ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

PAUL-ANDRÉ MEYER

Renaissance, recollements, mélanges, ralentissement de processus de Markov

Annales de l'institut Fourier, tome 25, nº 3-4 (1975), p. 465-497

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1975__25_3-4_465_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
25, 3 et 4 (1975), 465-497.

RENAISSANCE, RECOLLEMENTS, MÉLANGES, RALENTISSEMENT DE PROCESSUS DE MARKOV

par P. A. MEYER

Dédié à Monsieur M. Brelot à l'occasion de son 70^e anniversaire.

Ce travail étudie un certain nombre de transformations que l'on peut faire subir à des processus de Markov, et qui préservent le caractère markovien. Le but de l'article est en fait l'étude de la dernière transformation, le *ralentissement* d'un processus en ses points de branchement, qui « efface » le phénomène du branchement. Pour établir le caractère markovien du processus ralenti, nous sommes amenés à le considérer comme une limite de *mélanges* du processus initial avec des processus constants. Nous étudions donc les mélanges (random evolutions) de Griego et Hersh, que nous ramenons (suivant une méthode de Heath) au théorème fondamental d'Ikeda, Nagasawa et Watanabe sur les *renaissances*, dont nous donnons ici une démonstration complète avec une sorte de réciproque nouvelle, qui est un résultat général de conditionnement par rapport au passé strict. Chemin faisant, nous montrons dans un court paragraphe que ce théorème entraîne une forme du théorème de Courrège et Priouret sur les *recollements* (nous avons appris de M. Nagasawa que ce lien entre les deux théorèmes avait été exposé par lui dans un cours, mais jamais publié).

Cet article est dédié à M. Marcel Brelot, en témoignage d'admiration pour son œuvre scientifique, ainsi que de gratitude pour l'enseignement et l'aide que j'ai reçus de lui, lorsque j'étais l'un de ses étudiants à Paris.

1. Renaissance de processus de Markov.

Soit (P_t) un semi-groupe de Markov sur un espace d'états E, satisfaisant aux « hypothèses droites ». Rappelons rapidement ce que cela signifie : E est homéomorphe à un borélien d'un espace métrique compact; (P_t) est un semi-groupe (non nécessairement borélien) de noyaux *markoviens* sur E, tel que $P_0 = I$, et l'on distingue dans E un point noté ∂, absorbant pour le semi-groupe $(\varepsilon_\partial P_t = \varepsilon_\partial)$. Ω désignant l'ensemble de toutes les applications continues à droite ω de $\mathbf{R}_+$ dans E, à durée de vie (i.e., l'ensemble $\{t : \omega(t) = \partial\}$ est un intervalle fermé $[\zeta(\omega), \infty[$), muni de la tribu $\mathscr{F}^0$ engendrée par les applications coordonnées X_t, il existe pour toute loi μ sur E une loi P^μ (nécessairement unique) pour laquelle le processus (X_t) est markovien, avec (P_t) comme semi-groupe de transition et μ comme loi initiale. Enfin, les fonctions p-excessives sont continues à droite sur les trajectoires du processus (X_t) (P^μ-p.s. pour toute loi μ), et sont presque boréliennes ([1]).

Les notations $\mathscr{F}$, $\mathscr{F}_t^0$, $\mathscr{F}_t$ (tribus sur Ω), θ_t (opérateur de translation), etc., auront leur signification habituelle en théorie des processus de Markov (voir par exemple Blumenthal-Getoor [1], Meyer [10.1]). Nous désignerons par $[\partial]$ l'unique élément de Ω dont la durée de vie est nulle.

Si le lecteur désire généraliser un peu la théorie présentée ici, en considérant une réalisation distincte de la réalisation continue à droite canonique, il lui faudra postuler l'existence d'un élément distingué $[\partial]$ de Ω, de durée de vie nulle, tel que $P^\partial = \varepsilon_{[\partial]}$ et que $\theta_t[\partial] = [\partial]$ pour tout t. Dans ce qui suit, nous n'entrerons pas dans ce genre de détails techniques, et nous travaillerons sur la réalisation canonique.

Nous allons suivre maintenant l'exposé d'Ikeda, Nagasawa

([1]) Dans un travail récent, Getoor a pu affaiblir encore ces hypothèses, sans rien perdre des résultats connus sur les processus de Markov.

et Watanabe [7], ou encore celui de Meyer [10.2], qui en diffère par la considération, inutile ici, de renaissances transfinies. Nous voulons « ressusciter » les trajectoires à l'instant ζ de leur « mort ». Le procédé de renaissance est spécifié par la donnée suivante.

DÉFINITION. — *On appelle noyau de renaissance un noyau markovien* N *de* $(\Omega, \mathscr{F})$ *dans* $(E, \mathscr{B}_u(E))$, *satisfaisant à*

1) *Si* $\zeta(\omega) = 0$ *ou* $+\infty$, $N(\omega, \bullet) = \varepsilon_\partial$,

2) *si* $t < \zeta(\omega)$, $N(\theta_t\omega, \bullet) = N(\omega, \bullet)$.

Dans la condition 1), $\zeta(\omega) = 0$ équivaut ici [2] à $\omega = [\partial]$, et l'hypothèse concernant $\zeta(\omega) = +\infty$ n'est là que pour fixer les idées, car on ne peut renaître à l'instant $t = +\infty$.

A l'aide du noyau markovien N, nous construisons un noyau markovien H de $(\Omega, \mathscr{F})$ dans $(\Omega, \mathscr{F})$, composé de N et du noyau $x \longmapsto P^x$ de E dans Ω

$$H(\omega, \bullet) = P^{\varepsilon_\omega N}(\bullet) \tag{1}$$

Et maintenant, nous construisons une chaîne de Markov à temps discret, dont l'espace d'états est $(\Omega, \mathscr{F})$, et H le noyau de transition. De manière précise :

(2)

$W \subset \Omega^{\mathbf{N}}$ est formé des $w = (\omega_0, \omega_1, \ldots)$ tels que $\zeta(\omega_i) = 0 \Longrightarrow \omega_{i+1} = \omega_{i+2} \cdots = [\partial]$; $\mathscr{G}$ est la tribu $\mathscr{F}^{\mathbf{N}}|_W$.

p_n est l'application coordonnée d'indice n

$$p_n(w) = \omega_n$$

et η_n est la projection $(p_0, \ldots, p_n)$

$$\eta_n(w) = (\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n).$$

Pour tout $x \in E$, Π^x est la mesure sur W, pour laquelle le processus (p_n) à valeurs dans Ω est markovien, admet H comme noyau de transition et P^x comme loi initiale.

[2] Le texte est écrit de telle sorte, qu'il s'applique à des réalisations un peu plus générales que la réalisation canonique, comme on l'a signalé plus haut. Cela ne devrait pas gêner le lecteur.

Le « cimetière » de l'espace d'états $(\Omega, \mathscr{F})$ est ici le point $[\partial]$ (noter que $\zeta(\omega) = 0 \Longrightarrow H(\omega, \bullet) = \varepsilon_{[\partial]}$). Nous poserons $|\partial| = ([\partial], [\partial], \dots) \in W$.

Il n'y a aucune difficulté quant à l'existence de Π^x, qui résulte du théorème de limites projectives d'Ionescu Tulcea (Neveu [12], p. 145, th. V-1-1) — ou même simplement ici, du théorème de Kolmogorov, toutes les mesures sur l'espace canonique $(\Omega, \mathscr{F}^0)$ étant régulières.

