GEORGES REEB

Sur la théorie générale des systèmes dynamiques

Annales de l'institut Fourier, tome 6 (1956), p. 89-115

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1956__6__89_0>

SUR LA THÉORIE GÉNÉRALE DES SYSTÈMES DYNAMIQUES

par G. REEB [1].

INTRODUCTION

1. La théorie générale des systèmes dynamiques.

G. D. BIRKHOFF [1] a défini un système dynamique (S. D.) comme le couple (V_n, E) d'une variété V_n à n dimensions (indéfiniment différentiable) et d'un champ de vecteurs E (également indéfiniment différentiable) sur V_n. Ce même auteur, précisant des idées de H. POINCARÉ, a jeté les bases d'une théorie topologique des trajectoires d'un S. D. *La théorie générale des systèmes dynamiques* concerne le chapitre, maintenant classique, de ces études qui gravite autour des notions familières suivantes : *ensemble invariant*, *points limites*, *récurrence*, *ensemble minimal*, *stabilité au sens de Poisson*, *ensemble indécomposable*, *mouvement errant*, *mouvement central*, *incompressibilité*, *transivité* etc... G. D. BIRKHOFF reconnut la possibilité d'élargir considérablement la notion de S. D. tout en conservant la grande majorité des énoncés intéressants. Cette extension met en évidence le groupe de transformations topologiques de V_n en V_n défini par le *flot* associé à (V_n, E), du moins si V_n est compact. De nombreux auteurs et écoles ont approfondi et élargi les conceptions de G. D. BIRKHOFF ; la théorie des « *systèmes dynamiques généraux* » [5, 7, 8] en est issue ; cette théorie utilise abondamment la théorie des groupes de transformations topologiques.

(1) Cet article a eté préparé lors d'un séjour à l'Institute for Advanced Study, Princeton.

Cependant la notion de *famille régulière de chemins* de H. Whitney [10] et la notion de *variété feuilletée* [9] méritent également d'être considérées comme des généralisations de la notion de S. D. Or les chemins ou feuilles d'une telle structure ne sont pas forcément les trajectoires d'un groupe de transformations topologiques. D'où l'utilité d'une autre généralisation de la notion de S. D. qui engloberait les familles régulières de chemins et les structures feuilletées, et qui ferait jouer un rôle important à la relation d'équivalence ρ dont les classes sont les trajectoires du système.

2. Objet du présent article.

L'objet de notre article est précisément l'étude d'une généralisation des S. D. qui :

(i) *appartienne au cadre de la topologie générale* et

(ii) *soit une structure locale* [3, 4].

On remarquera que la notion de « système dynamique général » rappelée plus haut, n'est pas une structure locale alors que *la structure de S. D. est locale.* L'utilité de la condition (ii) est soulignée par la remarque suivante : les définitions classiques des « systèmes dynamiques généraux » font intervenir d'emblée un ou plusieurs modèles globaux pour les trajectoires, alors qu'il semble plus naturel de reconstruire ces trajectoires à partir de données locales [9].

Il est assez curieux que la seule donnée d'une relation d'équivalence ρ sur un espace topologique E (structure [E, ρ]) permet de définir un grand nombre de notions de la théorie classique : trajectoire, ensemble invariant, ensemble minimal, ensemble indécomposable, mouvements centraux, trajectoires propres et impropres, (cette dernière notion est voisine de la notion de stabilité au sens de Poisson) et permet également de démontrer quelques propriétés très élémentaires. Si de plus la relation d'équivalence ρ est ouverte (structures (E, ρ)) les énoncés prolifèrent : dans ce cadre très général on peut démontrer un résultat classique assez important relatif aux relations entre ensembles indécomposables et trajectoires impropres [6*a*]. A cet effet nous avons consacré le premier chapitre à ces structures (E, ρ).

Cependant la notion de structure (E, ρ) est trop générale à certains égards. En effet des notions telles que la *récurrence* (définie à partir de considérations métriques), *la stabilité complète au sens de Poisson*, ne peuvent pas être énoncées dans ce cadre; de même on n'a pas la notion d'une *structure topologique interne de la trajectoire*, distincte éventuellement de la topologie induite par l'espace ambiant; enfin une telle structure n'est pas locale. Dans le chapitre 2. on définit la notion de S. D. G. qui particularise les structures (E, ρ) et qui possède les propriétés que nous venons de mentionner. Cette notion est d'ailleurs assez exactement calquée sur la notion, moins générale, de *variété feuilletée* [4, 9]. Il est d'ailleurs possible d'étendre aux S. D. G. les théorèmes de stabilité [9] valables pour les variétés feuilletées; mais ceci dépasse notre but actuel.

On verra que le chapitre 2. reproduit un assez grand nombre de résultats familiers : *Propriété du recollement des morceaux* (2. 1. proposition 3.), *relations entre la topologie interne des trajectoires et la topologie de l'espace de définition* (2. 2. propositions 4. 5. 6. 7. et lemme 1.) et (2. 3. propositions 1. 2.), *équivalence de deux définitions de la récurrence* (2. 4. proposition 1.) *et de la stabilité au sens de Poisson* (2. 4. proposition 2.), *équivalence entre la notion de trajectoire propre et de trajectoire complètement propre dans les espaces compacts* (2. 3. proposition 3.), *propriétés de l'ensemble limite d'une trajectoire selon un « bout »* (2. 5. propositions 1. 2. 3.), *équivalence entre la notion de trajectoire errante et de trajectoire complètement instable* (2. 6. proposition 2.).

Il est assez aisé de construire des exemples de S. D. G. qui présentent certaines particularités, alors que ces mêmes propriétés sont difficiles à mettre en évidence sur des structures plus précises. Par divers exemples on peut donc montrer les limites de certains modes de raisonnement et mettre en évidence le rôle de la droite numérique (ou d'un groupe de transformations) dans certains résultats classiques. Ces divers exemples sont réunis au chapitre 3.

Il est à peine utile d'ajouter que ce travail ne contient aucune démonstration vraiment neuve; les raisonnements sont faits à l'image des raisonnements classiques de Birkhoff et de ses successeurs. Il a paru inutile de multiplier les références à ce sujet. Notre seul effort a porté sur cette *tentative de généralisation* : dégager de l'ensemble des résultats acquis dans la théorie générale des systèmes dynamiques, ceux qui relèvent uniquement de la *topologie générale.*

3. Bibliographie.

On trouvera à la fin de cet article une bibliographie très sommaire mais qui permet, grâce aux références de [2, 5, 7, 8] et aux commentaires de [7], de remonter aux diverses sources.

1. SUR LES RELATIONS D'ÉQUIVALENCE OUVERTES

1. 1. Relations d'équivalence (systèmes [E, ρ]).

DÉFINITION 1. — *Le symbole* [E, ρ] *désigne le couple d'un espace topologique* E *et d'une relation d'équivalence* ρ *sur* E.

Il paraît inutile de donner un nom aux structures [E, ρ] et autres structures introduites dans ce premier chapitre. En nous laissant guider par les théories classiques rappelées dans l'introduction, il est naturel de poser les définitions suivantes :

DÉFINITION 2. — *Une trajectoire de* [E, ρ] *est une classe d'équivalence de* ρ *dans* E. (*Une trajectoire* γ *de* E *sera munie de la topologie induite.*)

DÉFINITION 3. — *Un point x de la trajectoire* γ *de* [E, ρ] *est appelé un point propre ou impropre selon que x est un point intérieur ou un point frontière de* γ relativement à l'adhérence $\bar{\gamma}$ de γ.

DÉFINITION 4. — *Une trajectoire* γ de [E, ρ] *est dite propre si tous ses points sont propres; elle est dite impropre si elle contient au moins un point impropre. Enfin si tous les points de* γ *sont impropres, la trajectoire est complètement impropre.*

DÉFINITION 5. — *Un ensemble* $A \subset E$ *est appelé un ensemble invariant de* [E, ρ] *si* : (i) $A \neq \emptyset$ *et* (ii) A *est saturé pour la relation d'équivalence* ρ.

DÉFINITION 6. — *Un ensemble minimal de* [E, ρ] *est un ensemble* $A \subset E$ *vérifiant les propriétés suivantes :* (i) A *est fermé*

(ii) A *est invariant et* (iii) *la proposition :* « $B \subset A$ *et* B *est un ensemble fermé et invariant* » *implique* : « $B = A$ ».

Définition 7. — *Un ensemble indécomposable de* $[E, \rho]$ *est un ensemble* $A \subset E$, *vérifiant les propriétés suivantes :* (i) A *est fermé,* (ii) A *est invariant,* (iii) *la proposition* « B *et* C *sont deux ensembles fermés et invariants de* $[E, \rho]$ *et* $B \cup C = A$ » *implique* « $B = A$ ou $C = A$ ».

