ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

ROBERT LUTZ

# Structures de contact sur les fibrés principaux en cercles de dimension trois

*Annales de l'institut Fourier*, tome 27, nº 3 (1977), p. 1-15

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1977__27_3_1_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
27, 3 (1977), 1-15

# STRUCTURES DE CONTACT SUR LES FIBRES PRINCIPAUX EN CERCLES DE DIMENSION TROIS

par Robert LUTZ

Le présent travail a deux objectifs :

1) Trouver toutes les structures de contact invariantes par rapport à une action libre de $S^1$ sur une variété compacte orientable de dimension 3, en utilisant la géométrie des fibrés principaux en cercles.

2) Trouver, en réponse à une question classique de S. Chern, C. Loewner et probablement H. Hopf, des structures de contact non isomorphes sur une même variété.

Rappelons qu'une forme de contact sur une variété $M_{2p+1}$ est une forme de Pfaff $\omega$ telle que $\omega \wedge d\omega^p$ soit sans zéros ; une structure de contact est un champ de $2p$- plans défini par une forme de contact.

Deux structures de contact sont isomorphes si les formes qui les définissent sont conjuguées par un difféomorphisme $h$, i.e. si $h^*\omega \wedge \omega' = 0$.

On sait (voir [9]) que, si $\omega_t$ est une famille à un paramètre de formes de contact, il existe une isotopie $h_t$ avec $h_0 = id$ telle que $h_t^*\omega_0 \wedge \omega_t = 0$ ; l'isotopie $h_t$ s'obtient en intégrant le champ de vecteurs $X_t$ défini de manière unique par les conditions $\omega_t(X_t) = 0$ et $(X_t \lrcorner\, d\omega_t - \dot{\omega}_t) \wedge \omega_t = 0$ ; il en résulte par convexité le théorème de stabilité démontré initialement par J.W. Gray ([5]) en réponse partielle à la question 2) :

si deux formes de contact sont assez voisines au sens de la $\mathbf{C}^1$-topologie, elles sont conjuguées.

La question 2) est particulièrement intéressante lorsqu'il s'agit d'un fibré projectif cotangent $P^*V$ : la forme de Liouville-Cartan de $T^*V$ y induit, par l'intermédiaire de métriques riemanniennes arbitraires, une famille de structures de contact toutes isomorphes. Ces structures sont importantes en mécanique et on peut se demander si la condition de contact est leur privilège exclusif.

En tout cas, les structures régulières de Boothby-Wang ([1]), qui sont à la fois invariantes et transverses aux orbites d'une action libre de $S^1$ sont toutes isomorphes sur une même variété de dimension 3 munie d'une telle action (Pro. 2.2).

C'est en abandonnant la condition de transversalité que l'on peut espérer obtenir des structures de contact non isomorphes.

L'ensemble "singulier" le long duquel une forme de contact invariante est tangente à l'orbite de l'action détermine alors, à l'orientation près, la classe d'isomorphie équivariante de la structure de contact associée à cette forme (Théorème 2.3).

La trame de cet article est la suivante :

Au § 1 et 2 on détermine, à isomorphisme équivariant près, toutes les formes de contact invariantes sur un fibré principal $M_3 \longrightarrow B_2$ de groupe $S^1$, où M et B sont compactes orientables.

Au § 3, on montre que toutes les classes d'homotopie de formes de Pfaff invariantes sans zéros sur M contiennent une telle forme de contact.

Il se trouve que le problème 2) se ramène, via une forme faible du théorème d'isotopie de J. Cerf, et dans le cas des fibrés ci-dessus tels que le revêtement universel de M soit $S^3$, au résultat suivant (Th. 4.3) : toute classe d'homotopie de formes sans zéros sur $S^3$ contient une forme de contact induite par une forme de contact invariante sur M.

On en déduit (Th. 4.4) que sous les mêmes hypothèses, il y a sur M une infinité de structures de contact deux à deux non isomorphes.

Les variétés concernées sont les espaces lenticulaires, en particulier l'espace projectif réel $P_3$ qui est difféomorphe à $P^* S^2$ ; ceci montre qu'il peut y avoir beaucoup de structures de contact non isomorphes à celles de Liouville sur un fibré projectif cotangent.

Par ailleurs, hormis sur $S^3$, les constructions "invariantes" ne donnent pas de formes de contact dans toutes les classes d'homotopie de formes sans zéros sur l'espace total d'un fibré principal en cercles de dim. 3.

En fait, sur toute variété compacte orientable de dim. 3, fibrée ou non, toute classe d'homotopie de formes sans zéros contient une forme de contact.

On en déduit que, si le revêtement universel de la variété est la sphère $S^3$, il existe sur elle une infinité de structures de contact non isomorphes.

Ces résultats qui nécessitent la construction de formes de contact beaucoup plus "tordues" que des formes invariantes, font l'objet d'une autre publication ; chirurgies et invariants de Hopf y remplacent fibrations et degrés utilisés ici.

