ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

ALAIN DUFRESNOY

Un résultat de d''-cohomologie; applications aux systèmes différentiels à coefficients constants

Annales de l'institut Fourier, tome 27, nº 2 (1977), p. 125-143

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1977__27_2_125_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
27, 2 (1977), 125-143.

UN RÉSULTAT DE d''-COHOMOLOGIE; APPLICATIONS AUX SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS A COEFFICIENTS CONSTANTS

par Alain DUFRESNOY

1. INTRODUCTION ET NOTATIONS

Si Ω est un ouvert convexe borné de $\mathbf{R}^n_x$, on désigne par h_Ω la fonction définie sur $\mathbf{R}^n_\eta$ par $h_\Omega(\eta) = \operatorname*{Sup}_{x\in\Omega} \langle x, \eta\rangle$ où $\langle x, \eta\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i\eta_i$. Nous dirons qu'une fonction f définie dans $\mathbf{R}^p$ est à décroissance rapide vis-à-vis d'une fonction g ne s'annulant pas dans $\mathbf{R}^p$ si le quotient f/g est à décroissance rapide dans $\mathbf{R}^p$.

Nous désignerons par $\mathcal{S}^\Omega$ l'espace des fonctions indéfiniment différentiables dans $\mathbf{R}^n_\xi + \mathbf{R}^n_\eta$ qui sont ainsi que toutes leurs dérivées, à décroissance rapide vis-à-vis de $\operatorname{Exp} h_\Omega$.

On désignera par $\mathcal{S}^\Omega_{(p,q)}$, l'espace des formes de type (p,q) dans $\mathbf{C}^n = \mathbf{R}^n_\xi + i\mathbf{R}^n_\eta$ à coefficients dans l'espace $\mathcal{S}^\Omega$.

Le résultat de d''-cohomologie à croissance que nous avons en vue est le suivant :

THÉORÈME 1. — *Soit Ω un ouvert convexe borné de $\mathbf{R}^n$ dont la frontière est de classe C^2. Pour toute forme $\omega \in \mathcal{S}^\Omega_{(p,q)}$ où $q \geqslant 1$, et telle que $d''\omega = 0$, il existe $\alpha \in \mathcal{S}^\Omega_{(p,q-1)}$ telle que $d''\alpha = \omega$.*

La démonstration de ce résultat se divise en deux parties :

Dans la première partie, on construit des fonctions plurisousharmoniques dans $\mathbf{C}^n$ vérifiant des conditions de croissance assez précises. Ce sera l'objet du § 2.

Dans la deuxième partie, on utilise les estimations L^2 de Hörmander pour les solutions du d''. Ce sera l'objet des §§ 3 et 4.

Enfin dans le § 5, nous appliquerons ce résultat à certains problèmes sur les systèmes différentiels à coefficients constants.

2. CONSTRUCTION DE FONCTIONS PLURISOUSHARMONIQUES

On montre dans ce paragraphe :

PROPOSITION 1. — *Soit* Ω *un ouvert convexe borné de* $\mathbf{R}^n$ *dont la frontière est de classe* C^2 *et soient* $f_1, \ldots, f_p$, p *fonctions définies dans* $\mathbf{C}^n$ *et à décroissance rapide vis-à-vis de* $\operatorname{Exp} h_\Omega$. *Alors il existe une fonction plurisousharmonique* φ *dans* $\mathbf{C}^n$ *telle que :*

i) $f_1, \ldots, f_p$ *soient à décroissance rapide vis-à-vis de* $\operatorname{Exp} \varphi$.

ii) $\operatorname{Exp} \varphi$ *soit à décroissance rapide vis-à-vis de* $\operatorname{Exp} h_\Omega$.

iii) *Chaque dérivée de* φ *soit bornée.*

2.1. Modification de la fonction h_Ω.

DÉFINITION. — *Soit* h *une fonction homogène de degré* 1 *dans* $\mathbf{R}^n$ *(c'est-à-dire* $h(tx) = th(x)$ *pour tout* $t \in \mathbf{R}_+$); *on dit que* h *est strictement convexe s'il existe une constante* $A > 0$ *telle que, pour tout* $x \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$, *il existe une fonction* g_x *homogène de degré* 1 *dans* $C^2(\mathbf{R}^n \setminus \{0\})$ *telle que :*

i) $g_x(x) = h(x)$;

ii) $g_x(y) \leqslant h(y)$ *pour tout* $y \in \mathbf{R}^n$;

iii) $(n-1)$ *valeurs propres du hessien de* g_x *en* y *sont supérieures à* $A/|y|$ *pour tout* $y \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$.

On obtient tout d'abord :

LEMME 1. — *Soit* Ω *un ouvert convexe borné de* $\mathbf{R}^n$ *dont la frontière est de classe* C^2. *Alors la fonction* h_Ω *est une fonction homogène de degré* 1 *dans* $\mathbf{R}^n$ *strictement convexe.*

Démonstration. — Soit $\eta_0 \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$; il existe alors $x_0 \in \partial\Omega$ tel que

$$h_\Omega(\eta_0) = \langle x_0, \eta_0 \rangle$$

et puisque Ω est un ouvert borné dont la frontière est régulière il existe une boule B_{x_0} de rayon r incluse dans Ω et dont la frontière contient le point x_0 [remarquons qu'on peut choisir r indépendamment du point x_0].

Puisque $B_{x_0} \subset \Omega$, on a $h_{B_{x_0}}(\eta) \leqslant h_\Omega(\eta)$ pour tout $\eta \in \mathbf{R}^n$; d'autre part $h_{B_{x_0}}(\eta_0) = h_\Omega(\eta_0)$ et enfin

$$h_{B_{x_0}}(\eta) = \langle \xi, \eta \rangle + |\eta| r$$

(si ξ désigne le centre de la boule B_{x_0}). Un calcul facile montre alors que le hessien de $h_{B_{x_0}}$ en un point η a une valeur propre nulle et $(n-1)$ valeurs propres égales à $r/|\eta|$, ce qui achève la démonstration du lemme 1.

