ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

NESSIM SIBONY

Approximation polynomiale pondérée dans un domaine d'holomorphie de C^n

Annales de l'institut Fourier, tome 26, nº 2 (1976), p. 71-99

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1976__26_2_71_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
26, 2 (1976), 71-99.

APPROXIMATION POLYNOMIALE PONDÉRÉE DANS UN DOMAINE D'HOLOMORPHIE DE $\mathbf{C}^n$

par Nessim SIBONY

1. Introduction.

Soit Ω un domaine d'holomorphie dans $\mathbf{C}^n$ et soit w une fonction s.c.i. définie dans Ω, à valeurs réelles strictement positives. $\mathrm{H}^p(\Omega, w)$ désignera l'espace des fonctions f, holomorphes dans Ω, telles que $\int |f|^p(z)w(z)\, d\lambda(z) < +\infty$, λ étant la mesure de Lebesgue de Ω et $1 \leqslant p < \infty$. On munit cet espace de la norme

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p(z)w(z)\, d\lambda(z)\right)^{1/p}.$$

$\mathrm{H}^\infty(\Omega, w)$ désignera l'espace des fonctions f holomorphes dans Ω telles que $w(z)|f(z)|$ tend vers zéro quand z tend vers le bord de Ω, on le munit de la norme

$$\|f\|_\infty = \sup_{z\in\Omega} w(z)|f(z)|.$$

Nous noterons ces espaces $\mathrm{H}^p(w)$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, lorsque $\Omega = \mathbf{C}^n$. Ce sont des espaces de Banach.

On se pose le problème de l'approximation des fonctions de $\mathrm{H}^p(\Omega, w)$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, par des fonctions holomorphes dans des ouverts contenant strictement le domaine Ω ou bien par des fonctions holomorphes à croissance donnée, par exemple des polynômes.

Un tel problème a été étudié par B. Taylor dans [12] lorsque $\Omega = \mathbf{C}^n$. Il a donné une condition suffisante pour approcher les fonctions de $\mathrm{H}^2(w)$, par des fonctions à croissance donnée, mais pour une topologie plus faible que celle de $H^2(w)$; c'est celle d'un espace $H^2(w_1)$, $w_1 < w$.

Le problème d'approximation pour des algèbres bornologiques de fonctions holomorphes a été étudié par J.-P. Ferrier [4], [5], qui utilise pour cela le calcul symbolique de Waelbroeck.

Nous avons besoin de quelques notations pour introduire ce problème.

Étant donné un ouvert Ω de $\mathbf{C}^n$, nous noterons $d_\Omega(z)$ la distance au complémentaire de Ω soit $d_\Omega(z) = \inf\limits_{z'\notin\Omega} |z - z'|$. Posons $\delta_0(z) = (1 + |z|^2)^{-1/2}$ où $|z|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} |z_i|^2$ et

$$\delta_\Omega(z) = \min\,[d_\Omega(z), \delta_0(z)].$$

Soit δ une fonction lipschitzienne positive dans $\mathbf{C}^n$; posons $\Omega = \{z | \delta(z) > 0\}$. On suppose $\delta \leqslant \delta_0$ et $-\log \delta$ plurisousharmonique (p.s.h.) dans Ω.

Notons $E(k, \delta)$ l'espace des fonctions f holomorphes dans Ω telles que $\|f\|_k = \sup\limits_{z} |f(z)|\ \delta^k(z) < \infty$ où k est un entier positif et $\mathcal{O}(\delta) = \bigcup\limits_{k} E(k, \delta)$. L'espace $\mathcal{O}(\delta)$ a une structure naturelle d'algèbre bornologique [5]. Un sous-espace F est dense dans $\mathcal{O}(\delta)$ pour cette structure si pour tout k, il existe un entier k' tel qu'on puisse approcher les éléments de $E(k, \delta)$ par des éléments de F, pour la topologie de $E(k', \delta)$. J.-P. Ferrier [4] a donné des conditions nécessaires et suffisantes pour que $\mathcal{O}(\delta')$ soit dense dans $\mathcal{O}(\delta)$, au sens précédent lorsque $\delta' \geqslant \delta$, si on identifie $\mathcal{O}(\delta')$ à un sous-espace de $\mathcal{O}(\delta)$.

Nous généralisons la technique de B. Taylor pour étudier l'approximation dans un domaine d'holomorphie de $\mathbf{C}^n$, nous essayons de faire l'approximation pour la norme de l'espace de départ. Nous donnons également des conditions nécessaires d'approximation, ce qui nous permet de retrouver, sans avoir à utiliser le calcul symbolique de Waelbroeck, les résultats de [4] sur les algèbres $\mathcal{O}(\delta)$. La technique utilisée permet en particulier de préciser un entier k' tel que l'espace $\mathcal{O}(\delta') \cap E(k', \delta)$ soit dense dans l'espace $E(k, \delta)$ muni de la topologie induite par $E(k', \delta)$.

L'outil essentiel est la résolution de l'opérateur $\bar\partial$ avec les estimations de Hörmander [7].

Nous aurons besoin des notions suivantes. Étant donnée une fonction g à valeurs réelles définie dans Ω, on notera g^* la plus petite fonction s.c.s. qui majore g. On dira que $\exp(\varkappa)$ est un module de plurisousharmonicité pour Φ, définie dans Ω, si $\varkappa$ est une fonction continue dans Ω est si pour tout $(t_1, \dots t_n) \in \mathbf{C}^n$ la distribution

$$\sum_{j,k} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z_j \, \partial \bar z_k} t_j \bar t_k - \exp(\varkappa) \sum_{j=1}^{n} |t_j|^2$$

est une mesure positive. Dans toute la suite on supposera que w est de la forme $w = \exp(-\Phi)$. On dira que w est un poids si pour tout entier k on a :

$$\sup_{z \in \Omega} \exp(-\Phi(z)) \, \delta_\Omega^{-k}(z) < \infty.$$

Nous obtenons en particulier les résultats suivants.

THÉORÈME. — *Si* $(\Phi - 2\log \delta_\Omega)(z) = \left(\sup_{i \in I} \varphi_i^*\right)(z)$ *pour* $z \in \Omega$, *où chaque* φ_i *est p.s.h. dans un domaine d'holomorphie* $\Omega_i \supset \Omega$, *la famille* $(\varphi_i)_{i \in I}$ *restreinte à* Ω *étant supposée filtrante croissante et si de plus il existe une constante* $C > 0$ *telle que* $C\,\delta_\Omega^{-2}$ *soit un module de plurisousharmonicité pour* Φ, *alors* $\bigcup_{i \in I} H^2(\Omega_i, \exp(-\varphi_i))$ *est dense dans* $H^2(\Omega, \exp(-\Phi))$. *Lorsque* $\Omega = \mathbf{C}^n$ *il suffit de supposer que* $C\,\delta_0^2$ *est un module de plurisousharmonicité pour* Φ.

THÉORÈME. — *Soient* Ω *un ensemble convexe de* $\mathbf{C}^n$ *et* Φ *une fonction convexe dans* Ω *telle que* $\exp(-\Phi)$ *soit un poids. Alors pour tout* p, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, *les polynômes sont denses dans* $H^p(\Omega, \exp(-\Phi))$.

Nous obtenons comme corollaire d'un théorème plus général le résultat suivant.

COROLLAIRE. — *Si* Φ *est p.s.h. homogène complexe d'ordre* $\rho > 0$ *dans* $\mathbf{C}^n$, i.e. $\Phi(uz) = |u|^\rho \Phi(z)$ *pour* $u \in \mathbf{C}^n$ *et* $z \in \mathbf{C}^n$. *Alors les polynômes sont denses dans*

$$H^p(\exp(-\Phi)), \quad 1 \leqslant p \leqslant +\infty.$$

Pour étudier des conditions nécessaires d'approximation, nous montrons le résultat suivant sur les fonctions p.s.h., ce résultat admet d'autres applications [11].

Proposition. — *Soit* Φ *une fonction p.s.h. continue dans un domaine d'holomorphie* Ω *telle que* $\Phi(z) \geqslant -\log \delta_\Omega(z)$ *et* $\exp(-\Phi)$ *lipschitzienne dans* Ω; *alors*

$$\Phi(z) = \left(\sup_\nu C_\nu \log |a_\nu|\right)^*(z)$$

pour tout $z \in \Omega$, *où* $C_\nu > 0$ *et où* a_ν *sont des fonctions holomorphes dans* Ω.

On montre alors qu'une condition nécessaire pour que $H(\Omega')$, l'espace des fonctions holomorphes dans $\Omega' \supset \Omega$, soit dense dans $H^2(\Omega, \exp(-k\Phi))$ pour tout entier positif k, est que, $\exp(-\Phi)$ étant un poids, on ait

$$\Phi(z) = \left(\sup_i c_i \log |f_i|\right)^*(z), \quad z \in \Omega,$$

les c_i étant des constantes positives et f_i des fonctions holomorphes dans Ω'.

Les cas où cette condition est suffisante sont étudiés dans la suite.

2. Approximation dans un domaine d'holomorphie pour les espaces $H^p(\Omega, w)$.

Nous utiliserons à plusieurs reprises les deux théorèmes suivants dus à L. Hörmander [7].

Théorème 1. — *Soient* Ω *un domaine d'holomorphie de* $\mathbf{C}^n$, Φ *une fonction p.s.h. dans* Ω *et* $\exp(\varkappa)$ *un module de plurisousharmonicité pour* Φ. *Pour toute forme*

$$g \in L^2_{(p,q)}(\Omega, \text{loc}), \quad q > 0,$$

telle que $\bar\partial g = 0$ *et* $\int_\Omega |g|^2 \exp -(\Phi + \varkappa)\, d\lambda(z) < \infty$, *il existe* $u \in L^2_{(q,q-1)}(\Omega, \text{loc})$ *telle que* $\bar\partial u = g$ *et*

$$(1) \quad q \int_\Omega |u|^2 \exp(-\Phi)\, d\lambda \leqslant \int_\Omega |g|^2 \exp -(\Phi + \varkappa)\, d\lambda.$$

Les notations sont celles de [7] et [8].