Définition 8. — *Une trajectoire* γ de $[E, \rho]$ *est dite localement partout dense s'il existe un ouvert invariant de* $[E, \rho]$ dans lequel γ *est partout dense.*

Définition 9. — *Un ouvert invariant* O *de* $[E, \rho]$ *est dit instable, si* (i) *l'espace quotient* $O/\rho(O)$ *est un espace topologique localement séparé et* (ii) O *ne contient aucune trajectoire compacte. Une trajectoire* γ *de* $[E, \rho]$ *est dite complètement instable si* γ *est contenue dans un ouvert invariant instable.*

Il est inutile d'espérer, sans nouvelles hypothèses sur ρ, des propriétés intéressantes. Cependant les propositions suivantes apparaissent.

Proposition 1. — *Un ensemble minimal est également un ensemble indécomposable.*

Proposition 2. — *Si* A *est un ensemble invariant et compact de* $[E, \rho]$ *alors* A *contient un ensemble minimal.*

En effet la famille $\mathfrak{F}$ des sous-ensembles F de A qui sont (i) fermés et (ii) invariants, est ordonnée par la relation d'inclusion; cet ensemble ordonné est inductif; un élément minimal de $\mathfrak{F}$ est précisément un ensemble minimal.

Proposition 3. — *Une trajectoire* γ *de* $[E, \rho]$ *localement partout dense est impropre sauf si* γ *est un ouvert de* E.

Proposition 4. — *Si l'espace* E *est compact, le complémentaire* W(E), *dans* E, *de la réunion de toutes les trajectoires complètement instables est un ensemble invariant compact.*

En effet il suffit de montrer que W(E) n'est pas vide. Mais si $W(E) = \emptyset$ l'espace quotient E/ρ est un espace séparé; donc les trajectoires de E seraient fermées (et par conséquent compactes), d'où une contradiction.

DÉFINITION 10. — *Si* A *est un ensemble invariant de* $[E, \rho]$ *et si* ρ' *est la restriction de* ρ *à* A, *on dira que* $[A, \rho']$ *est la structure induite par* $[E, \rho]$ *dans* A. *On écrira indifféremment* $[A, \rho]$ ou $[A, \rho']$.

DÉFINITION 11. — *On désigne par* $W(E)$ *le complémentaire, dans* E, *de la réunion de toutes les trajectoires complètement instables de* $[E, \rho]$. *Si* $W_\alpha(E) \neq \emptyset$ *pour un ordinal* α *donné, on pose* $W_{\alpha'}(E) = W(W_\alpha(E))$ *où* α' *est le suivant de* α; $W_0(E) = W(E)$ et $W_\beta(E) = W \bigcap_{\alpha<\beta} W_\alpha(E)$, *si* $W_\alpha(E) \neq \emptyset$ *pour* $\alpha < \beta$.

PROPOSITION 5. — *Soit un système* $[E, \rho]$, où E *est compact. La définition* 11. *définit* $W_\alpha(E)$ *pour tout ordinal* α *et* $W_\alpha(E) \neq \emptyset$. *Il existe un ordinal* β *tel que:* $W_\alpha(E) = W_\beta(E)$ *pour* $\beta > \alpha$. *On pose* $W_\beta(E) = W$.

DÉFINITION 12. — *L'ensemble invariant compact* W *défini dans la proposition* 5. *est appelé le noyau (ou le centre) de* $[E, \rho]$.

On peut également définir le noyau de $[E, \rho]$ même si E n'est pas compact. Le noyau peut, dans ce cas, être vide.

PROPOSITION 6. — *Si* E *est compact, le noyau de* $[E, \rho]$ *contient les ensembles minimaux de* $[E, \rho]$.

DÉFINITION 13. — *Un ensemble indécomposable* A *d'un système* $[E, \rho]$ *est dit spécial, si* A *n'est pas minimal et s'il existe une trajectoire* γ *qui est un ouvert de* A (*Cette trajectoire est donc propre*).

PROPOSITION 7. — *Si* E *est compact, le noyau de* $[E, \rho]$ *contient les ensembles indécomposables* A *de* E *qui ne sont pas spéciaux.*

En effet soit A un ensemble indécomposable non spécial, et soit O un ouvert invariant instable de A. Le quotient $O/\rho(O)$ est séparé et contient au moins deux points (sinon A serait spécial). On peut trouver dans $O/\rho(O)$ deux ouverts disjoints et non vides, dont les images inverses dans O sont donc deux ouverts O et O′ disjoints. Les complémentaires de O et O′ dans A formeraient une décomposition de A. D'où une contradiction, qui établit la proposition 7. On remarquera que le même raisonnement prouve :

PROPOSITION 8. — *Si* A *est un ensemble indécomposable spécial, il n'existe qu'une trajectoire* γ *qui soit un ouvert de* A. *Cette trajectoire sera appelée la trajectoire spéciale de* A.

Dans le prochain paragraphe on supposera que la relation d'équivalence ρ est ouverte. Ceci permettra de démontrer quelques propriétés plus intéressantes.

1. 2. Relations d'équivalence ouvertes ; (systèmes (E, ρ)).

DÉFINITION 1. — *Le symbole* (E, ρ) *désigne un couple* [E, ρ] *où* ρ *est une relation d'équivalence ouverte.*

Les trois propositions suivantes sont évidentes :

PROPOSITION 1. — *Une condition nécessaire et suffisante pour que dans* (E, ρ) *la relation d'équivalence* ρ *soit ouverte est: l'adhérence* $\overline{A}$ *de l'ensemble invariant* A *est également un ensemble invariant.*

PROPOSITION 2. — *Dans un système* (E, ρ) *la frontière d'un ensemble invariant est un ensemble invariant ou un ensemble vide.*

PROPOSITION 3. — *Si* A *est un ensemble invariant de* (E. ρ), *la structure induite* [A, ρ] est une structure (A, ρ) (cf. 1. 1. définition 10).

Il en résulte :

PROPOSITION 4. — *Une trajectoire impropre* (cf. 1. 1. définition 4.) *d'un système* (E, ρ) *est complètement impropre.*

On peut préciser maintenant certains résultats du paragraphe précédent.

PROPOSITION 5. — *Soit* A *un ensemble invariant de* (E, ρ) *dont l'adhérence* $\overline{A}$, *dans* E, *est compacte; dans ces conditions* $\overline{A}$ *contient un ensemble minimal. En particulier si* E *est compact, toute trajectoire* γ de (E, ρ) contient *un ensemble minimal dans son adhérence.*

PROPOSITION 6. — *Si* A *est un ensemble minimal de* (E, ρ), *toute trajectoire* γ *contenue dans* A *est partout dense dans* A.

Proposition 7. — *Un ensemble invariant minimal et compact* A *de* (E, ρ) *qui ne contient pas de trajectoire impropre, se réduit à une trajectoire compacte.*

En effet si A contient une trajectoire compacte γ, alors A se réduit à γ. Mais si γ est une trajectoire non compacte située dans A, alors $\bar{\gamma} - \gamma$ (où $\bar{\gamma}$ = adhérence de γ) n'est pas vide; or $\bar{\gamma} - \gamma$ est fermé (puisque γ est propre) et invariant; donc A n'est pas minimal; la proposition 7. en résulte. Les propositions 1. et 7. impliquent :

Proposition 8. — *Si* A *est un ensemble invariant compact de* (E, ρ) *et si toutes les trajectoires situées dans* A *sont propres, alors* A *contient au moins une trajectoire compacte.*

Proposition 9. — *Soient* γ *et* γ' *deux trajectoires propres de* (E, ρ). *Si* γ *appartient à l'adhérence* $\bar{\gamma}'$ *de* γ' *et si* γ' *appartient à l'adhérence* $\bar{\gamma}$ *de* γ, *alors* $\gamma = \gamma'$. (*En d'autres termes, pour les trajectoires propres, la relation « γ appartient à l'adhérence de γ' » est une relation d'ordre*).

En effet soit $\gamma \neq \gamma'$; alors $\gamma \subset \bar{\gamma}' - \gamma'$. Mais $\bar{\gamma}' - \gamma'$ est fermé (car γ' est propre); donc $\bar{\gamma} \subset \bar{\gamma}' - \gamma'$ et par suite $\gamma' \subset \bar{\gamma}$ est impossible. En fait ce raisonnement montre plus généralement :

Proposition 10. — *Si* γ *est une trajectoire propre de* (E, ρ) *si* γ' *est une trajectoire contenue dans* $\bar{\gamma}$ *et si* $\gamma' \neq \gamma$, *la trajectoire* γ *n'est pas contenue dans l'adhérence de* γ'.

Proposition 11. — *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une trajectoire* γ *de* (E, ρ) *soit localement partout dense, est qu'il existe un ouvert, non vide,* O *tel que* $\gamma \cap$ O *soit partout dense dans* O.

Cette proposition résulte immédiatement de la proposition 1.

Proposition 12. — *Si une trajectoire* γ *de* (E, ρ) *contient une trajectoire* γ', *localement partout dense, dans son adhérence* $\bar{\gamma}$, *alors* $\bar{\gamma}' = \bar{\gamma}$ *où* $\bar{\gamma}'$ *est l'adhérence de* γ'.