On montre maintenant :

LEMME 2. — *Soit Ω un ouvert convexe borné de $\mathbf{R}^n$ dont la frontière est de classe C^2. Alors il existe une application ψ indéfiniment différentiable de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}$ dont chaque dérivée est bornée et qui vérifie de plus :*

i) $h_\Omega(\eta) \leqslant \psi(\eta) \leqslant h_\Omega(\eta) + C^{ste}$.

ii) *Les valeurs propres du hessien de ψ sont strictement positives; plus précisément,*

α) *il existe $A' > 0$ tel que $(n-1)$ valeurs propres du hessien de ψ soient minorées par $A'/1 + |\eta|$,*

β) *pour tout $\varepsilon > 0$, si $|\eta|$ est suffisamment grand, le vecteur propre V associé à la valeur propre inférieure à*

$$A'/1 + |\eta| \ (*)$$

vérifie

$$|\langle V, \eta \rangle| \geqslant (1-\varepsilon)\|V\| . \|\eta\|.$$

Démonstration. — Soit χ une fonction de classe C^∞ à support compact dans $\mathbf{R}^n$ positive, d'intégrale 1 et ne dépendant que du module. Nous allons montrer que $h_\Omega * \chi$ vérifie les conditions du lemme. Il est tout d'abord immédiat

(*) Si elle existe.

que $h_\Omega * \chi$ est indéfiniment différentiable. Soit maintenant D une dérivation d'ordre supérieure ou égale à 1; alors on peut écrire $D = \delta \circ D'$ où δ est une dérivation d'ordre 1, donc

$$D(h_\Omega * \chi) = (\delta h_\Omega) * (D'\chi),$$

et cette fonction est bornée car δh_Ω est bornée du fait que h_Ω est une fonction lipschitzienne.

Vérifions maintenant que i) est satisfaite : on a dans un premier temps

$$(h_\Omega * \chi(\eta) - h_\Omega(\eta)| \leqslant \int_{\mathbf{R}^n} |h_\Omega(\eta - y) - h_\Omega(\eta)|\chi(y)\, dy$$

mais puisque la fonction h_Ω est lipschitzienne, le second membre est majoré par une constante ne dépendant que du diamètre du support de χ; d'autre part, on a

$$\begin{aligned} h_\Omega * \chi(\eta) &= \int_{\mathbf{R}^n} h_\Omega(\eta - y)\chi(y)\, dy \\ &= \int_0^\infty \left(\int_{S(0,r)} h_\Omega(\eta - y)\chi(y)\, d\sigma_r\right) dr \end{aligned}$$

du fait que h_Ω est convexe, on a, en notant $\tilde{\chi}(r) = \chi(y)$ si $|y| = r$

$$h_\Omega * \chi(\eta) \geqslant \int_0^\infty \tilde{\chi}(r) \times h_\Omega(\eta) \times \sigma_r[S(0, r)]\, dr = h_\Omega(\eta),$$

ce qui achève la démonstration de la condition i).

Pour la condition ii), calculons

$$[h_\Omega * \chi[(\eta + h) + [h_\Omega * \chi](\eta - h) - 2[h_\Omega * \chi](\eta) = B(\eta, h).$$

Cette expression devient

$$\int_{\mathbf{R}^n} [h_\Omega(\xi + h) + h_\Omega(\xi - h) - 2h_\Omega(\xi)]\chi(\eta - \xi)\, d\xi$$

qui est supérieure à

$$\int_{\mathbf{R}^n} (g_\xi(\xi + h) + g_\xi(\xi - h) - 2g_\xi(\xi))\chi(\eta - \xi)\, d\xi \ (*).$$

Posons alors $A_\xi(h) = g_\xi(\xi + h) + g_\xi(\xi - h) - 2g_\xi(\xi)$. La fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par $\lambda \to g_\xi(\xi + \lambda h)$ a pour dérivée seconde $H_{\xi+\lambda h}(h)$, où $H_{\xi+\lambda h}$ désigne le hessien de g_ξ

(*) g_ξ désigne la fonction fournie par le lemme 1 au point ξ.

au point $\xi + \lambda h$. Si $|h| \leqslant |\xi|/4$, on voit aisément que $H_{\xi+\lambda h}(h) \geqslant 1/2 H_\xi(h)$ si $\lambda \in [-1, +1]$ et un calcul élémentaire montre alors que l'on a

$$A_\xi(h) \geqslant \frac{A}{2} \frac{\left| h - \frac{\langle \xi, h \rangle}{|\xi|^2} \xi \right|^2}{|\xi|}$$

et on a donc finalement

$$B(\eta, h) \geqslant \frac{A}{2} \int_{\mathbf{R}^n \setminus B(0, 4|h|)} \frac{\left| h - \frac{\langle \xi, h \rangle}{|\xi|^2} \xi \right|^2}{|\xi|} \chi(\eta - \xi)\, d\xi.$$

De cette expression, on déduit que si η est fixé et h est suffisamment petit, il existe une constante $\delta(\eta) > 0$ telle que $B(\eta, h) \geqslant \delta(\eta)|h|^2$, donc le hessien de $h_\Omega * \chi$ a toutes ses valeurs propres supérieures à $\delta(\eta)$ donc strictement positives.

D'autre part, si $|\eta|$ est suffisamment grand et si

$$\langle \eta, h \rangle \leqslant (1 - \varepsilon)\|\eta\| . \|h\|,$$

on a

$$B(\eta, h) \geqslant \frac{A}{4} \int_{\mathbf{R}^n} \frac{(1 - \varepsilon)|h|^2}{|\xi|} \chi(\eta - \xi)\, d\xi$$

donc $B(\eta, h) \geqslant \dfrac{A'}{1 + |\eta|}$;

Soit alors h_0 un vecteur propre du hessien de $h_\Omega * \chi$ en un point η associé à une valeur propre inférieure à $\dfrac{A'}{1 + |\eta|}$; alors h_0 vérifie $\langle \eta, h_0 \rangle \geqslant (1 - \varepsilon)\|\eta\| . \|h_0\|$, ce qui montre β.

Du fait que l'ensemble : $\{h \in \mathbf{R}^n ; \langle \eta, h) > (1 - \varepsilon)\|\eta\| . \|h\|\}$ ne peut contenir qu'un vecteur d'une base orthogonale de $\mathbf{R}^n$, on déduit que $(n - 1)$ des valeurs propres du hessien de $h_\Omega * \chi$ sont supérieures à $\dfrac{A'}{1 + |\eta|}$.

