\mathrm{Y}^{n-2}, \ldots, v)/\mathrm{F}_1(v,\mathrm{Y})$. Ainsi les coordonnées du vecteur ligne $wg_1(v,\mathrm{Y})$ sont des fonctions rationnelles invariantes par G_0, chacune de ces coordonnées étant le quotient de deux polynômes semi-invariants de même poids 1. Une façon intrinsèque d'expliquer ce fait consiste à dire que la fonction $(w, v, \mathrm{Y}) \longrightarrow wg_1(v,\mathrm{Y})$ est G_0-invariante, ce qui est évident compte-tenu de ce que $g_1(vx^{-1}, x\mathrm{Y}x^{-1}) = xg_1(v,\mathrm{Y})$ (voir 4.7).

5.9. De même, prenons une autre matrice Z. Alors la fonction $(v, y, \mathrm{Z}) \longrightarrow f_1(v,\mathrm{Y})\,\mathrm{Z}g_1(v,\mathrm{Y})$ à valeurs dans M_n est invariante par G_0 puisque

$$f_1(vx^{-1}, x\mathrm{Y}x^{-1}) = f_1(v,\mathrm{Y})x^{-1} \quad \text{et} \quad g_1(vx^{-1}, x\mathrm{Y}x^{-1}) = xg_1(v,\mathrm{Y}).$$

Pour être plus précis, remarquons la $\mathrm{q}^{\text{ème}}$ ligne de la matrice $f_1(v,\mathrm{Y})\mathrm{Z}$ est $v\mathrm{B}_{n-q}(\mathrm{Y})\mathrm{Z}$ (produit de la $\mathrm{q}^{\text{ème}}$ ligne de $f_1(v,\mathrm{Y})$ par Z). Il en résulte que l'élément de la matrice $f_1(v,\mathrm{Y})\mathrm{Z}\,g_1(v,\mathrm{Y})$ se trouvant à la place $(q, p+1)$ est :

$$\langle \mathrm{Y}^p u_0, v\mathrm{B}_{n-q}(\mathrm{Y})\mathrm{Z}\rangle = \mathrm{dét}(v\mathrm{B}_{n-q}(\mathrm{Y})\mathrm{Z}\mathrm{Y}^p, v\mathrm{B}_{n-2}(\mathrm{Y}), .., v)/\mathrm{F}_1(v,\mathrm{Y})$$

(p variant de 0 à $(n-1)$ et q de 1 à n). C'est encore une fois une fonction rationnelle invariante comme quotient de deux fonctions polynômes semi-invariantes de poids 1.

5.10. Soient P et Q deux fonctions polynômes dépendant des vecteurs covariants $u_1, u_2, \ldots, u_j$, des vecteurs contravariants $v, w_1, \ldots, w_j$ et des matrices $\mathrm{Y}, \mathrm{Z}_1, \ldots, \mathrm{Z}_k$. Supposons que la fraction rationnelle P/Q soit invariante, ou encore (en utilisant une notation comprimée) que :

$$\mathrm{P}(u\,;v,w\,;\mathrm{Y},\mathrm{Z})\ \mathrm{Q}(xu\,;vx^{-1},wx^{-1}\,;x\mathrm{Y}x^{-1},x\mathrm{Z}x^{-1})$$
$$=\mathrm{Q}(u\,;v,w\,;\mathrm{Y},\mathrm{Z})\ \mathrm{P}(xu\,;vx^{-1},wx^{-1}\,;x\mathrm{Y}x^{-1},x\mathrm{Z}x^{-1})$$

pour tous x dans G_0 et $u, v, w, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}$. En particulier, on suppose que $\mathrm{F}_1(v, \mathrm{Y})$ est non nul et on prend $x = f_1(v, \mathrm{Y})$ dans l'égalité précédente. On sait alors que $v x^{-1} = e_n$ et que $x\mathrm{Y}x^{-1}$ est la matrice compagnon $\widetilde{\mathrm{Y}}$ de Y. On a ainsi

$$\mathrm{P}(u\,;v,w\,;\mathrm{Y},\mathrm{Z})\ \mathrm{Q}(f_1(v,\mathrm{Y})\,u\,;e_n,wg_1(v,\mathrm{Y})\,;\widetilde{\mathrm{Y}},f_1(v,\mathrm{Y})\mathrm{Z}g_1(v,\mathrm{Y}))$$
$$=\mathrm{Q}(u\,;v,w\,;\mathrm{Y},\mathrm{Z})\ \mathrm{P}(f_1(v,\mathrm{Y})\,u\,;e_n,wg_1(v,\mathrm{Y})\,;\widetilde{\mathrm{Y}},f_1(v,\mathrm{Y})\mathrm{Z}g_1(v,\mathrm{Y}))$$