En effet, par hypothèse $\bar{\gamma}' \subset \bar{\gamma}$; donc $\omega \subset \bar{\gamma}$ où ω est l'ouvert dans lequel γ est partout dense. Donc $\bar{\gamma} \subset \bar{\gamma}'$, d'où la proposition.

La proposition 12. montre : pour les trajectoires localement partout denses, la relation « $\bar{\gamma}' \subset \bar{\gamma}$ » est une relation d'équivalence.

PROPOSITION 13. — *Un ensemble indécomposable spécial* (cf. 1. 1. *définition* 13.) *de* (E, ρ) *se réduit exactement à l'adhérence de la trajectoire spéciale.*

PROPOSITION 14. — *L'adhérence d'une trajectoire* γ *de* (E, ρ) *est un ensemble indécomposable* (*cf.* 1. 1. définition 7.).

La proposition 14. admet, sous certaines restrictions, une réciproque :

PROPOSITION 15. — *Soit* E *un espace compact vérifiant le deuxième axiome de dénombrabilité, dans ces conditions tout ensemble indécomposable* A *de* (E, ρ) *contient une trajectoire partout dense* [6*a*].

Soit O un ouvert non vide de A; le saturé de O est partout dense dans A : en effet, si O n'était pas dense dans A, il existerait un ouvert invariant O′ de A tel que $O \cap O' = \emptyset$; les complémentaires de O et O′ formeraient une *décomposition* de A, contrairement à l'hypothèse « A est indécomposable ». Cette remarque implique : pour tout recouvrement fini de A par des ouverts non vides ω_i il existe un ouvert invariant $\Omega_{\{\omega_i\}}$ dont toutes les trajectoires rencontrent tous les ω_i. En effet supposons que l'indice i des ω_i décrive l'ensemble $(1, 2, ..., n)$; posons $\Omega_i =$ le saturé de ω_i pour ρ. Les Ω_i sont des ouverts de A, denses dans A. L'intersection des Ω_i est donc un ouvert $\Omega_{\{\omega_i\}}$ dense dans A, qui vérifie les propriétés annoncées. Soient $\{\omega_i\}$ et $\{\pi_\lambda\}$ deux recouvrements ouverts et finis de A. On écrit $\{\omega_i\} > \{\pi_\lambda\}$ si pour tout π_λ il existe un ω_i tel que $\pi_\lambda \subset \omega_i$. La relation $<$ ainsi définie est une relation d'ordre dans l'ensemble $\mathfrak{S}$ des recouvrements ouverts et finis de A. On peut trouver un sous-ensemble $\mathfrak{S}'$ de $\mathfrak{S}$, complètement ordonné par $<$ et dénombrable, tel que pour tout ouvert $\omega \subset A$ il y ait un $\alpha \in \mathfrak{S}'$ tel que ω contienne l'un des ouverts de α. Comme les ouverts $\Omega_\alpha (\alpha \in \mathfrak{S}')$ sont partout denses et comme $\mathfrak{S}'$ est dénombrable :

$$F = \bigcap\nolimits_{\alpha \in \mathfrak{S}'} \Omega_\alpha \neq \emptyset.$$

Or les trajectoires de F sont partout denses dans A.C.Q.F.D.

Il ne semble pas possible de démontrer, dans le cadre des structures (E, ρ), la réciproque de la proposition 7. de 1. 1., à savoir : le noyau W de (E, ρ) se confond exactement avec l'adhérence de la réunion $\mathfrak{U}$ des ensembles indécomposables non spéciaux. Par ailleurs, à ma connaissance, on n'a pas d'exemple de système (E, ρ) qui permette d'infirmer cette réciproque; mais cette réciproque sera valable pour les structures de S. D. G. envisagés ci-dessous (cf. 2. 6. proposition 2.).

2. SYSTÈMES DYNAMIQUES GÉNÉRALISÉS (S. D. G.)

2. 1. Définition d'un système dynamique généralisé. Structure induite.

DÉFINITION 1. — *Soit* E *un espace topologique dont la famille des ouverts est* $\mathfrak{O}$; *soit* $\mathfrak{U} = \{O_i, i \in J\}$ *une famille fondamentale* (*indexée par les éléments de l'ensemble* J) *d'ouverts et soit* $\rho : O_i \rightarrow \rho(O_i)$ *une fonction qui à* $O_i \in \mathfrak{U}$ *associe la relation d'équivalence* $\rho(O_i)$, *définie dans* O_i, *qui est assujettie aux conditions suivantes :*

(i) $\rho(O_i)$ *est une relation d'équivalence ouverte;*

(ii) *les classes de* $\rho(O_i)$ *dans* O_i sont *connexes et localement connexes;*

(iii) *Les classes de* $\rho(O_i)$ *dans* O_i *sont fermées* (*relativement à* O_i);

(iiii) *si* $x \in O_i \cap O_j$; *où* O_i, $O_j \in \mathfrak{U}$, *il existe un voisinage ouvert* V_x *de* x *contenu dans* $O_i \cap O_j$ *tel que les relations d'équivalence* $\rho(O_i, V_x)$ *et* $\rho(O_j, V_x)$ *induites par* $\rho(O_i)$ *et* $\rho(O_j)$ *dans* V_x, *soient identiques.*

La structure définie par le couple (ρ, $\mathfrak{U}$) *est appelée une structure* S. D. $\overline{\text{G}}$. *sur* E.

REMARQUES 1. — La famille particulière $\mathfrak{U}$ qui intervient dans la définition 1. peut sembler jouer un rôle bien arbitraire. Aussi le premier objectif de notre étude sera d'introduire, conformément à la théorie générale des *structures locales*, une relation d'équivalence entre les structures envisagées dont les classes méritent d'être nommées : « *systèmes dynamiques généralisés* (S. D. G.) ».

2. — Une structure de S. D. $\overline{\text{G}}$. qui ne vérifie pas (iii) mérite d'être appelée une *structure de* S. D. $\overline{\text{G}}$. *avec singularités.* On verra facilement que beaucoup d'énoncés ultérieurs sont valables pour ces structures.

3. — On a quelquefois intérêt à remplacer (iii) par la condition plus forte :

(iii)'. L'espace quotient $O_i/\rho(O_i)$ est localement séparé (c'est-à-dire que tout point admet un voisinage séparé).

Une structure vérifiant également (iii)' est appelée une *structure de* S. D. $\overline{\text{G}}$. *régulière.*

4. — On reconnaîtra que beaucoup de propriétés, démontrées ci-dessous, restent valables si (ii) est remplacé par :

(ii)' les classes de $\rho(O_i)$ dans O_i sont connexes.

5. — En fait on obtient une généralisation intéressante des S. D. $\overline{\text{G}}$. en remplaçent (ii) par : (ii)''. Si $O_i \subset O_j$ les classes de $\rho(O_i)$ sont contenues dans celles de $\rho(O_j)$.

Nous ne développerons pas ici cette généralisation.

LEMME 1. — $O_i = O_j$ *implique :* $\rho(O_i) = \rho(O_j)$.

Ce lemme résulte de (ii) et (iiii) : en effet (iiii) implique : une classe α de $\rho(O_i)$ et une classe β de $\rho(O_j)$ ont en commun une partie fermée et ouverte de α. Le lemme 1. justifie la définition suivante :

DÉFINITION 2. — *Les classes de* $\rho(O_i)$ *sont appelées les plaques de l'ouvert* O_i. (Ces plaques ne dépendent que de l'ensemble ouvert O_i, mais elles ne dépendent pas de l'indice i).

DÉFINITION 3. — *Soit une structure de* S. D. $\overline{\text{G}}$. $(\rho, \mathfrak{U})$ *sur* E *et soit* $\{\delta(\mathcal{U}_i), \mathcal{U}_i ; i \in J\}$ *une famille* Φ *de couples* $\delta(\mathcal{U}_i), \mathcal{U}_i)$ *dont chacun est formé d'un ouvert* $\mathcal{U}_i \in \mathfrak{O}$ *et d'une relation d'équivalence* $\delta(\mathcal{U}_i)$ *dans* $\mathcal{U}_i$. *On dit que la famille* Φ *est compatible avec* $(\rho, \mathcal{U})$ *si la nouvelle famille* Φ' *formée par la réunion* de Φ *et des couples* $(\rho(O), O)$, *où* $O \in \mathfrak{U}$, *définit un* S. D. $\overline{\text{G}}$. *sur* E.

PROPOSITION 1. — *Soit* $(\rho, \mathfrak{U})$ *un* S. D. $\overline{\text{G}}$. *sur* E. *Si* Φ *et* Φ_1 *sont deux familles compatibles avec* $(\rho, \mathfrak{U})$ *alors la famille* $\Phi \cup \Phi_1$ *est également compatible avec* $(\rho, \mathfrak{U})$.

La démonstration de la proposition 1. se ramène à une simple vérification.

La proposition 1. montre : la famille $(\rho, \mathfrak{U})$ peut être prolongée, d'une façon unique, en une famille $(\rho', \mathfrak{U}')$ qui contient exactement toutes les familles Φ compatibles avec $(\rho, \mathfrak{U})$.