## 1. Construction de formes de contact invariantes sur un fibré principal $M_3 \longrightarrow B_2$.

Dans les parties 1, 2, 3 de cet article, on considère un fibré principal $M \xrightarrow{q} B$ de groupe $S^1$, les variétés M (resp. B) étant compactes, connexes, de dimensions 3 (resp. 2) et orientables. On note Z le champ de vecteurs associé à l'action de $S^1$ sur M, et $\eta$ une forme de connexion telle que $\eta(Z) = 1$ et $Z \lrcorner d\eta = 0$. La forme de courbure vient de la base ; on pose $d\eta = q^* \Omega$.

1.1. Soit $\omega$ une forme de Pfaff sur M, invariante par rapport à l'action de $S^1$. La fonction $\omega(Z)$ est invariante, car

$$L_Z \omega = d(\omega(Z)) + Z \lrcorner d\omega = 0 .$$

Posons $\omega(Z) = q^*\varphi$. Comme $\omega - (q^*\varphi)\eta$ est horizontale et invariante, il existe une forme $\beta$ sur B telle que $\omega = (q^*\varphi)\eta + q^*\beta$.

1.2. La forme invariante $\omega$ est de contact (en abrégé F.C.I.) ssi $\omega \wedge d\omega$ est sans zéros sur M, ou encore ssi $\varphi^2\Omega + \varphi d\beta + \beta \wedge d\varphi$ est sans zéros sur B.

*L'ensemble singulier* $\Sigma$ de $\omega$ est l'ensemble des points de B au-dessus desquels le noyau de $\omega$ est tangent à la fibre, c'est-à-dire $\varphi^{-1}(0)$ ; c'est une sous-variété compacte de B, donc une réunion de cercles disjoints.

Sur $\Sigma$ la condition de contact se réduit à $\beta \wedge d\varphi$ sans zéros ; sur $B - \Sigma$ elle s'écrit $\Omega + d(\beta/\varphi)$ sans zéros, ces deux formes ayant même orientation.

On se propose de répondre à la question suivante : *étant donnée une réunion finie* $\Sigma$ *de cercles* $\gamma_i$ *deux à deux disjoints plongés dans* B, *existe-t-il une F.C.I. sur* M *admettant* $\Sigma$ *comme ensemble singulier ?*(*)

La condition (S) suivante est évidemment nécessaire : *les composantes connexes de* $B - \Sigma$ *peuvent être munies de signes + ou − de façon que deux composantes adjacentes aient des signes opposés ;* il existe alors une fonction $\varphi$ sur B telle que $d\varphi$ soit sans zéros sur $\Sigma$ et $\varphi^{-1}(0) = \Sigma$.

Remarquons que sur la sphère $S^2$ la condition (S) est vérifiée pour toute $\Sigma$, en vertu du théorème de Jordan.

1.3. *Cas* $\Sigma$ *vide.*

La forme de contact éventuelle $\omega$ est alors régulière au sens de Boothby-Wang ([1]), et le problème revient à trouver une 1-forme $\xi$ sur B telle que $\Omega + d\xi$ soit sans zéros. Cela suppose la classe caractéristique $[\Omega]$ du fibré non nulle, l'orientation de $\omega$ (i.e. celle de la forme volume $\omega \wedge d\omega$) étant déterminée par cette classe.

Compte tenu de la classification des fibrés de groupe $S^1$ (cf. [6]), cela signifie que le fibré induit sur $\widetilde{B}$ (revêtement universel de B) est non trivial.

PROPOSITION. — *Si le fibré induit sur* $\widetilde{B}$ *est non trivial, il existe sur* $M \longrightarrow B$ *une F.C.I. régulière.*

En effet, soit $v$ une forme volume sur B telle que $\int_B v = 1$ (B étant orientée) ; si $k = \int_B \Omega$ la forme $\Omega - kv$ est exacte, d'où une forme $\xi$ telle que $\Omega + d\xi = kv$. L'hypothèse implique $k \neq 0$, ce qui achève la démonstration.

1.4. *Cas* $\Sigma$ *non vide.*

THEOREME. — *Soit* $\Sigma$ *une sous-variété compacte de* B *vérifiant* (S). *Alors il existe sur tout fibré principal de groupe* $S^1$ *au-dessus de* B *une F.C.I. admettant* $\Sigma$ *comme ensemble singulier ; l'orientation de cette forme est arbitraire.* La démonstration se fait en trois étapes.

(*) Cette question est un cas particulier du problème général des formes de contact invariantes par rapport à une action libre du tore $T^k$, étudié dans [8] et [8'].