2.2. Quelques lemmes de convexité dans $\mathbf{R}^+$.

Lemme 3. — *Soit f_1 une fonction définie dans $\mathbf{R}^+$ à valeurs réelles, bornée inférieurement et qui tend vers l'infini à l'infini.*

Alors il existe f_2 *de classe* C^∞ *concave* (*c'est-à-dire* $f_2'' \leqslant 0$) *qui tend vers l'infini à l'infini et qui vérifie de plus :*

i) $f_2 \leqslant f_1$;

ii) $0 \leqslant f_2' \leqslant C^{ste}/r$;

iii) $f_2^{(n)}$ *tend vers* 0 *à l'infini si* $n \in \mathbf{N}^*$.

Démonstration. — Tout d'abord, il existe une suite $\{a_n\}_{n \geqslant 1}$ de nombres réels strictement positifs telle que :

i) si $x \geqslant a_n$, alors $f_1(x) \geqslant n$;

ii) la suite $\{a_{n+1} - a_n\}$ soit une suite croissante de nombres strictement positifs.

On considère alors h_1 la fonction affine dans chaque intervalle $[a_n, a_{n+1}]$ telle que $h_1(a_n) = n - 1$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$. Il est alors facile (quitte à augmenter a_1) de choisir α négatif tel que si $h_1(0) = \alpha$ et h_1 est affine sur $[0, a_1]$, h_1 soit concave sur $\mathbf{R}_+$ et soit inférieure à f_1.

Définissons maintenant la fonction h_2 par

$$\begin{cases} h_2(0) = \alpha \\ h_2(r) = \inf\limits_{0<t\leqslant r} [h_1(t) + \log r - \log t]. \end{cases}$$

Puisque $h_2 \leqslant h_1$, on a $h_2 \leqslant f_1$ et puisque h_2 est la borne inférieure d'une famille de fonctions concaves, h_2 est concave.

Enfin, on a $h_2' \leqslant 1/r$ tout au moins quand h_2' est défini [en fait partout sauf sur un ensemble localement fini].

Soit maintenant χ une fonction C^∞ positive symétrique à support compact et d'intégrale 1; alors $f_2 = h_2 * \chi$ répond à la question.

Lemme 4. — *Soit* f *une fonction continue à décroissance rapide dans* $\mathbf{R}^+$. *Alors il existe une fonction* g *à décroissance rapide dans* $\mathbf{R}^+$ *indéfiniment différentiable et ne s'annulant pas telle que*

i) $g \geqslant f$;

ii) $r^2\,[\log g]''$ *tende vers l'infini à l'infini*;

iii) $[\log g]^{(n)}$ *tende vers* 0 *à l'infini si* $n \in \mathbf{N}^*$;

iv) *A l'infini, on ait* $[\log g]' \sim r\,[\log g]''$.

Démonstration. — On considère la fonction f_1 définie sur $[e, +\infty[$ par $f_1(r) = -\log|f(r)|/\log r$ si $f(r) \neq 0$ et $f_1(r) = r/\log r$ si $f(r) = 0$ et prolongée par 0 sur l'intervalle $[0, e[$.

Puisque la fonction f est à décroissance rapide dans $\mathbf{R}_+$, la fonction f_1 ainsi définie est infinie à l'infini; soit alors f_2 une fonction associée à f_1 par le lemme 3; on pose

$$g(r) = \operatorname{Exp} - \int_e^r f_2(s)/s\, ds \quad \text{pour} \quad r \geqslant e.$$

Tout d'abord puisque f_2 tend vers l'infini, g est une fonction à décroissance rapide. Puis on a $f_2(s) \leqslant f_2(r) \leqslant f_1(r)$, donc $\int_e^r f_2(s)/s\, ds \leqslant f_1(r)\,[\log r - 1]$; on en déduit que $g(r) \geqslant f(r)$ si r est suffisamment grand et il suffit alors de modifier et compléter g sur un compact pour que la condition i) soit satisfaite. Remarquons que les conditions ii), iii) et iv) ne sont à vérifier que pour r assez grand, donc sur la forme explicite de g.

Pour la vérification des conditions ii) et iv), on remarque que

$$[\log g]' = -\frac{f_2(r)}{r} \quad \text{et} \quad [\log g]'' = -\frac{f_2'(r)}{r} + \frac{f_2(r)}{r^2}.$$

Mais la condition ii) du lemme 3 montre que $f_2'(r)/r \leqslant C^{\text{ste}}/r^2$ donc $[\log g]'' \sim f_2(r)/r^2$.

On en déduit donc que $r^2\,[\log g]''$ est infini à l'infini et que $[\log g]' \sim r\,[\log g]''$ autrement dit les conditions ii) et iv).

Quant à la condition iii), elle s'obtient immédiatement en prenant $[\log g]' = -\dfrac{f_2(r)}{r}$ et en appliquant la formule de dérivation d'un produit et la condition iii) du lemme 3.

Lemme 5. — *Soient $\alpha(r)$ et $\beta(r)$ deux fonctions continues sur $\mathbf{R}_+$ ne s'annulant pas et tendant vers l'infini à l'infini. Alors il existe une fonction f de classe C^∞ sur $\mathbf{R}_+$, logarithme d'une fonction à croissance rapide telle que :*

i) $0 \leqslant f'(r) \leqslant \alpha(r)/r$;

ii) $f(r) \leqslant \beta(r)\log r$ *si* $r \geqslant 1$;

iii) f *est concave* (*c'est-à-dire* $f'' \leqslant 0$);

iv) *pour tout* $n \in \mathbf{N}^*$, $f^{(n)}$ *tend vers* 0 *à l'infini.*

Démonstration. — On peut toujours supposer $\alpha(r) \leqslant \beta(r)$ et $\alpha(r)$ croissante, auquel cas la condition ii) est conséquence de la condition i) :

$$f(r) = f(1) \leqslant \int_1^r \alpha(s)/s\,ds \leqslant \alpha(r) \int_1^r ds/s = \alpha(r) \log r \leqslant \beta(r) \log r.$$

On considère maintenant non pas la fonction $\alpha(r)$ mais la fonction $\gamma(r)$ associée par le lemme 3 à la fonction $\alpha(r)$.

Montrons que la fonction $f(r) = \int_1^r \gamma(s)/s\,ds (r \geqslant 1)$ est un bon candidat, du moins pour r assez grand. Pour cela, on remarque que f est de classe C^∞, et qu'il est le logarithme d'une fonction à croissance rapide car $\gamma(s)$ tend vers l'infini à l'infini; d'autre part, la condition i) est satisfaite dès que $\gamma(s)$ est positif.