Définition 4. — *Soit* $(\rho, \mathfrak{U})$ *un* S. D. $\overline{\mathrm{G}}$. *La famille* $(\rho', \mathfrak{U}')$ *formée de toutes les familles* Φ *compatibles avec* $(\rho, \mathfrak{U})$ *est appelée la famille maximale contenant* $(\rho, \mathfrak{U})$.

Définition 5. — *Deux structures de* S. D. $\overline{\mathrm{G}}$., *soit* $(\rho, \mathfrak{U})$ et $(\rho_1, \mathfrak{U}_1)$ *sur* E, *sont dites équivalentes si les familles maximales associées* (cf. définition 4.) *sont identiques. La structure définie par une telle famille maximale est appelée une structure de* S. D. G.

Une structure de S. D. G. est donc parfaitement définie par la donnée d'un S. D. $\overline{\mathrm{G}}$. $(\rho, \mathfrak{U})$, en prenant la famille maximale associée à $(\rho, \mathfrak{U})$. On parlera par la suite du S. D. G. défini par une famille $(\rho, \mathfrak{U})$ même si cette famille n'est pas maximale.

Il convient d'étudier maintenant la notion de structure induite.

Définition 6. — *Soit* $(\rho, \mathfrak{U})$ *un* S. D. G. *sur* E, *où* $(\rho, \mathfrak{U})$ *est une famille maximale. Soit* $\mathfrak{U}_1 \subset \mathfrak{U}$ *et soit* ρ_1 *la restriction de* ρ *à* $\mathfrak{U}_1$. *La famille* $(\rho_1, \mathfrak{U}_1)$ *définit sur* $\mathrm{E}' = \bigcup_{\mathrm{O} \in \mathfrak{U}_1} \mathrm{O}$ *une structure de* S. D. G. *qui est appelé la structure induite par* $(\rho, \mathfrak{U})$ *dans* E$'$.

Pour que cette définition 6. ait un sens il convient évidemment de vérifier que $(\rho_1, \mathfrak{U}_1)$ définit un S. D. $\overline{\mathrm{G}}$.; cette vérification est immédiate. De plus il convient de démontrer: la structure induite dans E$'$ ne dépend que de la structure donnée sur E et de l'ouvert E$'$; mais cette structure ne dépend pas du choix particulier de la sous-famille $\mathfrak{U}_1$. A cet effet il suffit de remarquer : si $\mathfrak{U}_1$ est la famille de tous les éléments de $\mathfrak{U}$ contenus dans E$'$ la famille $\mathfrak{U}_1$ est maximale (à supposer que $\mathfrak{U}$ soit maximal).

Remarque. — Jusqu'à présent on n'a pas utilisé le fait que la famille $\mathfrak{U}$ est une famille fondamentale, c'est-à-dire que tout ouvert de E est une réunion d'ouverts de $\mathfrak{U}$.

On voit que tout ouvert d'un S. D. G. est muni d'une structure de S. D. G. induite.

Proposition 2. — *Soit* $(\rho, \mathfrak{U})$ *un* S. D. G. *sur* E. *Soient* $\mathrm{A}_i (i \in \mathrm{J})$ *une famille d'ouverts formant un recouvrement de* E *et soient* $(\rho_i, \mathfrak{U}_i)(i \in \mathrm{J})$ *les* S. D. G. *induits par* $(\rho, \mathfrak{U})$ *dans les* A_i. *Soit enfin* $(\rho', \mathfrak{U}')$ *un autre* S. D. G. *sur* E. *Supposons que* $(\rho_i, \mathfrak{U}_i)$ *soient également les structures de* S. D. G. *induites par* $(\rho', \mathfrak{U}')$

dans les A_i. *Dans ces conditions les deux structures* $(\rho, \mathfrak{U})$ *et* $(\rho', \mathfrak{U}')$ *sont équivalentes.*

La démonstration de cette proposition 2. est évidente.

La proposition 3. ci-dessous, plus précise que la proposition 2., montre que les structures $(\rho, \mathfrak{U})$ sont des structures locales.

Proposition 3. — *(Recollement des morceaux). Soit* A_i $(i \in J)$ *une famille d'ouverts formant un recouvrement de* E, *et soient* $(\rho_i, \mathfrak{U}_i)$ *des structures de* S. D. G. *définis dans les* A_i. *On suppose que les structures induites par* $(\rho_i, \mathfrak{U}_i)$ *et* $(\rho_j, \mathfrak{U}_j)$ *dans* $A_i \cap A_j$ *soient identiques. Dans ces conditions il existe une structure de* S. D. G. (*unique d'après la proposition* 2.) *sur* E, *qui induit dans les* A_i *les structures* $(\rho_i, \mathfrak{U}_i)$.

Ici encore la démonstration se ramène à une simple vérification.

On remarquera qu'une structure (E, ρ) vérifie une propriété analogue à la proposition 2. mais elle ne vérifie pas la propriété du recollement des morceaux.

2. 2. Trajectoires d'un S. D. G.

Définition 1. — *Soit* $(\rho, \mathfrak{U})$ *un* S. D. G. *sur* E. *On désigne par* ρ *la relation d'équivalence la moins fine sur* E *qui vérifie la propriété suivante: pour tout* $O_i \in \mathfrak{U}$, *la relation* $\rho(O_i)$ *est plus fine que la relation* ρ_i *induite par* ρ *dans* O_i.

Pour que cette définition 1. ait un sens, il convient de montrer: ρ ne dépend pas de la famille $(\rho, \mathfrak{U})$ particulière qui définit la structure de S. D. G. envisagée. Ceci résulte de la définition 1. de 2. 1. (iiii). Donc à une structure de S. D. G. est associée une structure [E, ρ].

Proposition 1. — *La structure* [E, ρ] *associée à* $(\rho, \mathfrak{U})$ *par la définition* 1. *est une structure* (E, ρ). (*En d'autres termes la relation d'équivalence* ρ *est ouverte.*)

La proposition 1. résulte du fait que les relations $\rho(O)$ $(O \in \mathfrak{U})$ sont ouvertes. Pour que deux points x et y soient identifiés par ρ il est nécessaire et suffisant de trouver un nombre fini $O_1, \ldots, O_n$ d'ouverts de $\mathfrak{U}$ et de points $x_1 = x, x_2, \ldots, x_n = y$ de E tels que: x_i et x_{i+1}, soient identifiés par $\rho(O_i)$. Comme les relations $\rho(O_i)$ sont ouvertes, le saturé d'un voisinage de x

par $\rho(O_i)$ est un voisinage de x_{i+1}; donc le saturé d'un voisinage de x par ρ est un voisinage de y. C. Q. F. D.

Les résultats et définitions de **1**. peuvent donc être appliqués aux S. D. G.

PROPOSITION 2. — *Les trajectoires d'un* S. D. G. *sont connexes et localement connexes.*

La proposition **2**. résulte de (ii) de **2**. **1**. définition **1**.

PROPOSITION 3. — *Soit* $(\rho, \mathfrak{U})$ *un* S. D. G. *sur* E; *soient* $O, O_1 \in \mathfrak{U}$. *L'intersection d'une plaque* α *de* O *et d'une plaque* β *de* O_1 *est un ouvert de* α *et* β.

La proposition **3**. se démontre comme le lemme **1**. de **2**. **1**. Cette proposition permet d'introduire une nouvelle topologie sur E : à savoir la topologie dont les ouverts sont les ouverts des plaques de $(\rho, \mathfrak{U})$ et les réunions de tels ensembles.

DÉFINITION 2. — *La topologie initiale de* E *est notée* T. *La topologie engendrée par les ouverts des plaques est notée* T_1.

PROPOSITION 4. — *La topologie* T_1 *est plus fine que la topologie* T. *L'application canonique de* (E, T_1) *dans* (E, T) *est localement bi-continue.*

PROPOSITION 5. — *Les trajectoires d'un* S. D. G. *sont les composantes connexes de* E *relativement à la topologie* T_1.

PROPOSITION 6. — *Une condition suffisante pour qu'une trajectoire* γ *d'un* S. D. G. $(\rho, \mathfrak{U})$ *soit propre* (cf. **1**. **1**. définition **4**.), *est: les topologies induites par* T *et* T_1 *dans* γ *sont identiques.*

La démonstration ci-dessous utilise pour la première fois **2**. **1**. définition **1**. (iii). Soit $x \in \gamma$ et soit $O \in \mathfrak{U}$ tel que $x \in O$; soit α_x la plaque de O contenant x. Si les topologies induites par T et T_1 dans γ sont identiques, il existe un voisinage ouvert V_x de x tel que α_x soit la seule plaque de O contenue dans γ, ayant une intersection non vide avec V_x; on peut d'ailleurs supposer que V_x est saturé pour $\rho(O)$. Comme α_x est fermé dans O, l'ensemble $W = V_x - \alpha_x$ est ouvert; d'où résulte qu'aucun point de W n'appartient à l'adhérence $\bar{\gamma}$ de γ; donc α_x est la seule plaque de O contenue dans $\bar{\gamma}$ qui rencontre V. D'où la proposition **6**.