Soit $\Sigma = \bigcup_i \gamma_i$. On oriente B de manière arbitraire.

a) Soit T un voisinage de $\Sigma$, difféomorphe à $\Sigma \times \,]-\epsilon, +\epsilon[$ ; la propriété(s) permet de prolonger la projection $(x, t) \to t$ en une fonction $\varphi$ sur B telle que $|\varphi| > \epsilon$ en dehors de T. Sur T, il existe une 1-forme fermée $\beta_0$ telle que $\beta_0 \wedge d\varphi > 0$ et donc

$$d(\beta_0/\varphi) = (1/\varphi)^2 \beta_0 \wedge d\varphi \quad \text{sur} \quad \mathrm{T} - \Sigma .$$

Soit $k$ un réel positif ; sur $\mathrm{T} - \Sigma$, on a

$$\Omega + d(k\beta_0/\varphi) = \Omega + (k/\varphi)^2 \beta_0 \wedge d\varphi$$

La forme $\Omega$ étant bornée par rapport à $\beta_0 \wedge d\varphi$, il suffit que $k$ soit assez grand pour que $\Omega + d(k\beta_0/\varphi)$ soit positive sur $\mathrm{T} - \Sigma$, et donc que $k\beta_0$ donne une solution du problème au-dessus de T.

b) Soit $\epsilon' < \epsilon$ et $\mathrm{K} = \varphi^{-1}(\mathbf{R} - ]-\epsilon', +\epsilon'[)$. D'après le choix de $\varphi$, on a $\mathrm{B} - \mathrm{K} \subset \mathrm{T}$ et les composantes connexes $\Delta_i$ de K sont des sous-variétés compactes à bord de B. Au voisinage de chaque $\Delta_i$, il existe une 2-forme $v_i$ telle que $\Omega + v_i > 0$. Comme $\mathrm{H}^2(\Delta_i, \mathbf{R}) = 0$, il existe des 1-formes $\xi_i$ telles que $v_i = d\xi_i$ ; on obtient ainsi au voisinage de K une forme $\xi$ telle que $d\xi + \Omega > 0$. La forme $\beta' = \varphi\xi$ donne alors une solution du problème au-dessus de K.

c) Soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow [0, 1]$ telle que

$$\begin{cases} f(t) = 0 & \text{en dehors de} \quad ]-\epsilon, -\epsilon'[ \cup ]\epsilon', \epsilon[ \\ f'(t) > 0 & \text{sur} \quad ]\epsilon', \epsilon[ \quad \text{et} \quad < 0 \quad \text{sur} \quad ]-\epsilon, -\epsilon'[ . \end{cases}$$

D'après a) et b), la condition de contact est vérifiée par

$$\omega = (q^*\varphi)\eta + q^*\beta ,$$
$$\beta = (f \circ \varphi)\beta' + (1 - f \circ \varphi) k\beta_0 ,$$

sauf peut-être au-dessus de $\mathrm{T} \cap \mathrm{K}$. Or, sur $\mathrm{T} \cap \mathrm{K}$, on a

$$\Omega + d(\beta/\varphi) = (f \circ \varphi)(d(\beta'/\varphi) + \Omega) + (1 - f \circ \varphi)(d(k\beta_0/\varphi) + \Omega)$$
$$+ (f'/\varphi)(d\varphi \wedge \beta' - k d\varphi \wedge \beta_0)$$

Par convexité, la somme des deux premiers termes est positive ; le dernier terme vaut $(f'/\varphi)(k - c)\beta_0 \wedge d\varphi$ où $c$ est la composante de $\beta'$ sur $\beta_0$ dans $\overline{\mathrm{T} \cap \mathrm{K}}$ par rapport à la base $(\beta_0, d\varphi)$.

Or $f'/\varphi$ est positive ou nulle et $c$ bornée sur $\overline{\mathrm{T} \cap \mathrm{K}}$ ; en a) le réel $k$ est soumis à la seule condition d'être assez grand ; il suffit qu'il le soit assez pour majorer $c$ pour que $\omega$ soit de contact sur M en entier. L'orientation de $\omega$ est liée à celle que l'on a choisie arbitrairement sur B.

On peut se demander si par quelque autre construction, il est possible d'obtenir sur $\mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{B}$ des F.C.I. essentiellement différentes de celles que l'on vient de trouver ; le § 2 répond négativement à cette question.

## 2. Classification équivariante.

On se propose de classifier les F.C.I. sur le fibré $\mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{B}$ à conjugaison équivariante près, au sens suivant :

$\omega$ et $\omega'$ sont conjuguées s'il existe un difféomorphisme $h$ qui commute avec l'action de $\mathrm{S}^1$, tel que $h^* \omega \wedge \omega' = 0$, ou encore $h^* \omega = \mu \omega'$ avec $\mu$ invariante et sans zéros.

2.1. On peut suivre une déformation $\omega_t$ de F.C.I. par une isotopie équivariante : le champ $\mathrm{X}_t$ (voir les rappels) commute avec Z ; les difféomorphismes $h_t$ sont donc équivariants et les fonctions $\mu_t$ invariantes.