5.11. PROPOSITION. – *Le corps des fractions rationnelles dépendant de* $u_1, \ldots, u_j, v, w_1, \ldots, w_i, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}_1, \ldots, \mathrm{Z}_k$ *et invariantes par* $\mathrm{GL}(n)$ *est engendré par les fonctions suivantes :*

$\mathrm{Q}_1(\mathrm{Y}), \ldots, \mathrm{Q}_n(\mathrm{Y})$

$\langle \mathrm{Y}^p u_q, v\rangle \qquad (0 \leqslant p \leqslant n-1,\ 1 \leqslant q \leqslant j)$

$\text{dét}\,(w_q \mathrm{Y}^p, v\mathrm{Y}^{n-2}, \ldots, v)/\mathrm{F}_1(v,\mathrm{Y}) \qquad (1 \leqslant q \leqslant i,\ 0 \leqslant p \leqslant n-1)$

$\text{dét}\,(v\mathrm{Y}^q \mathrm{Z}_l \mathrm{Y}^p, v\mathrm{Y}^{n-2}, \ldots, v)/\mathrm{F}_1(v,\mathrm{Y}) \qquad (0 \leqslant q, p \leqslant n-1,\ 1 \leqslant l \leqslant k)$

6. Le semi-invariant fondamental du groupe $G_{kp,p}$.

6.1. On s'intéresse au groupe $G = M_{n,p} \times G_0$, lorsque n est un multiple entier kp de p. On sait que l'indice de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ correspondante est zéro (2.16). Lorsque $p = 1$ et $k = n$, il s'agit du groupe affine. Dans ce qui suit, on s'efforcera d'obtenir des résultats analogues à ceux obtenus dans le cas affine, lorsque p est supérieur où égal à 2. Pour cela, on introduit les notations suivantes : pour chaque j tel que $1 \leqslant j \leqslant k$, on désignera par E_j la matrice à p lignes et n colonnes dont l'écriture *en blocs* $p \times p$ est la suivante : $E_j = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, la matrice 1 étant à la $j^{\text{ème}}$ place (comptée en partant de la gauche). On désignera par Z_0 la matrice à n lignes et n colonnes dont l'écriture en blocs $p \times p$ est exactement celle de la matrice de Jordan Y_0 introduite dans 3.6. Autrement dit :

$$Z_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

où les 0 et 1 sont des matrices $p \times p$. Soit l_0 la forme linéaire sur $\mathfrak{g}$ définie par le couple (E_k, Z_0). Pour éviter des redites, on l'appellera la forme linéaire *distinguée*.

6.2. LEMME. – *Le stabilisateur* G^{l_0} *de la forme linéaire* l_0 *est trivial.*

Démonstration. – Lorsque $n = p$, ou encore $k = 1$, on a $l_0 = (1, 0)$ où 1 est la matrice unité $n \times n$. On vérifie alors directement que G^{l_0} est trivial. Supposons donc le lemme démontré pour $k = 1, 2, \ldots, q-1$ et démontrons-le pour $k = q$. Pour cela, on remarque qu'un élément (U, x) de G stabilise l_0 si et seulement si $E_q x = E_q$ et $xZ_0 + UE_q = Z_0 x$. La première égalité montre que :

$$x = \begin{pmatrix} x' & U \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

avec x' dans $GL(n-p)$, U' dans $M_{n-p,p}$, 0 dans $M_{p,n-p}$, et 1 étant la matrice unité $p \times p$. Les mêmes calculs que ceux détaillés dans la démonstration du lemme 2.11 permettent de voir que (U', x') stabilise la forme linéaire distinguée sur $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}_{n-p,p}$. L'hypothèse de récurrence dit alors que $x' = 1$ et $U' = 0$. Il ne reste plus qu'à constater que la condition restante $UE_q = 0$ impose $U = 0$.

