

MUSTAPHA RAIS

**Le théorème fondamental des invariants  
pour les groupes finis**

*Annales de l'institut Fourier*, tome 27, n° 4 (1977), p. 247-256

[http://www.numdam.org/item?id=AIF\\_1977\\_\\_27\\_4\\_247\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1977__27_4_247_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

# LE THÉORÈME FONDAMENTAL DES INVARIANTS POUR LES GROUPES FINIS

par **Mustapha RAIS**

---

## 1. Le procédé de la polarisation et le premier problème de la théorie classique des invariants.

1.1. Soit  $V$  un espace vectoriel de dimension finie sur un corps  $K$  de caractéristique zéro. Soit  $G$  un groupe (pour le moment quelconque) et soit  $r: G \rightarrow GL(V)$  une représentation linéaire de  $G$  dans  $V$ . On désignera par  $r^*$  la représentation contragrédiente de  $r$ . Le groupe  $G$  opère alors naturellement dans les algèbres symétriques  $S(V)$  et  $S(V^*)$  (où  $V^*$  est le dual de  $V$ ), qu'on identifiera (presque systématiquement) aux algèbres des fonctions polynomiales définies dans  $V^*$  et  $V$  (respectivement) et à valeurs dans  $K$ . Au moyen de cette identification, l'action de  $G$  dans  $S(V)$  et  $S(V^*)$  s'explique facilement. Par exemple, si  $x$  est dans  $G$  et  $f: V \rightarrow K$  est dans  $S(V^*)$ , la fonction  $x.f$  transformée de  $f$  par  $x$  est telle que:  $(x.f)(\varphi) = f(r(x)^{-1}.\varphi)$  pour tout  $\varphi$  dans  $V$ .

1.2. Dès que la représentation  $r$  de  $G$  dans  $V$  est donnée, on peut considérer pour chaque entier  $p \geq 1$  la représentation linéaire  $r_p$  de  $G$  dans  $V^p$  définie de la manière suivante :

$$r_p(x)(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p) = (r(x)\varphi_1, r(x)\varphi_2, \dots, r(x)\varphi_p)$$

pour tous  $x$  dans  $G$  et  $\varphi_1, \dots, \varphi_p$  dans  $V$ . Pour chaque tel  $p$ , on désignera par  $J_p$  l'algèbre des fonctions polynômes définies dans  $V^p$  qui sont invariantes par  $G$ . Le premier

problème fondamental de la théorie des invariants est celui de trouver « explicitement » un système de générateurs de l'algèbre  $J_p$  pour chaque  $p$ . Par exemple, lorsque  $V$  est  $\mathbf{C}^n$ , le problème correspondant à divers sous-groupes intéressants de  $GL(n, \mathbf{C})$  (opérant naturellement dans  $\mathbf{C}^n$ ) (en particulier les groupes classiques) est résolu dans [6]. Un exposé moderne des résultats de H. Weyl se trouve dans [5].

1.3. Soit  $f: V \rightarrow K$  une fonction polynôme homogène de degré  $m$ , invariante par  $G$ . On va lui associer pour chaque entier  $p \geq 1$  une famille  $f_\alpha$  de fonctions polynômes  $G$ -invariantes sur  $V^p$ , de la manière suivante : Soient  $t_1, \dots, t_p$  des éléments variables dans  $K$  et  $\nu_1, \dots, \nu_p$  des éléments variables dans  $V$ . Alors  $f(t_1\nu_1 + \dots + t_p\nu_p)$  est une fonction polynomiale en  $t_1, \dots, t_p$ , à coefficients dans l'algèbre des fonctions polynômes définies dans  $V^p$ . En utilisant la notation habituelle des multi-indices, on a donc :

$$f(t_1\nu_1 + \dots + t_p\nu_p) = \sum_{|\alpha|=m} (t^\alpha/\alpha!) f_\alpha(\nu_1, \dots, \nu_p)$$

de sorte que :

$$f_\alpha(\nu_1, \dots, \nu_p) = (\partial/\partial t)^\alpha f(t_1\nu_1 + \dots + t_m\nu_m).$$