Par convexité, on en déduit la stabilité équivariante :

PROPOSITION. – *Deux F.C.I. suffisamment* $\mathrm{C}^1$*-voisines sont conjuguées par un difféomorphisme équivariant.*

2.2. *Cas régulier.*

PROPOSITION. – *Soient* $\omega$ et $\omega'$ *deux F.C.I. régulières sur* M *; alors elles sont conjuguées par un difféomorphisme équivariant qui conserve l'orientation.*

En effet, $\omega/\omega(\mathrm{Z})$ et $\omega'/\omega'(\mathrm{Z})$ sont des formes de connexion de courbures respectives $q^*\Omega$ et $q^*\Omega'$ où $\Omega$ et $\Omega'$ sont des formes volume sur B, de même orientation puisque leur classe de cohomologie est la même. Il en résulte, par convexité, que $t\Omega + (1-t)\Omega'$ est sans zéros, ce qui montre que les formes invariantes

$$\xi_t = t\omega/\omega(Z) + (1 - t)\,\omega'/\omega'(Z)$$

sont de contact. Elles sont donc conjuguées d'après 2.1., par un difféomorphisme équivariant qui conserve l'orientation.

2.3. *Cas non régulier.*

La géométrie de l'ensemble singulier $\Sigma$ d'une F.C.I. est évidemment conservée par conjugaison équivariante. On se propose de comparer deux F.C.I. telles qu'il existe un difféomorphisme équivariant qui échange $q^{-1}(\Sigma)$ et $q^{-1}(\Sigma')$. Il revient au même de comparer deux F.C.I. qui ont même ensemble singulier.

THEOREME. — *Soient $\omega$ et $\omega'$ deux F.C.I. sur* $M \longrightarrow B$, *ayant même ensemble singulier $\Sigma$ et même orientation. Alors il existe un difféomorphisme équivariant positif, isotope à l'identité, qui fixe les points de $\Sigma$, tel que $h^*\omega = \mu\omega'$ où $\mu$ est une fonction invariante sans zéros.*

Remarquons que, si le fibré induit sur $\widetilde{B}$ est non trivial, deux F.C.I. d'orientation opposée ne peuvent être conjuguées par un difféomorphisme équivariant : il devrait renverser l'orientation, et donc, en l'appliquant à une connexion de contact fournie par 1.3., donner sur B un difféomorphisme qui transforme la classe caractéristique du fibré en son opposée tout en la conservant, bien qù'elle soit non nulle.

*Démonstration du théorème.*

a) L'hypothèse implique que, sur $B - \Sigma$, l'une des fonctions $\varphi'$ ou $-\varphi'$ a le même signe que $\varphi$ (on pose $\omega = q^*\varphi\eta + q^*\beta$ et $\omega' = q^*\varphi'\eta + q^*\beta'$). On peut donc, sans modifier l'orientation de $\omega'$, supposer que $\varphi$ et $\varphi'$ aient partout même signe. Sur $\Sigma$, on a alors $d\varphi' = \mu\, d\varphi$, où $\mu$ est une fonction positive et, pour l'orientation convenable de B, $\beta \wedge d\varphi > 0$ et $\beta' \wedge d\varphi' > 0$.

Sur un voisinage W de $\Sigma$, on a $\beta' = a\, d\varphi + b\,\beta$, et donc $b > 0$ ; on prolonge $b$ en une fonction positive sur B. La forme $\omega'/b$ est invariante et de contact, ce qui ramène au cas où $\beta' = a\, d\varphi + \beta$ au voisinage de $\Sigma$.

Soit Y le champ de vecteurs sur $q^{-1}(\mathrm{W})$ défini par $\omega(\mathrm{Y}) = 1$, $\mathrm{Y}(\varphi) = 0$ et $\eta(\mathrm{Y}) = 0$. On montre aisément que $[\mathrm{Y}, \mathrm{Z}] = 0$.

Soit W′ un voisinage de Σ contenu dans W et $f$ une fonction positive ou nulle valant 1 au voisinage de Σ et 0 en dehors de W′. Le champ $\widetilde{\mathrm{Y}} = (q^*f)\,\mathrm{Y}$ commute avec Z et coïncide avec Y au voisinage de Σ. Notons $\rho(s, x)$ le flot associé à $\widetilde{\mathrm{Y}}$ sur M ; il commute avec l'action de $S^1$.

Pour $t \in [0, 1]$ posons $\begin{cases} h_t(x) = \rho(t\,a(x)\,\varphi(x), x) & \text{sur} \quad \mathrm{W} \\ h_t(x) = \mathrm{id.} & \text{sur} \quad \mathrm{M} - \mathrm{W}' \end{cases}$

(ce qui est cohérent puisque $\rho(s, x) = x$ sur $\mathrm{M} - \mathrm{W}'$).

Alors :

– $h_t$ commute avec l'action de $S^1$ et $h_0 = \mathrm{id}$.