Les mesures Π^x étant construites sur Ω, nous allons définir des v.a. Y_t sur W, qui seront celles du processus de Markov « ressuscité ».

Nous posons d'abord $s_{-1}(w) = 0$ pour tout $w \in W$, puis

$$(3)\quad \left| \begin{array}{l} \text{Si } w = (\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n \dots) \varepsilon W \\ s_0(w) = s_0(\omega_0) = \zeta(\omega_0) \\ s_1(w) = s_1(\omega_0, \omega_1) = \zeta(\omega_0) + \zeta(\omega_1) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ s_\infty(w) = \lim\limits_n s_n(w) \end{array} \right.$$

Puis

$$(4)\quad \left| \begin{array}{l} Y_t(w) = X_t(\omega_0) \text{ si } t < s_0(w) \\ \qquad\quad = X_{t-s_1(w)}(\omega_1) \text{ si } s_0(\omega) \leqslant t < s_1(w) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\quad = \partial \text{ si } s_\infty(w) \leqslant t. \end{array} \right.$$

En principe, nous pourrions énoncer dès maintenant le théorème : le processus (Y_t) à valeurs dans E, pour les mesures Π^x, est un processus de Markov droit admettant le processus initial comme sous-processus. En fait, nous obtiendrons un résultat à la fois plus précis et plus facile à démontrer si nous spécifions une *famille de tribus* sur W, et un *opérateur de translation* sur W, de sorte que nous avons encore de longues définitions à écrire.

Opérateur de translation.

Si $t \geqslant s_\infty(w)$, nous posons $\Theta_t w = |\partial|$. Sinon, il existe un entier k tel que $s_{k-1}(w) \leqslant t < s_k(w)$ et alors, si $w = (\omega_0, \omega_1, \dots)$

$$(5)\qquad \Theta_t(w) = (\theta_{t-s_{k-1}(w)}\omega^k, \omega^{k+1}, \dots).$$

LEMME. — *On a* $\Theta_s \circ \Theta_t = \Theta_{s+t}$, $Y_s \circ \Theta_t = Y_{s+t}$.
On a $s_0 \circ \Theta_t = s_0 - t$ *sur* $\{t < s_0\}$, *et*

$$\Theta_{s_0}(\omega_0, \omega_1, \ldots) = (\omega_1, \omega_2, \ldots).$$

Démonstration. — Si $t \geqslant s_\infty(w)$, on a $s + t \geqslant s_\infty(w)$, $\Theta_{s+t}(w) = \|\partial\|$, $\Theta_s\Theta_t(w) = \Theta_s\|\partial\| = \|\partial\|$.
Supposons maintenant que $s_{k-1}(w) \leqslant t < s_k(w)$. Nous avons alors (5) et

$$s_0(\Theta_t w) = \zeta(\theta_{t-s_{k-1}}(\omega^k)) = \zeta(\omega^k) - t + s_{k-1} = s_k(w) - t$$

d'où $s_i(\Theta_t w) = s_{k+i}(w) - t$. Il en résulte que

$$s_{i-1}(\Theta_t w) \leqslant s < s_i(\Theta_t w)$$

est équivalent à $s_{k+i-1}(w) \leqslant s + t < s_{k+i}(w)$, et la première formule en résulte aisément.

Pour la seconde, il suffit alors de vérifier que $Y_t = Y_0 \circ \Theta_t$, ce qui est immédiat. La seconde ligne aussi est évidente.

Famille de tribus.

Par définition, une fonction f sur W, $\mathscr{G}$-mesurable, sera $\mathscr{G}_t$-mesurable si elle possède la propriété suivante :

(6) Pour tout k, la fonction $f . I_{\{s_{k-1} \leqslant t < s_k\}}$ est de la forme $h \circ \eta_k$, où la fonction $h(\omega_0, \ldots, \omega_k)$ sur $\Omega^{[0, \ldots, k]}$ est telle que, pour tout $(\omega_0, \ldots, \omega_{k-1}) \in \Omega^{[0, \ldots, k-1]}$ fixé tel que $s_{k-1}(\omega_0, \ldots, \omega_{k-1}) \leqslant t$, $\omega \longmapsto h(\omega_0, \ldots, \omega_{k-1}, \omega)$ soit mesurable par rapport à $\mathscr{F}_{t-s_{k-1}}(\omega_0, \ldots, \omega_{k-1})$.

La famille $(\mathscr{F}_t)$ étant croissante et continue à droite, on vérifie aussitôt que la famille $(\mathscr{G}_t)$ l'est aussi. D'autre part, Y_t est $\mathscr{G}_t$-mesurable pour tout t.
Nous allons alors démontrer :

THÉORÈME 1. — $(W, \mathscr{G}, Y_t, \mathscr{G}_t, \Theta_t, \Pi^x)$ *est une réalisation d'un semi-groupe droit.*

Nous dirons que ce semi-groupe est obtenu « en ressuscitant (P_t) selon le noyau N ».

Démonstration. — Le point essentiel est la vérification de la propriété de Markov simple : si f est positive $\mathscr{G}_t$-mesurable, g positive $\mathscr{G}$-mesurable

$$\text{(7)} \qquad E_\Pi^x[f . g \circ \Theta_t] = E_\Pi^x[f . E_\Pi^{Y_t}[g]]$$

ces espérances étant relatives aux lois $\Pi^{\bullet}$. Il suffit d'établir séparément

$$(8) \qquad E^x_\Pi[f.g \circ \Theta_t . I_{\{t \geq s_\infty\}}] = E^x_\Pi[f.E^{Y_t}_\Pi[g].I_{\{t \geq s_\infty\}}]$$

et

$$(9) \qquad E^x_\Pi[f.g \circ \Theta_t . I_{\{s_{k-1} \leq t < s_k\}}] = E^x_\Pi[f.E^{Y_t}_\Pi[g].I_{\{s_{k-1} \leq t < s_k\}}]$$

Or (8) est évidente, car sur $\{t \geq s_\infty\}$ on a $\Theta_t w = [\![\partial]\!]$, $Y_t(w) = \partial$, $E^{Y_t}_\Pi[g] = g([\![\partial]\!])$. Passons donc à (9). Posons $w = (\omega_0, \omega_1, \ldots)$. Par définition de $\mathcal{G}_t$

$$(10) \qquad f(w).I_{\{s_{k-1} \leq t < s_k\}}(w) = h(\omega_0, \ldots, \omega_k)$$

où h est une fonction mesurable des $k+1$ premières coordonnées de w, nulle hors de l'ensemble

$$s_{k-1}(\omega_0, \ldots, \omega_{k-1}) \leq t < s_k(\omega_0, \ldots, \omega_k),$$

et satisfaisant à (6). D'autre part, sur cet ensemble,

$$\Theta_t w = (\Theta_{t-s_{k-1}}\omega_k, \omega_{k+1}, \ldots).$$

Rappelons-nous maintenant comment nous avons construit les lois Π^x : nous avons en fait des lois Π^ω de processus de Markov, admettant Ω comme espace d'états, H comme noyau de transition, ε_ω comme loi initiale, et Π^x est la loi Π^μ correspondant à la loi initiale $\mu = P^x$ sur Ω. Pour démontrer (9), il suffit de traiter le cas où

$$g(w) = a(\omega_0)b(\omega_1, \omega_2, \ldots).$$

Dans ce cas, le premier membre de (9) vaut (la grande accolade $\{\ldots\}$ ne dépendant que de $\omega_0, \ldots, \omega_k$)

$$(11) \qquad E^x_\Pi[\{f.I_{\{s_{k-1} \leq t < s_k\}}.a(\theta_{t-s_{k-1}}\omega_k)\}b(\omega_{k+1}, \omega_{k+2}, \ldots)]$$