Malheureusement la réciproque de la proposition 6. (à savoir: la condition est également nécessaire) est inexacte. Cependant nous démontrerons plus loin cette réciproque moyennant quelques hypothèses supplémentaires (cf. 2. 3. proposition 3.) La proposition 7. qui suit est évidente dans le cas particulier où la réciproque de la proposition 6. est valable. En tout cas l'inexactitude de la réciproque de la proposition 6. justifie une nouvelle définition.

DÉFINITION 3. — *Une trajectoire* γ *d'un* S. D. G. *est dite complètement propre si les topologies* T *et* T_1 *induisent la même topologie dans* γ. *Une trajectoire* γ *complètement propre et non compacte est dite instable.*

La justification du terme instable résultera de la suite.

PROPOSITION 7. — *Soit* $(\rho, \mathfrak{U})$ *un* S. D. G. *sur* E; *une condition nécessaire et suffisante pour qu'une trajectoire* γ *de ce* S. D. G. *soit complètement propre est: il existe un ouvert* $O \in \mathfrak{U}$ tel que (i) $O \cap \gamma \neq \emptyset$ *et* (ii) *au moins une plaque de* O *contenue dans* $O \cap \gamma$ *admette un voisinage ouvert qui ne rencontre aucune autre plaque de* O, *contenue dans* $O \cap \gamma$.

Sous une forme plus intuitive, on peut dire : une trajectoire est complètement propre dans le seul cas où elle est instable au voisinage de l'un de ses points. On a vu dans la démonstration de la proposition 6. que la condition était nécessaire. Pour montrer qu'elle est suffisante, il convient de démontrer d'abord le lemme suivant :

LEMME 1. — *Soit* $(\rho, \mathfrak{U})$ *un* S. D. G. *sur* E, *soit* γ *une trajectoire et soit* $\omega_1 \subset O_1, \ldots, \omega_n \subset O_n$ *une suite finie de plaques des ouverts* $O_1, \ldots, O_n \in \mathfrak{U}$, *vérifiant les conditions suivantes* : $\omega_1 \subset \gamma$, $\omega_2 \subset \gamma, \ldots, \omega_n \subset \gamma$. *Soient enfin* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *des voisinages de* $\omega_1, \ldots,$ ω^u. *On peut trouver un voisinage de* α *de* ω_1 *tel que pour tout* $x \in \alpha$, *mais* $x \notin \omega_1$ *il existe une suite de plaques* $\omega'_1, \ldots, \omega'_n$ *des ouverts* $O_1, \ldots, O_n$ *vérifiant les conditions suivantes :*

$$x \in \omega'_1, \qquad \omega'_i \cap \omega'_{i+1} \neq \emptyset \quad (i = 1, \ldots, n-1);$$
$$\omega'_2 \cap \alpha_1 \neq \emptyset, \ \ldots, \ \omega'_n \cap \alpha_n \neq \emptyset \qquad \text{et} \qquad \omega'_1 \neq \omega_1, \ \ldots, \ \omega'_n \neq \omega_n.$$

Ce lemme précise la propriété de continuité exprimée par la proposition 1. On peut démontrer ce lemme par récurrence. Le lemme est vrai si $n = 1$; supposons donc démontré ce lemme pour $n = p - 1$, et démontrons-le pour $p = n$. Soit $z \in \omega_{p-1} \cap \omega_p$. Il existe un voisinage V_z de z tel que $\rho(O_{p-1}, V_z)$ et $\rho(O_p, V_z)$ soient identiques (cf. (iiii) définition 1. de 2. 1.). On peut choisir α de telle sorte que la suite des plaques $\omega'_1, \ldots, \omega'_{p-1}$ associée à $x \in \alpha$ mais $x \notin \omega_1$ vérifie : $\omega'_{p-1} \cap V_z \neq \emptyset$. D'autre part si V_z est assez petit $\omega'_{p-1} \cap V_z \neq \emptyset$ implique $\omega'_{p-1} \cap \alpha_p \neq \emptyset$. Il suffit de prendre pour ω'_p la plaque de O_p qui vérifie $\omega'_p \cap (\omega'_{p-1} \cap \alpha_p) \neq \emptyset$. D'où le lemme.

Pour montrer que le lemme 1. implique la partie directe de la proposition 7. appelons $P(\alpha, O)$ la propriété suivante de la plaque α de O contenue dans la trajectoire γ :

tout voisinage de α rencontre d'autres plaques de O contenues dans γ.

Le lemme 1. montre : si α est une plaque de O contenue dans γ ayant la propriété $P(\alpha, O)$ alors toute plaque β de $O_1 \in \mathfrak{U}$, $\beta \subset \gamma$, a également la propriété $P(\beta, O)$. C. Q. F. D.

La propriété $P(\alpha, O)$ justifie la définition suivante :

Définition 4. — *Une trajectoire qui n'est pas instable, est dite stable au sens de Poisson.*

Proposition 8. — *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une trajectoire localement partout dense soit stable au sens de Poisson, est : cette trajectoire est impropre.*

Cette dernière proposition n'est pas utilisée par la suite. Nous omettrons donc sa démonstration.

2. 3. Sur certains S. D. G. spéciaux.

Dans ce paragraphe on se propose d'examiner certaines classes de S. D. G. obtenues en faisant des hypothèses restrictives sur l'espace de définition E ou en ajoutant d'autres conditions aux conditions (i) ... (iiii) de 2. 1. définition 1.

Proposition 1. — *Soit* $(\rho, \mathfrak{U})$ *un* S. D. G. *sur* E *et supposons* E *localement compact; dans ces conditions la topologie* T_1 *est une topologie d'espace localement compact.*

On remarquera que si E est compact, il n'en résulte pas que T_1 est une topologie d'espace d'espace compact. On pourrait remplacer dans l'énoncé de la proposition 1. localement compact par quasi-localement compact (cf. la démonstration de la proposition 3.)

Proposition 2. — Soit $(\rho, \mathfrak{U})$ *un* S. D. G. *sur* E *et soit* E *espace topologique vérifiant le premier [resp. deuxième] axiome de dénombrabilité. Dans ces conditions les trajectoires de ce* S. D. G. (*munies de la topologie* T_1) *vérifient également le premier [resp. deuxième] axiome de dénombrabilité.*

La propriété relative au premier axiome de dénombrabilité est évidente. Supposons que E vérifie le deuxième axiome de dénombrabilité; on peut dans ces conditions supposer la famille $\mathfrak{U}$ dénombrable. Il reste à montrer : quelle que soit la trajectoire γ, les plaques des ouverts de $\mathfrak{U}$ contenues dans γ forment une famille $\alpha_i (i \in I)$, où I est dénombrable. Or si x et y sont deux points de γ on peut trouver une suite finie de plaques $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ parmi les α_i, telles que : $x \in \alpha_1$, $y \in \alpha_r$ et $\alpha_i \cap \alpha_{i+1} \neq \emptyset$, $i = 1, \ldots, r-1$. Donc l'ensemble envisagé est équi-potent à un sous-ensemble de l'ensemble des suites finies d'éléments de I. Mais ce dernier ensemble est dénombrable.

Proposition 3. — *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une trajectoire d'un* S. D. G. *régulier* (*cf.* 1. 2 *remarque* 3.) *défini sur un espace topologique localement compact, vérifiant le deuxième axiome de dénombrabilité, soit propre est: cette trajectoire est complètement propre.*

Supposons la structure de S. D. G. définie par $(\rho, \mathfrak{U})$, soit γ la trajectoire étudiée et soit $O \in \mathfrak{U}$, tel que $O \cap \gamma \neq \emptyset$. Les plaques de O contenues dans γ forment une famille dénombrable $\mathfrak{F}$. Or si γ est propre, l'image $\mathfrak{G}$ de $\mathfrak{F}$ dans $O/\rho(O)$ est un ensemble quasi localement compact (on dit d'un espace qu'il est quasi-localement-compact, si tout point de cet espace admet un voisinage compact; si E est séparé et quasi localement compact, il est localement compact. On rappelle également que la structure d'espace localement compact n'est pas une structure locale, tandis que la structure d'espace quasi localement compact est une structure locale [3]). En effet $O/\rho(O)$ est quasi-localement-compact; puisque le S. D. G. est régulier. Comme γ est propre l'adhérence $\overline{\mathfrak{G}}$ de $\mathfrak{G}$ admet $\mathfrak{G}$ comme intérieur (relativement à $\overline{\mathfrak{G}}$) d'où résulte : $\mathfrak{G}$ est quasi-localement-compact. Si γ était complètement impropre $\mathfrak{G}$ n'aurait pas de points isolés. Or un ensemble quasi-localement-compact, n'admettant pas de points isolés, n'est pas dénombrable. Ceci montre que la condition est nécessaire. Or on a déjà vu que la condition était suffisante.

2. 4. Récurrence et stabilité au sens de Poisson.

Nous nous contenterons d'énoncer la définition d'une trajectoire récurrente, dans le cas particulier où l'espace E est compact. Il est clair que l'on pourrait également définir les trajectoires récurrentes, même si E n'était pas compact, en utilisant une structure uniforme sur E.