– si $q(x) \in \Sigma$, $h_t(x) = \rho(x, 0) = x$

– $h_t * \omega = \omega'$ et $\varphi \circ q \circ h_t = \varphi \circ q$

– le jacobien de $h_t$ vaut sur W $1 + tf\,\mathrm{Y}(a)\,\varphi$

Comme $0 \leqslant f \leqslant 1$, si on choisit W′ assez petit pour que $|\mathrm{Y}(a)\,\varphi| < 1$ dessus, chaque $h_t$ sera une submersion de M sur lui-même ; la contre image d'un point $y$ par $h_t$ a un nombre fini et constant de points ; si $q(y) \in \Sigma$, elle contient le seul point $y$, ce qui montre que $h_t$ est un difféomorphisme équivariant.

b) On est maintenant ramené au cas où $\omega$ et $\omega'$ coïncident en tout point de Σ. La forme $\omega_t = (1 - t)\,\omega + t\,\omega'$ est invariante et de contact pour tout $t \in [0, 1]$ au voisinage de $q^{-1}(\Sigma)$. D'après 2.1. il existe sur ce voisinage un champ $\mathrm{X}_t$ tel que $\omega_t \wedge (\mathrm{L}_{\mathrm{X}_t}\,\omega_t - \dot{\omega}_t) = 0$ ; on le prolonge facilement à M et on obtient par intégration une isotopie $k_t$ de difféomorphismes équivariants, égaux à l'id. sur Σ et tels que $k_t^*\,\omega \wedge \omega' = 0$ au voisinage de Σ.

c) On suppose maintenant que $\omega = \omega'$ au voisinage de Σ.

Alors, sur $\mathrm{M} - \Sigma$, on a $\varphi = \mu\varphi'$ où $\mu$ est une fonction positive, égale à 1 au voisinage de Σ.

Posons $\omega_t = t\omega + (1 - t)\,q^*\mu\,\omega'$ sur $\mathrm{M} - \Sigma$

$\omega_t = \omega$ au voisinage de Σ

on a $\varphi_t = \varphi$ pour tout $t$ ; les $\omega_t$ sont de contact près de Σ ; ailleurs, on vérifie facilement la condition de contact par convexité.

On conclut comme précédemment, grâce à 2.1., ce qui achève la démonstration.

*Remarques.* – b) et c) montrent qu'il y a un modèle local pour les structures de contact invariantes au voisinage de leur ensemble singulier.

– Le théorème 2.3. montre que la construction du § 1 donne, à isomorphie équivariante près, toutes les S.C.I. sur $M \longrightarrow B$.

On se propose maintenant de déterminer les classes d'homotopie de formes de Pfaff invariantes sans zéros sur $M \longrightarrow B$ qui contiennent une F.C.I.

## 3. Classification homotopique.

3.1. *Choix d'une base de formes invariantes.*

Soit $\gamma$ un plongement de B dans $\mathbf{R}^3$ (il en existe car B est orientable) tel que l'image de $\gamma$ contienne le disque unité D défini par $x_1 = 0$ et $x_2^2 + x_3^2 \leqslant 1$. Soient $\psi_i$ trois fonctions telles que sur D, $\psi_1 = 1$, $\psi_2 = \psi_3 = 0$ et que, le long de $\gamma(B)$ (que l'on identifie désormais à B) le champ $\psi_1 \partial/\partial x_1 + \psi_2 \partial/\partial x_2 + \psi_3 \partial/\partial x_3$ soit transverse à $\gamma$.

Les formes invariantes $\alpha_i = (q^* \psi_i)\eta + q^* \gamma^* dx_i$ sont alors indépendantes en chaque point de M.

Sur cette base, une forme de Pfaff invariante sans zéros donne, après normalisation, une application $\Lambda = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$ de B dans la sphère unité $S^2$. Après choix d'une orientation de B et $S^2$, le degré de $\Lambda$ détermine entièrement la classe d'homotopie de $\Lambda$ et donc aussi celle de la forme invariante. (voir par ex. [10]). Sur le disque D, on a $\mu_1 = \varphi$, si $\omega = q^*\varphi\,\eta + q^*\beta$, d'après les choix ci-dessus.

3.2. Soit C un cercle intérieur à D. D'après la construction du § 1, il existe une F.C.I. $\xi$ dont l'ensemble singulier soit C, d'orientation arbitraire. La forme $\xi/\xi(Z)$ est définie, invariante, de contact au-dessus d'un voisinage de $B - D$, et vaut 1 sur Z. Elle se prolonge en une forme de connexion qui sera désormais la forme $\eta$ utilisée ci-dessus.

On va calculer le degré de l'application $\Lambda$ associée à une F.C.I. $\omega$ qui coïncide avec $\eta$ au voisinage de B $-$ D, après normalisation.

Notons $\Sigma^+ = \varphi^{-1}([0,\infty[)$ et $\Sigma^- = \varphi^{-1}(]-\infty, 0])$ ; ce sont des sous variétés de B de bord commun $\Sigma$, et on a $\Sigma^- \subset$ D.

3.3. Notons $\Lambda_0$ l'application associée à $\eta$ ; elle vaut $(1,0,0)$ sur D et $\Lambda = \Lambda_0$ sur B $-$ D. Soit $y = (a, b, c)$ une valeur régulière de $\Lambda$ avec $a < 0$ (il en existe d'après Sard) ; alors $y$ est valeur régulière de $\Lambda_0$ car $\Lambda_0^{-1}(y) \subset \mathrm{B} - \mathrm{D}$.