Notons $B(\omega)$ la fonction $\int b(w)\Pi^\omega(dw)$, et $\bar{g}(w)$ la fonction $a(\omega_0).B(\omega_1)$. La propriété de Markov du processus

$$p_0, \ldots, p_n, \ldots$$

nous montre alors que (11) est égal à

$$(12) \qquad E^x_\Pi[f.I_{\{s_{k-1} \leq t < s_k\}}.a(\theta_{t-s_{k-1}}\omega_k).B(\omega_{k+1})]$$

Autrement dit, le premier membre de (9) ne change pas si l'on remplace g par $\bar{g}$. Mais de même on a, en conditionnant par rapport à ω_0, ω_1

$$\int g(w)\Pi^{\omega}(dw) = \int \bar{g}(w)\Pi^{\omega}(dw) \text{ pour tout } \omega$$

et, en intégrant par rapport à $P^x(d\omega)$, on a le même résultat pour $\Pi^x(dw)$. Le second membre de (9) ne change donc pas non plus si l'on remplace g par $\bar{g}$, et il suffit de démontrer (9) lorsque g est de la forme

$$\bar{g}(w) = a(\omega_0)\mathrm{B}(\omega_1).$$

Nous reprenons l'expression (12), et nous calculons l'espérance conditionnelle par rapport à $\omega_0, \ldots, \omega_k$: celle-ci nous est donnée par le noyau de transition : elle vaut

$$f \cdot \mathrm{I}_{\{s_{k-1} \leqslant t < s_k\}} \cdot a(\theta_{t-s_{k-1}}\omega_k) \cdot \mathrm{H}(\omega_k, \mathrm{B})$$

Notons $\beta(\omega) = \mathrm{H}(\omega_k, \mathrm{B})$. Comme $t < s_k$, on a

$$t - s_{k-1} < \zeta(\omega_k),$$

et la propriété 1) du noyau N nous montre que, sur l'ensemble $\{s_{k-1} \leqslant t < s_k\}$

$$\beta(\omega_k) = \beta(\theta_{t-s_{k-1}}\omega_k)$$

Ainsi, encore une fois, le premier membre de (9) n'est pas modifié si l'on remplace $\bar{g}$ par $\bar{\bar{g}}(w) = a(\omega_0)\beta(\omega_0)$. Mais de même cette modification n'altère pas le second membre de (9), et pour finir, *il suffit d'établir* (9) *lorsque* $g(w) = c(\omega_0)$, *une fonction de* ω_0 *seulement.* Dans ce cas, le premier membre de (9) se réduit à

$$\mathrm{E}^x_{\Pi}[f \cdot \mathrm{I}_{\{s_{k-1} < t\}} \mathrm{I}_{\{t-s_{k-1} < \zeta(\omega_k)\}} c(\theta_{t-s_{k-1}}\omega_k)] \tag{13}$$

Le second membre vaut

$$\mathrm{E}^x_{\Pi}[f \cdot \mathrm{I}_{\{s_{k-1} \leqslant t\}} \mathrm{I}_{\{t-s_{k-1} < \zeta(\omega_k)\}} \mathrm{E}^{Y_t}_{\Pi}[c \circ p_0]] \tag{14}$$

Nous pouvons faire entrer les deux indicatrices dans la fonction f, et celle-ci est alors de la forme indiquée en (6) : $f(w) = h(\omega_0, \ldots, \omega_k)$, h nulle hors de l'ensemble

$$\{s_{k-1} \leqslant t < s_k\},$$

et pour $\omega_0, \ldots, \omega_{k-1}$ fixés, $h(\omega_0, \ldots, \omega_{k-1}, \bullet)$ mesurable sur $\mathscr{F}_{(t-s_{k-1})^+}$.

Dans ces conditions, nous allons montrer que les deux expressions sous le signe E^x_Π ont même espérance conditionnelle par rapport à $\omega_0, \ldots, \omega_{k-1}$.

Comment calcule-t-on une espérance conditionnelle

$$E_\Pi[u(\omega_0, \ldots, \omega_{k-1}, \omega_k) | \omega_0, \ldots, \omega_{k-1}]?$$

On fixe $\omega_0, \ldots, \omega_{k-1}$ et on forme

$$\int H(\omega_{k-1}, d\omega) u(\omega_0, \ldots, \omega_{k-1}, \omega)$$

c'est-à-dire que l'on applique le noyau $N(\omega_{k-1}, dx)$ à la fonction

$$U(x, \omega_0, \ldots, \omega_{k-1}) = E^x_P[u(\omega_0, \ldots, \omega_{k-1}, \bullet)]$$

Appliquons cela aux formules ci-dessus, en prenant pour « fonction u » $h(\omega_0, \ldots, \omega_k) c(\theta_{t-s_{k-1}} \omega_k)$. D'après la propriété de Markov de P^x, la « fonction U » correspondante vaut aussi

$$(15) \qquad E^x_P[h(\omega_0, \ldots, \omega_{k-1}, .) E_P^{X_{t-s_{k-1}}}[c]]$$

La « fonction u » de (14) vaut quant à elle, en posant

$$C(x) = E^x_\Pi[c \circ p_0] = E^x_P[c]$$

$$(16) \quad E^x_P[h(\omega_0, \ldots, \omega_{k-1}, .) C \circ Y_t(\omega_0, \ldots, \omega_{k-1}, \bullet)]$$

Mais $Y_t = X_{t-s_{k-1}} \circ p_k$ sur l'ensemble où $h \neq 0$, et par conséquent (15) et (16) ont la même valeur. Cela entraîne l'égalité des espérances conditionnelles considérées, et achève la seule démonstration un peu longue de cet exposé.

La propriété de Markov simple étant établie, nous savons que les mesures Π^x sont celles d'un processus de Markov, dont nous désignerons par (Π_t) le semi-groupe. Il nous faut vérifier que celui-ci satisfait aux hypothèses droites, ce qui est facile.