Pour la condition iii), on a $f''(s) = \gamma'(s)/s - \gamma(s)/s^2$, donc grâce à la condition ii) du lemme 3, la fonction f est convexe pour r assez grand; on modifie maintenant la fonction sur un compact de façon à ce que i) et iii) soient satisfaites.

Reste donc à vérifier la condition iv). La dérivée première de f est $\gamma(s)/s$ mais $\gamma(s) \leqslant K + \log s$ et pour les dérivées d'ordre supérieur, on utilise la formule de dérivation d'un produit.

2.3. Démonstration de la proposition 1.

Nous nous proposons de montrer ici la proposition 1 énoncée au début du paragraphe 2.

Pour cela, on pose $q(r) = \sup\limits_{\substack{i=1,\dots,p \\ |\zeta|=r}} f_i(\zeta)/\operatorname{Exp} h_\Omega(\eta)$ où $\zeta = \xi + i\eta$. Le lemme 4 associe à la fonction q une fonction g qu'on peut supposer plate en 0, c'est-à-dire que toutes ses dérivées d'*ordre supérieur ou égal à* 1 sont nulles en 0, nous noterons $\tilde{g}$ l'application définie dans $\mathbf{R}^n$ par $\tilde{g}(\eta) = \log(g(|\eta|))$; un calcul élémentaire montre que les valeurs propres du hessien de $\tilde{g}$ en un point η $(\neq 0)$ sont $[\log g]''(|\eta|)$ et $\dfrac{1}{|\eta|}[\log g]'(|\eta|)$ et les vecteurs propres correspondants sont respectivement les vecteurs colinéaires à η et les vecteurs orthogonaux à η (*).

Première étape. Il existe $0 < \varepsilon < 1/4$ *tel que la fonction* ψ_ε *définie par* $\psi_\varepsilon(\eta) = \psi(\eta) + \varepsilon\tilde{g}(\eta)$ *ait un hessien dont les valeurs propres sont supérieures à* $\dfrac{\alpha(\eta)}{1+|\eta|^2}$ *où* $\alpha(\eta)$ *est une fonction strictement positive qui tend vers l'infini à l'infini.*

Soit tout d'abord $h \in \mathbf{R}^n$ tel que $|\langle h, \eta\rangle| \leqslant \dfrac{3}{4}\|h\|.\|\eta\|$ et η dont le module est suffisamment grand. On a d'une part

$$H_{\tilde{g}}(h) \geqslant -\left(\frac{[\log g]'(|\eta|)}{|\eta|}\right)\|h\|^2$$

et d'autre part, grâce à la condition ii) du lemme 2,

$$H_\psi(h) \geqslant -\frac{A'}{2(1+|\eta|)}\|h\|^2.$$

Soit encore $H_{\psi_\varepsilon}(h) \geqslant \left[\dfrac{A'}{2(1+|\eta|)} - \dfrac{\varepsilon}{|\eta|}[\log g]'(|\eta|)\right]|h|^2$ donc grâce à la condition iii) du lemme 4, si $|\eta|$ est suffisamment grand, on a

$$(1) \qquad H_{\psi_\varepsilon}(h) \geqslant \frac{A'}{4(1+|\eta|)}\|h\|^2$$

Soit maintenant $h \in \mathbf{R}^n$ tel que

$$|\langle h, \eta\rangle| \geqslant 3/4\|h\|.\|\eta\|.$$

Alors

$$H_{\psi_\varepsilon}(h) \geqslant \varepsilon H_{\tilde{g}}(h) \geqslant \left[\frac{9\varepsilon}{16}[\log g]''(|\eta|) - \frac{7\varepsilon}{16|\eta|}[\log g]'(|\eta|)\right]\|h\|^2$$

ce qui montre, grâce à la condition iv) du lemme 4, que si $|\eta|$ est suffisamment grand,

$$(2) \qquad H_{\psi_\varepsilon}(h) \geqslant \frac{\varepsilon}{16}[\log g]''(|\eta|)\|h\|^2.$$

(*) Ceci, bien entendu, en un point η où $[\log g]''(|\eta|) \neq \dfrac{1}{|\eta|}[\log g]'(|\eta|)$.

Les conditions (1) et (2) peuvent alors se traduire sous la forme suivante :

Pour tout $1/4 > \varepsilon > 0$, il existe M tel que si $|\eta| \geqslant M$, les valeurs propres du hessien de ψ_ε au point η sont minorées par $\varepsilon\gamma(\eta)/(1 + |\eta|)^2$ où $\gamma(\eta)$ est une fonction qui tend vers l'infini à l'infini.

Du fait que ψ a en tout point de $\mathbf{R}^n$ un hessien défini positif, il existe $1/4 > \varepsilon_0 > 0$ tel que $\psi + \varepsilon_0\tilde{g}$ ait un hessien défini positif pour tout point η tel que $|\eta| \leqslant M$.

La fonction $\psi_{\varepsilon_0} = \psi + \varepsilon_0\tilde{g}$ est alors une fonction dont le hessien a des valeurs propres supérieures à $\tilde{\alpha}(\eta)/(1 + |\eta|)^2$, où $\tilde{\alpha}(\eta)$ est une fonction strictement positive qui tend vers l'infini à l'infini, ce qui achève la première étape.

On note $\alpha(r) = \operatorname*{Inf}_{|\eta|\leqslant r} \tilde{\alpha}(\eta)$ et $\beta(r) = -1/2 \log q(r)/\log r$.

Le lemme 5 fournit alors une fonction f, qu'on modifie sur un compact pour la rendre plate en 0 et on note $\tilde{f}$ l'application indéfiniment différentiable dans $\mathbf{C}^n$ définie par $\tilde{f}(\zeta) = f(|\zeta|)$.

On désigne enfin par $\tilde{\psi}_{\varepsilon_0}$ la fonction définie par

$$\tilde{\psi}_{\varepsilon_0}(\zeta) = \psi_{\varepsilon_0}(\eta)$$

(où $\zeta = \xi + i\eta$).

Deuxième étape. Il existe $0 < \varepsilon_1 \leqslant 1$ *tel que la fonction* φ *définie par* $\varphi(\zeta) = \tilde{\psi}_{\varepsilon_0}(\zeta) - \varepsilon_1\tilde{f}(\zeta)$ *soit une fonction plurisous-harmonique dans* $\mathbf{C}^n$.