Corollaire 2. — *Soient* Ω *un domaine d'holomorphie de* $\mathbf{C}^n$, φ *une fonction p.s.h. dans* Ω, $g \in L^2_{(p,q)}(\Omega, \mathrm{loc})$, $q > 0$, *avec* $\bar{\partial} g = 0$ *et* $\int |g|^2 \exp(-\varphi)\, d\lambda < \infty$. *Alors il existe* $u \in L^2_{(p,q-1)}(\Omega, \mathrm{loc})$ *vérifiant* $\bar{\partial} u = g$ *et*

$$(2) \quad q \int_\Omega |u|^2 \exp(-\varphi)\, \delta_0^4 \leqslant \frac{1}{2} \int_\Omega |g|^2 \exp(-\varphi)\, d\lambda.$$

Démonstration. — Il suffit d'appliquer le théorème 1 avec $\Phi = \varphi + 2 \log(1 + |z|^2)$. On a

$$\sum_{j,k} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} t_j \bar{t}_k \geqslant 2 \sum_{j,k} \frac{\partial^2}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} \log(1 + |z|^2) t_j \bar{t}_k \geqslant 2 \frac{|t|^2}{(1 + |z|^2)^2}$$

d'où

$$\exp(-\Phi) = \exp(-\varphi)\, \delta_0^4$$

et

$$\exp -(\Phi + \varkappa) = \frac{1}{2} \exp(-\varphi).$$

Donc (2) se déduit de (1).

Proposition 3. — *Soit* Φ *une fonction positive dans un domaine d'holomorphie* Ω. *On suppose que*

$$\Phi(z) - 2 \log \delta_\Omega(z) = \left(\sup_{i \in I} \varphi_i\right)^*(z)$$

pour $z \in \Omega$ *où, pour chaque* $i \in I$, φ_i *est une fonction p.s.h. positive dans un domaine d'holomorphie* $\Omega_i \supset \Omega$. *La restriction de la famille* $(\varphi_i)_{i \in I}$ *à* Ω *est supposée filtrante croissante. Alors pour* $f \in H^2(\Omega, \exp(-\Phi))$ *il existe une suite de fonctions appartenant à* $\bigcup_{i \in I} H^2(\Omega_i, \exp(-\varphi_i)\, \delta_0^4)$ *qui converge vers* f *dans* $H^2(\Omega, \exp(-\Phi)\, \delta_\Omega^2\, \delta_0^4)$.

Démonstration. — D'après un lemme de G. Choquet [9], il existe une suite $i(m)$ d'indices tels que la suite $\varphi_{i(m)}$ soit croissante et $\left(\sup_m \varphi_{i(m)}\right)^* = \left(\sup_{i \in I} \varphi_i\right)^*$ dans Ω. Soit $(K_p)_{p \in \mathbf{N}}$ une suite exhaustive de compacts de Ω et (α_p) une suite de fonctions $\mathscr{C}^\infty$ à support compact dans Ω, $0 \leqslant \alpha_p \leqslant 1$, α_p valant 1 sur un voisinage de K_p. En convolant la fonction caractéristique de K_p avec $\varepsilon^{-n}\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ où ρ est une fonction $\mathscr{C}^\infty$ à support compact égale à 1 sur un voisinage de l'origine, on voit qu'en choisissant ε en fonction de K_p, on peut construire une suite α_p qui vérifie de plus la condition

$$\sum_{1\leqslant l\leqslant n}\left|\frac{\partial\alpha_p}{\partial\bar{z}_l}\right|^2(z) \leqslant C(1+d_\Omega^{-1}(z))^2 \tag{3}$$

où C est une constante indépendante de p.

Posons $g_p = \bar{\partial}(\alpha_p f) = f\,\bar{\partial}\alpha_p$; g_p est une forme différentielle de type $(0, 1)$ à coefficients dans $\mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$. Soit $I(p)$ défini par

$$I(p) = \int_\Omega |g_p|^2 \exp(-\Phi)\, \delta_\Omega^2\, d\lambda = \int |f|^2|\bar{\partial}\alpha_p|^2 \exp(-\Phi)\, \delta_\Omega^2\, d\lambda.$$

D'après (3) on a

$$I(p) \leqslant C\int_{\Omega\setminus K_p} |f|^2 \exp(-\Phi)(1+\delta_\Omega^2)\, d\lambda.$$

Or

$$f \in H^2(\Omega, \exp(-\Phi)) \quad \text{et} \quad \delta_\Omega < 1 \qquad \text{donc} \qquad \lim_{p\to\infty} I(p) = 0.$$

Afin d'alléger les notations, désignons $\varphi_{i(m)}$ par φ_m, $\Omega_{i(m)}$ par Ω_m et posons :

$$I(p, m) = \int_{\Omega_m} |g_p|^2 \exp(-\varphi_m)\, d\lambda.$$

Rappelons que $\sup_m \varphi_m = \left(\sup_m \varphi_m\right)^*$ sauf sur un ensemble de mesure de Lebesgue nulle [9]. Par suite, p étant fixé, en appliquant le théorème de convergence monotone on a :

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty} I(p, m) &= \int_\Omega |g_p|^2 \exp(-(\sup \varphi_m))\, d\lambda \\ &= \int_\Omega |g_p|^2 \exp(-(\sup \varphi_m)^*)\, d\lambda \\ &= \int_\Omega |g_p|^2 \exp(-\Phi)\, \delta_\Omega^2 = I(p),\end{aligned}$$

d'après l'hypothèse : $\Phi - 2\log\delta_\Omega = \left(\sup_i \varphi_i\right)^*$.

Donc pour tout p, il existe un entier $m(p)$ tel que

$$I(p, m(p)) \leqslant 2I(p).$$

Résolvons l'équation $\bar{\partial}u = g_p$ dans le domaine d'holomorphie $\Omega_{m(p)}$. D'après le corollaire 2, il existe une solution u_p vérifiant

$$\int_{\Omega_{m(p)}} |u_p|^2 \exp(-\varphi_{m(p)})\, \delta_0^4\, d\lambda \leqslant \int |g_p|^2 \exp(-\varphi_{m(p)})\, d\lambda$$
$$= \mathrm{I}(p, m(p)) < 2\mathrm{I}(p).$$

Posons $v_p = f\alpha_p - u_p$. Alors $\bar{\partial} v_p = 0$ dans $\Omega_{m(p)}$; par suite v_p est une fonction holomorphe dans $\Omega_{m(p)}$ et on a

$$\int_{\Omega_{m(p)}} |v_p|^2 \exp(-\varphi_{m(p)})\, \delta_0^4\, d\lambda < \infty$$

car il en est ainsi de u_p et que $f\alpha_p$ est à support compact.
De plus

$$\int_\Omega |f\alpha_p - v_p|^2 \exp(-\Phi)\, \delta_\Omega^2\, \delta_0^4\, d\lambda = \int_\Omega |u_p|^2 \exp(-\Phi)\, \delta_\Omega^2\, \delta_0^4\, d\lambda$$
$$\leqslant \int_\Omega |u_p|^2 \exp(-\varphi_{m(p)})\, \delta_0^4\, d\lambda \leqslant 2\mathrm{I}(p),$$

or $f\alpha_p$ est arbitrairement proche de f dans

$$\mathrm{L}^2(\Omega, \exp(\Phi)\, \delta_\Omega^2\, \delta_0^4).$$

Par suite v_p converge vers f dans $\mathrm{H}^2(\Omega, \exp(-\Phi)\, \delta_\Omega^2\, \delta_0^4)$.

Cette proposition a été démontrée par B. Taylor [12] lorsque $\Omega = \mathbf{C}^n$ sous des hypothèses plus fortes sur Φ. Remarquons qu'on peut remplacer dans l'énoncé la fonction δ_Ω par une fonction lipschitzienne strictement positive et tendant vers zéro sur le bord de Ω.

Théorème 4. — *Soit* Φ *une fonction p.s.h. positive dans le domaine d'holomorphie* Ω. *On suppose que* $\exp(-\Phi)$ *est un poids vérifiant les conditions suivantes :*

a) $\Phi(z) = (\sup_{i \in \mathrm{I}} \varphi_i)^*(z)$ *pour* $z \in \Omega$, *où les* φ_i *sont p.s.h. dans* Ω_i, *domaine d'holomorphie contenant* Ω *et où la restriction de la famille* φ_i *à* Ω *est filtrante croissante.*

b) Il existe une constante $\mathrm{C} > 0$ *telle que* $\mathrm{C}\, \delta_\Omega^{-2}$ *soit un module de plurisousharmonicité pour* Φ.

On suppose de plus que

c) $-\log \delta_\Omega(z) = \left(\sup_{i \in \mathrm{I}} \psi_i\right)^*(z)$ *pour* $z \in \Omega$, *où les* ψ_i *sont p.s.h. dans* Ω_i *et la restriction de la famille* (ψ_i) *à* Ω *est filtrante croissante.*

Alors $\bigcup_{i \in I} H^2(\Omega_i, \exp(-\varphi_i))$ *est dense dans*

$$H^2(\Omega, \exp(-\Phi)).$$

Si on suppose que (φ_i), (ψ_i) *sont définies dans* $\mathbf{C}^n$ *et que* $\exp(\varphi_i)$ *et* $\exp(\psi_i)$ *sont à croissance polynomiale alors les polynômes sont denses dans* $H^2(\Omega, \exp(-\Phi))$.

Démonstration. — Comme dans la démonstration de la proposition 3 posons

$$I(p) = \int_\Omega |g_p|^2 \exp(-\Phi)\, \delta_\Omega\, d\lambda,$$
$$I(p, r) = \int_\Omega |g_p|^2 \exp(-r\Phi)\, \delta_\Omega^2\, d\lambda$$

où $0 < r < 1$ et $g_p = \bar\partial(\alpha_p f)$.