Il est immédiat que chaque fonction  $f_\alpha$  est homogène de degré  $m$  et  $G$ -invariante. Parmi ces fonctions  $f_\alpha$  définies dans les divers espaces  $V^p$ , il en est une qui joue un rôle particulier, à savoir celle  $Pf: V^m \rightarrow K$  correspondant au cas où  $p = m$  et  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$  avec

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 1.$$

Il est bien connu que  $Pf$ , qu'on appelle la polarisée complète de  $f$ , est une forme multilinéaire symétrique sur  $V^m$  et que l'on a :  $m! f(\nu) = (Pf)(\nu, \dots, \nu)$  (formule d'Euler), de sorte que :

$$m! f(t_1\nu_1 + \dots + t_p\nu_p) = \sum t_{i_1} \dots t_{i_m} Pf(\nu_{i_1}, \dots, \nu_{i_m})$$

Ceci montre qu'à un coefficient de proportionnalité près, chaque  $f_\alpha(\nu_1, \dots, \nu_p)$  s'obtient à partir de  $Pf(\omega_1, \dots, \omega_m)$  en faisant  $\omega_1 = \dots = \omega_{\alpha_1} = \nu_1$ ,

$$\omega_{\alpha_1+1} = \dots = \omega_{\alpha_1+\alpha_2} = \nu_2, \dots, \omega_{\alpha_1+\dots+\alpha_{m-1}+1} = \dots = \omega_m = \nu_p.$$

Autrement dit, pour un entier  $p$  donné, les diverses fonctions  $f_\alpha(\nu_1, \dots, \nu_p)$  s'obtiennent à partir de la seule fonction  $Pf(\omega_1, \dots, \omega_m)$  en donnant de toutes les manières possibles aux « variables »  $\omega_1, \dots, \omega_m$  des « valeurs » prises parmi  $\nu_1, \dots, \nu_p$ .

1.4. Ce qui précède donne un procédé pour obtenir des fonctions invariantes sur  $V^p$  en partant des fonctions invariantes sur  $V$ . Ce procédé peut être explicité d'une autre manière qui fait intervenir les opérations de dérivations successives. Supposons que le groupe  $G$  opère linéairement dans un autre espace  $W$  (de dimension finie). Soit  $F: V \rightarrow W$  une fonction polynomiale (ou plus généralement dérivable si  $K = \mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$ ) invariante par  $G$ , ce qui signifie :  $F(x.\nu) = x.F(\nu)$  pour tout  $x$  dans  $V$ . Alors la dérivée  $dF: V \rightarrow \text{Hom}(V, W)$  est aussi invariante (ce qui a un sens puisque  $G$  opère linéairement dans  $\text{Hom}(V, W)$  dès qu'il opère dans  $V$  et dans  $W$ ). De plus  $dF$  est homogène de degré  $m - 1$  si  $F$  est homogène de degré  $m$ . Soit maintenant  $f: V \rightarrow K$  une fonction invariante. Alors sa dérivée  $p$ -ième  $d^p f: V \rightarrow \otimes^p V^*$  est une fonction polynômiale définie dans  $V$  et à valeurs dans la puissance tensorielle  $p$ -ième de  $V^*$ . Autrement dit, chaque fois que  $\nu$  est dans  $V$ , la valeur  $(d^p f)(\nu)$  de  $d^p f$  au point  $\nu$  est une forme multilinéaire symétrique sur  $V^p$  et la fonction

$$(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_{p+1}) \longmapsto (d^p f)(\nu_1)(\nu_2, \dots, \nu_{p+1})$$

est une fonction polynômiale invariante sur  $V^{p+1}$ . En particulier, si  $f$  est homogène de degré  $m$ , la fonction  $d^m f$  est homogène de degré 0 et sa valeur en n'importe quel point de  $V$  est la polarisée complète  $Pf$  de  $f$ .