Rappelons qu'on dit qu'une fonction φ est dite plurisous-harmonique si son hessien complexe que nous noterons $H^{\mathbf{C}}_{\varphi}$ n'a que des valeurs propres positives.

Un calcul immédiat montre que

$$H^{\mathbf{C}}_{\tilde{\psi}_{\varepsilon_0}}(w) \geqslant 1/4 \frac{\alpha(|\eta|)}{(1 + |\eta|)^2} |w|^2 \text{ (si } \zeta = \xi + i\eta)$$

et les conditions i) et iii) du lemme 5 montrent que

$$H^{\mathbf{C}}_{\tilde{f}}(w) \geqslant -\frac{\mu\alpha(|\zeta|)}{1 + |\zeta|} |w|^2,$$

où μ est une constante qui provient essentiellement de la modification de f. Il suffit de prendre alors $\varepsilon_1 = \operatorname{Inf}(1/4\mu, 1)$.

Troisième étape. La fonction φ ainsi déterminée satisfait aux exigences de la proposition.

Vérifions la condition i). Tout d'abord, on a

$$\psi_{\varepsilon_0}(\eta) = \psi(\eta) + \varepsilon\tilde{g}(\eta),$$

donc grâce à la condition i) du lemme 2,

$$\psi_{\varepsilon_0}(\eta) \geqslant h_\Omega(\eta) + \varepsilon_0\tilde{g}(\eta).$$

En utilisant alors la condition i) du lemme 4 et le fait que $\varepsilon_0 \leqslant 1/4$ on a

$$\psi_{\varepsilon_0}(\eta) \geqslant h_\Omega(\eta) + \frac{1}{4}\log[q|\eta|]$$

donc
$$\psi_{\varepsilon_0}(\zeta) \geqslant h_\Omega(\eta) + \frac{1}{4}\log[q|\zeta|].$$

En appliquant maintenant la condition ii) du lemme 5 et en remarquant que $\varepsilon_1 \leqslant 1$, on obtient

$$\varphi(\zeta) \geqslant h_\Omega(\eta) + \frac{3}{4}\log[q|\zeta|].$$

Si on remarque que les fonctions $f_1, \ldots, f_p$ vérifient

$$f_i(\zeta) \leqslant h_\Omega + \log[q|\zeta|],\ i = 1, \ldots, p,$$

la condition est une conséquence immédiate du fait que la fonction $\zeta \to q|\zeta|$ est à décroissance rapide dans $\mathbf{C}^n$.

Vérifions maintenant la condition ii) : du fait que la fonction $\tilde{g}$ est bornée supérieurement dans $\mathbf{R}^n$ et grâce à la condition i) du lemme 2, on a

$$\psi_{\varepsilon_0}(\eta) \leqslant h_\Omega(\eta) + K_1.$$

Donc $\varphi(\zeta) \leqslant h_\Omega(\eta) + K_1 - \varepsilon_1\tilde{f}(\zeta)$. Il suffit alors de remarquer que $\tilde{f}(\zeta)$ est le logarithme d'une fonction à croissance rapide et que ε_1 est strictement positif pour obtenir la condition ii).

La condition iii) s'obtient en remarquant que φ est la somme de trois fonctions dont toutes les dérivées d'ordre supérieur ou égal à 1 sont bornées ceci grâce au lemme 2 pour ψ, à la condition iii) du lemme 4 pour $\tilde{g}$ et à la condition iv) du lemme 5 pour $\tilde{f}$.

3. CONDITIONS L^2 ET CONDITIONS UNIFORMES

Tout d'abord, donnons une définition :

DÉFINITION. — *On dira qu'une fonction* $g \in L^2_{\text{loc}}$ *est à pseudo-décroissance rapide vis-à-vis de* ψ *s'il existe* ψ_1 *à décroissance rapide vis-à-vis de* ψ *et tel que* $g/\psi_1 \in L^2$.

Ceci étant posé, on a :

LEMME 6. — *Soit* f *une fonction indéfiniment différentiable dans* $\mathbf{C}^n$ *qui est à pseudo-décroissance rapide vis-à-vis de* $\operatorname{Exp} h_\Omega$ *ainsi que toutes ses dérivées; alors* $f \in \mathscr{S}^\Omega$.

(Où Ω désigne un ouvert convexe borné dont la frontière est de classe C^2.)

Démonstration. — Soit g une dérivée de f et considérons la famille des dérivées de g jusqu'à l'ordre $2n$: $(g^{(\alpha)})_{|\alpha|\leqslant 2n}$; pour chaque fonction $g^{(\alpha)}$, il existe une fonction ψ_α à décroissance rapide vis-à-vis de $\operatorname{Exp} h_\Omega$ telle que $g^{(\alpha)}/\psi_\alpha \in L^2$. Soit alors φ_1 une fonction plurisousharmonique associée par la proposition 1 à la famille $(\psi_\alpha)_{|\alpha|\leqslant 2n}$ et notons $\varphi = 2\varphi_1$.

Alors $g^2e^{-\varphi} \in L^1$ ainsi que toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre $2n$. (Pour cela, il suffit de remarquer que

$$[g^{(\alpha)}]^2e^{-\varphi} \in L^1$$

et d'utiliser la formule de Leibniz.)

Soit maintenant χ une fonction indéfiniment différentiable dans $\mathbf{C}^n$, à support compact et qui vaut 1 dans un voisinage de 0 et notons $\chi_n(\zeta) = \chi(\zeta/n)$.

Alors la suite de fonctions $[g^2\chi_n e^{-\varphi}]_{n\in\mathbf{N}}$ est telle que la suite des dérivées mixtes

$$\left[\frac{\partial^{2n}}{\partial\xi_1, \ldots, \partial\xi_n\partial\eta_1, \ldots, \partial\eta_n} g^2\chi_n e^{-\varphi}\right]_{n\in\mathbf{N}}$$

soit bornée en norme L^1. Il suffit alors d'appliquer l'inégalité

$$\int\left|\frac{\partial^{2n}h}{\partial\xi_1, \ldots, \partial\xi_n\partial\eta_1, \ldots, \partial\eta_n}\right| d\lambda \geqslant \operatorname{Sup} h \text{ si } h \in C_0^\infty(\mathbf{C}^n)$$

pour en déduire que $g^2e^{-\varphi}$ est bornée dans $\mathbf{C}^n$; il en est de même de $ge^{-\varphi_1}$ mais puisque e^{φ_1} est à décroissance rapide vis-à-vis de Exp h_Ω, g est à décroissance rapide vis-à-vis de Exp h_Ω.