Nous commençons par vérifier que s_0 est un *temps terminal*, c'est-à-dire un temps d'arrêt de la famille $(\mathscr{G}_t)$ tel que

$$s_0 \circ \Theta_t = s_0 - t$$

sur l'ensemble $\{t < s_0\}$; les s_n sont alors les *itérés* de s_0

$$s_{n+1} = s_n + s_0 \circ \Theta_{s_n}$$

et l'on a $\lim_n s_n = \overline{\zeta}$, la durée de vie du processus (Y_t). Pour toute fonction f positive, nulle au point ∂, on a

$$(17) \qquad P_t(x, f) = E_\Pi^x[f \circ Y_t, t < s_0]$$

Le semi-groupe (P_t) est *subordonné* au semi-groupe (Π_t). Soit μ une loi initiale quelconque, et soit λ la mesure bornée

$$\lambda(f) = E_\Pi^\mu[f \circ Y_0 + \Sigma e^{-s_n} f \circ Y_{s_n}]$$

Si f est p-excessive pour le semi-groupe (Π_t), nulle au point ∂, elle est p-excessive pour le semi-groupe (P_t). Elle peut alors être encadrée entre deux fonctions boréliennes g et h telles que $g \leqslant f \leqslant h$, et que l'ensemble $\{g < h\}$ soit λ-polaire pour le semi-groupe (P_t). Elle est d'autre part continue à droite sur les trajectoires de *tout* (3) processus de Markov continu à droite, admettant (P_t) comme semi-groupe de transition. En particulier, pour tout t rationnel, le processus $(f \circ Y_s I_{\{t \leqslant s < t + s_0 \circ \theta_t\}})$ est Π^μ-p.s. continu à droite. Il en résulte que le processus $(f \circ Y_s)$ tout entier est continu à droite Π^μ-p.s., et il est bien connu que cela entraîne la *propriété de Markov forte* du processus (Y_s).

Appliquant alors cette propriété aux instants s_i, on voit que le processus (Y_{s_i+t}) tué à l'instant s_{i+1} admet (P_t) comme semi-groupe de transition. Mais alors l'encadrement ci-dessus montre que l'ensemble $\{g < h\}$ est μ-polaire pour le semi-groupe (Π_t), et donc que la fonction f est presque borélienne pour ce semi-groupe. Autrement dit, (Π_t) satisfait aux hypothèses droites.

Sur la réalisation qu'on a construite, la v.a. s_0 est un *temps terminal*, dont les itérés sont les s_n, $n \geqslant 0$. L'ensemble $M(w)$ formé des points $s_n(w)$ situés dans $]0, \infty[$ est un ensemble homogène régénératif, au sens de Maisonneuve [8], voir aussi Maisonneuve et Meyer [9]. On peut introduire un processus réel positif (α_t), à trajectoires « en dents de scie ascendantes », s'annulant exactement aux points 0, $s_n(w)$, $s_\infty(w)$, et telle que le couple (Y_t, α_t) soit un processus

(3) Voir Meyer [10.2], pp. 64-65.

markovien. L'intérêt de l'introduction d'une telle composante supplémentaire tient au fait que celle-ci garde la mémoire des instants $s_i(w)$, qui ne peuvent se déduire de l'observation de la seule trajectoire $Y(w)$. Le processus en dents de scie ainsi introduit (« processus de l'âge ») ne nous est pas indispensable ici, mais il le sera pour l'étude du problème inverse.

Remarque. — Dans bien des cas, on peut affirmer que E se plonge dans un *compactifié de Martin* $\overline{E}$, possédant les propriétés suivantes : le processus (X_t) est continu à droite pour la topologie induite par $\overline{E}$ sur E, et admet des limites à gauche X_{t-} dans $\overline{E}$; il existe une partie borélienne Φ de $\overline{E}$ (la « frontière ») telle que, pour toute v.a. $\mathscr{F}$-mesurable bornée g sur Ω satisfaisant à

$$g \circ \theta_t(\omega) = g(\omega) \quad \text{pour tout} \quad t < \zeta(\omega)$$

il existe une fonction universellement mesurable bornée G sur la frontière Φ telle que $g = G \circ X_{\zeta-}$ p.s. (si l'on ajoute que $g = 0$ sur $\{\zeta = \infty\}$, on peut même se restreindre à une partie de la frontière, celle que l'on peut atteindre en un temps fini). Dans ces conditions, on voit que pour tout noyau de renaissance $N(\omega, dx)$ il existe un noyau markovien $\overline{N}(y, dx)$ de Φ dans E tel que $N(\omega, dx) = \overline{N}(X_{\zeta-}(\omega), dx)$ p.s.

Le problème inverse.

Considérons maintenant un semi-groupe (Π_t) satisfaisant aux hypothèses droites sur E, et un semi-groupe (P_t) subordonné à (Π_t) [4], tel que tous les points de E soient permanents pour (P_t). Peut-on choisir le noyau de renaissance N, satisfaisant à la définition 1, de telle sorte que le semi-groupe obtenu en ressuscitant (P_t) suivant N soit égal à (Π_t)? Nous ne parviendrons pas à résoudre complètement ce problème, mais nous saurons tout de même en dire quelque chose.

Il nous faudra pour cela utiliser l'exposé V de Maisonneuve et Meyer [9], pp. 249-258, ce qui sera certainement un gros morceau à avaler pour le lecteur. La lecture de ces pages étant

[4] Rappelons ce que cela signifie : les deux semi-groupes admettent ∂ comme « cimetière »; sur $E_0 = E \setminus \{\partial\}$ on a $P_t \leqslant \Pi_t$; la fonction $P_\bullet(x, f)$ est continue à droite pour tout x et toute f continue bornée sur E.

indispensable, nous n'essaierons pas d'en redonner ici les définitions en détails.

D'après la théorie des fonctionnelles multiplicatives, sous la forme définitive que lui a donnée Walsh [13], il existe sur la réalisation continue à droite canonique $(\Omega, \mathscr{F}, \ldots, Y_t \ldots)$ de (Π_t) une fonctionnelle multiplicative parfaite (M_t) telle que l'on ait, pour toute fonction $f \geqslant 0$ nulle au point ∂

$$(18) \qquad P_t(x, f) = E_\Pi^x[f \circ X_t . M_t]$$

Cette fonctionnelle n'est pas uniquement déterminée après l'instant ζ : nous déciderons que si $\zeta(\omega) > 0$, $M_t(\omega) = 0$ pour tout $t \geqslant \zeta(\omega)$, mais que $M_\bullet([\partial]) \equiv 1$. Cela ne change rien à (18), puisque f est nulle en ∂.

Considérons d'autre part l'ensemble W de toutes les applications de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}_+$, continues à droite, « en dents de scie ascendante » (le graphe est formé de morceaux linéaires de pente 1, avec des sauts qui le font retomber en 0). Sur cet espace W, les applications coordonnées seront notées α_t. Nous formons le produit $\overline{\Omega} = \Omega \times W$, nous posons si $\overline{\omega} = (\omega, w)$, $Y_t(\overline{\omega}) = Y_t(\omega)$, $\alpha_t(\overline{\omega}) = \alpha_t(w)$, $\zeta(\overline{\omega}) = \zeta(\omega)$. Nous munissons $\overline{\Omega}$ de la tribu $\overline{\mathscr{F}}^0$: engendrée par toutes les applications Y_s, α_s, et des tribus analogues $\overline{\mathscr{F}}_t^0$. Nous posons aussi

$$S(\overline{\omega}) = S(w) = \inf\{t > 0 : \alpha_t(w) = 0\}$$

un temps terminal sur $\overline{\Omega}$. Et maintenant, on établit l'existence (cf. Maisonneuve-Meyer [1]) d'un semi-groupe de Markov droit unique sur $\overline{E} = E \times \mathbf{R}_+$, réalisable sur $\overline{\Omega}$ par des mesures $\overline{\Pi}^{\overline{x}}$, et possédant les propriétés suivantes :

a) Si $\overline{x} = (x, r)$, le processus (Y_t) à valeurs dans E est, pour la mesure $\overline{\Pi}^{\overline{x}}$, un processus de Markov par rapport à la famille $(\overline{\mathscr{F}}_{t+}^0)$ admettant (Π_t) comme semi-groupe de transition [ainsi, le couple (Y_t, α_t) et le processus (Y_t) à lui tout seul sont tous deux markoviens].

b) Si $\mathscr{F}^0$ est la tribu engendrée sur $\overline{\Omega}$ par les v.a. Y_t, on a pour toute loi $\overline{\Pi}^{\overline{x}}$

$$(19) \qquad \overline{\Pi}^{\overline{x}}\{S \circ \theta_t > a \mid \mathscr{F}^0 \vee \overline{\mathscr{F}}_{t+}^0\} = M_a(\theta_t\omega) \text{ p.s.}$$

Une conséquence : le processus (Y_t) tué au temps terminal S est un processus de Markov par rapport à la famille $(\mathscr{F}^0_{t+})$, admettant (P_t) comme semi-groupe de transition.