Il en résulte que degré $\Lambda$ = degré $\Lambda_0$ + degré $\widetilde{\Lambda}$, où $\widetilde{\Lambda}$ est l'application de $S^2 \longrightarrow S^2$ qui vaut $(1,0,0)$ sur une hémisphère et $\Lambda$ sur l'autre, identifiée à D. Il reste à calculer le degré de $\widetilde{\Lambda}$ ; choisissons pour cela une 2-forme $v$ sur la sphère d'arrivée $(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 1)$ de la manière suivante :

$$\begin{cases} v = 0 & \text{pour} \quad z_1 \geqslant 0 \\ v = d(k(z_2 dz_3 - z_3 dz_2)) & \text{pour} \quad z_1 \leqslant 0 \end{cases}$$

où $k$ est une fonction de $z_2^2 + z_3^2$ égale à $1/2\pi(z_2^2 + z_3^2)$ pour assurer la compatibilité de cette définition.

On a $\int_{S^2} v = 1$, d'après la formule de Stokes. Il en résulte que

degré $\widetilde{\Lambda} = \int_{S^2} \widetilde{\Lambda}^* v$ ; or $\widetilde{\Lambda}^* v = 0$ sur $\mathrm{D} \cap \Sigma^+$, et donc

$$\text{degré } \widetilde{\Lambda} = \int_{\Sigma^-} d(k \circ \widetilde{\Lambda}(\mu_2 d\mu_3 - \mu_3 d\mu_2)) = (1/2\pi) \int_{\Sigma} (\mu_2 d\mu_3 - \mu_3 d\mu_2)$$

puisque $\mu_2^2 + \mu_3^2 = 1$ sur $\Sigma$. Dans cette intégrale, $\Sigma$ est orientée comme bord de $\Sigma^-$, lui même orienté comme D.

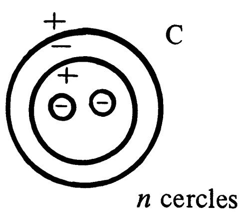
Or, la condition de contact impose $\beta \wedge d\varphi$ sans zéros sur $\Sigma$. L'application $(\mu_2, \mu_3)$ d'une composante $\Sigma_i$ de $\Sigma$ dans $S^1$ est donc homotope à l'application $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}, -\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right)$, qui est de degré 1, pour l'orientation usuelle de $\Sigma_i$.

Il en résulte que degré $\widetilde{\Lambda}$ = nombre de $\Sigma_i$ extérieurs $-$ nombre de $\Sigma_i$ intérieurs. Notons $\epsilon(\Sigma_i) = +1$ pour un bord extérieur de $\Sigma^-$
$= -1$ pour un bord intérieur de $\Sigma^-$

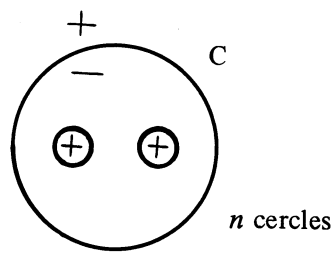
On obtient ainsi le

LEMME. — Degré $\Lambda$ = degré $\Lambda_0 + \sum_i \epsilon(\Sigma_i)$.

3.4. *Exemples.*




$\sum_i \epsilon(\Sigma_i) = n$




$\sum_i \epsilon(\Sigma_i) = 1 - n$

3.5. Les deux configurations ci-dessus peuvent toutes être obtenues par des F.C.I. d'après le § 1. Cependant, il convient d'assumer la contrainte supplémentaire $\omega = \eta$ au-dessus de B — D.

Avec les notations de 1.4., cela équivaut à $\beta = 0$ et $\varphi = 1$ sur B — D. Comme $\eta$ est de contact au-dessus d'un voisinage de B — D, il suffit de prendre le cercle C des configurations 3.4. assez proche de $\partial$D pour que la construction 1.4. convienne en modifiant $\varphi$ entre $\partial$D et C, avec $\beta = 0$ sur la composante connexe de K (cf. 1.4.b) qui contient B — D, et en prenant bien entendu T (cf. 1.4.a) dans D. Par ailleurs, l'orientation de $\eta$ en (3.2) est arbitraire, ce achève de démontrer le

THEOREME. — *Soit* $M_3 \longrightarrow B_2$ *un fibré principal en cercles de base compacte orientable. Alors, dans chaque classe d'homotopie de formes de Pfaff invariantes sans zéros sur ce fibré, il existe deux formes de contact invariantes d'orientation opposée.*

3.6. *Remarques.* — i) D'après l'étude ci-dessus et les résultats du § 2, il y a dans une même classe d'homotopie une infinité de formes de contact invariantes deux à deux non conjuguées par un difféomorphisme équivariant : le nombre de cercles $\Sigma_i$ peut augmenter arbitrairement sans que la somme $\epsilon(\Sigma_i)$ varie.

ii) Deux formes de Pfaff invariantes sans zéros peuvent être homotopes comme formes sans zéros sans l'être comme formes invariantes.

iii) Les formes invariantes ne se trouvent pas dans toutes les classes d'homotopie de formes sans zéros.