On voit facilement que $\lim\limits_{r \to 1} I(p, r) = I(p)$; donc pour tout p il existe $\frac{1}{2} < r(p) < 1$ tel que $I(p, r(p)) \leqslant 2I(p)$. D'après le théorème 1 et l'hypothèse *b*) faite sur Φ il existe une solution u_p de l'équation $\bar\partial u = g_p$ dans Ω vérifiant

$$\int_\Omega |u_p|^2 \exp(-r(p)\Phi)\, d\lambda$$
$$\leqslant \frac{2}{C} \int_\Omega |g_p|^2 \exp(-r(p)\Phi)\, \delta_\Omega^2\, d\lambda \leqslant \frac{4}{C} I(p).$$

En effet $C/2\ \delta_\Omega^{-2}$ est un module de plurisousharmonicité pour $r(p)\Phi$ puisque $r(p) > \frac{1}{2}$. En posant $v_p = f\alpha_p - u_p$ alors $\bar\partial v_p = 0$ et on voit qu'on peut approcher f dans

$$H^2(\Omega, \exp(-\Phi))$$

par des fonctions qui sont dans $\bigcup_{r<1} H^2(\Omega, \exp(-r\Phi))$. Il nous suffit à présent d'approcher les fonctions de

$$H^2(\Omega, \exp(-r_0\Phi)),\ r_0 < 1.$$

Or $(r_0\Phi - 2\log\delta_\Omega)(z) = \big(\sup\limits_i (r_0\varphi_i + 2\psi_i)\big)^*(z)$ pour $z \in \Omega$, d'après les hypothèses *a*) et *c*). La proposition 3 permet d'affirmer qu'on peut approcher une fonction $h \in H^2(\Omega, \exp(-r_0\Phi))$ par des fonctions de $\bigcup_{i \in I} H^2(\Omega_i, \exp(-r_0\varphi_i - 2\psi_i)\, \delta_0^4)$ et ceci pour la norme de l'espace $H^2(\Omega, \exp(-r_0\Phi)\,\delta_\Omega^2\,\delta_0^2)$. Or, puisque, pour tout $k > 0$, $\sup_{z\in\Omega} \exp(-\Phi)\,\delta_\Omega^{-k}(z) < \infty$, la convergence dans l'espace $H^2(\Omega, \exp(-r_0\Phi)\,\delta_\Omega^2\,\delta_0^2)$ implique la convergence dans $H^2(\Omega, \exp(-\Phi))$. Pour terminer la démonstration, il nous suffit de montrer que les fonctions de $H^2(\exp(-r_0\varphi_i - 2\psi_i)\,\delta_0^4)$ sont des polynômes si $\exp(\varphi_i)$ et $\exp(\psi_i)$ sont à croissance polynomiale. En effet, si f appartient à cet espace, il existe par hypothèse un entier $k > 0$ tel que $\int |f|^2(1+|z|^2)^{-k}\,d\lambda < \infty$. On a alors

$$\begin{aligned}
|f(z)|^2 &\leqslant C_n \int_{|u|\leqslant 1} |f(z+u)|^2\,d\lambda(u)\\
&\leqslant C_n \int_{|u|\leqslant 1} |f(z+u)|^2(1+|z+u|^2)^{-k}(1+|z+u|^2)^k\,d\lambda(u)\\
&\leqslant \sup_{|u|\leqslant 1}(1+|z+u|^2)^k C_n \int |f(\zeta)|^2(1+|\zeta|^2)^{-k}\,d\lambda(\zeta)\\
&\leqslant M(1+|z|^2)^k
\end{aligned}$$

donc f est un polynôme d'après le théorème de Liouville.

Exemple 5. — Soit U un ouvert borné de $\mathbf{C}^n$ et ρ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ strictement plurisousharmonique dans U. Posons $\Omega = \{z/z \in U,\ \rho(z) < 0\}$, on suppose $U \supset \overline{\Omega}$; alors Ω est strictement pseudoconvexe. Posons $\Phi = -\dfrac{1}{\rho}$; Φ vérifie les hypothèses de la proposition 4, car c'est la composée de ρ avec la fonction $h(x) = -x^{-1}$ qui est convexe croissante sur $\mathbf{R}_-$. Donc $\Phi = \sup(\alpha_i\rho + \beta_i)$ où α_i et β_i sont des constantes, $\alpha_i > 0$ et $\alpha_i\rho + \beta_i$ est p.s.h. dans U. De plus on a

$$\partial\bar\partial\Phi \geqslant \rho^{-2}\,\partial\bar\partial\rho \geqslant c\rho^{-2} \geqslant c\,\delta_\Omega^{-2}.$$

Donc Φ vérifie l'hypothèse *b*) et il est clair que $\exp(-\Phi)$ est un poids. Par suite les fonctions holomorphes dans U sont denses dans $H^2(\Omega, \exp(\rho^{-1}))$.

Théorème 6. — *Soient* Ω *un ouvert convexe de* $\mathbf{C}^n$ *et* Φ *une fonction convexe dans* Ω *telle que* $\exp(-\Phi)$ *soit un poids; alors pour tout* p, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, *les polynômes sont denses dans* $H^p(\Omega, \exp(-\Phi))$.

Lorsque $\Omega = \mathbf{C}^n$ ce résultat est démontré dans [12] en utilisant des fonctionnelles analytiques; notre démonstration est cependant différente même dans ce cas.

Démonstration. — Nous allons faire d'abord la démonstration pour $p = 2$. On peut toujours supposer que $\Phi \geqslant 0$, $0 \in \Omega$ et $\Phi(0) = 0$.

Soit $t > 1$. La convexité de Φ permet d'écrire

$$\Phi(z) \leqslant t^{-1}\Phi(z) + (1 - t^{-1})\Phi(0)$$

ou encore

$$\Phi(tz) \geqslant t\Phi(z). \tag{4}$$

En particulier $\Phi(z) \geqslant R^{-1}|z|\Phi\left(\frac{Rz}{|z|}\right)$; par suite il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\Phi(z) \geqslant \varepsilon|z|$ pour $|z|$ assez grand, sinon Φ serait nulle dans une direction donnée et $\exp(-\Phi)$ ne serait pas un poids.

Posons pour $r < 1$ $f_r(z) = f(rz)$; la fonction f_r est définie dans $\Omega_r = r^{-1}\Omega \supset \Omega$. On a

$$\int_\Omega |f_r(z)|^2 \exp(-\Phi(z))\, d\lambda = r^{-2n} \int_{r\Omega} |f(z)|^2 \exp(-\Phi(r^{-1}z))\, d\lambda;$$

or

$$X_{r\Omega}(z) \exp(-\Phi(r^{-1}z)) \leqslant X_\Omega \exp\left(-\frac{1}{r}\Phi(z)\right) \leqslant X_\Omega \exp(-\Phi(z))$$

où X_Ω désigne la fonction caractéristique de Ω.

D'où, en appliquant le théorème de convergence dominée de Lebesgue, $\|f_r\| \to \|f\|$ quand $r \to 1$; par ailleurs f_r converge vers f ponctuellement. La boule unité de l'espace $H^2(\Omega, \exp(-\Phi))$ étant faiblement compacte, on voit que $\|f_r - f\|$ tend vers zéro quand r tend vers 1; de plus

$$f_r \in H^2(r^{-1}\Omega, \exp(\Phi_r)).$$

Nous avons besoin du lemme suivant.

Lemme 7. — *Soient Ω un ouvert convexe et ψ une fonction convexe sur Ω telle que $\psi(z) \geqslant \varepsilon|z|$. Alors il existe une suite ψ_k de fonctions p.s.h. dans $\mathbf{C}^n$ telles que $\exp(\psi_k)$ soit à croissance polynomiale et $\psi(z) = \sup_k \psi_k(z)$ pour tout $z \in \Omega$.*

Supposons le lemme démontré et achevons la démonstration du théorème. Il est clair que

$$\Phi - 2\log\delta_\Omega = \sup((\Phi - 2\log d_\Omega),\ \Phi + 2\log(1 + |z|^2)).$$

Or, $\Phi - 2\log d_\Omega$ est convexe puisque Φ l'est et l'hypothèse Ω convexe équivaut à $-\log d_\Omega$ convexe. De plus

$$\Phi - 2\log d_\Omega \geqslant \varepsilon'|z|$$

comme on l'a vu, puisque $-\log d_\Omega(z) \geqslant -\log|z-a|$. D'après le lemme 7, $\Phi - 2\log d_\Omega$ et Φ s'écrivent comme enveloppe supérieure de fonctions p.s.h. dont l'exponentielle est à croissance polynomiale; il en est donc de même de $\Phi - 2\log \delta_\Omega$ et de $\Phi_r - 2\log\delta_{r^{-1}\Omega}$, puisque $r^{-1}\Omega$ est convexe. D'où $\Phi_r - 2\log\delta_{r^{-1}\Omega} = \sup\limits_k \varphi_k$ avec $\exp(\varphi_k)$ à croissance polynomiale. La proposition 3 permet d'affirmer qu'on peut approcher f_r dans l'espace

$$H^2(r^{-1}\Omega, \exp(-\Phi_r)\,\delta^2_{r^{-1}\Omega}\,\delta_0^4)$$

par des fonctions de $\bigcup\limits_i H^2(\exp(-\varphi_i)\,\delta_0^4)$ c'est-à-dire par des polynômes, comme on l'a vu dans la démonstration du théorème 4.

Il suffit de remarquer que la convergence dans

$$H^2(r^{-1}\Omega, \exp(-\Phi_r)\,\delta^2_{r^{-1}\Omega}\,\delta_0^4)$$

implique la convergence dans $H^2(\Omega, \exp(-\Phi))$.

Or

$$(5) \qquad d_{r^{-1}\Omega}(z) \geqslant \alpha > 0 \quad \text{pour tout} \quad z \in \Omega.$$

En effet, il existe une boule de centre 0 et de rayon β contenue dans Ω. Donc si $z \in \Omega$, on a pour $|\zeta| \leqslant \beta(1-r)$

$$z + \zeta = r[r^{-1}z] + (1-r)((1-r)^{-1}\zeta) \in r^{-1}\Omega$$

d'où l'inégalité (5). On a vu (4) que pour $r < 1$,

$$\Phi(z) \geqslant r^{-1}\Phi(rz).$$

Par suite

$$\begin{aligned}\exp(-\Phi(z)) &\leqslant \exp(-r^{-1}\Phi_r(z))\\ &= \exp(-\Phi_r(z))\exp(1-r^{-1})\Phi_r(z) \leqslant C\exp(-\Phi_r(z))\,\delta^2_{r^{-1}\Omega}\,\delta_0^4\end{aligned}$$

puisque $d_{r^{-1}\Omega}(z) \geqslant \alpha > 0$ et $\Phi(z) \geqslant \varepsilon|z|$.