Nous utilisons maintenant les résultats particuliers relatifs à (P_t) et à (M_t). Le fait que $M_0 = 1$ P^x-p.s. pour tout $x \in E$ — y compris le point ∂ — entraîne que, pour tout temps d'arrêt T, d'après (19), $S \circ \theta_T > 0$ p.s. Il en résulte que l'ensemble

$$(20) \qquad M(\overline{\omega}) = \{t > 0 : \alpha_t(\overline{\omega}) = 0\}$$

est p.s. un ensemble bien-ordonné. Le fait que $M_\zeta(\omega) = 0$ si $\zeta(\omega) > 0$ entraîne que le point $\zeta(\omega)$ appartient p.s. à $M(\overline{\omega})$ si $\zeta(\omega) > 0$. Le fait que $M_\bullet([\partial]) = 1$ entraîne que $M(\overline{\omega})$ est p.s. vide si $\omega = [\partial]$.

Pour la commodité du raisonnement, nous restreindrons un peu la réalisation, en nous bornant à considérer les fonctions en dents de scie admettant un ensemble de zéros bien-ordonné. Nous désignerons alors par S_n les itérés du temps terminal S, par S_∞ leur limite.

Construction d'un « noyau de renaissance ».

Nous disons qu'une fonction sur $\overline{E}$ « dépend seulement de x » si elle est de la forme $(x, r) \longmapsto f(x)$, où f est une fonction sur E. En fait, nous identifierons toujours la fonction sur $\overline{E}$ $(x, r) \longmapsto f(x)$ et la fonction f sur E, et nous les désignerons par la même notation.

Par exemple, si f ne dépend que de x, la fonction sur $\overline{E}$

$$\overline{E}^\bullet[e^{-pS} f \circ Y_S]$$

ne dépend que de x, car

$$\overline{E}^{x,r}[e^{-pS} f \circ Y_S] = E^x\Big[-\int e^{-pS} f \circ Y_s \, dM_s\Big].$$

Par itération transfinie, on en déduit que la fonction

$$\overline{E}^\bullet\Big[\sum_{s \in M} e^{-ps} f \circ Y_s\Big]$$

ne dépend que de x. Introduisons la fonction $h = E^\bullet[e^{-S}]$

sur E et soit

$$T^k = \inf \{t > 0 : \alpha_t = 0, h \circ Y_t \leqslant 1 - 1/k\}$$

un temps terminal sur $\overline{\Omega}$, dont nous notons T_n^k les itérés. Il est facile de voir (cf. par exemple le vol. I du séminaire, p. 145) que

$$\overline{E}^\bullet \left[\sum_n e^{-T_n^k} \right] \leqslant \frac{1}{1-(1-1/k)} = k$$

Il en résulte d'abord que les T_n^k tendent vers $+\infty$ avec n, et que l'ensemble M est la réunion de tous les graphes de tous les temps d'arrêt T_n^k ($k \in \mathbf{N}$, $n \in \mathbf{N}$), h étant partout < 1. Ensuite, que si les constantes $c_k > 0$ sont bien choisies, la fonction strictement positive sur E

$$g = \sum_{k>1} c_k I_{\{h \leqslant 1-1/k\}} \tag{21}$$

est telle que la fonction suivante, qui dépend seulement de x

$$\overline{E}^\bullet \left[\sum_{t \in M} g \circ Y_t e^{-t} \right] \tag{22}$$

soit *bornée* sur $\overline{E}$. Nous pouvons alors définir la fonctionnelle additive suivante, pour toute f positive sur E

$$A_t^f = \sum_{s \in M, s \leqslant t} (fg) \circ Y_t \tag{23}$$

Lorsque $f \leqslant 1$, la propriété (22) nous dit que A^f admet un 1-potentiel borné, donc une *projection duale prévisible* sur la famille $(\overline{\mathscr{F}}_t)$, qui est une fonctionnelle additive prévisible $\tilde{A}^f$ admettant le même 1-potentiel que A^f. Mais ce 1-potentiel ne dépend que de x, et il existe donc une fonctionnelle additive prévisible, ne dépendant que de ω, qui l'engendre. D'après le théorème d'unicité, cette fonctionnelle est indistinguable de $\tilde{A}^f$, et $\tilde{A}^f$ ne dépend que de ω, et est aussi la projection duale prévisible de A^f par rapport à la famille $(\mathscr{F}_t)$.

Supposons toujours $f \leqslant 1$. Comme on a $A^f \leqslant A^1$, on a aussi $\tilde{A}^f \leqslant \tilde{A}^1$. Je dis qu'il existe un processus $(L_t^f)_{t>0}$ sur Ω, homogène et prévisible par rapport à toute famille $(\mathscr{F}_t^\mu)$, et tel que

$$d\tilde{A}_t^f = L_t^f . d\tilde{A}_t^1.$$

Séparons $\tilde{A}^f$ en sa partie continue $\tilde{A}^{fc}$ et sa partie discontinue $\tilde{A}^{fd}$. D'après le théorème de Motoo, il existe une fonction φ^f sur E telle que $d\tilde{A}_t^{fc} = \varphi^f \circ Y_t \, d\tilde{A}_t^{1c}$. Par conséquent on a une densité

$$(24) \quad d\tilde{A}_t^f = (\varphi^f \circ Y_t I_{\{\Delta\tilde{A}_t^1=0\}} + \frac{\Delta\tilde{A}_t^f}{\Delta\tilde{A}_t^1} - I_{\{\Delta\tilde{A}_t^1\neq 0\}})\, d\tilde{A}_t^1 = L_t^f . d\tilde{A}^1$$

Reste à donner une expression tout à fait précise des sauts. Soit J le 1-potentiel de $\tilde{A}^1$. Choisissons une compactification de Ray de E relativement à (Π_t), et restreignons Ω à l'ensemble des trajectoires admettant des limites à gauche Y_{t-} dans cette compactification. Il est connu que $\tilde{A}^1$ n'a que des sauts prévisibles, et qu'en un temps d'arrêt prévisible T son saut est égal à

$$(J \circ Y)_{T-} - E[J \circ Y_T | \mathscr{F}_{T-}] = (J \circ Y)_{T-} - \Pi_0 J \circ Y_{T-}.$$

D'où un moyen tout à fait explicite de définir le processus $\Delta\tilde{A}_t^1$ dans la parenthèse ci-dessus

$$\Delta\tilde{A}_t^1 = \Big|\limsup_{s \uparrow\uparrow t} \text{ess } J \circ Y_s - \Pi_0 J \circ Y_{t-}\Big| \quad (^5)$$

et de même pour $\Delta\tilde{A}_t^f$. Les processus ainsi construits sont homogènes sans aucun ensemble exceptionnel, et satisfont à l'identité $L_t^f \circ k_t = L_t^f$ pour $t > 0$, où k_t est l'opérateur de meurtre sur Ω, mais ils ne sont qu'indistinguables de processus mesurables. Cela n'est pas gênant.