## 4. Cas de fibrés dont l'espace total admet pour revêtement $S^3$.

4.1. Soit toujours un fibré principal $M_3 \xrightarrow{q} B_2$. On suppose que le revêtement universel de M est la sphère $S^3$.

La suite exacte de Thom Gysin donne les relations suivantes entre les nombres de Betti de B et ceux de M :

$m_0 = b_0 = 1$

$m_1 = b_1 + b_0 - \mu$ où $\mu$ est le rang de l'application linéaire

$$\begin{aligned} \psi : H^0(B) &\longrightarrow H^2(B) \\ \xi &\longrightarrow \xi \cup \theta \end{aligned}$$

$\theta$ étant la classe caractéristique du fibré.

Si $\mu = 0$ on a $m_1 = b_1 + 1$.

Si $\mu = 1$ on a $m_1 = b_1$.

Or si $S^3 \xrightarrow{\pi} M$ est un revêtement à $k$ feuillets, l'homorphisme $\pi^*$ : $H^1(M, R) \longrightarrow H^1(S^3, R) = \{0\}$ est injectif de sorte que $H^1(M, R) = \{0\}$ ; il en résulte que $\mu = 1$ et $b_1 = 0$. Compte tenu de la classification des surfaces compactes orientables, B est difféomorphe à la sphère $S^2$.

Les fibrés principaux en cercles au-dessus de $S^2$ sont entièrement déterminés par leur classe $\theta$, dont toutes les valeurs sont obtenues par les fibrations des espaces lenticulaires. Il en résulte que M est difféomorphe à l'espace lenticulaire $L_k$ de groupe $Z_k$, le fibré composé

$$\begin{tikzcd} S^3 \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "\rho"] & \\ M \arrow[r, "q"'] & S^2 \end{tikzcd}$$

étant isomorphe à la fibration de Hopf de $S^3$ au-dessus de $S^2$.

Notons $\pi$ l'invariant de Hopf tel que $H(\rho) = 1$.

4.2. Soit $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ une base de formes invariantes sans zéros sur M. Alors $(\pi^*\alpha_1, \pi^*\alpha_2, \pi^*\alpha_3)$ est une base de formes sur $S^3$, invariantes pour $\rho$. La classe d'homotopie d'une forme sans zéros (invariante ou non) sur $S^3$ est déterminée par $H(f)$ où $f$ est l'application de $S^3 \longrightarrow S^2$ associée aux composantes de cette forme sur la base $(\pi^*\alpha_i)$.

Soit $\omega$ une forme invariante sur M et $\Lambda : S^3 \longrightarrow S^2$ l'application qui lui est associée sur la base $(\alpha_i)$.

Alors l'application $f$ associée à $\pi^*\omega$ est $\Lambda \circ \rho$.

Il en résulte que $H(f) = H(\rho) \times (\text{degré } \Lambda)^2 = (\text{degré } \Lambda)^2$.

Soit $\tau$ un difféomorphisme de $S^3$ sur lui-même qui renverse l'orientation. Alors, pour $\tau^*\omega$, on a $H(\tau^*\pi^*\omega) = - H(\pi^*\omega)$.

Il en résulte immédiatement la

PROPOSITION. —

i) *toute forme sans zéros sur* $S^3$ *est homotope à une forme de type* $\pi^*\omega$ *où* $\omega$ *est une forme invariante sur* $M \xrightarrow{q} S^2$.

ii) *si deux formes invariantes sans zéros* $\omega$ *et* $\omega'$ *sur* M *sont homotopes comme formes sans zéros,* $\pi^*\omega$ *est homotope à* $\pi^*\omega'$ *(ou à* $\tau^*\pi^*\omega'$*) comme forme invariante sans zéros.*

Cependant, il est faux que toute forme sur $M^3$ soit homotope à une forme invariante : les applications $f : M_3 \longrightarrow S^2$ ne sont pas homotopes à une application qui se factorise à travers $q$ ; de manière précise, si $\Omega$ est une 2-forme d'intégrale 1 sur $S^2$, la classe de cohomologie de $f^*\Omega$ (qui est entière, donc stable par homotopie) dans $H^2(M, R)$ doit être un multiple entier de celle de $q^*\Omega$ pour que $f$ soit homotope à une application qui se factorise.

4.3. D'après le théorème 3.5, la forme $\omega$ de la proposition précédente peut être choisie de contact, ce qui donne le

THEOREME. — *Soit* $S^3 \xrightarrow{\pi} M_3$ *un revêtement,* $M_3$ *étant munie d'une action libre de* $S^1$. *Alors pour toute forme sans zéros* $\xi$ *sur* $S^3$ *il existe une forme de contact invariante* $\omega$ *sur* $M_3$, *d'orientation arbitraire, telle que* $\pi^*\omega$ *soit homotope à* $\xi$ *comme forme sans zéros.*

4.4. On est maintenant en mesure de démontrer le

THEOREME. — *Avec les hypothèses de 4.3., il existe deux familles*

*$\{\omega_i\}$ et $\{\omega'_i\}$ $i \in Z$ de formes de contact invariantes, deux à deux non conjuguées, telles que pour tout i, $\omega_i$ est homotope à $\omega'_i$ et d'orientation opposée. La classe d'homotopie sur* $S^3$ *de $\pi^* \omega_i$ est arbitraire.*

D'après 4.1. ce résultat s'applique uniquement aux espaces lenticulaires $L(p, q)$ en particulier à $P_3 = P^* S^2$.