4. ESTIMATIONS L^2

Nous rappelons tout d'abord les deux résultats relatifs aux estimations L^2 dont nous nous servirons par la suite. Nous désignons par L^2_φ l'espace des fonctions de carré intégrable pour la mesure $e^{-\varphi}\, d\lambda$ où $d\lambda$ est la mesure de Lebesgue. Pour les autres notations, nous renvoyons à [1], pp. 24, 77 et 78.

THÉORÈME 2. — *Soit φ une fonction plurisousharmonique de classe C^2 dans $\mathbf{C}^n$ et ω une forme de type (p, q) à coefficients dans L^2_φ et telle que $d''\omega = 0$. Alors il existe α une forme de type $(p, q-1)$ à coefficients dans $L^2_{\varphi_1}$ telle que:*

i) $d''\alpha = \omega$.

ii) $\theta(e^{-\varphi_1}\alpha) = 0$, $[\varphi_1(\zeta) = \varphi(\zeta) + 2\log(1 + |\zeta|^2)]$ (*où* θ *désigne l'opérateur différentiel suivant:*

$$\theta f = \sum_{\mathrm{I},\ \mathrm{K}}{}' \sum_{j=1}^{n} \partial f_{\mathrm{I}, j\mathrm{K}/\partial z_j} dz^{\mathrm{I}} \wedge d\bar{z}^{\mathrm{K}}).$$

THÉORÈME 3. — *Soit f une forme de type (p, q) à coefficients de classe C^∞ et à support compact alors on a, si ψ est une fonction plurisousharmonique*

$$\sum_{\mathrm{I}, \mathrm{J}}{}' \sum_{j=1}^{n} \int |\partial f_{\mathrm{I}, \mathrm{J}}/\partial \bar{z}_j|^2 e^{-\psi}\, d\lambda \leqslant 2\|\theta^* f\|^2_\psi + \|d'' f\|^2_\psi$$

(*où* θ^* *désigne l'opérateur différentiel suivant:*

$$\theta^* f = \sum_{\mathrm{I}, \mathrm{K}} \sum_{j=1}^{n} e^{\psi}\partial(e^{-\psi} f_{\mathrm{I}, j\mathrm{K}})/\partial z_j dz^{\mathrm{I}} \wedge d\bar{z}^{\mathrm{K}}).$$

Démontrons maintenant le théorème 1 dont l'énoncé se trouve dans le § 1. Pour cela, grâce au § 3, il suffit de montrer que pour tout $\omega \in \mathscr{S}^{\Omega}_{(p,q)}$ fermée il existe une forme α de type $(p, q-1)$ telle que $d''\alpha = \omega$ et telle que les coefficients de α ainsi que leurs dérivées soient à pseudo-décroissance rapide vis-à-vis de Exp h_Ω.

Soit donc $\omega \in \mathscr{S}^{\Omega}_{(p,q)}[q \geqslant 1]$ telle que $d''\omega = 0$ et soit φ une fonction plurisousharmonique associée par la proposition 1 à la famille $(\omega_{\mathrm{I,J}})_{\mathrm{I,J}}$ des coefficients de ω et soit α la solution de l'opérateur d'' fournie par le théorème 2. Du fait que les coefficients de ω sont indéfiniment différentiables dans $\mathbf{C}^n$, les coefficients de α sont C^∞ (*), donc il suffit de contrôler leur comportement (ainsi que celui de leurs dérivées) à l'infini. Pour cela, remarquons que la condition $\theta(e^{-\varphi_1}\alpha) = 0$ devient $(\theta\alpha)_{\mathrm{I,K}} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{\mathrm{I},j\mathrm{K}}\partial\varphi_1/\partial z_j$. On sait que les coefficients de la forme α sont à pseudo-décroissance rapide vis-à-vis de $\operatorname{Exp} h_\Omega$.

Supposons donc que toutes les dérivées jusqu'à l'ordre σ des coefficients de α soient à pseudo-décroissance rapide vis-à-vis de $\operatorname{Exp} h_\Omega$ et montrons qu'il en est alors de même pour les dérivées d'ordre $\sigma + 1$.

Notons D une dérivation d'ordre σ; on a

$$d''\mathrm{D}\alpha = \mathrm{D}d''\alpha = \mathrm{D}\omega$$
$$\theta\mathrm{D}\alpha = \mathrm{D}\theta\alpha$$

des conditions sur les dérivées de φ_1, on déduit que $\theta\mathrm{D}\alpha$ et $d''\mathrm{D}\alpha$ ont leurs coefficients à pseudo-décroissance rapide vis-à-vis de $\operatorname{Exp} h_\Omega$. Soit alors ψ une fonction plurisousharmonique dans C^n associée par la proposition à l'ensemble des dérivées jusqu'à l'ordre σ de α et ω et à φ_1.

Le théorème 1 est alors conséquence du lemme suivant :

LEMME 7. — *Soit* ψ *une fonction plurisousharmonique dans* $\mathbf{C}^n$ *dont les dérivées d'ordre* 1 *sont bornées et* g *une forme de type* (p, q) *à coefficients dans* C^∞ *telle que les coefficients des formes* g, $d''g$ *et* θg *soient dans* L^2_ψ. *Alors les dérivées d'ordre* 1 *des coefficients de* g *sont aussi dans* L^2_ψ.