Et maintenant nous pouvons — sans changer de notations — utiliser un procédé bien connu de régularisation (Getoor-Sharpe [3]) de telle sorte que les applications $f \longmapsto L_t^f(\omega)$ soient toutes des mesures positives, de masse 1 ou 0.

Revenons à la définition de la projection duale prévisible : si (c_t) est un processus positif, prévisible par rapport à toute famille $(\overline{\mathscr{F}}_t^\mu)$, on a pour toute f comprise entre 0 et 1

$$(25) \quad \overline{E}^\bullet\Big[\sum_{t\in M} c_t . (fg) \circ Y_t\Big] = \overline{E}^\bullet\Big[\int_0^\infty c_t \, dA_t^f\Big]$$
$$= \overline{E}^\bullet\Big[\int_0^\infty c_t \, d\tilde{A}_t^f\Big] = \overline{E}^\bullet\Big[\int_0^\infty c_t L_t^f \, d\tilde{A}_t^1\Big]$$

(5) lim sup ess est une lim sup dans la « topologie essentielle » de Walsh [13]. On peut aussi utiliser des lim sup ordinaires, mais la mesurabilité est alors un peu plus difficile à établir.

Remplaçons c par $cI_{]0,S]}$, qui est encore prévisible

$$\overline{E}^\bullet[c_S.(fg)\circ Y_S.I_{\{S<\infty\}}] = \overline{E}^\bullet\left[\int_{]0,S]} c_t L_t^f\, d\tilde{A}_t^1\right]$$
$$= \overline{E}^\bullet\left[\int_{]0,S]} c_t L_t^f\, d\tilde{A}_t^1\right] = \overline{E}^\bullet[c_S.L_S^f.g\circ Y_S.I_{\{S<\infty\}}].$$

Une variable aléatoire est $\overline{\mathscr{F}}_{S-}$-mesurable si et seulement si elle est de la forme c_S, où (c_t) est prévisible. Prenant $f = 1/g$ nous obtenons

$$\overline{E}^\bullet[c_S I_{\{S<\infty\}}] = \overline{E}^\bullet[c_S L_S^{1/g} g\circ Y_S I_{\{S<\infty\}}]$$

d'où l'on tire

$$\overline{E}^\bullet[g\circ Y_S I_{\{S<\infty\}}|\overline{\mathscr{F}}_{S-}] = 1/L_S^{1/g}$$

Comme g est bornée et partout > 0, il en résulte que $L_S^{1/g}$ est p.s. finie et non nulle sur $\{S < \infty\}$. Posons ensuite, avec la convention $0/0 = 0$

$$N_t^f(\omega) = L_t^{f/g}(\omega)/L_t^{1/g}(\omega).$$

Un calcul tout analogue au précédent nous montre que

$$\overline{E}^\bullet[f\circ Y_S|\overline{\mathscr{F}}_{S-}] = N_{S(\overline{\omega})}^f(\omega) \quad \text{sur} \quad \{S < \infty\}$$

Pour finir, posons

$$\text{(26)}\qquad \begin{aligned} N(\omega, f) &= N_{\zeta(\omega)}^f(\omega) \quad \text{si} \quad 0 < \zeta(\omega) < \infty \\ &= f(\partial) \quad \text{si} \quad \zeta(\omega) = +\infty \quad \text{ou} \quad \omega = [\partial] \end{aligned}$$

Il résulte de la relation $L_t^h = L_t^h\circ k_t$ que $L_t^h = L_\zeta^h\circ k_t$ sur $\{t \leqslant \zeta\}$, donc que $N_t^f = N^f\circ k_t$ sur $\{t \leqslant \zeta\}$. D'autre part, l'homogénéité de L_t^f entraîne que N est un noyau de renaissance — à cela près que pour certains ω la masse de $N(\omega, \bullet)$ peut être 0; qu'à cela ne tienne : pour ces points-là nous remplacerons $N(\omega, \bullet)$ par ε_∂, et nous aurons un vrai noyau de renaissance.

Le résultat obtenu mérite d'être glorifié en un énoncé formel :

Proposition 1. — *Il existe un noyau de renaissance* N *sur* Ω *tel que*

$$\text{(27)}\qquad \overline{E}^\bullet[f\circ Y_S I_{\{S<\infty\}}|\overline{\mathscr{F}}_{S-}] = N(k_{S(\overline{\omega})}\omega, f) I_{\{S<\infty\}}\ p.s.$$

En effet, nous avons $S \leqslant \zeta$ sur $\{S < \infty\}$ p.s.. Ce résultat est en fait un théorème de « conditionnement par rapport au passé strict » du type considéré par Weil [14] : le fait que N soit un noyau de renaissance signifie que le « présent » Y_S — donc aussi le futur — et le « passé strict » $\overline{\mathscr{F}}_{S-}$ sont conditionnellement indépendants connaissant le « passé strict instantané », le germe de trajectoire à gauche de S, mais ici ce germe n'est pas résumé dans la connaissance de Y_{S-} ([6]). Il faut remarquer que ce résultat est dual de celui de Walsh sur la propriété de Markov forte en un temps coterminal (Meyer, Smythe et Walsh [11]).

Le résultat précédent peut s'étendre aux *itérés* de S. Nous avons dit en effet que l'ensemble M était (pouvait être supposé) bien ordonné. Nous pouvons donc énumérer les points de M en une suite transfinie S_α (telle que, pour tout ω, $S_\alpha(\omega) = +\infty$ pour α assez grand, et pour toute loi initiale μ, il existe un ordinal α tel que $S_\alpha = +\infty$ $\overline{\Pi}^\mu$-p.s.). Maintenant, au lieu de travailler sur un processus de la forme $cI_{]0,S]}$, comme nous l'avons fait dans le calcul précédent, nous travaillons

— si α admet un précédent $\alpha - 1$, sur $cI_{]S_{\alpha-1}, S_\alpha]}$;

— si α est de seconde espèce, sur $cI_{[S_\alpha]}$ et nous obtenons alors que pour tout ordinal α, la formule (27) est vraie avec S_α au lieu de S.

Renaissance de (P_t) *suivant* N.

Nous allons donner ici un résultat concernant la renaissance « ordinaire » de (P_t) suivant N, telle qu'elle a été définie plus haut. Ce résultat n'est pas satisfaisant, parce que nous ne savons pas dire quand le semi-groupe « ressuscité » est égal à (Π_t). Après quoi, nous montrerons rapidement que l'on obtient toujours (Π_t) à partir de (P_t) par le procédé de renaissance « transfinie » donné dans Meyer [10.2].