1.5. Fixons un entier  $p \geq 2$ , et désignons par  $A_p$  la sous-algèbre de  $J_p$  engendrée par les fonctions invariantes  $f_\alpha$  obtenues par le procédé indiqué dans 1.3. à partir de toutes les fonctions  $f$  homogènes invariantes sur  $V$ . Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions invariantes sur  $V$ , on a :

$$\begin{aligned} & l(t_1\nu_1 + \dots + t_p\nu_p)g(t_1\nu_1 + \dots + t_p\nu_p) \\ &= \sum_{\alpha, \beta} (t^{\alpha+\beta}/\alpha! \beta!) f_\alpha(\nu_1, \dots, \nu_p) g_\beta(\nu_1, \dots, \nu_p). \end{aligned}$$

Ceci montre que l'algèbre  $A_p$  est de type fini dès que l'algèbre  $J$  des fonctions polynômes invariants sur  $V$  est elle-même de type fini. Une autre remarque concernant l'algèbre  $A_p$  est la suivante : Faisons opérer linéairement le groupe  $G^p$  dans  $V^p$  au moyen de  $r^p$  (autrement dit :

$$r^p(x_1, \dots, x_p)(v_1, \dots, v_p) = (x_1 v_1, \dots, x_p v_p)$$

pour tous  $v_1, \dots, v_p$  dans  $V$  et  $x_1, \dots, x_p$  dans  $G$ ). Alors l'algèbre des fonctions polynômes définies dans  $V^p$  et invariante sous cette action de  $G^p$  s'identifie naturellement à  $\otimes^p J$ . C'est donc une sous-algèbre de  $A_p$ .

## 2. Le théorème fondamental des invariants pour les groupes finis.

**2.1.** Supposons désormais que  $G$  soit un sous-groupe *fini* de  $GL(V)$ , la représentation  $r$  étant la représentation naturelle de  $G$  dans  $V$ . Dans ces conditions, il est immédiat que l'algèbre  $S((V^*)^p)$  est entière sur l'algèbre des invariants du groupe fini  $G^p$  opérant dans  $V^p$ , laquelle algèbre est une sous-algèbre de  $A_p$ . Il en résulte que  $J_p$  est entière sur  $A_p$ . Si  $K$  est algébriquement clos, ce qu'on supposera désormais, on voit que tout caractère de l'algèbre  $A_p$  est la restriction à  $A_p$  d'un caractère de  $J_p$ , ce qui exprime qu'une certaine application est surjective. À l'opposé, on va montrer que cette application est « génériquement » injective. On sait en effet qu'il existe un ouvert de Zariski non vide  $U$  dans  $V$ , qui est  $G$ -invariant et qui a la propriété suivante : L'application de passage au quotient  $V \rightarrow V/G$  est localement injective dans  $U$ . Soient maintenant  $v_1, \dots, v_p$  et  $w_1, \dots, w_p$  dans  $V$  tels que  $F(v_1, \dots, v_p) = F(w_1, \dots, w_p)$  pour tout  $F$  dans  $A_p$ . Comme  $A_p$  contient les fonctions  $G^p$ -invariantes, il existe  $x_1, \dots, x_p$  dans  $G$  tels que

$$w_1 = x_1 \cdot v_1, \dots, w_p = x_p \cdot v_p.$$

On a donc :

$$\begin{aligned} f(t_1 v_1 + \dots + t_p v_p) &= f(t_1 x_1 \cdot v_1 + \dots + t_p x_p \cdot v_p) \\ &= f(t_1 v_1 + t_2 x_1^{-1} x_2 \cdot v_2 + \dots + t_p x_1^{-1} x_p \cdot v_p) \end{aligned}$$

pour tous  $t_1, \dots, t_p$  dans  $K$  et pour toute fonction  $f$ ,  $G$ -invariante sur  $V$ . Supposons que  $\nu_1$  soit dans  $U$  et appelons  $M$  un voisinage ouvert de  $\nu_1$  dans  $U$  dans lequel l'application  $V \rightarrow V/G$  est injective. Il existe un voisinage ouvert  $L$  de  $(1, 0, \dots, 0)$  dans  $K^p$  tel que  $t_1\nu_1 + \dots + t_p\nu_p$  aussi bien que  $t_1\nu_1 + t_2x_1^{-1}x_2 \cdot \nu_2 + \dots + t_px_1^{-1}x_p \cdot \nu_p$  soit dans  $M$  pour tout  $(t_1, \dots, t_p)$  dans  $L$ . Mais