Définition 1. — *Soit* $(\rho, \mathfrak{U})$ *un* S. D. G. *sur l'espace compact* E. (*On peut donc supposer que la famille* $\mathfrak{U}$ *est finie.*) *Soit* $A_i (i \in I)$ *un recouvrement ouvert fini quelconque de* E. *Une trajectoire de ce* S. D. G. *est dite récurrente s'il existe un entier n, dépendant éventuellement du recouvrement* $A_i (i \in J)$, *tel que* $\gamma \subset \bigcup A_i$, $A_i \cap Q_n(x) \neq \emptyset$. *Ici* $Q_n(x)$ *désigne l'ensemble des points de* γ *qui peuvent être liés à* x *par une suite de* n *plaques* $\alpha, \ldots \alpha_n$ (où $\alpha_i \cap \alpha_{i+1} \neq \emptyset$) *prises parmi les plaques des ouverts de la famille* $\mathfrak{U}$. *On remarquera que la propriété de récurrence ainsi définie, ne dépend pas du choix particulier de la famille finie* $\mathfrak{U}$. *Une trajectoire compacte est visiblement récurrente.*

Proposition 1. — *Une trajectoire d'un* S. D. G. *contenue dans un ensemble minimal compact est récurrente. Réciproquement une trajectoire récurrente définie sur le compact* E *admet pour adhérence un ensemble minimal* [8].

Démontrons d'abord la première partie. Soit F l'ensemble minimal. Soit A_i un recouvrement ouvert fini de F. Toute trajectoire γ de F est partout dense dans F. Donc à $x \in F$ on peut associer $n(x)$ entier tel que $Q_n(x)$ (cf. définition 1 pour les notations) rencontre chaque ouvert A_i. Soit $n'(x)$ (x fixe) le plus petit des entiers $n(x)$. Il résulte de 2. 2 lemme 1. que $n'(x)$ est semi-continue supérieurement. Cette fonction est donc bornée sur F, d'où la première partie de la proposition.

Pour établir la réciproque, supposons que l'adhérence $\bar{\gamma}$ de γ ne soit pas un ensemble minimal. Soit $\Sigma \subset \bar{\gamma}$ un ensemble fermé invariant, $\Sigma \neq \bar{\gamma}$ on peut renforcer 2. 2 lemme 1 en le lemme 1, énoncé ci-dessous, qui montre : pour tout entier n et tout voisinage W de Σ on peut trouver $x \in \gamma \cap W$ tel que $Q_n(x) \subset W$; d'où une contradiction.

Lemme 1. — *Soit* $(\rho, \mathfrak{U})$ *un S. D. G. sur* E *compact*; (*la famille* $\mathfrak{U}$ *est supposée finie*). *Soit* γ *une trajectoire. A tout* $x \in \gamma$ *et à tout voisinage* W *de* γ, *on peut associer un voisinage* V (x) *de* x, *tel que* $Q_n(y) \subset W$, *pourvu que* $y \in V(x)$.

Il peut être utile de préciser ici que la condition (iii) de la définition 1. de 2. 1 était inutile à la démonstration de 2. 2 lemme 2. Par contre cette hypothèse joue un rôle essentiel ici. On remarquera également qu'on peut supposer l'adhérence de tout ouvert de la famille $\mathfrak{U}$ contenue dans un ouvert de la famille complète $\mathfrak{U}$ qui prolonge $\mathfrak{U}$. La démonstration du lemme est calquée sur la démonstration de 2. 2 lemme 1 compte tenu de la remarque suivante : Soit $x \in O \in \mathfrak{U}$. Si une plaque α de O assez voisine de x rencontre O′, alors l'adhérence $\bar{\beta}$ de la plaque β de O qui contient x rencontre l'adhérence $\overline{O'}$ de O′.

La proposition 1 donne une équivalence entre une propriété purement topologique de γ (à savoir : $\bar{\gamma}$ est un ensemble minimal) et une propriété « métrique » La proposition 5 de 1. 2 et la proposition 3 de 2. 3 permettent une caractérisation quelque peu analogue des trajectoires stables au sens de Poisson :

Proposition 2. — *Soit un S. D. G. sur l'espace compact* E, *qui vérifie le deuxième axiome de dénombrabilité. Soit* F *un ensemble indécomposable de* E. *Dans ces conditions il existe au moins une trajectoire stable au sens de Poisson dans* F, *partout dense dans* F, *à moins que* F *ne se réduise à l'adhérence d'une trajectoire instable. Réciproquement l'adhérence d'une trajectoire* γ *de* E *est un ensemble indécomposable* [6, *a*].

2. 5. Ensembles limites. Stabilité au sens de Poisson dans une direction.

Dans ce paragraphe Σ désignera un S. G. D. $(\rho, \mathfrak{U})$ défini dans un ouvert E de l'espace localement compact E′. (L'espace de définition de Σ est donc plongé dans un espace ambiant plus grand.) On désignera par S une trajectoire de Σ.

On rappelle que si A est un espace localement compact, mais non compact, on peut définir sur A le filtre d'Alexandroff $\mathfrak{A}(A)$: c'est le filtre admettant comme base les complémentaires des parties compactes de A. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un filtre $\mathfrak{F}$ sur A n'admette aucun point adhérent (sur A) est : $\mathfrak{F}$ est plus fin que $\mathfrak{A}(A)$. On écrira $<$ au lieu de : plus fin.

DÉFINITION 1. — *Soit* $\mathfrak{F}$ *un filtre sur la trajectoire, non compacte,* S *de* Σ; $\mathfrak{F} < \mathfrak{A}(S)$. *Un point de* E′ *adhérent à* $\mathfrak{F}$ *est appelé un point limite de* S (*selon* $\mathfrak{F}$). *L'ensemble des points limites de* S *dans* E′ *selon* $\mathfrak{F}$ *est noté* $\mathfrak{L}(\mathfrak{F})$.

L'ensemble $\mathfrak{L}(\mathfrak{F})$ est visiblement fermé.

L'ensemble des points limites de S coïncide avec $\mathfrak{L}(\mathfrak{A}(S))$.

PROPOSITION 1. — $\mathfrak{L}(\mathfrak{A}(S)) \cap E$ *est vide ou est un ensemble invariant.*

La proposition **1.** est un cas particulier de la proposition **3** ci-dessous. Elle résulte également de la proposition **2.**

PROPOSITION 2. — *L'ensemble des points limites d'une trajectoire* S *de* Σ (S *non compact*) *est l'adhérence* $\bar{S}$ *de* S *si* S *n'est pas complètement propre* (**2. 2** *définition* **3**) *où* $\bar{S} - S$ *si* S *est complètement propre.*

(D'après **2. 3** proposition **3** on peut remplacer dans l'énoncé de la proposition **2**; le terme « complètement propre » par « propre » du moins si Σ est régulier.)

En effet soit $x \in \bar{S}$ et $x \notin S$; un filtre $\mathfrak{F}$ sur S qui converge vers x (dans E′) vérifie $\mathfrak{F} < \mathfrak{A}(S)$; il en résulte : $x \in \mathfrak{L}(\mathfrak{A}(S))$; d'où $\bar{S} - S \subset \mathfrak{L}(\mathfrak{A}(S))$. D'autre part, si S est complètement propre, $\mathfrak{L}(\mathfrak{A}(S)) \cap S = \emptyset$, d'après la définition d'une trajectoire complètement propre. Enfin si S n'est pas complètement propre, $S \subset \mathfrak{L}(\mathfrak{A}(S))$.

Après cette étude sommaire, il convient de reprendre cette question en détail, en mettant en évidence certains sous-ensembles remarquables de points limites.

DÉFINITION 2. — *Un filtre* $\mathfrak{F}$ *sur la trajectoire* (*non compacte*) S *de* Σ *est appelé un filtre maximal s'il vérifie les propriétés suivantes :* (i) $\mathfrak{F} < \mathfrak{A}(S)$. (ii) $\mathfrak{F}$ *admet une base* $\mathfrak{B}$ *dont tout élément est un ouvert à frontière compacte. Un filtre maximal de* S *qui admet une base formée d'ensembles ouverts et connexes* (*relativement à* T_1) *est appelé un filtre maximal et connexe.*

PROPOSITION 3. — *Si* $\mathfrak{F}$ *est un filtre maximal sur* S, *alors* $\mathfrak{L}(\mathfrak{F}) \cap E$ *est un ensemble invariant fermé ou un ensemble vide. Si* $\mathfrak{F}$ *est connexe,* $\mathfrak{L}(\mathfrak{F})$ *est également connexe.*

La deuxième partie de la proposition **3** est évidente. La première partie résulte du lemme **1**. de **2**. **2**. Il suffit d'ailleurs de montrer que $\mathfrak{L}(\mathfrak{F}) \cap E$ est saturé pour ρ. En effet soit $x \epsilon \mathfrak{L}(\mathfrak{F})$ et soit γ_x la trajectoire contenant x (éventuellement $\gamma_x = S$). Soit $y \epsilon \gamma_x$; il existe un nombre fini d'ouverts $O_1, \ldots, O_n \epsilon \mathfrak{U}$ et de plaques $\omega_1, \ldots, \omega_n$ de $O_1, \ldots, O_1$ contenues dans γ_x, telles que : (i) $\omega_i \cap \omega_{i+1} \neq \emptyset$, $i = 1, \ldots, n-1$ (ii) $\omega_i \subset \gamma_x$, $i = 1, \ldots, n$ et $x \epsilon \omega_1$, $y \epsilon \omega_n$. Soit Ω un ouvert, dont la frontière $\dot{\Omega}$ (relativement à T_1) est compacte, $\Omega \epsilon \mathfrak{F}$. On peut choisir des voisinages $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ (dans T) de $\omega_1, \ldots, \omega_n$ tels que $\alpha \cap \dot{\Omega} \subset \omega_1, \ldots,$ $\alpha_n \cap \dot{\Omega} \subset \omega_n$ (grâce à la compacité de $\dot{\Omega}$). Il ne reste plus qu'à appliquer le lemme, pour établir la proposition **3**.