Démonstration du lemme 7. — ψ étant convexe, d'après le théorème de Hahn Banach, $\psi = \sup\limits_j (\mathrm{Re}\langle z, w_j\rangle - \alpha_j)$,

$\alpha_j \in \mathbf{C}$, $w_j \in \mathbf{C}^n$. Il nous suffit donc de montrer que dans $\mathbf{C}$ la fonction $\varphi = \sup(\varepsilon|z|, x)$, où $x = \operatorname{Re} z$, s'écrit comme $\left(\sup_k \tilde{\varphi}_k\right)$ avec $\tilde{\varphi}_k$ sous-harmonique dans $\mathbf{C}$ et $\exp(\tilde{\varphi}_k)$ à croissance polynomiale.

En effet, $\psi = \sup_j [\sup((\operatorname{Re}\langle z, w_j\rangle) - \alpha_j, \varepsilon|z|]$ et en utilisant une rotation on se ramène au cas où $w_j = (w_j^0, 0, \ldots 0)$. Remarquons que

$$\varepsilon|z| = \sup_{\mathrm{N}} \left(\log \sum_0^{\mathrm{N}} \frac{\varepsilon^n |z|^n}{n!}\right) = \sup_{\mathrm{N}} \varphi_{\mathrm{N}}.$$

La fonction φ_{N} est sous-harmonique et $\exp(\varphi_{\mathrm{N}})$ est à croissance polynomiale.

Soit θ une représentation conforme de l'angle $\varepsilon|z| < x$ sur le demi plan supérieur

$$\theta(z) = e^{i\gamma} z^\beta. \tag{6}$$

Si $\operatorname{Im} z > 0$, posons

$$\widetilde{(\varphi_{\mathrm{N}} \circ \theta^{-1})}(z) = \frac{y}{\pi} \int_{\mathbf{R}} \frac{(\varphi_{\mathrm{N}} \circ \theta^{-1})(t)}{(t-x)^2 + y^2}\, dt \quad \text{où} \quad z = x + iy.$$

On voit que $(\varphi_{\mathrm{N}} \circ \theta^{-1})(t) \leqslant p \log^+ |t| + \mathrm{C}$ donc que l'intégrale est convergente. On voit facilement que $\log^+ |t| = \inf_{s<1} ((es)^{-1} t^s)$, par suite

$$\begin{aligned} |\widetilde{(\varphi_{\mathrm{N}} \circ \theta^{-1})}(z)| &\leqslant \mathrm{A} + \frac{py}{\pi} \int \frac{\log^+|t|}{(t-x)^2 + y^2}\, dt \\ &\leqslant \mathrm{A} + \frac{py}{\pi} \int \frac{(es)^{-1} t^s}{(t-x)^2 + y^2} = \mathrm{A} + p \operatorname{Re}(z^s)(es)^{-1}. \end{aligned}$$

D'où il résulte que

$$|\widetilde{(\varphi_{\mathrm{N}} \circ \theta^{-1})}(z)| \leqslant \mathrm{A} + p \log^+ |z|. \tag{7}$$

Posons $\tilde{\varphi}_{\mathrm{N}}(z) = \varphi_{\mathrm{N}}(z)$ si $\varepsilon|z| > x$ et $\tilde{\varphi}_{\mathrm{N}}(z) = \widetilde{(\varphi_{\mathrm{N}} \circ \theta^{-1})} \circ \theta$ si $\varepsilon|z| \leqslant x$. On a $|\tilde{\varphi}_{\mathrm{N}}(z)| \leqslant \mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2 \log^+ |z|$ d'après (6) et (7) et $|\varphi_{\mathrm{N}}(z)| \leqslant \varphi(z)$.

Remarquons que

$$\widetilde{\varphi_{\mathrm{N}} \circ \theta^{-1}}(z) \geqslant \varphi_{\mathrm{N}} \circ \theta^{-1}(z), \tag{8}$$

par suite $\tilde{\varphi}_{\mathrm{N}}(z) \geqslant \varphi_{\mathrm{N}}(z)$ voir lemme 8. Donc $\tilde{\varphi}_{\mathrm{N}}$ est sous-harmonique dans $\mathbf{C}$ et à l'intérieur de l'angle $x > \varepsilon|z|$, elle est égale à la solution du problème de Dirichlet avec donnée au bord φ_N. De plus $\varphi(z) = \sup_N \tilde{\varphi}_N(z)$, car en faisant tendre N vers l'infini on voit que la solution du problème de Dirichlet, dans la construction choisie, avec pour donnée au bord φ_N converge vers la solution du problème avec pour donnée au bord x et que cette solution est égale à x.

L'inégalité (7) et la relation (6) permettent de voir que $\exp(\varphi_N)$ est à croissance polynomiale.

Remarquons que la conclusion du lemme 7 reste vraie pour la fonction ψ^α, α étant un nombre strictement positif et ψ une fonction convexe vérifiant $\psi(z) \geqslant \varepsilon|z|$ pour un $\varepsilon > 0$ donné.

Pour écrire l'inégalité (8) nous avons utilisé le résultat suivant : soit h une fonction sous-harmonique dans le demi-plan supérieur, continue dans le demi-plan supérieur fermé. On suppose qu'il existe $k > 0$ tel que

$$0 \leqslant h(z) \leqslant k \log(1 + |z|^2).$$

Notons Ph l'intégrale de Poisson de la fonction h, i.e.

$$\mathrm{Ph}(z) = \frac{y}{\pi} \int_{\mathbf{R}} \frac{h(t)\, dt}{(x-t)^2 + y^2}.$$

On a alors $h \leqslant \mathrm{P}h$.

Nous allons démontrer un résultat un peu plus général.

LEMME 8. — *Soit u une fonction sous-harmonique dans le demi-plan supérieur continue dans le demi-plan supérieur fermé. On suppose que*

$$\int_{\mathbf{R}} \frac{|u(t)|}{1+t^2}\, dt < \infty \quad \varliminf_{r \to \infty} \frac{1}{r} \int_0^\pi u^+(re^{i\varphi}) \sin\varphi \, d\varphi = 0.$$

Alors $u \leqslant \mathrm{P}u$ où $\mathrm{P}u$ désigne l'intégrale de Poisson de u.

Démonstration. — Soit $z \in \mathbf{C}$ avec $\operatorname{Im} z > 0$. Désignons par μ_z^R la mesure harmonique, relative au point z, du demi-disque centré en 0 et de rayon R contenu dans le demi-plan supérieur.

On peut calculer explicitement μ_z^R. Pour R assez grand, on a alors :

$$u(z) \leqslant \frac{y}{\pi} \int_{-R}^{+R} \frac{(R^2 - |z|^2)(R^2 - t^2)}{|t - z|^2 |r^2 - tz|^2} u(t)\, dt + \frac{2y}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{(R^2 - |z|^2) R \sin \varphi}{|Re^{i\varphi} - z|^2 |Re^{i\varphi} - \bar{z}|^2} u(Re^{i\varphi})\, d\varphi.$$

Majorons la dernière intégrale en remplaçant u par u^+. Les hypothèses faites sur u permettent de passer à la limite en faisant tendre R vers l'infini; d'où il résulte que $u \leqslant Pu$.

Ceci achève la démonstration du théorème pour $p = 2$.

Faisons la démonstration pour $p = +\infty$. Si $r < 1$ on a

$$|f_r(z)| \exp(-\Phi) \leqslant |f(rz)| \exp(-r^{-1}\Phi(rz))$$

puisque $\Phi(rz) \leqslant r\Phi(z)$. Donc $f_r \in H^\infty(\Omega, \exp(-\Phi))$ et f_r converge vers f quand r tend vers 1.

Pour $r' > r$, $f_r \in H^2(r'^{-1}\Omega, 2\Phi_{r'})$. En effet

$$\Phi(r'z) \geqslant \frac{r'}{r} \Phi(rz),$$

d'où

$$|f_r(z)|^2 \exp(-2\Phi(r'z)) \leqslant |f(rz)|^2 \exp\left(-2 \frac{r'}{r} \Phi(rz)\right)$$

qui est intégrable puisque $\Phi(z) \geqslant \varepsilon|z|$ et $r'/r > 1$.

Par suite, il existe une suite de polynômes p_j qui converge vers f_r dans $H^2(r'^{-1}\Omega, 2\Phi_{r'})$, c'est l'application du théorème pour $p = 2$. Or si $z \in \Omega$ on a vu que $z + \zeta \in r'^{-1}\Omega$ pour $|\zeta| \leqslant \beta(1 - r') = r_1$. Il en résulte que

$$\begin{aligned} |f_r(z) - p_j(z)|^2 &\leqslant Cr_1^{-2n} \int_{|\zeta| < r_1} |f_r(z + \zeta) - p_j(z + \zeta)|^2 \, d\lambda(\zeta) \\ &\leqslant Cr_1^{-2n} \sup_{|\zeta| \leqslant r_1} \exp(2\Phi_{r'}(z + \zeta)) \int_{r'^{-1}\Omega} |f_r(\zeta) \\ &\quad - p_j(\zeta)|^2 \exp -(2\Phi_{r'}(\zeta))\, d\lambda(\zeta) \\ &\leqslant Cr_1^{-2n} \exp(2\Phi(z))\varepsilon_j, \end{aligned}$$

où

$$\varepsilon_j = \int_{r'^{-1}\Omega} |f_r(\zeta) - p_j(\zeta)|^2 \exp(-2\Phi_{r'}(\zeta))\, d\lambda(\zeta).$$

En effet, $\Phi_{r'}(z + \zeta) \leqslant \Phi(z) + A(r')$ car

$$\begin{aligned} \Phi(r'z + r'\zeta) &\leqslant r'\Phi(z) + (1 - r')\Phi(r'(1 - r')^{-1}\zeta) \\ &\leqslant r'\Phi(z) + A(r'). \end{aligned}$$

D'où il résulte que p_j converge vers f_r dans

$$H^\infty(\Omega, \exp(-\Phi))$$

puisque $\lim\limits_{j\to\infty} \varepsilon_j = 0$.