*Démonstration.* — Les formes de contact $\omega_i$ et $\omega'_i$ étant fournies par le théorème 4.3., supposons $\omega_i$ et $\omega_j$ conjuguées : il existe un difféomorphisme $h$ de M sur lui-même tel que $h^* \omega_i = \lambda \omega_j$, donc $h^* (\omega_i \wedge d\omega_i) = \lambda^2 \omega_j \wedge d\omega_j$.

Comme $\omega_i$ et $\omega_j$ sont de même orientation, $h$ est un difféomorphisme positif.

Le revêtement $h \circ \pi : S^3 \longrightarrow M_3$ se factorise par $\pi$ en

$$h \circ \pi = \pi \circ \widetilde{h},$$

où $\widetilde{h}$ est un difféormorphisme positif de $S^3$ sur M.

Il en résulte que $(\lambda \circ \pi)\, \pi^* \omega_j = \pi^* h^* \omega_i = \widetilde{h}^* \pi^* \omega_i$.

D'après le théorème de J. Cerf ([2]), il existe une isotopie $g_t$ telle que $g_0 = \mathrm{Id}$ et $g_1 = \widetilde{h}$, de sorte que la forme $g_t^* \pi^* \omega_i$ est de contact pour tout $t$.

Les formes $(\lambda \circ \pi)\, \pi^* \omega_j$ et $\pi^* \omega_i$ sont alors isotopes comme formes de contact, donc en particulier homotopes comme formes sans zéros. Or sur $S^3$, une forme est homotope à son opposée, de sorte que $\pi^* \omega_j$ et $\pi^* \omega_i$ sont homotopes quelque soit le signe de $\lambda$. Mais alors $i = j$.

On démontre de même que les $\omega'_i$ sont deux à deux conjuguées. Il reste $\omega_i$ et $\omega'_i$. Reprenant le même argument pour $\pi^* \omega_i$ et $\tau^* \pi^* \omega'_i$, où $\tau$ est la symétrie par rapport à une variable sur $S^3$, on obtient $\pi^* \omega_i$ homotope à $\tau^* \pi^* \omega'_i$, ce qui est exclu car il est facile de voir que $\tau^*$ ne laisse aucune classe d'homotopie de formes sans zéros sur $S^3$ fixe.

4.5. *Remarque.* — Dans la démonstration précédente on se sert selement du fait que $g_t^* \pi^* \omega_i$ est une forme sans zéros. On peut remplacer le théorème de Cerf par la propriété plus faible suivante :

*Soit $f$ un difféomorphisme positif de* $S^3$ *sur* $S^3$. *Alors il existe une famille $(f_t, F_t)$ de morphismes du fibré tangent telle que $(f_0, F_0) = \mathrm{id}^T$ et $(f_1, F_1) = (f, f^T)$.*

## BIBLIOGRAPHIE

[1] W.M. BOOTHBY and H.C. WANG, On contact manifolds, *Ann. of Math.*, 68 (1958), 721-734.

[2] J. CERF, Sur les difféomorphismes de $S^3$ ($\Gamma_4 = 0$), *Lecture Notes* n° 53 (1968).

[3] S.S. CHERN, The geometry of G-structures, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 72 (1966), 167-219.

[4] G. GODBILLON, Géométrie différentielle et mécanique analytique, Hermann, Paris, 1969.

[5] J.W. GRAY, Some global properties of contact structures, *Ann. of Math.*, 69, 2 (1959), 421-450.

[6] S. KOBAYASHI, Principal fibre bundle with 1 dimensional toroidal group, *Tokotu Math. Journal*, 8 (1956), 29-45.

[7] R. LUTZ, Sur l'existence de certaines formes différentielles sur $S^3$, *C.R.A.S.* Paris, 270 (1970), 1597-1599.

[8] et [8′] R. LUTZ, La géométrie des formes de Pfaff de classe constante $2s + 1$, A paraître.

[9] J. MARTINET, Sur les singularités des formes différentielles, *Ann. Inst. Fourier*, 20, 1 (1970), 95-178.

[10] J. MILNOR, Topology from the Differentiable Viewpoint, Univ. of Virginia Press, 1965.

Manuscrit reçu le 30 juin 1976
Proposé par G. Reeb.

Robert LUTZ,
1) Institut des Sciences Exactes et Appliquées
4, rue des Frères Lumières
68093 Mulhouse Cedex.

2) et

I.R.M.A.
7, rue René Descartes
67084 Strasbourg Cedex.