$$t_1\nu_1 + \dots + t_p\nu_p \quad \text{et} \quad t_1\nu_1 + t_2x_1^{-1}x_2 \cdot \nu_2 + \dots + t_px_1^{-1}x_p \cdot \nu_p$$

sont  $G$ -conjugués d'après l'hypothèse faite plus haut. On a donc

$$t_1\nu_1 + \dots + t_p\nu_p = t_1\nu_1 + t_2x_1^{-1}x_2 \cdot \nu_2 + \dots + t_px_1^{-1}x_p \cdot \nu_p$$

pour tout  $(t_1, \dots, t_p)$  dans  $L$ , ce qui donne :

$$x_1 \cdot \nu_2 = x_2 \cdot \nu_2 = \omega_2, \dots, x_1 \cdot \nu_p = x_p \cdot \nu_p = \omega_p.$$

Autrement dit :  $(\nu_1, \dots, \nu_p)$  et  $(\omega_1, \dots, \omega_p)$  sont  $G$ -conjugués dans  $V^p$ . Il est clair maintenant qu'on peut énoncer : Il existe un ouvert de Zariski non vide  $U_p$  de  $V^p$  qui est  $G$ -invariant et dans lequel l'algèbre  $A_p$  sépare les orbites de  $G$ .

**2.2. THÉORÈME.** — *Sous les hypothèses faites dans 2.1, on peut affirmer que  $A_p$  et  $J_p$  ont même corps de fractions.*

Ceci est un résultat qui paraîtra sûrement évident aux spécialistes de géométrie algébrique « élémentaire ». La situation est en tout cas la suivante : Soient  $X$  et  $Y$  les variétés irréductibles définies respectivement par les algèbres  $J_p$  et  $A_p$ . Du fait que  $J_p$  est entière sur  $A_p$ , il existe un morphisme dominant  $u : X \rightarrow Y$  et le corps des fonctions  $K(X)$  est une extension finie du corps des fonctions  $K(Y)$ . Remarquons maintenant que  $X$  est la variété quotient  $V^p/G$ , et que c'est une variété normale ([4], [1]). On sait alors que le degré de  $K(X)$  sur  $K(Y)$  est le nombre d'éléments qui se trouvent dans une fibre « générique » de  $u$  ([2] § 5, Corollaire 1 du théorème 1). Le fait que  $A_p$  sépare les orbites de  $G$  dans un ouvert de  $V^p$  montre alors que ce degré est exactement 1, ou encore que  $X$  et  $Y$  ont même corps des fonctions rationnelles.

2.3. C'est ce théorème qu'on peut appeler le théorème fondamental des invariants des groupes finis. Il donne un procédé pour trouver les fonctions rationnelles invariantes sur  $V^p$  à partir des fonctions rationnelles invariantes sur  $V$ .

### 3. Relation entre les invariants du groupe adjoint d'une algèbre de Lie semi-simple et ceux d'un groupe de Weyl.

3.1. Voici une application de ce qui précède à la relation entre les invariants du groupe adjoint d'une algèbre de Lie semi-simple complexe et ceux du groupe de Weyl. Soit  $\mathcal{G}$  une algèbre de Lie semi-simple complexe. On désignera par  $G$  son groupe adjoint et par  $Ad: G \rightarrow GL(\mathcal{G})$  la représentation adjointe de  $G$ . La représentation  $Ad_p$ , définie comme dans 1.2, est une représentation linéaire de  $G$  dans  $\mathcal{G}^p$ . Soit maintenant  $\mathcal{H}$  une sous-algèbre de Cartan de  $\mathcal{G}$  et soit  $W$  le groupe de Weyl de  $(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ . On désignera par  $r$  la représentation naturelle de  $W$  dans  $\mathcal{H}$  et par  $r_p$  celle de  $W$  dans  $\mathcal{H}^p$ , définie dans 1.2. Il est immédiat que la restriction à  $\mathcal{H}^p$  d'une fonction polynôme définie dans  $\mathcal{G}^p$  et invariante par  $G$  est une fonction polynôme  $W$ -invariante sur  $\mathcal{H}^p$ . On dispose donc d'un homomorphisme d'algèbres  $R_p$  de l'algèbre des invariants de  $G$  dans l'algèbre des invariants de  $W$ . Lorsque  $p = 1$ , il s'agit d'un *isomorphisme* d'algèbres, d'après un théorème classique de Chevalley ([3], théorème 7.3.5). Les exemples qui suivent montrent qu'il n'en est plus ainsi pour  $p > 1$ .