Les filtres maximaux connexes de S jouissent d'une propriété remarquable exprimée par la proposition suivante :

PROPOSITION 4. — *Si* S *est un espace localement compact (mais non compact) localement connexe et connexe, tout ultrafiltre* $\mathfrak{F}_1$ *sur* S *plus fin que le filtre d'Alexandroff de* S *admet un filtre maximal connexe* $\mathfrak{F}$ *moins fin que* $\mathfrak{F}_1$.

Soit $\mathfrak{A}(S)$ le filtre d'Alexandroff de S et soit $\overline{\mathfrak{A}}$ la base de $\mathfrak{A}$ formée par les complémentaires des parties compactes de S. Pour tout $a \epsilon \overline{\mathfrak{A}}$ il existe $e \epsilon \mathfrak{F}_1$ tel que $e \subset a$ (puisque $(\mathfrak{F}_1)$ est plus fin que $\mathfrak{A}(S)$). Soit a' la composante connexe de a, sur laquelle $\mathfrak{F}_1$ induit un filtre. (Cette composante a' est unique puisque $\mathfrak{F}_1$ est un ultra filtre.) Si a décrit $\overline{\mathfrak{A}}$ l'élément a' décrit une base de filtre maximal et connexe. D'où la proposition **4**.

PROPOSITION 5. — *Soit* S *une trajectoire, non compacte, de* Σ. *Si* $\mathfrak{F}$ *décrit l'ensemble des filtres maximaux connexes de* S, *l'ensemble* $\mathfrak{L}(\mathfrak{F})$ *décrit l'ensemble limite de* S.

DÉFINITION 3. — *Une trajectoire* S *d'un système* Σ *est dite stable au sens de Poisson selon le filtre maximal* $\mathfrak{F}$, *si* $S \subset \mathfrak{L}(\mathfrak{F})$. *Si* S *est stable au sens de Poisson selon tout filtre maximal* $\mathfrak{F}$ *on dira que* S *est complètement stable au sens de Poisson.*

Les propositions suivantes sont évidentes.

Proposition 6. — *Toute trajectoire* S *stable au sens de Poisson* (cf. 2 2. définition 4) *est stable au sens de Poisson selon un certain filtre maximal.*

Proposition 7. — *Toute trajectoire d'un ensemble minimal compact est complètement stable au sens de Poisson.*

Proposition 8. — *Soit* S *une trajectoire stable au sens de Poisson selon* $\mathfrak{F}$; $\mathfrak{L}(\mathfrak{F})$ = *adhérence* $\overline{\mathrm{S}}$ *de* S.

2. 6. Trajectoires errantes et trajectoires complètement instables.

Définition 1. — *Une trajectoire (non compacte)* γ *d'un S.D. G.* $(\rho, \mathfrak{U})$ *est appelée une trajectoire errante [semi-errante], si pour tout* $x \in \gamma$ *et* $x \in \mathrm{O} \in \mathfrak{U}$ *il existe un voisinage* W *de* x, *tel que toute trajectoire qui rencontre* W *ne contienne qu'une [qu'un nombre fini] de plaque[s] de* O *ayant une intersection non vide avec* W.

Il est clair qu'une trajectoire semi-errante (et *a fortiori* une trajectoire errante) est complètement instable (1. 1 définition 9). On peut également énoncer une réciproque de cette dernière propriété.

Proposition 1. — *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une trajectoire d'un* S. D. G. *défini sur un espace localement compact, soit complètement instable, est que cette trajectoire soit* semi-errante.

Il suffit donc de montrer que la condition est suffisante. A cet effet, soit x un point de la trajectoire complètement instable γ, et soit $x \in \mathrm{O} \in \mathfrak{U}$. Soit φ l'application canonique de O sur $\mathrm{O}/\rho(\mathrm{O})$ et π l'application canonique de O sur O/ρ; l'application $\delta = \pi . \varphi^{-1}$ est continue. Posons $x' = \varphi(x)$ et $x'' = \pi(x)$. Le point x'' admet un voisinage compact $\mathrm{V}(x'')$, puisque la trajectoire est supposée complètement instable. D'autre part x' admet également un voisinage quasi-compact $\mathrm{V}(x')$. L'ensemble $\mathrm{I} = \delta^{-1}(x) \cap \mathrm{V}(x')$ est quasi-compact (car φ est continue) et discret (car γ est propre). Donc I est fini, d'où la proposition 1.

Proposition 2. — *Soit* E *un espace compact, vérifiant le deuxième axiome de dénombrabilité et soit* $(\rho, \mathfrak{U})$ *un* S. D. G. *sur* E.

Soit $\overline{\mathfrak{U}}$ *l'adhérence de la réunion* $\mathfrak{U}$ *de toutes les trajectoires stables au sens de Poisson de* E. *Dans ces conditions, l'ensemble ouvert* $\Omega = E - \overline{\mathfrak{U}}$, s'*il n'est pas vide, contient des trajectoires errantes* (*et par conséquent également des trajectoires complètement instables*).

Avant de démontrer la proposition 2 signalons un corollaire de cette proposition.

Corollaire. — *Les hypothèses et les notations sont celles de la proposition* 2. *Dans ces conditions* $\overline{\mathfrak{U}}$ *est confondu avec le noyau de* $(\rho, \mathfrak{U})$ (cf. 1. 1 *définition* 12 et le dernier alinéa de 1. 2).

Pour démontrer la proposition 2 nous pouvons supposer que E est un espace métrique. On peut supposer que la famille $\mathfrak{U}$ est finie. Soit $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ une suite décroissante de nombres réels > 0 qui converge vers 0. A tout $x \in \Omega$ associons le plus petit des entiers j vérifiant la propriété suivant : pour tout O, tel que $x \in O \in \mathfrak{U}$, la boule $B_j^{(x)}$ fermée de centre x et de rayon ε_j ne rencontre qu'une plaque de O contenue dans la trajectoire γ_x issue de x; désignons cet entier minimal par $i(x)$. L'entier $i(x)$ est une fonction semi-continue inférieurement de x (ceci résulte du lemme 1 de 2. 2). Soit E_r le sous-ensemble de Ω défini par $i(x) \leqslant r$. L'ensemble E_r est fermé. Les ensembles E_r, $r = 1, 2 \ldots n, \ldots$ forment une suite croissante qui épuise Ω. D'après le théorème de Baire l'un au moins des E_r contient des points intérieurs. Mais si x est un point intérieur de E_r la trajectoire issue de x est visiblement une trajectoire errante d'où la proposition 2.

2. 7. Pseudo-mouvement. Incompressibilité.

Définition 1. — *Soit* $(\rho, \mathfrak{U})$ *Un* S.D.G., *soient* O *et* O_1 *deux ouverts de* $\mathfrak{U}$. *Un pseudo-mouvement élémentaire de* O *dans* O_1 *est une application topologique* φ *d'un ouvert* Ω *de* $O/\rho(O)$ *sur un ouvert de* $O_1/\rho(O_1)$ *vérifiant la condition suivante : les plaques* $x \subset \Omega$ et $\varphi(x)$ *ont une intersection non vide.*

Définition 2. — *Soit* $(\rho, \mathfrak{U})$ *un* S. D. G. *Soit* Σ *l'espace somme des ouverts* $O/\rho(O)$, $O \in \mathfrak{U}$. *Un pseudo-mouvement de* $(\rho, \mathfrak{U})$ *est une application* ψ *topologique d'un ouvert* A *de* Σ *sur un* *ouvert* B *de* Σ *vérifiant la propriété suivante: pour tout* $x \in A$ *il existe un voisinage ouvert* W_x *de* x *tel que la restriction de* ψ *à* W_x *résulte de la composition d'un nombre fini de pseudo-mouvements élémentaires.*

DÉFINITION 3. — *On dit que le système* $(\rho, \mathfrak{U})$ *vérifie l'incompressibilité du domaine s'il n'existe aucun pseudo-mouvement* ψ *tel que* $\psi(O) \subset O$ *et* $\psi(O) \neq O$ *pour un certain ouvert* O *de* Σ.