Nous disposons de deux semi-groupes : (Π_t) sur E, avec son prolongement $(\overline{\Pi}_t)$ sur $\overline{E}$, dont nous notons (U_p), $(\overline{U}_p)$ les résolvantes, et (P_t) sur E, avec son prolongement $(\overline{P}_t)$ sur $\overline{E}$, dont nous notons (V_p), $(\overline{V}_p)$ les résolvantes. Nous

([6]) Ou tout au moins il faut bien choisir les limites à gauche (compactification de Martin).

introduisons un *troisième* semi-groupe sur $\overline{E}$, que nous noterons $(\overline{Q}_t)$, associé au temps terminal S_∞ :

$$(27) \qquad \overline{Q}_t(\overline{x}, f) = \overline{E}^{\overline{x}}[f \circ Y_t I_{\{t < S_\infty\}}]$$

Quel est le potentiel de ce semi-groupe? Si nous introduisons les noyaux

$$(28) \qquad \overline{\Pi}{}^p_S(x, f) = \overline{E}^{\overline{x}}[e^{-pS} f \circ Y_S]$$

la propriété de Markov forte entraîne que la résolvante $(\overline{W}_p)$ de $(\overline{Q}_t)$ est donnée par

$$(29) \qquad \overline{W}_p = (I + P^p_S + (P^p_S)^2 + \cdots)\overline{V}_p$$

Mais si f ne dépend que de x, la valeur de $\overline{\Pi}{}^p_S f$ au point (x, r) est $E^x\left[\int_0^\infty - f \circ X_S e^{-ps}\, dM_s\right]$, et ne dépend que de x. Comme $\overline{V}_p f$ ne dépend que de x, la formule (29) montre qu'il en est de même de $\overline{W}_p f$. En inversant la transformation de Laplace, on voit qu'il en est de même de $\overline{Q}_t f$. Nous pouvons donc définir *sur* E le semi-groupe projection Q_t, et sa résolvante W_p. Et nous avons

PROPOSITION 2. — *Le semi-groupe obtenu en ressuscitant* (P_t) *au moyen du noyau de renaissance* N *est égal à* (Q_t).

Démonstration. — Notons (Q'_t) le semi-groupe obtenu en ressuscitant (P_t) suivant N, et (W'_p) sa résolvante. En examinant la construction du semi-groupe ressuscité, on verra que

$$(30) \qquad W'_p = (I + H_p + H_p^2 + \cdots)V_p$$

où H_p est le noyau

$$(31) \qquad H_p f = E^\bullet_P[e^{-p\zeta(\omega)} N(\omega, f)]$$

Or pour toute fonction φ sur Ω, positive, nulle en $[\partial]$, on a

$$(32) \qquad E^x_P[\varphi] = \overline{E}{}^{x,0}_\Pi[\varphi \circ k_S]$$

Ainsi, si f est une fonction sur E

$$H_p f = \overline{E}{}^\bullet[e^{-pS(\overline{\omega})} N(k_{S(\overline{\omega})}\omega, f)]$$

Comparons ceci avec (27) : il vient

$$(33) \qquad H_p f = E^{\bullet}[e^{-pS} f \circ Y_S] = P_S^p f$$

Si l'on compare alors (29) et (30), on voit que $W_p = W'_p$, et la proposition est établie.

Nous allons nous occuper maintenant du semi-groupe construit à partir de (P_t), par renaissance au moyen N poursuivie *transfiniment* (7). Notons le (Q_t^+), et (U_p^+) la résolvante correspondante. Dans ce cas, l'espace de base est le produit $W^+ = \Omega^{O'}$, où $\mathbf{O}'$ est l'ensemble des ordinaux de première espèce, et si $w \in W^+ = (\omega_\alpha)_{\alpha \in O'}$, on pose pour tout ordinal β $s_\beta(w) = \sum_{\alpha \in O', \alpha \leqslant \beta} \zeta(\omega_\alpha)$, et on définit les variables aléatoires Y_t^+, les tribus, les mesures comme on l'a fait au début, en employant les s_β au lieu des s_n. Dans ces conditions, on peut introduire les opérateurs potentiels partiels

$$U_{p,\beta}^+(x, f) = E_{Q^+}^x \left[\int_0^{s_\beta} e^{-ps} f \circ Y_s^+ \, ds \right]$$

qui tendent en croissant, lorsque β augmente indéfiniment, vers l'opérateur potentiel U_p^+ de (Q_t^+). D'autre part, un argument de récurrence transfinie reposant sur l'extension de la formule (27) aux itérés transfinis S_α du temps terminal S montre que

$$U_{p,\beta}^+ f = \overline{E}^{\bullet} \left[\int_0^{S_\beta} e^{-ps} f \circ Y_s \, ds \right]$$

(fonction « ne dépendant que de x ») et en faisant croître indéfiniment β on trouve que $U_p^+ = U_p$, d'où l'identité des semi-groupes (Q_t^+) et (Π_t).

2. Recollement de deux processus de Markov.

Nous allons ici démontrer une variante du théorème de Courrège et Priouret sur les recollements, que nous ramènerons au théorème sur les renaissances.

Nous considérons un espace d'états E, borélien dans un espace métrique compact (ici, le point ∂ n'est pas considéré comme élément de E). E est réunion de deux ouverts U et V. Sur U on se donne un semi-groupe sous-markovien droit (P_t), sur V un semi-groupe sous-markovien droit (Q_t).

(7) Meyer [10.2], pp. 96-98.

Nous pouvons considérer (P_t) et (Q_t) comme des semi-groupes sur E, tués respectivement aux temps $S = D_{U^c}$, $T = D_{V^c}$. Nous ferons sur ces deux semi-groupes l'hypothèse de comptabilité.

(1) *On obtient le même semi-groupe* (R_t) *en tuant* (P_t) *et* (Q_t) *au temps terminal* $S \wedge T$. *De plus, il existe un même noyau de renaissance* N *tel que, pour* $x \in U \cap V$, *et* f *positive nulle en* ∂

$$E_P^x[f \circ X_T | \mathscr{F}_{T-}] = N(k_{T}\bullet, f);$$
$$E_Q^x[f \circ X_S | \mathscr{F}_{S-}] = N(k_{S}\bullet, f).$$

Nous allons construire d'abord un processus sur la somme $\overline{E} = E_1 + E_2 = E \times \{1, 2\}$ de deux copies de E, à laquelle nous adjoignons le même point ∂ qu'à E.

Nous construisons le système $(\overline{\Omega}, \overline{\mathscr{F}}, \overline{X}_t, \ldots)$ de la réalisation continue à droite canonique à valeurs dans $\overline{E}$. Nous notons p la projection de $\overline{E}$ sur E, et aussi les applications de $\overline{E} \cup \{\partial\}$ sur $E \cup \{\partial\}$, de $\overline{\Omega}$ sur Ω, qui s'en déduisent de manière naturelle. Nous écrirons $p(\overline{\omega}) = \omega$, et nous noterons souvent par la même lettre une application f sur E ou Ω, et l'application $f \circ p$ sur $\overline{E}$ ou $\overline{\Omega}$. Si $\omega \in \Omega$, nous noterons $(\omega, 1)$ l'élément de $\overline{\Omega}$ défini par

$$\overline{X}_t(\omega, 1)) = (\overline{X}_t(\omega), 1),$$

et $(\omega, 2)$ se définit de même. Nous noterons J sur $\overline{\Omega}$ le « premier instant de changement de face », c'est-à-dire

$$J(\overline{\omega}) = \zeta(\overline{\omega}) \wedge \inf \{t \geqslant 0 : \ \overline{X}_t(\overline{\omega}) \in E_2 \quad \text{si} \quad \overline{X}_0(\overline{\omega}) \in E_1,$$

ou $\overline{X}_t(\overline{\omega}) \in E_1$ si $\overline{X}_0(\overline{\omega}) \in E_2\}$.