3.2. Soit  $f$  une fonction polynôme sur  $\mathcal{G}$ , invariante par  $G$ . Alors la fonction  $F: \mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathbf{C}$  définie par  $F(X, Y) = f([X, Y])$  (pour tous  $X$  et  $Y$  dans  $\mathcal{G}$ ) est  $G$ -invariante, et  $F(X, Y) = 0$  si  $X$  et  $Y$  sont dans  $\mathcal{H}$  et si  $f(0) = 0$ . Par exemple, la fonction

$$F(X, Y) = K([X, Y], [X, Y])$$

où  $K$  est la forme de Killing de  $\mathcal{G}$  est  $G$ -invariante et non nulle: Si  $\alpha$  est une racine de  $\mathcal{G}$  par rapport à  $\mathcal{H}$ , il existe un vecteur radical non nul  $X_\alpha$  associé à  $\alpha$ , un vecteur

radiciel non nul  $Y_\alpha$  associé à  $-\alpha$ , tels que (en posant  $H_\alpha = [X_\alpha, Y_\alpha]$ ) on ait  $[H_\alpha, X_\alpha] = 2X_\alpha$  ([3], théorème 1.10.2). On a alors :  $F(X_\alpha, Y_\alpha) = K(H_\alpha, H_\alpha) = K([H_\alpha, X_\alpha], Y_\alpha)$  du fait de l'invariance de  $K$ . On a donc :

$$F(X_\alpha, Y_\alpha) = 2K(X_\alpha, Y_\alpha) \neq 0,$$

car  $K(X_\alpha, Y_\alpha)$  ne peut être nul ([3], théorème 1.10.2). L'homomorphisme  $R_2$  n'est donc pas injectif. De même la fonction  $F_p : \mathcal{G}^p \rightarrow \mathbf{C}$  définie pour  $p \geq 3$  par

$$\begin{aligned} F_p(X_1, \dots, X_p) &= K(X_1, \text{ad } X_2 \text{ ad } X_3 \dots \text{ad } X_{p-1}(X_p)) \\ &= K(X_1, [X_2, [\dots, [X_{p-1}, X_p] \dots]]) \end{aligned}$$

est  $G$ -invariante non nulle sur  $\mathcal{G}^p$  tandis que sa restriction à  $\mathcal{H}^p$  est nulle. L'homomorphisme  $R_p$  n'est donc jamais injectif dès que  $p$  est supérieur à 1.

**3.3.** Je ne sais pas pour le moment si  $R_p$  est toujours surjectif. Toutefois, on peut faire les remarques suivantes : Désignons par  $J_p$  l'algèbre des invariants de  $W$  dans  $\mathcal{H}^p$  et par  $A_p$  la sous-algèbre de  $J_p$  construite comme dans 1.5 à partir des invariants de  $W$  dans  $S(\mathcal{H}^*)$ . Il est immédiat que l'image de  $R_p$  contient  $A_p$  : Soient  $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbf{C}$  et  $F : \mathcal{G} \rightarrow \mathbf{C}$  des fonctions polynômes invariantes respectivement par  $W$  (opérant dans  $\mathcal{H}$ ) et par  $G$  (opérant dans  $\mathcal{G}$ ) et telles que  $f$  soit la restriction de  $F$  à  $\mathcal{H}$ . Soient  $t_1, \dots, t_p$  dans  $\mathbf{C}$ ,  $X_1, \dots, X_p$  dans  $\mathcal{G}$  et  $H_1, \dots, H_p$  dans  $\mathcal{H}$ . On a alors :