Pour démontrer le résultat, lorsque $1 \leqslant p < \infty$, on se ramène selon la même technique au cas $p = 2$.

3. Approximation pour les algèbres $\mathcal{O}(\delta)$.

Nous avons défini l'algèbre $\mathcal{O}(\delta)$ au paragraphe 1, δ étant une fonction lipschitzienne positive telle que $\delta \leqslant \delta_0$.

THÉORÈME 9. — *Si* $-\log \delta(z) = \left(\sup\limits_{i\in I} \varphi_i\right)^*(z)$ *pour* $z \in \Omega$ *avec* φ_i *p.s.h. dans un domaine d'holomorphie* $\Omega_i \supset \Omega$ *et si la restriction de la famille* φ_i *à* Ω *est filtrante croissante, alors on peut approcher les fonctions de* $E(k, \delta)$ *pour la norme de* $E(k + 2n + 4, \delta)$ *par des fonctions de*

$$\bigcup_{i\in I} H^2(\Omega_i, \exp(-c\varphi_i)\, \delta_0^4),$$

avec $c = 2k + 2n + 3$.

Démonstration. — Soit $\Omega = \{z/z \in \mathbf{C}^n;\ \delta(z) > 0\}$. On a $\delta(z) \leqslant \delta_\Omega(z)$ pour tout z. Dans la démonstration de la proposition 3, on peut supposer

$$\sum_l \left|\frac{\partial \alpha_p}{\partial \bar{z}_l}\right|^2 \leqslant c(1 + \delta^{-1})^2.$$

Par suite étant donné $f \in E(k, \delta)$ qui est inclus dans $H^2(\Omega, \delta^{2k+2n+1})$, on peut l'approcher dans $H^2(\Omega, \delta^{2k+2n+7})$ par des fonctions appartenant à $\bigcup\limits_{i\in I} H^2(\Omega_i, \exp(-c\varphi_i)\, \delta_0^4)$. Il suffit pour terminer la démonstration de voir que

$$H^2(\Omega, \delta^{2k+2n+7})$$

s'injecte continûment dans $E(k + 2n + 4, \delta)$.

En effet on a :

$$(9) \quad |f(z)|^2\, \delta^{2k+2n+7}(z) \leqslant (\operatorname{vol} B_z)^{-1} \int_{B_z} |f(z + \zeta)|^2\, \delta^{2k+2n+7}(z)\, d\lambda(\zeta)$$

où B_z désigne la boule de centre z et de rayon $\frac{1}{2}\,\delta(z)$. Mais B_z est contenue dans Ω, car

$$|\delta(z) - \delta(z+\zeta)| \leqslant \frac{1}{2}\,\delta(z)$$

si $|\zeta| \leqslant \frac{1}{2}\,\delta(z)$; donc $\delta(z+\zeta) > 0$ si $z+\zeta \in B_z$.
De (9) on déduit

$$|f(z)|^2\,\delta(z)^{2k+2n+7} \leqslant c_n\,\delta(z)^{-2n}\int_\Omega |f(z')|\,\delta(z')^{2k+2n+7}\,d\lambda(z')$$

c'est-à-dire

$$\|f\|_{k+2n+4} \leqslant c\left(\int |f(z')|^2\,\delta^{2n+2k+7}\,d\lambda(z')\right).$$

Introduisons une définition de la densité dans $\mathcal{O}(\delta)$ qui soit plus fine que la notion de densité pour la structure bornologique.

Definition 11. — *Un sous-espace* F *est dense dans* $\mathcal{O}(\delta)$ *s'il existe une constante* $\gamma > 0$ *telle que pour tout* k, *on peut approcher les fonctions de* $E(k, \delta)$ *par des éléments de* F *et cela pour la norme de l'espace* $E(k+\gamma, \delta)$.

Corollaire 12. — *Soit* Ω *un domaine de* $\mathbf{C}^n$. *On suppose que* $\Omega = \overset{\bullet}{\widehat{\bigcap_{i\in I}\Omega_i}}$ *où chaque* Ω_i *est un domaine d'holomorphie. Alors* $\bigcup_{i\in I}\mathcal{O}(\delta_{\Omega_i})$ *est dense dans* $\mathcal{O}(\delta_\Omega)$.

En particulier, si $\overset{\bullet}{\overline{\Omega}} = \Omega$ et $\overline{\Omega}$ est un compact polynomialement convexe, les polynômes sont denses dans $\mathcal{O}(\delta_\Omega)$.

Démonstration. — Puisque $\Omega = \overset{\bullet}{\widehat{\bigcap_{i\in I}\Omega_i}}$, on a

$$\delta_\Omega(z) = \inf_i \delta_{\Omega_i}(z)$$

pour $z \in \Omega$. D'où $-\log\delta_\Omega(z) = \sup_{i\in I}(-\log\delta_{\Omega_i}(z))$, $z \in \Omega$; or $-\log\delta_{\Omega_i}$ est p.s.h. dans Ω_i puisque Ω_i est un domaine d'holomorphie. Donc $\bigcup_{i\in I}\mathcal{O}(\delta_{\Omega_i})$ est dense dans $\mathcal{O}(\delta_\Omega)$ au sens de la définition 10, ceci d'après le théorème 9.

Si $\overline{\Omega}$ est un compact polynomialement convexe, on a $\overline{\Omega} = \bigcap_p \Omega_p$ où chaque Ω_p est un polyèdre analytique et $\Omega = \dot{\overline{\Omega}} = \bigcap_p \Omega_p$. Le théorème d'approximation d'Oka permet d'approcher les fonctions de $\mathcal{O}(\delta_{\Omega_p})$ par des polynômes uniformément sur $\overline{\Omega}$.

Exemple 13. —Dans $\mathbf{C}^2$ considérons le domaine d'holomorphie

$$\omega = \{(z_1, z_2) | (z_1, z_2) \in \mathbf{C}^2 ; \ |z_1| < |z_2| < 1\}.$$

On montre que $\delta_\omega(z) = d_\omega(z) = \inf [(1 - |z_2|), |z_2| - |z_1|]$.

Or

$$(1 - |z_2|)^{-1} = \sup_{\mathrm{N}} \Big[\sum_{0 \leqslant p \leqslant \mathrm{N}} |z_2|^p \Big]$$

et

$$(|z_2| - |z_1|)^{-1} = \sup_{\mathrm{N}, \lambda_1, \lambda_2} |\mathrm{P}_{\mathrm{N}, \lambda_1, \lambda_2}(z_1, z_2)| \, ; \, |\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$$

où

$$\mathrm{P}_{\mathrm{N}, \lambda_1, \lambda_2}(z_1, z_2) = \sum_{0 \leqslant p \leqslant \mathrm{N}} (\lambda_1 z_1)^p (\lambda_2 z_2)^{-(p+1)}.$$

D'où il résulte que pour $z \in \omega$, on a

$$- \log \delta_\omega(z) = \Big(\sup_j \log |f_j|\Big)(z)$$

avec f_j holomorphe dans $\mathbf{C}^2 \setminus \mathbf{C} \times \{0\} = \Omega$, donc $\mathrm{H}(\Omega)$ est dense dans $\mathcal{O}(\delta_\omega)$. On voit facilement que les polynômes ne sont pas denses dans $\mathcal{O}(\delta_\omega)$.

4. Approximation de fonctions entières.

Dans ce paragraphe on suppose que Φ est une fonction positive p.s.h. dans $\mathbf{C}^n$, telle que $\exp(-\Phi)$ soit un poids, i.e. pour tout k, $\sup_{z \in \mathbf{C}^n} \delta_0^{-k}(z) \exp(-\Phi(z)) < \infty$.

Proposition 14. — *Supposons que* Φ *vérifie les conditions suivantes :*

a) Il existe une constante $\mathrm{C} > 0$ *telle que* $\mathrm{C}\,\delta_0^2$ *soit un module de plurisousharmonicité pour* Φ.

b) $\Phi = \left(\sup_{j\in J} \Phi_j\right)^*$, Φ_j *étant une famille de fonctions p.s.h. dans* $\mathbf{C}^n$ *avec* $\exp(\Phi_j)$ *à croissance polynomiale.*

Alors les polynômes sont denses dans $H^2(\exp(-\Phi))$.

Démonstration. — Soit α une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ dans $\mathbf{C}^n$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ égale à 1 pour $|z| \leqslant 1$ et nulle pour $|z| \geqslant 2$. Posons $\alpha_p(z) = \alpha(p^{-1}z)$. On a

$$\sum_j \left|\frac{\partial \alpha_p}{\partial \bar{z}_j}\right|^2 \leqslant C(1 + |z|^2)^{-1}. \tag{10}$$

En posant $g_p = \bar{\partial}(\alpha_p f)$ où $f \in H^2(\exp(-\Phi))$, et

$$I(p) = \int |g_p|^2 \exp(-\Phi)(1 + |z|^2)\, d\lambda(z),$$

on voit comme dans la proposition 3 que $\lim_{p\to\infty} I(p) = 0$. Soit

$$I(p, j) = \int |g_p|^2 \exp(-\Phi_j/2 - \Phi/2)(1 + |z|^2)\, d\lambda.$$

On peut supposer comme on l'a vu que Φ_j est une suite, et qu'elle est filtrante croissante, puisque cela ne modifie pas la croissance polynomiale de $\exp(\Phi_j)$ lorsqu'on prend la borne supérieure d'un nombre fini de fonctions de ce type.