La définition 3 est calquée sur la définition classique [6, *b*]. Il paraît vraisemblable qu'un S. D. G. défini sur un compact métrique E qui vérifie l'incompressibilité des domaines admette pour noyau l'espace E tout entier. Cependant, je n'ai pas pu généraliser la démonstration proposée en [6, *b*]. Mais il est facile d'établir cette dernière propriété pour les systèmes conservatifs définis ci-dessous.

DÉFINITION 4. — *On dit que le système* $(\rho, \mathfrak{U})$ *est conservatif s'il existe une mesure* μ *sur* Σ *(cf. définition* 2) *invariante par tous les pseudo-mouvements.*

Il est clair qu'un S. D. G. conservatif vérifie l'incompressibilité du domaine. Il est facile de donner des exemples de structures feuilletées conservatives (cf. 3).

Comme la notion de S. D. G. conservatif fait intervenir des notions étrangères à la topologie générale, nous n'établirons pas la propriété des S. D. G. conservatifs indiquée ci-dessus.

3. EXEMPLES

Les familles régulières de courbes définies par Whitney [10] et les structures de variétés feuilletées sont des structures de S. D. G. particulières. Les variétés feuilletées sont même des S. D. G. réguliers (cf. 2. 1 remarque 3). Il convient de remarquer qu'une famille régulière de courbes comportant des singularités (courbes réduites à un point) ne vérifie pas la condition (iii) de 2. 1. définition 1. La proposition 1 de 2. 4 utilise précisément la condition (iii). Or on sait que l'équivalence énoncée dans cette proposition est valable pour les « systèmes dynamiques généraux » [5]. Cette perte de généralité n'est qu'apparente.

Il est à peine utile d'ajouter que la structure de S. D. G. et la structure de « systèmes dynamiques généraux » ne sont pas contenues l'une dans l'autre. Par contre, le champ commun à ces deux structures est assez vaste.

Une structure de S. D. G. qui généralise la structure de variété feuilletée (tout en ne s'écartant pas trop de cette notion) est obtenue en ajoutant aux conditions (i) ... (iiii) de 2. 1 définition 1 la condition suivante.

(v) les classes de $\rho(O)$ dans O sont homéomorphes à des ouverts de l'espace numérique R^p (p fixe).

Les trajectoires d'une telle structure sont des variétés numériques à p dimensions.

Nous donnons maintenant quelques exemples de S. D. G. destinés à mettre en évidence quelques propriétés utiles ou curieuses (pour d'autres exemples nous renvoyons à [9]).

Exemple 1. — *Exemple d'un* S. D. G. *admettant un ensemble indécomposable non spécial compact, vérifiant le deuxième axiome de dénombrabilité, et ne contenant aucune trajectoire complètement stable au sens de Poisson.*

(On sait [6*a*] qu'il n'est pas possible d'indiquer un tel exemple pour les familles régulières de chemins.) Cet exemple montre également qu'on ne peut pas améliorer l'énoncé de 2. 4 proposition 2 au point de remplacer « *stable au sens de Poisson* » par « *complètement stable au sens de Poisson* ».

Il serait évidemment intéressant d'indiquer des conditions simples, qui imposées à un S. D. G. rendent possible ce renforcement de la proposition.

Pour construire l'exemple annoncé, considérons le produit topologique : $T_2 \times I$ où T_2 est le tore à deux dimensions, rapporté aux coordonnées φ, θ (nombres réels mod. 1) et I l'intervalle [0 1] paramétré par t; $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Soit $E \subset T_2 \times I$ l'ensemble défini par le système de conditions

$$t = 1 \qquad \text{ou} \qquad t = 0 \qquad \text{ou} \qquad \varphi = 0.$$

On définit sur E une structure de S. D. G. qui induit dans le tore $t = 1$ le S. D. G. associé à l'équation différentielle

$$\omega \equiv A(\varphi, \theta)\, d\varphi + B(\varphi, \theta)\, d\theta = 0;$$

dans le tore $t = 0$ le S. D. G. associé à l'équation différentielle

$d\varphi + \alpha\, d\theta = 0$, ($\alpha$ constante irrationnelle), et dans l'anneau $\varphi = 0$ le S. D. G. associé à l'équation $d\theta = 0$. On suppose que toutes les trajectoires, à l'exception d'une seule, de $\omega = 0$, sont propres et non compactes (il est bien connu que cela est possible). Une trajectoire de ce S. D. G. qui contient une trajectoire non compacte de $\omega = 0$ est stable au sens de Poisson, mais pas complètement stable au sens de Poisson. Son adhérence ne contient aucune trajectoire, partout dense, complètement stable au sens de Poisson.

Le noyau de ce S. D. G. est E, il n'est pas confondu avec l'adhérence de l'ensemble des trajectoires complètement stables au sens de Poisson.

Il est intuitif, mais l'exposé explicite conduit à quelques difficultés techniques d'exposition, que l'exemple précédent, convenablement modifié, conduit à *une structure de variété feuilletée présentant les mêmes caractères pathologiques.*

EXEMPLE 2. — *Exemple d'un S. D. G. ayant une trajectoire unique, mais dont les topologies* T *et* T_1 *sont distinctes.* Les trajectoires de ce système sont propres, mais elles ne sont pas complètement propres (cf. 1. 1 définition 4 et 2. 2 définition 3)

Considérons le tore T_2 (rapporté aux coordonnées canoniques θ, φ) l'équation différentielle $\alpha\, d\theta + \beta\, d\varphi = 0$, où α et β sont des constantes incommensurables. Soit γ une trajectoire du S. D. G. ainsi défini, munie de la topologie induite $\mathfrak{T}$. Le S. D. G. induit sur γ a les propriétés annoncées.

EXEMPLE 3. — *Exemple d'une structure feuilletée définie sur une variété compacte connexe, admettant une trajectoire localement partout dense, mais non partout dense.*

A ma connaissance, on n'a pas mis en évidence une structure feuilletée, dont les feuilles ont une dimension, admettant cette propriété. L'exemple proposé est défini dans le produit $T_2 \times R$, R droite numérique. On considère la structure feuilletée définie par : $t(t - 1)(\alpha\, dx + \beta\, dy) - dt = 0$ où α et β sont deux constantes incommensurables si $0 \leqslant t \leqslant 1$ et $dt = 0$ si $t < 0$ ou $t > 1$.

EXEMPLE 4. — *Une classe de variétés feuilletées qui sont des S. D. G. conservatifs.*

Soit V_n une variété (indéfiniment différentiable) et soit Ω une forme différentielle extérieure de degré p (également indéfiniment différentiable) sur V_n, vérifiant les propriétés suivantes :

1° $d\Omega = 0$

2° $\Omega \neq 0$ en tout point de V_n

3° Ω est complètement décomposable (c'est-à-dire que Ω est localement le produit extérieur de p formes de Pfaff :

$$\Omega = \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p$$

Dans ces conditions le système caractéristique de Ω (défini localement par $\omega_1 = 0, \ldots, \omega_p = 0$) définit sur V_n une structure feuilletée pour la dimension p. La condition 1° implique : le S. D. G. correspondant est conservatif.

BIBLIOGRAPHIE

[1] G. D. Birkhoff. Dynamical systems, *American Math. Society Colloquium Publ.* vol. 9, (1927).

[2] T. M. Cherry. Topological properties of solutions of ordinary differential equations, *American J. of Math.*, vol. 59, (1937), 956-982.

[3] P. Dedeker. Quelques aspects de la théorie des structures locales, *Bulletin Soc. Math. Belg.*, 5, (1952), 26-43.

[4] Ch. Ehresmann. Structures locales. *Colloque de Topologie et de Géométrie Différientielles*, Strasbourg (1952). Sur la théorie des variétés feuilletées *Rendiconti Mat. Applic.*, 5 vol. 10, 1-19. Structures locales. *Annali di Mat.*, 36 (1954) 133-142.

[5] G. A. Hedlund-W. L. Gottschalk. The dynamics of transformation groups. *Trans. American Math. Soc.*, 65, (1949), 348-359; Topological dynamics. *American Math. Soc. Coll. Publ;* (1956).

[6] H. Hilmy. *a)* Sur les ensembles quasi-minimaux. *Annals of Math.*, 37 (1936), 899-911.
b) Sur les mouvements des systèmes dynamiques qui admettent l'incompressibilité des domaines. *American J. Math.*, 69 (1937), 803-808.

[7] V. V. Nemyckii. Topological problems of the theory of dynamical systems. Uspechi Math. Nauk. N. S., 4, (34) (1949), 91-153. *American Math. Soc. Translations*, 103.

[8] V. V. Nemyckii et V. V. Stepanov. Théorie qualitative des systèmes différentiels. Moscou, 1949.

[9] G. Reeb. Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées (thèse Strasbourg, 1948). *Actualités scientifiques et Industrielles*, Hermann, Paris (1952).

[10] Whitney. On regular families of curves. *Bull. American, Math. Soc.*, 47 (1941), 145-147.