$$\begin{aligned} F(t_1 X_1 + \dots + t_p X_p) &= \Sigma(t^\alpha / \alpha!) F_\alpha(X_1, \dots, X_p) \\ f(t_1 H_1 + \dots + t_p H_p) &= \Sigma(t^\alpha / \alpha!) f_\alpha(H_1, \dots, H_p) \end{aligned}$$

ce qui montre que  $f_\alpha$  est la restriction à  $\mathcal{H}^p$  de  $F_\alpha$ . Ainsi l'image de  $R_p$  a même corps de fractions que  $J_p$ . Intuitivement, on peut dire qu'une fonction rationnelle  $W$ -invariante sur  $\mathcal{H}^p$  est la « restriction » à  $\mathcal{H}^p$  d'une fonction rationnelle  $G$ -invariante sur  $\mathcal{G}^p$ . En tout cas, l'homomorphisme  $R_p$  sera surjectif chaque fois que  $A_p = J_p$ . C'est le cas lorsque  $\mathcal{G}$  est l'algèbre de Lie  $sl(n, \mathbf{C})$  des matrices  $n \times n$  complexes de trace nulle ([6], chapitre II, paragraphe 3).



#### 4. Des exemples et une conjecture.

**4.1.** Revenons à la situation générale d'un groupe  $G$  opérant linéairement dans un espace vectoriel  $V$  (paragraphe 1). La discussion précédente montre que la question importante est la suivante : Est-ce que  $A_p = J_p$ ? Comme je l'ai signalé plus haut, la réponse est oui si  $G$  est le groupe de Weyl de  $sl(n, \mathbf{C})$  et je *conjecture* qu'il en est toujours ainsi si  $G$  est un sous-groupe de  $V$  engendré par des pseudo-réflexions. En tout cas, lorsque  $G$  est fini, l'égalité  $A_p = J_p$  équivaut au fait que l'algèbre  $A_p$  soit intégralement close. Les exemples qui suivent montrent qu'en général la réponse à la question posée est négative.

**4.2.** Ici  $V = \mathbf{C}^2$  et  $G$  est le groupe engendré par la symétrie  $(x_1, x_2) \mapsto (-x_1, -x_2)$  par rapport à l'origine, qui n'est pas une pseudo-réflexion. L'algèbre  $J$  des fonctions  $G$ -invariantes sur  $\mathbf{C}^2$  est engendrée par les fonctions  $x_1^2, x_2^2$  et  $x_1x_2$ , dont les polarisées respectives sont les fonctions bilinéaires  $2x_1y_1, 2x_2y_2$  et  $y_1x_2 + y_2x_1$ . Il en résulte que l'algèbre  $A_2$  est engendrée par les fonctions suivantes définies dans  $V^2$  :

$$x_1^2, x_2^2, x_1x_2, x_1y_1, x_2y_2, x_1y_2 + x_2y_1, y_1^2, y_2^2 \text{ et } y_1y_2.$$

Il est par ailleurs facile de constater que l'algèbre  $J_2$  des invariants de  $G$  opérant dans  $V^2$  est engendrée par les fonctions précédentes *et par* la fonction  $x_1y_2$ . *En tout cas*, des considérations de degré montrent que cette dernière fonction n'est pas dans  $A_2$  de sorte que  $A_2 \neq J_2$ . (Bien entendu, on a :  $x_1y_2 = (x_1x_2/x_2y_2)y_2^2$  ou encore :  $x_1y_2$  est dans le corps des fractions de  $A_2$ , ce qu'on savait d'avance.)