6.3. Soit (V, Y) dans $\mathfrak{g}^*$. On désignera par $C(VY^{k-1}, VY^{k-2}, .., V)$ (où $k = n/p$) la matrice à n lignes et n colonnes dont les p premières lignes sont celles de VY^{k-1} les p suivantes sont celles de $VY^{k-2}, \ldots,$ les p dernières étant celles de V. On est amené à définir une fonction polynôme $F_p : \mathfrak{g}^* \longrightarrow K$ par la formule :

$$F_p(V, Y) = \text{dét}(VY^{k-1}, VY^{k-2}, \ldots, V)$$

pour tout (V, Y) dans $\mathfrak{g}^*$, le second membre désignant le déterminant de la matrice $C(VY^{k-1}, \ldots, V)$. On a évidemment

$F_p(Vx^{-1}, xYx^{-1}) = (\text{dét}\,x)^{-1} F_p(V,Y)$ pour tous x dans G_0 et (V,Y) dans $\mathfrak{g}^*$. On a en fait :

6.4. PROPOSITION. – *La fonction* F_p *est un semi-invariant de poids* 1. *Autrement dit, on a :*

$$F_p(\mathrm{A}d^*(U,x)l) = (\text{dét}\,x)^{-1} F_p(l)$$

pour tous (U,x) *dans* G *et* l *dans* $\mathfrak{g}^*$. *Soit* m *un entier* $\geqslant 0$. *Toute fonction semi-invariante de poids* m *est de la forme* $c\,F_p^m$, *où* c *est un scalaire.*

Démonstration. – Puisque l'orbite de la forme linéaire distinguée l_0 est dense dans $\mathfrak{g}^*$, il suffit de démontrer que :

$$F_p(\mathrm{A}d^*(U,x)l_0) = (\text{dét}\,x)^{-1} F_p(l_0)$$

chaque fois que (U,x) est dans G pour être sûr que F_p est semi-invariante de poids 1. Il reste donc à voir que :

$$F_p(E_k, Z_0 + UE_k) = F_p(E_k, Z_0)$$

pour tout U. Or il est facile de vérifier que :

$$E_k(Z_0 + UE_k)^j = (0, \ldots, 0, 1, *, \ldots, *)$$

la matrice 1 (à p lignes et p colonnes) se trouvant à la $(k-j)^{\text{ème}}$ place comptée en partant de la gauche, et ceci pour $j = 1, 2, \ldots, (k-1)$. Il en résulte que $F_p(E_k, Z_0 + UE_k) = 1 = F_p(E_k, Z_0)$. La dernière affirmation de la proposition provient de ce que le quotient de deux semi-invariants non nuls de même poids est une fonction rationnelle invariante qui ne peut être que constante du fait de l'existence d'une orbite ouverte.

6.5. PROPOSITION. – *Soit* l *dans* $\mathfrak{g}^*$. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1) *Le stabilisateur infinitésimal* $\mathfrak{g}^l$ *de* l *est trivial.*

2) $F_p(l) \neq 0$

3) *Le stabilisateur global* G^l *de* l *est trivial.*

Démonstration. – a) Montrons que si $\mathfrak{g}^l = 0$, alors $F_p(l)$ est non nul : si $\mathfrak{g}^l = 0$, l'orbite de l est ouverte dans $\mathfrak{g}^*$, c'est donc celle de la forme linéaire distinguée l_0, et par suite $F_p(l)$ est non nul car F_p est semi-invariante (proposition 6.4) avec $F_p(l_0) = 1$.

b) Supposons que $F_p(l)$ ne soit pas nul. Alors, en écrivant $l = (V, Y)$, on voit que V est nécessairement de rang maximum p. Il est clair que si on désire démontrer que le stabilisateur de l est trivial, il suffit de démontrer la même propriété pour un point quelconque de l'orbite de l. On peut donc supposer que l est de la forme indiquée dans 2.10. Autrement dit, on a $V = E_k$ et :

$$Y = \begin{pmatrix} Y' & 0 \\ V' & 0 \end{pmatrix}$$

avec Y' dans $M_{n-p,n-p}$ et V' dans $M_{p,n-p}$. Mais alors on constate immédiatement que la condition $F_p(V, Y) \neq 0$ équivaut à la condition correspondante pour le couple (V', Y'), la différence étant ici que l'entier k a diminué d'une unité. On peut donc utiliser un raisonnement par récurrence sur k, sachant que lorsque $k = 1$, tout est dit dans 2.7.