Pour p fixé on a $\lim_{j\to\infty} I(p, j) = I(p)$. Donc pour tout p, il existe $j(p)$ avec $I(p, j(p)) \leqslant 2I(p)$. Résolvons dans $\mathbf{C}^n$ l'équation

$$\bar{\partial} u = g_p \tag{11}$$

pour la fonction $\varphi_p = \frac{\Phi_{j(p)}}{2} + \frac{\Phi}{2}$; φ_p admet comme module de plurisousharmonicité $\exp(\varkappa) = \frac{c}{2}(1 + |z|^2)^{-1}$ d'après l'hypothèse *a*). D'après le théorème 1 il existe une solution de (11) vérifiant

$$\int |u_p|^2 \exp(-\varphi_p)\, d\lambda \leqslant \frac{2}{c} \int |g_p|^2 \exp(-\varphi_p)(1 + |z|^2)\, d\lambda \leqslant \frac{4}{c} I(p).$$

Si $v_p = \alpha_p f - u_p$, on a $\bar{\partial} v_p = 0$. On voit comme dans la proposition 3 que v_p converge vers f dans $H^2(\exp(-\Phi))$.

Les fonctions v_p appartiennent à $\bigcup_j H^2\left(\exp\left(-\frac{\Phi}{2}-\frac{\Phi_j}{2}\right)\right)$. Il nous suffit donc d'approcher les fonctions

$$v \in H^2\left(\exp\left(-\frac{\Phi}{2}-\frac{\Phi_{j_0}}{2}\right)\right)$$

par des polynômes. Or l'hypothèse *b*) montre que

$$\frac{\Phi}{2}+\frac{\Phi_{j_0}}{2}=\left(\sup_j \frac{\Phi_j}{2}+\frac{\Phi_{j_0}}{2}\right)^*.$$

En reprenant le raisonnement de la proposition 3, mais avec $\alpha_p = \alpha(p^{-1}z)$, on voit que $\bigcup_{j\in J} H^2\left(\exp\left(-\frac{\Phi_j}{2}-\frac{\Phi_{j_0}}{2}\right)\delta_0^2\right)$ est dense dans $H^2\left(\exp\left(-\frac{\Phi}{2}-\frac{\Phi_{j_0}}{2}\right)\right)$ pour la norme de $H^2\left(\exp\left(-\frac{\Phi}{2}-\frac{\Phi_{j_0}}{2}\right)\delta_0\right)$. Or la convergence dans cet espace implique la convergence dans $H^2(\exp(-\Phi))$; en effet $\exp(-\Phi) \leqslant c_{j_0}\exp\left(-\frac{\Phi}{2}-\frac{\Phi_{j_0}}{2}\right)\delta_0^2$ puisque

$$(1+|z|^2)\exp(\Phi_{j_0})$$

étant à croissance polynomiale est majoré par $c_{j_0}\exp\left(-\frac{\Phi}{2}\right)$.

Enfin les fonctions de $H^2\left(\exp\left(-\frac{\Phi_j}{2}-\frac{\Phi_{j_0}}{2}\right)\delta_0^2\right)$ sont des polynômes.

Remarque 15. — Si on ne conserve que l'hypothèse

$$\Phi = (\sup \Phi_j)^*$$

où Φ_j est p.s.h. dans $\mathbf{C}^n$ la famille Φ_j étant filtrante croissante, on peut approcher les fonctions de $H^2(\exp - \Phi))$ pour la norme de $H^2(\exp(-\Phi)\,\delta_0^2)$ par des fonctions de $\bigcup_{j\in J} H^2(\exp(-\Phi_j)\,\delta_0^2)$.

Exemple 16. — Si $\Phi(z) = |z|^{2\alpha} + \varphi(z)$ où $\alpha > 0$ et φ une fonction convexe avec $\varphi(z) \geqslant \varepsilon|z|$, les polynômes sont denses dans $H^2(\exp(-\Phi))$. En effet $\partial\bar\partial\Phi \geqslant \partial\bar\partial|z|^{2\alpha}$ et

$$\sum_{k,j} \frac{\partial^2|z|^{2\alpha}}{\partial z_k \partial \bar z_j} t_k \bar t_j = \alpha|z|^{2(\alpha-1)} + \alpha(\alpha-1)|z|^{2(\alpha-2)}\Big|\sum_{j=1}^{n} z_j \bar t_j\Big|^2$$
$$\geqslant c(1+|z|^2)^{-1}|t|^2.$$

Or $|z|^{2\alpha} = \sup_{N} \log\left(\sum_0^N \frac{|z|^{2\alpha p}}{p!}\right)$, donc $\Phi = \sup_j \Phi_j$, Φ_j vérifiant les conditions de la proposition 14; pour φ il faut utiliser le lemme 7.

Corollaire 16. — *Soit Φ une fonction p.s.h. dans $\mathbf{C}^n$, telle que $\exp(-\Phi)$ soit un poids. On suppose de plus les conditions suivantes.*

a) $\Phi = \left(\sup_{i\in I} \Phi_i\right)^*$ *où chaque Φ_i est p.s.h. dans $\mathbf{C}^n$,* $\exp(\Phi_i)$ *étant à croissance polynomiale.*

b) Il existe une constante B *telle que pour tout λ,*

$$1 \leqslant \lambda \leqslant 2,$$

on ait $\Phi(\lambda z) \geqslant \Phi(z) - B$.

c) Pour tout λ, $1 \leqslant \lambda \leqslant 2$, *il existe une constante* $A(\lambda)$ *telle que*

$$\Phi(\lambda z) \geqslant \Phi(z) + \log(1+|z|^2) - A(\lambda).$$

Alors les polynômes sont denses dans $H^2(\exp(-\Phi))$.

Démonstration. — Posons $f_r(z) = f(rz)$. On voit grâce à l'hypothèse *b)* que f_r converge vers f dans $H^2(\exp(-\Phi))$. (Même démonstration que pour le théorème 6). Il nous suffit d'approcher f_r par des polynômes. On peut supposer la famille Φ_i filtrante croissante; d'après la remarque 15 on peut approcher f_r par des polynômes pour la norme de $H^2(\exp(-\Phi_r)\,\delta_0^2)$. Or l'hypothèse *c)* montre que

$$\exp(-\Phi) \leqslant C_r \exp(-\Phi_r)\,\delta_0^2$$

donc les polynômes sont denses dans $H^2(\exp(-\Phi))$.

Proposition 17. — *On suppose que Φ vérifie les conditions a) et b) du corollaire 16 ainsi que les deux conditions suivantes.*

c') *Pour tout* $1 \leqslant \lambda \leqslant 2$ *il existe une constante* $C(\lambda)$ *telle que*

$$\Phi(\lambda z) \geqslant \Phi(z) + n \log(1 + |z|^2) - C(\lambda).$$

d) *Pour tout* $r < 1$, *il existe une constante* $B(r)$ *telle que*

$$\tilde{\Phi}(rz) - \Phi(z) \leqslant B(r)$$

où

$$\tilde{\Phi}(\zeta) = \sup_{|w|\leqslant 1} \Phi(\zeta + w).$$

Alors pour tout p, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, *les polynômes sont denses dans* $H^p(\exp(-\Phi))$.

Démonstration. — L'hypothèse *b*) montre que $\|f_r\|_p \to \|f\|_p$ lorsque r tend vers 1. Il est clair que f_r converge ponctuellement vers f, par suite d'après [6] p. 208 f_r converge vers f dans $H^p(\exp(-\Phi))$, $1 \leqslant p < \infty$.

Lorsque $p = +\infty$ on a

$$|f(rz)| \exp(-\Phi(z)) \leqslant \exp(B)|f(rz)| \exp(-\Phi(rz)).$$

Donc $f_r \in H^\infty(\exp(-\Phi))$ et f_r converge vers f dans cet espace.

Poursuivons la démonstration lorsque $p = +\infty$.

Nous allons approximer f_r, $r < 1$. Soit $r_0 < r' < 1$

$$|f_r(z)| \leqslant \exp(B)\|f\|_\infty \exp(\Phi(rz))$$

$$|f_r(z)|^2 \exp(-2\Phi(r'z)) \leqslant \exp(B)\|f\|_\infty \exp(-2\Phi(r'z) - 2\Phi(rz))$$

or d'après *c'*)

$$\Phi(r'z) \geqslant \Phi(rz) + n \log(1 + |rz|^2) - A\left(\frac{r'}{r}\right)$$

Donc

$$|f_r(z)|^2 \exp(-2\Phi(r'z)) \leqslant C_r\|f\|_\infty(1 + |rz|^2)^{-2n},$$

d'où on a $f_r \in H^2(\exp(-\Phi_{r'}))$

$\Phi_{r'}$ vérifiant les hypothèses du corollaire 16. Par suite il existe une suite p_j de polynômes tels que ε_j tende vers zéro lorsque j tend vers l'infini, où

$$\varepsilon_j = \int |f(rz) - p_j(z)|^2 \exp(-2\Phi(r'z))$$

Mais $|f_r - p_j|^2$ étant plurisousharmonique, on a

$$\begin{aligned}|f_r(z) - p_j(z)|^2 &\leqslant V_n^{-1} \int_{|u|\leqslant 1} |f_r(z+u) - p_j(z+u)|^2 \, d\lambda(u)\\ &\leqslant V_n^{-1} \int_{|u|\leqslant 1} |f_r(z+u) - p_j(z+u)|^2\\ &\qquad \exp(-2\Phi_{r'}(z+u)) \exp(2\Phi_{r'}(r+u))\, d\lambda(u)\\ &\leqslant V_n^{-1} \exp(2\tilde{\Phi}_{r'}(z))\varepsilon_j,\end{aligned}$$

V_n désigne le volume de la boule unité dans $\mathbf{C}^n$.

D'où

$$\exp(-\Phi(z))|f_r(z) - p_j(z)| \leqslant V_n^{-\frac{1}{2}} \exp[\tilde{\Phi}_{r'}(z) - \Phi(z)]\varepsilon_j$$

l'hypothèse *d*) montre que p_j converge vers f_r lorsque j tend vers l'infini puisque $\tilde{\Phi}_{r'}(z) - \Phi(z)$ est borné.

La démonstration pour $1 \leqslant p < \infty$ suit les mêmes étapes.