Démonstration. — Soit χ une fonction C^∞ à support compact dans $\mathbf{C}^n$ qui vaut 1 dans un voisinage de 0 et posons $\chi_n(x) = \chi\left(\dfrac{x}{n}\right)$. L'hypothèse sur les dérivées de ψ

(*) Ceci d'après la démonstration du théorème 4.2.5 de [1] et du lemme de Sobolev (ou bien la démonstration du corollaire 4.2.6 de [1], p. 87).

fournit l'existence d'une constante K telle que

$$\begin{aligned}&\|\chi_n g\|_\psi \leqslant K\|g\|_\psi\\ &\|d''\chi_n g\|_\psi \leqslant K(\|g\|_\psi + \|d''g\|_\psi);\ \|\theta\chi_n g\|_\psi \leqslant K(\|g\|_\psi + \|\theta g\|_\psi)\\ &\|\theta^*\chi_n g\|_\psi \leqslant K(\|g\|_\psi + \|\theta g\|_\psi).\end{aligned}$$

Si on applique le théorème 3 à la fonction $\chi_n g = f^{(n)}$, on obtient

$$\sum_{I, J} \sum_{j=1}^{n} \int |\partial f_{I,J}^{(n)}/\partial \bar{z}_j|^2 e^{-\psi}\, d\lambda \leqslant K'(\|\theta g\|_\psi + \|g\|_\psi + \|d''g\|_\psi)^2.$$

Le lemme s'obtient alors en faisant tendre n vers l'infini et en appliquant le lemme suivant :

LEMME 8. — *Soit ψ une fonction définie dans $\mathbf{C}^n$ dont les dérivées d'ordre 1 sont bornées et f une fonction à support compact dans $\mathbf{C}^n$. Alors il existe une constante K'' ne dépendant pas de f telle que :*

$$\|\partial f/\partial z_j\|_\psi \leqslant K''(\|\partial f/\partial \bar{z}_j\|_\psi + \|f\|_\psi).$$

Démonstration. — Si on remarque que $\partial f/\partial \bar{z}_j = \overline{(\partial \bar{f}/\partial z_j)}$, on a

$$\int \left|\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}\right|^2 e^{-\psi}\, d\lambda = \int \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} \times \overline{\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}\right)} e^{-\psi}\, d\lambda = \int \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} \times \frac{\partial \bar{f}}{\partial z_j} e^{-\psi}\, d\lambda.$$

En intégrant alors par parties, on a

$$\int \left|\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}\right|^2 e^{-\psi}\, d\lambda = \int e^{-\psi} \frac{\partial \psi}{\partial z_j} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} \bar{f} d\lambda - \int e^{-\psi} \frac{\partial^2 f}{\partial z_j \partial \bar{z}_j} \bar{f} d\lambda.$$

En faisant une intégration par parties sur le deuxième terme, on a

$$\int e^{-\psi} \frac{\partial^2 f}{\partial z_j \partial \bar{z}_j} \bar{f}\, d\lambda = \int e^{-\psi} \frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}_j} \frac{\partial f}{\partial z_j} \bar{f}\, d\lambda - \int e^{-\psi} \frac{\partial f}{\partial z_j} \overline{\left(\frac{\partial f}{\partial z_j}\right)} d\lambda.$$

Autrement dit,

$$\int \left|\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}\right|^2 e^{-\psi}\, d\lambda = \int \frac{\partial \psi}{\partial z_j} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} \bar{f} e^{-\psi}\, d\lambda - \int \frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}_j} \frac{\partial f}{\partial z_j} \bar{f} e^{-\psi}\, d\lambda + \int \left|\frac{\partial f}{\partial z_j}\right|^2 e^{-\psi}\, d\lambda.$$

Soit, en notant $\langle , \rangle_\psi$ la forme hermitienne dont provient la norme sur L^2_ψ :

$$\left\|\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}\right\|^2_\psi - \left\langle\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}, f\frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}_j}\right\rangle_\psi = \left\|\frac{\partial f}{\partial z_j}\right\|^2_\psi - \left\langle\frac{\partial f}{\partial z_j}, f\frac{\partial \psi}{\partial z_j}\right\rangle_\psi.$$

Or le terme de droite est minoré en valeur absolue par

$$\left\|\frac{\partial f}{\partial z_j}\right\|_\psi \left(\left\|\frac{\partial f}{\partial z_j}\right\|_\psi - \left\|f\frac{\partial \psi}{\partial z_j}\right\|_\psi\right)$$

soit si k_1 désigne la borne supérieure de $\dfrac{\partial \psi}{\partial z_j}$,

$$\left\|\frac{\partial f}{\partial z_j}\right\|_\psi \left[\left\|\frac{\partial f}{\partial z_j}\right\|_\psi - k_1\|f\|_\psi\right].$$

En majorant alors le terme de gauche, on obtient alors :

$$\left\|\frac{\partial f}{\partial z_j}\right\|_\psi \left[\left\|\frac{\partial f}{\partial z_j}\right\|_\psi - k_1\|f\|_\psi\right] \leqslant k_2\left(\left\|\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}\right\|^2_\psi + \|f\|^2_\psi\right).$$

Du fait qu'au moins un des deux termes du produit de gauche est inférieur à la racine carrée du terme de droite, on a le résultat.

5. APPLICATIONS AUX SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS A COEFFICIENTS CONSTANTS

Dans [2] et dans [3], B. Malgrange montre comment certains résultats sur les systèmes différentiels à coefficients constants peuvent s'obtenir à partir de théorèmes de d''-cohomologie à croissance. On peut aussi, pour ce genre de question se reporter à [4] ou [5].

Dans la suite P(D) désignera une matrice à coefficients polynômes différentiels du type $\Sigma a_\alpha D^\alpha$ où $D^\alpha = D_1^{\alpha_1}, \ldots, D_n^{\alpha_n}$ et $D_j = \dfrac{1}{i}\dfrac{\partial}{\partial x_j}$ et P désignera la matrice à coefficients polynômes obtenue en remplaçant dans P(D) D_j par ζ_j. Si Ω est un ouvert de $\mathbf{R}^n$, on désigne par $\mathcal{D}'_\Omega$ l'espace des distributions sur Ω qui se prolongent en une distribution sur $\mathbf{R}^n$ (ou si l'on préfère qui sont continues sur $\mathcal{D}_\Omega$, muni de la topologie induite par celle de $\mathscr{D}$) et par $W(\partial\Omega)$ l'espace des fonctions indéfiniment différentiables au sens de Withney sur $\partial\Omega$.

Les méthodes de [2] et [3] permettent d'obtenir les deux résultats suivants :

THÉORÈME 4. — *Soit* Ω *un ouvert convexe borné de* $\mathbf{R}^n$ *dont la frontière est de classe* C^2. *Alors pour que* $T \in [\mathscr{P}'_\Omega]^r$ *soit de la forme* $P(D)S$ *ou* $S \in [\mathscr{P}'_\Omega]^s$, *il faut, et il suffit, que* T *vérifie :*

(R) : *Pour toute matrice ligne* $Q(D)$ *telle que* $QP = 0$, *on a* $Q(D)T = 0$.