**4.3.** Ici  $V = sl(2, \mathbf{C})$  et  $G$  est le groupe adjoint de  $sl(2, \mathbf{C})$ . L'algèbre  $J$  des fonctions invariantes sur  $V$  est engendrée par la forme quadratique  $K(X, X)$ . Il en résulte que  $A_p$  est l'algèbre engendrée par les fonctions  $f_{ij}$  :

$$(X_1, \dots, X_p) \rightarrow K(X_i, X_j) \quad (1 \leq i \leq j \leq p)$$

en nombre  $p(p + 1)/2$ . Lorsque  $p = 2$ , on constate que  $A_2 = J_2$  (générateurs:  $K(X_1, X_1)$ ,  $K(X_1, X_2)$  et  $K(X_2, X_2)$ ). Par contre dans  $J_3$  se trouve la fonction

$$F(X_1, X_2, X_3) = K(X_1, [X_2, X_3])$$

qui ne peut pas se trouver dans  $A_3$  puisque

$$F(-X_1, -X_2, -X_3) = -F(X_1, X_2, X_3)$$

alors que toutes les fonctions  $f_{ij}$  sont invariantes par la transformation  $(X_1, X_2, X_3) \mapsto (-X_1, -X_2, -X_3)$ . On a donc en fait:  $A_p \neq J_p$  pour tout  $p \geq 3$ , et même les corps de fractions sont distincts. Pour voir cela, on peut dire ce qui suit: L'algèbre  $A_p$  est intégralement close parce que c'est l'algèbre des invariants du groupe orthogonal de la forme de Killing. Si  $\text{Fr}(A_p) = \text{Fr}(J_p)$ , cela entraînerait  $J_p = A_p$  puisque  $J_p$  est entière sur  $A_p$ . Une autre façon de voir les choses est que l'algèbre  $A_p$  ne sépare les orbites de  $G$  dans aucun ouvert non vide. Incidemment, on peut énoncer le théorème fondamental des invariants de la représentation adjointe du groupe  $SL(2, \mathbf{C})$ : Les deux invariants  $K(X, X)$  et  $F(X_1, X_2, X_3)$  forment un système *basique* d'invariants (au sens de [6]).

4.4. Ici  $V = \mathbf{C}^3$  et  $G$  est le groupe des matrices de la forme

$$(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où  $x, y$  et  $z$  sont des nombres complexes. La représentation  $r$  est la représentation coadjointe du groupe de Heisenberg (complexifiée):

$$r(x, y, z)(a, b, c) = (a + cy, b - cx, c)$$

pour tous  $(x, y, z)$  dans  $G$  et  $(a, b, c)$  dans  $\mathbf{C}^3$ . L'algèbre  $J$  des invariants de  $G$  est engendrée par l'unique fonction  $c$ . L'algèbre  $J_2$  des fonctions polynômes définies dans  $\mathbf{C}^3 \times \mathbf{C}^3$  et invariantes par  $r_2$  est l'algèbre de *polynômes* engendrée par  $c_1, c_2, a_1c_2 - a_2c_1$  et  $b_1c_2 - b_2c_1$ , tandis que l'algèbre  $A_2$  est celle engendrée par  $c_1$  et  $c_2$ . Il y a donc loin dans ce cas

entre  $A_2$  et  $J_2$  (l'une est de degré de transcendance 2 tandis que l'autre est de degré de transcendance 4).

*Note.* — Je remercie bien sincèrement MM. D. Luna et Th. Vust qui m'ont fait parvenir des remarques intéressantes après lecture de la première version de ce texte.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] H. CARTAN, Quotients of complex spaces, Intern. Colloq. on Function Theory, Tata Institute Bombay, 1960 (pp. 1-15).
- [2] J. DIEUDONNÉ, Cours de géométrie algébrique 2, PUF., 1974.
- [3] J. DIXMIER, Algèbres enveloppantes, *Cahiers Scientifiques*, Fascicule 37, Gauthier-Villars, 1974.
- [4] J. FOGARTY, Invariant Theory, Benjamin 1969.
- [5] Th. VUST, Sur la théorie des invariants des groupes classiques, *Ann. Inst. Fourier*, 26, 1 (1976), 1-31.
- [6] H. WEYL, The Classical Groups, Princeton University Press, 1946.

Manuscrit reçu le 16 novembre 1976

Proposé par J. Dieudonné.

Mustapha RAIS,

Département de Mathématiques

Université de Poitiers

40, avenue du Recteur Pineau

86022 Poitiers.

---