Exemple 18. — Si Φ est positivement homogène d'ordre $\rho > 0$, c'est-à-dire vérifie $\Phi(tz) = t^\rho \Phi(z)$ pour tout $t > 0$, les conditions *b*), *c'*) et *d*) sont vérifiées. C'est clair pour les conditions *b*) et *c'*). Pour *d*) soit $r < 1$ et $|u| \leqslant 1$, on a

$$\Phi(rz+u) = |rz+u|^\rho \Phi\left(\frac{rz+u}{|rz+u|}\right) = |rz+u|^\rho \Phi(\alpha)$$

où $|\alpha| = 1$ et $\Phi(z) = |z|^\rho \Phi(\beta)$ avec $\beta = z|z|^{-1}$. D'où il résulte que

$$\Phi(rz+u) - \Phi(z) = |rz+u|^\rho \Phi(\alpha) - |z|^\rho \Phi(\beta).$$

Or on a

$$|\alpha - \beta| = \frac{|(r|z| - (rz+u)|}{|rz+u|} \leqslant \frac{|u|}{|rz+u|},$$

r étant fixé; on voit que $|\alpha - \beta|$ est arbitrairement petit pour $|z|$ assez grand, indépendamment de u. Donc si $\varepsilon > 0$, $\Phi(\alpha) \leqslant (1+\varepsilon)\Phi(\beta)$ pour $|z|$ assez grand, par suite

$$\tilde{\Phi}(rz) - \Phi(z) \leqslant \Phi(\beta)[(1+\varepsilon)(|rz|+1)^p - |z|^p] \leqslant B(r)$$

si $r^p(1+\varepsilon) \leqslant 1$.

Corollaire 19. — *Si* Φ *est p.s.h. homogène complexe, d'ordre* $\rho > 0$ *i.e. si* $\Phi(uz) = |u|^\rho \Phi(z)$ *pour tout* $u \in \mathbf{C}$ *et* $z \in \mathbf{C}^n$. *Alors les polynômes sont denses dans* $H^p(\exp(-\Phi))$ *pour* $1 \leqslant p \leqslant +\infty$.

Démonstration. — Comme on vient de le voir, il suffit de vérifier la condition *a*) de la proposition 17. Il est clair que Φ est positive et d'après [9], th. 2.5.1 $\log \Phi$ est p.s.h.. Or $\Phi = \sup_N \log\left(\sum_0^N \frac{\Phi^p}{p!}\right)$, la fonction $\Phi_N = \log\left(\sum_0^N \frac{\Phi^p}{p!}\right)$ est p.s.h. car il en est ainsi de $\log\left(\frac{\Phi^p}{p!}\right)$ pour tout p, de plus $\exp(\Phi_N)$ est à croissance polynomiale. La proposition 17 permet de conclure.

Remarque 20. — Signalons une extension du théorème 6.

Soit Φ une fonction convexe dans $\mathbf{C}^n$ telle que $\exp(-\Phi)$ soit un poids. Si $\alpha > 0$, alors pour tout p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, les polynômes sont denses dans $H^p(\exp(-\Phi^\alpha))$.

En effet, comme on l'a remarqué à la fin du lemme 7, la fonction Φ^α vérifie l'hypothèse *a*). De plus, si on suppose $\Phi(0) = 0$, on a $\Phi^\alpha(tz) \geqslant t^\alpha \Phi^\alpha(z)$ pour $t > 1$ car Φ est convexe. Cette inégalité permet de vérifier que les conditions *b*) et *c'*) sont satisfaites.

On peut supposer $\alpha < 1$, car si $\alpha \geqslant 1$ la fonction Φ^α est convexe et le résultat est alors un cas particulier du théorème 6.

On a vu que $\tilde{\Phi}(rz) \leqslant \Phi(z) + A(r)$, puisque Φ est convexe. D'où l'on déduit lorsque $\alpha < 1$

$$\tilde{\Phi}^\alpha(rz) \leqslant \Phi^\alpha(z) + A^\alpha(r).$$

Donc la condition *d*) de la proposition 17 est satisfaite.

5. Conditions nécessaires d'approximation.

Nous allons montrer que si Φ est une fonction p.s.h. continue, dans un domaine d'holomorphie Ω, qui croît assez vite vers le bord de Ω, elle s'écrit $\Phi(z) = \left(\sup_\nu c_\nu \log |a_\nu|\right)^*(z)$ pour $z \in \Omega$ où $c_\nu > 0$ et a_ν sont des fonctions holomorphes dans Ω. Les conditions nécessaires pour l'approximation en découleront. Pour cela nous avons besoin de quelques préliminaires.

Dans [2], I. Cnop a démontré le théorème suivant.

Théorème 21. — *Soit Ω un domaine d'holomorphie dans $\mathbf{C}^n$, il existe des fonctions $u_0, u_1, \ldots, u_n$ définies dans $\mathbf{C}^n \times \Omega$*

telles que, pour tout $s \in \mathbf{C}^n$, $u_i(s)$ *soient des fonctions holomorphes dans* Ω *et vérifient*

$$(11) \quad (\zeta_1 - s_1)u_1(s, \zeta) + \cdots + (\zeta_n - s_n)u_n(s, \zeta) + \delta_\Omega(s)u_0(s, \zeta) = 1$$

pour tout $(s, \zeta) \in \mathbf{C}^n \times \Omega$. *De plus, il existe un entier* N *et une constante* $\mathrm{M} > 0$, *tels que*

$$\delta_\Omega^{\mathrm{N}}(\zeta)|u_i(s, \zeta)| \leqslant \mathrm{M} \qquad \text{pour} \qquad 0 \leqslant i \leqslant n.$$

Nous en déduisons le corollaire.

Corollaire 22. — *Pour tout* $\zeta^0 \in \partial\Omega$, *il existe une fonction* $f \in \mathrm{E}(\mathrm{N}, \Omega)$, *i.e.* vérifiant $\delta_\Omega^{\mathrm{N}}|f| \leqslant 1$ *telle que* f *soit non bornée au voisinage de* ζ^0.

Démonstration. — En effet, si chaque $u_i(\zeta^0, \ )$ était borné au voisinage de ζ^0 on aurait, puisque $\delta_\Omega(\zeta^0) = 0$,

$$1 \leqslant \Sigma|u_i(\zeta^0, \zeta)||\zeta_i - \zeta_i^0| \leqslant \mathrm{K}\Sigma|\zeta_i - \zeta_i^0|$$

ce qui est impossible dans un voisinage de ζ^0.

Proposition 23. — *Soit* Ω *un domaine d'holomorphie dans* $\mathbf{C}^n$. *Il existe une fonction* f *holomorphe dans* Ω *et un entier* N, *tels que* $\sup_{z \in \Omega} \delta_\Omega^{\mathrm{N}}(z)|f(z)| < \infty$ *et que* f *ne soit bornée au voisinage d'aucun point du bord de* Ω.

Démonstration. — Soit une suite de points dense sur la frontière de Ω et soit (B_j) la famille dénombrable de polydisques de rayons rationnels centrés en ces points. Désignons par E_j l'espace des fonctions f, holomorphes dans Ω, telles que

$$\|f\|_{\mathrm{N}} = \sup_{z \in \Omega} \delta_\Omega^{\mathrm{N}}(z)|f|(z) \quad \text{et} \quad \|f\|_j = \sup_{z \in \Omega \cap \mathrm{B}_j} |f(z)|$$

soient bornées. L'entier N étant le même que dans le théorème 21.

On norme l'espace E_j en posant $\|f\| = \sup(\|f\|_{\mathrm{N}}, \|f\|_j)$; c'est un espace de Banach.

Considérons l'application de restriction $\mathrm{R}_j : \mathrm{E}_j \to \mathrm{E}(\mathrm{N}, \Omega)$. Cette application est continue et le corollaire précédent montre qu'elle n'est pas surjective, il en résulte d'après le théorème des homomorphismes que $\mathrm{R}_j(\mathrm{E}_j)$ est maigre dans

$E(N, \Omega)$. Il en est de même de la réunion $\bigcup_j R_j(E_j)$. Soit f appartenant à $E(N, \Omega)$ et n'appartenant à aucun des $R_j(E_j)$, il est clair qu'une telle fonction n'est bornée sur aucun des $B_j \cap \Omega$, c'est-à-dire au voisinage d'aucun point du bord. En particulier Ω est son domaine d'holomorphie.

Remarquons que le théorème de I. Cnop permet d'associer à chaque domaine d'holomorphie Ω un entier $N \geqslant 1$ tel que Ω soit le domaine d'existence d'une fonction $f \in E(N, \Omega)$. Dans [11], nous étudions les domaines pour lesquels $N = 0$, c'est-à-dire ceux qui sont domaine d'holomorphie d'une fonction bornée.

Proposition 24. — *Soit* Φ *une fonction p.s.h. dans* Ω, *continue, telle qu'on ait* $\Phi(z) \geqslant -\log \delta_\Omega(z)$ *et que* $\exp(-\Phi)$ *soit lipschitzienne de rapport* 1. *Alors il existe une suite* a_ν *de fonctions holomorphes dans* Ω *telle que*

$$\Phi(z) = \left(\sup_\nu c_\nu \log|a_\nu|\right)^*(z) \quad \textit{pour tout} \quad z \in \Omega \quad \textit{avec} \quad c_\nu > 0.$$

Démonstration. — Considérons l'ouvert où

$$\tilde{\Omega} = \{(z, w) \in \mathbf{C}^{n+1}\, z \in \Omega,\ w \in \mathbf{C},\ |w| < \exp(-\Phi(z))\}.$$

Il est clair que $d_{\tilde{\Omega}}(z, w) \leqslant \exp(-\Phi(z)) - |w|$ et que

$$d_{\tilde{\Omega}}(z, w) \geqslant d_{\tilde{\Omega}}(z, 0) - |w|.$$

Or $d_{\tilde{\Omega}}(z, 0) \leqslant \exp(-\Phi(z))$ et si $(z', w') \notin \tilde{\Omega}$ on a

$$|z - z'| + |w'| \geqslant \exp(-\Phi(z))$$

car la fonction $\exp(-\Phi)$ est lipschitzienne et vaut 0 au bord de Ω.