THÉORÈME 5. — *Soit* Ω *un ouvert convexe borné de* $\mathbf{R}^n$ *dont la frontière est de classe* C^2. *Alors toute fonction*

$$F \in [W(\partial\Omega)]^s$$

telle que $P(D)F = 0$ *se prolonge en une fonction*

$$\tilde{F} \in [C^\infty(\overline{\Omega})]^s$$

vérifiant $P(D)\tilde{F} = 0$ *si, et seulement si,* P *vérifie la condition* (Ext), *autrement dit s'il existe une matrice* Q *à coefficients polynômes telle que la suite :*

$$(\mathbf{C}[X_1, \ldots, X_n])) \xrightarrow{P} (\mathbf{C}[X_1, \ldots, X_n])) \xrightarrow{Q} (\mathbf{C}[X_1, \ldots, X_n])^t$$

soit exacte.

Nous allons redonner les étapes de ces démonstrations bien qu'elles soient exactement calquées sur celles de [2] et [3].

Démonstration du théorème 4. — Soit $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_s \end{pmatrix}$ un élément de $[s^\Omega_{(p,q)}]^s$; on pose $d''\psi = \begin{pmatrix} d''\psi_1 \\ \vdots \\ d''\psi_s \end{pmatrix} \in [\mathscr{S}^\Omega_{(p,q+1)}]^s$ et $P\psi$ l'élément de $[\mathscr{S}^\Omega_{(p,q)}]^r$ dont la j-ième coordonnée est $\sum_k p_{jk}(\zeta)\psi_k$. En utilisant un résultat relatif à la division des distributions [corollaire 2.2 de [2], p. 117] et le théorème 1, on obtient par récurrence descendante sur q (il suffit de recopier la démonstration de $\mathrm{Th}(r)$; [2], p. 118).

PROPOSITION 2. — *Soit* $\Phi \in [\mathcal{S}^{\Omega}_{(p,q)}]^r$ *vérifiant les conditions suivantes :*

a) *Il existe* $\psi_1 \in [\mathcal{S}^{\Omega}_{(p,q)}]^s$ *tel que* $P(\zeta)\,\psi_1 = \Phi$.

b) $\Phi'' = 0$.

Alors il existe $\psi \in [\mathcal{S}^{\Omega}_{(p,q)}]^s$ vérifiant $P(\zeta)\psi = \Phi$ et $d''\psi = 0$. D'autre part, si Ω est un ouvert convexe borné, d'après le théorème de Paley-Wiener, l'espace des transformées de Fourier de $\mathcal{D}_{\overline{\Omega}}$ s'identifie à l'espace des fonctions holomorphes de $\mathcal{S}^{\Omega}$ et à un élément $T \in \mathcal{P}'_{\Omega}$ (espace qui s'identifie naturellement au dual de $\mathcal{D}_{\overline{\Omega}}$), on associe (pas de manière unique) une forme linéaire continue F sur $\mathcal{S}^{-\Omega}$ ($-\Omega$: symétrique de Ω par rapport à 0) vérifiant

$$\langle T, \bar{\varphi} \rangle = \langle F, \tilde{\hat{\varphi}} \rangle$$

où $\tilde{\hat{\varphi}}(\zeta) = \overline{\hat{\varphi}(\bar{\zeta})}$ et F est appelée transformée de Fourier de T.

On a alors [cf. Théorème 2.6 [2], p. 119] le « principe fondamental » suivant :

THÉORÈME 6. — *Soit* Ω *un ouvert convexe borné de* $\mathbf{R}^n$ *dont la frontière est de classe* C^2 *et* $T \in [\mathcal{P}'_{\Omega}]^r$ *telle que*

$$Q(D)T = 0.$$

Alors T *admet une transformée de Fourier* F *telle que*

$$Q(\zeta)F = 0.$$

Le théorème 4 s'obtient alors en se ramenant à la division des distributions dans $\mathcal{S}'$, la matrice Q étant alors une matrice dont les lignes engendrent les relations entre les lignes de la matrice P.

Démonstration du théorème 5. — Le fait que la condition (Ext) soit une condition nécessaire au prolongement est explicitement dans [3].

Pour montrer que la condition (Ext) est suffisante, en utilisant le cor. 2.2 de [2], on obtient que la suite

$$[\mathcal{S}^{\Omega}]^r \xrightarrow{P} [\mathcal{S}^{\Omega}]^s \xrightarrow{Q} [\mathcal{S}^{\Omega}]^t$$

est exacte puis de la même façon que dans la démonstration précédente que

$$(1) \qquad [H^\Omega]^s \xmapsto{P} [H^\Omega]^r \xmapsto{Q} [H^\Omega]^t$$

est exacte si H^Ω désigne l'espace des fonctions holomorphes de $\mathcal{S}^\Omega$, autrement dit l'espace des transformées de Fourier d'éléments de $\mathcal{D}_{\overline{\Omega}}$.

Soit alors $F \in [W(\partial\Omega)]$ vérifiant $P(D)F = 0$ et soit $F_1 \in [C^\infty(\overline{\Omega})]^s$ un prolongement de F alors

$$G = P(D)F_1 \in [\mathcal{D}_{\overline{\Omega}}]^r.$$

Si on remarque alors que $Q(S)\hat{G} = 0$, d'après l'exactitude de (1) on a $\hat{G} = P(\zeta)\hat{H}$ où $H \in [\mathcal{D}_{\overline{\Omega}}]^s$.

Il est alors clair que $F_1 - H$ est le prolongement cherché.

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. Hörmander, An introduction to complex analysis in several variables, The University Series in Higher Mathematics, D. Van Nostrand company.

[2] B. Malgrange, Sur les systèmes différentiels à coefficients constants, Coll. Int. C.N.R.S., Paris, 1962.

[3] B. Malgrange, Sur les systèmes différentiels à coefficients constants, Séminaire Leray, Collège de France 1961-1962, Exposé 8.

[4] B. Malgrange, Systèmes différentiels à coefficients constants, Séminaire Bourbaki, Paris, 1962-1963, n° 246.

[5] V. P. Palamodov, Linear Differential Operators with constant coefficients, *Die Frundlehren der mathematischen Wissenshaften...* Band 168, Springer 1970.

Manuscrit reçu le 15 janvier 1976
Révisé le 28 avril 1976
Proposé par B. Malgrange.

Alain Dufresnoy,
Université Scientifique
et Médicale de Grenoble
Laboratoire de Mathématiques Pures
Associé au C.N.R.S.
38400 Saint-Martin d'Hères.