7. Remarques.

7.1. On trouvera dans [8] § 7 des renseignements sur le semi-invariant fondamental F_1 du groupe affine du point de la théorie des représentations des algèbres de Lie semi-simples complexes. Il est remarquable que ces renseignements sont obtenus sans connaître la forme explicite de F_1 donnée plus haut. En contrepartie, la théorie des poids et racines et la structure de $\mathfrak{g}$-module de l'algèbre symétrique $\mathfrak{S}(\mathfrak{g})$ construite sur une algèbre de Lie semi-simple sont utilisées à fond.

7.2. Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie du groupe affine et soit $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ son algèbre universelle enveloppante. Appelons $\beta : \mathfrak{S}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ l'isomorphisme (*d'espaces vectoriels*) de Poincaré-Birkhoff-Witt. Il est facile de montrer que $\beta(F_1^m) = (\beta(F_1))^m$ pour tout entier $m \geqslant 0$. En particulier, on voit que la symétrisation β est un *isomorphisme d'algèbres* de $K[F_1]$ sur le *semi-centre* de $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ (voir éventuellement [3] pour la définition du semi-centre), et aussi un isomorphisme *d'algèbres* de $Y(\mathfrak{g}')$ sur le centre $Z(\mathfrak{g}')$ de $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}')$

(remarquez qu'en fait F_1 est dans $\mathfrak{S}(\mathfrak{g}'))$. Le corollaire 3.7 de [4] en résulte immédiatement avec $e = \beta(F_1)$. Remarquez que la définition explicite de e donnée dans [4] est celle du *déterminant* d'une matrice à coefficients dans $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ (qui est une algèbre non commutative) et que les coefficients de cette matrice ont eux-mêmes une définition compliquée.

7.3. Il est remarquable que la condition $F_1(v, Y) \neq 0$ qui exprime que l'orbite de $l = (v, Y)$ est ouverte est déjà apparue dans un tout autre domaine (théorie des systèmes dynamiques linéaires). Elle exprime que le système dynamique linéaire défini par le couple (v, Y) est *complètement observable* ([1], définition 4.12).

BIBLIOGRAPHIE

[1] C.I. BYRNES & M.A. GAUGER, Decidability criteria for the similarity problem, with applications to the moduli of linear dynamical systems, *Adv. in Math.*, 25 (1977), 59-90.

[2] J. DIEUDONNE & J. CARRELL, Invariant theory, Old and New, *Adv. in Math.*, 4 (1970), 1-80.

[3] J. DIXMIER, Algèbres enveloppantes, Cahiers Scientifiques Gauthier-Villars, 1974.

[4] J. DIXMIER, Sur les algèbres enveloppantes de $sl(n, \mathbf{C})$ et $af(n, \mathbf{C})$, *Bull. Sc. Math.*, 2ème série, 100 (1975), 57-95.

[5] F.R. GANTMACHER, The theory of matrices, vol. I, Chelsea Pub. Comp., 1960. .

[6] F. GROSSHANS, Observable Groups and Hilbert's Fourteenth Problem, *Amer. J. Math.*, 95 (1973), 229-253.

[7] G.B. GUREVITCH, Foundation of the theory of algebraic invariants, Noordhoff, 1964.

[8] A. JOSEPH, Second commutant theorems in enveloping algebra, *Amer. J. Math.*, 99 (1977), 1167-1192.

[9] M. RAÏS, Distributions homogènes sur des espaces de matrices, *Bull. Soc. Math. France*, Mémoire 30 (1972).

[10] H. WEYL, The Classical Groups, Princ. Univ. Press, 1946.

Mansucrit reçu le 16 novembre 1976
Proposé par J. Dieudonné.

Mustapha RAIS,
Département de Mathématiques
Université de Poitiers
40, avenue du Recteur Pineau
86022 Poitiers.