Remarquons que l'hypothèse implique que $|z| \exp(-\Phi(z))$ est bornée sur Ω; donc on peut supposer

$$\exp(-\Phi(z)) - |w| \leqslant \delta_{\tilde{\Omega}}(z, w).$$

En appliquant la proposition 23, il existe $f \in E(k, \tilde{\Omega})$ dont $\tilde{\Omega}$ soit le domaine d'holomorphie. Considérons le développement de Hartogs de f [1],

$$f(z, w) = \sum_{\nu \geqslant 0} a_\nu(z) w^\nu \qquad \text{où} \qquad a_\nu(z) = \frac{1}{\nu\,!} D^\nu f(z, 0).$$

Posons $-\log R(z) = \left(\overline{\lim_{\nu}} \frac{1}{\nu} \log |a_\nu|\right)^*(z)$. D'après un théorème de Hartogs, la série $\sum_\nu a_\nu(z)w^\nu$ est définie et holomorphe dans le domaine $\Omega_R = \{(z, w) | z \in \Omega,\ |w| < R(z)\}$. On a

$$\tilde{\Omega} \subset \Omega_R,$$

et $\tilde{\Omega}$ étant le domaine d'existence de f, on a $\tilde{\Omega} = \Omega_R$, d'où $\exp(-\Phi(z)) = R(z)$. Il en résulte que, pour tout $z \in \Omega$,

$$\Phi(z) = -\log R(z) = \left(\overline{\lim_{\nu}} \frac{1}{\nu} \log |a_\nu|\right)^*(z) \tag{12}$$

Puisque $f \in E(k, \delta_{\tilde{\Omega}})$ on peut supposer

$$\sup_{(z, w)\in\tilde{\Omega}} \delta_{\tilde{\Omega}}^k(z, w)|f(z, w)| \leqslant 1.$$

Or

$$a_\nu(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z, r \exp(-\Phi(z))e^{i\theta})r^{-\nu} \exp(\nu\Phi(z))e^{-i\nu\theta}\, d\theta$$

avec $r < 1$; d'où

$$|a_\nu(z)| < (2\pi)^{-1}r^{-\nu} \exp(\nu\Phi(z)) \int_0^{2\pi} \delta_{\tilde{\Omega}}^{-k}(z, r \exp - \Phi(z)e^{i\theta})\, d\theta.$$

On a vu qu'on peut supposer $\exp(-\Phi(z)) - |w| \leqslant \delta_{\tilde{\Omega}}(z, w)$; par suite

$$|a_\nu(z)| \leqslant r^{-\nu} \exp(\nu\Phi(z)).(2\pi)^{-1} \cdot \int_0^{2\pi} (1 - r)^{-k} \exp(+k\Phi(z))\, d\theta$$

d'où

$$|a_\nu(z)| \leqslant r^{-\nu}(1 - r)^{-k} \exp((\nu + k)\Phi(z)).$$

Pour ν fixé, posons $r = \nu(\nu + k)^{-1}$ on trouve alors

$$|a_\nu(z)| \leqslant (\nu + k)^{(\nu+k)}\nu^{-\nu}k^{-k} \exp[(\nu + k)\Phi(z)].$$

Donc

$$\frac{1}{\nu + k} \log K_\nu|a_\nu(z)| \leqslant \Phi(z) \tag{13}$$

où

$$K_\nu = \nu^\nu k^\nu(\nu + k)^{-(\nu+k)}.$$

Nous allons montrer que $\Phi(z) = \left(\sup_\nu \frac{1}{\nu + k} \log K_\nu|a_\nu|\right)^*(z)$.

Or

$$\frac{1}{\nu+k}\log K_\nu|a_\nu(z)| = \frac{1}{\nu+k}\log K_\nu + \frac{1}{\nu+k}\log|a_\nu(z)|\,;$$

et on voit facilement que $\lim_{\nu\to\infty}\frac{1}{\nu+k}\log K_\nu = 0$; donc

$$\overline{\lim_\nu}\,\frac{1}{\nu+k}\log K_\nu|a_\nu|(z) = \overline{\lim_\nu}\,\frac{1}{\nu+k}\log|a_\nu(z)|$$

$$= \overline{\lim_\nu}\,\frac{1}{\nu}\log|a_\nu|(z)$$

d'où le résultat, d'après les relations (12) et (13).

Théorème 25. — *Soit* δ *une fonction positive définie dans* $\mathbf{C}^n$, *lipschitzienne avec* $\delta \leqslant \delta_0$ *et* $-\log\delta$ *p.s.h. dans*

$$\Omega = \{z/\delta(z) > 0\}.$$

L'espace $H(\Omega')$ *est dense dans* $\mathcal{O}(\delta)$, *au sens de la définition* 11, *si et seulement si*

$$-\log\delta = \left(\sup_{i\in J} c_j\log|f_j|\right)^*$$

avec $c_i > 0$ *et* $f_i \in H(\Omega)$.

Démonstration. — Le fait que la condition soit suffisante résulte du théorème 9, puisque $c_j\log|f_j|$ est p.s.h. dans Ω' et qu'on prend tous les Ω_i égaux à Ω'. Montrons que la condition est nécessaire.

La fonction $-\log\delta$ vérifie les hypothèses de la proposition 24, par suite

$$(14)\qquad -\log\delta(z) = \left(\sup_\nu\frac{1}{\nu}\log|a_\nu|\right)^*(z)\quad\text{pour}\quad z\in\Omega.$$

On peut supposer aussi que

$$\overline{\lim_\nu}\,(\nu^{-1}\log|a_\nu|) = \sup_\nu\,(\nu^{-1}\log|a_\nu|).$$

D'après (14), on a $\delta^\nu(z)|a_\nu(z)| \leqslant 1$ pour $z\in\Omega$, i.e.

$$a_\nu \in E(\nu, \delta)\,;$$

puisque $H(\Omega')$ est dense dans $\mathcal{O}(\delta)$ il existe un entier

$\gamma > 0$ et une suite de fonctions $a_{\nu,p} \in H(\Omega')$ tels que, pour tout $z \in \Omega$

$$\delta^{\nu+\gamma}(z)|a_\nu(z) - a_{\nu,p}(z)| \leqslant p^{-1}$$

donc

$$\delta^{\nu+\gamma}(z)|a_{\nu,p}|(z) \leqslant (1 + p^{-1}).$$

Par suite

$$\frac{1}{\nu+\gamma} \log (1 + p^{-1})|a_{\nu,p}| \leqslant -\log \delta.$$

Or

$$\frac{1}{\nu+\gamma} \log |a_\nu(z)| \leqslant \sup_p \log (1 + p^{-1})|a_{\nu,p}|(z).$$

Donc

$$\overline{\lim_\nu} \frac{1}{\nu} \log |a_\nu| = \overline{\lim_\nu} \frac{1}{\nu+\gamma} \log |a_\nu|$$
$$\leqslant \sup_{p,\nu} \frac{1}{\nu+\gamma} \log (1 + p^{-1})|a_{\nu,p}|(z),$$

et

$$-\log \delta(z) = \left(\sup_{\nu,p} \frac{1}{\nu+\gamma} \log (1 + p^{-1})|a_{\nu,p}|\right)^*(z)$$

pour tout $z \in \Omega$.

La démonstration montre que les polynômes sont denses dans $\mathcal{O}(\delta)$ si et seulement si $-\log \delta(z) = (\sup c_i \log |p_j|)^*(z)$, les p_j étant des polynômes.

Corollaire 26. — *Soit* δ *vérifiant les hypothèses du théorème* 25. *Si* $c\delta_\Omega^{-2}$ *est un module de plurisousharmonicité pour* $-\log \delta$ *alors les conditions suivantes sont équivalentes.*

i) $H(\Omega') \cap H^2(\Omega, \delta^k)$ *est dense dans* $H^2(\Omega, \delta^k)$ *pour tout entier* $k > 0$.

ii) $-\log \delta(z) = \left(\sup_i c_i \log |f_i|\right)^*(z)$ *pour*

$$z \in \Omega \quad f_i \in H(\Omega') \quad c_i > 0.$$

Démonstration. — Si i) est vérifiée, $H(\Omega')$ est alors dense dans $\mathcal{O}(\delta)$. En effet

$$E(k, \delta) \hookrightarrow H^2(\Omega, \delta^{2k+2n+1}) \hookrightarrow E(k + 2n + 4, \delta)$$

les injections étant continues, il suffit d'appliquer le théorème précédent.

Lorsque la condition ii) est vérifiée on peut appliquer la proposition 4 pour en déduire i).

Je voudrais terminer, en remerciant J.-P. Ferrier avec qui j'ai eu de nombreuses discussions, qui m'ont beaucoup aidé.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. Bremermann, Die Charakterisierung Rungescher Gebiete..., *Math. Annalen*, 136 (1958), 173-186.

[2] I. Cnop, Spectral study of holomorphic functions with bounded growth, *Ann. Inst. Fourier*, 22 (1972), 293-310.

[3] De Branges, Hilbert spaces of entire functions, Prentice Hall, 1968.

[4] J.-P. Ferrier, Approximation des fonctions holomorphes de plusieurs variables avec croissance, *Ann. Inst. Fourier*, 22 (1972), 67-87.

[5] J.-P. Ferrier, Spectral theory and complex analysis, North Holland Publishing Cny, 1973.

[6] E. Hewitt and K. Stromberg, Real and abstract analysis, Springer Verlag, 1965.

[7] L. Hörmander, L^2-estimates and existence theorems for the $\bar{\partial}$-operator, *Acta Math.*, 13 (1965), 89-152.

[8] L. Hörmander, An introduction to complex analysis in several variables, Van Nostrand Cny, 1966.

[9] P. Lelong, Fonctionnelles analytiques et fonctions entières (*n* variables), Montréal, Presses de l'Université, 1968.

[10] N. Sibony, Approximation polynomiale pondérée sur un domaine d'holomorphie de C^n, *C.R.A.S.*, Paris, t. 276 (1973), 249-252.

[11] N. Sibony, Prolongement analytique des fonctions holomorphes bornées. *C.R.A.S.*, Paris, t. 275 (1973), 973-976.

[12] B. A. Taylor, On weighted polynomial approximation of entire functions, *Pacific J. Math.*, 36 (1971), 523-539.

Manuscrit reçu le 23 avril 1975
Proposé par J. P. Kahane.

Nessim Sibony,
Université Paris Sud
Centre d'Orsay
Mathématiques, Bât. 425
91405 Orsay.