Nous construisons des mesures $\overline{H}^{\overline{x}}$ sur Ω, de la manière suivantes :

— Si $\overline{x} = (x, 1)$, avec $x \in U$, $\overline{H}^{\overline{x}}$ est l'image de P^x par $\omega \longmapsto (\omega, 1)$.

— Si $\overline{x} = (x, 2)$, avec $x \in V$, $\overline{H}^{\overline{x}}$ est l'image de Q^x par $\omega \longmapsto (\omega, 2)$.

— Si $\overline{x} = (x, 1)$, avec $x \notin U$, alors on a $x \in V$, et dans ce cas on pose $\overline{H}^{(x,1)} = \overline{H}^{(x,2)}$, de sorte que $(x, 1)$ est un point de branchement, avec saut instantané de la face 1 à la face 2. De même, si $\bar{x} = (x, 2)$ avec $x \notin \mathrm{V}$, on sautera en $(x, 1)$.

Il est vraiment immédiat de vérifier que l'on obtient ainsi un processus de Markov sur $\overline{\mathrm{E}}$: on a réalisé l'un à côté de l'autre (P_t) sur E_1, et (Q_t) sur E_2. Nous construisons maintenant un noyau de renaissance $\overline{\mathrm{N}}$.

Soit $\bar{\omega} \in \overline{\Omega}$, et soit $\omega = p(\bar{\omega})$. Si à gauche de $\zeta(\bar{\omega})$ la trajectoire oscille entre les deux faces, nous ne la ressuscitons pas : $\overline{\mathrm{N}}(\omega, .) = \varepsilon_\partial$. Sinon, il existe un intervalle non vide $[h, \zeta(\bar{\omega})[$ sur lequel $\bar{\omega}$ reste, par exemple, dans E_1, et nous posons

$$(2) \qquad \overline{\mathrm{N}}(\bar{\omega}, d\bar{x}) = \mathrm{N}(\omega, dx_2)$$

où la notation dx_2 signifie que la mesure est l'image de $\mathrm{N}(\omega, dx)$ par $x \longmapsto (x, 2)$. De même, si $\bar{\omega}$ restait dans E_2, on prendrait $\mathrm{N}(\omega, dx_1)$. On change de face à chaque résurrection. $\overline{\mathrm{N}}$ est bien un noyau de renaissance.

Nous appliquons la théorie du § 1 (il n'y avait pas de points de branchement au § 1, mais cela n'a vraiment aucune importance), et nous construisons ainsi des mesures $\overline{\mathrm{P}}^{\bar{x}}$ sur $\overline{\Omega}$. Nous démontrons

Théorème 2. — *Pour tout* $x \in \mathrm{E}$, *les mesures* $\overline{\mathrm{P}}^{x,1}$ *et* $\overline{\mathrm{P}}^{x,2}$ *ont même image* Π^x *sur* Ω. *Les mesures* Π^x *définissent sur* Ω *un processus de Markov droit, admettant* (P_t) *comme semi-groupe tué à* S, (Q_t) *comme semi-groupe tué à* T, *et tel que pour* $f \geqslant 0$, *nulle en* ∂

$$\mathrm{E}^x_\Pi[f \circ \mathrm{X}_\mathrm{S} | \mathscr{F}_{\mathrm{S}-}] = \mathrm{N}(k_\mathrm{S} \bullet, f) \quad si \quad x \in \mathrm{U},$$
$$\mathrm{E}^x_\Pi[f \circ \mathrm{X}_\mathrm{T} | \mathscr{F}_{\mathrm{T}-}] = \mathrm{N}(k_\mathrm{T} \bullet, f) \quad si \quad x \in \mathrm{V}.$$

Démonstration. — Définissons sur Ω un temps d'arrêt L de la manière suivante

(3) si $\mathrm{X}_0(\omega) \in \mathrm{U} \setminus \mathrm{V}$, $\mathrm{L}(\omega) = \mathrm{S}(\omega)$; si $\mathrm{X}_0(\omega) \in \mathrm{V} \setminus \mathrm{U}$, $\mathrm{L}(\omega) = \mathrm{T}(\omega)$; si $\mathrm{X}_0(\omega) \in \mathrm{U} \cap \mathrm{V}$, $\mathrm{L}(\omega) = \mathrm{S}(\omega) \wedge \mathrm{T}(\omega)$.

Nous considérerons aussi $\mathrm{S}, \mathrm{T}, \mathrm{L}$ comme des temps d'arrêt sur $\overline{\Omega}$. Nous désirons montrer que pour toute fonction positive φ sur Ω, $\mathscr{F}^0$-mesurable et nulle en ∂, on a

$$(4) \qquad \overline{\mathrm{E}}^{x,1}[\varphi] = \overline{\mathrm{E}}^{x,2}[\varphi] \text{ pour tout } x \in \mathrm{E}.$$

Un argument familier de classes monotones montre qu'il suffit de montrer cela pour une fonction φ de la forme

$$a \circ k_L . b \circ \theta_L,$$

où a et b sont $\mathscr{F}^o$-mesurables positives [8] sur Ω. D'autre part (4) est évidente si $x \notin U \cap V$. Posons $B(y) = \overline{E}^{y,1}[b]$ si $y \in U \setminus V$, $\overline{E}^{y,2}[b]$ si $y \in V \setminus U$, et 0 si $y \in U \cap V$. Nous avons $\overline{E}[b \circ \theta_L | \overline{\mathscr{F}}_L] = \overline{E}^{\overline{X}_L}[b]$, mais si $L = S$ nous avons $X_L \notin U$, si $L = T$ nous avons $X_L \notin V$, donc X_L n'appartient jamais à $U \cap V$. Supposons par exemple que $X_L \notin U$; alors $\overline{X}_L = (X_L, 2)$, $(X_L, 1)$ est un point de branchement, et $\overline{E}^{\overline{X}_L}[b] = B(X_L)$. Ainsi

$$\overline{E}[b \circ \theta_L | \overline{\mathscr{F}}_L] = B \circ X_L.$$

Nous remarquons ensuite que $a \circ k_L$ est $\overline{\mathscr{F}}_{L-}$-mesurable. Calculons donc $\overline{E}^{x,1}[B \circ X_L | \overline{\mathscr{F}}_{L-}]$, avec $x \in U \cap V$. Nous avons $L \leqslant J$, donc

$$(5) \quad \overline{E}^{x,1}[B \circ X_L | \overline{\mathscr{F}}_{L-}] = \overline{E}^{x,1}[B \circ X_J I_{\{L=J\}} | \overline{\mathscr{F}}_{J-} | \overline{\mathscr{F}}_{L-}] + \overline{E}^{x,1}[B \circ X_L I_{\{L<J\}} | \overline{\mathscr{F}}_{L-}]$$

Commençons par le dernier terme. Nous avons $\overline{P}^{x,1}$-p.s. $L = S \wedge T$, $J = S$. Donc $L < J$ équivaut à $T < S$. Mais d'autre part on a $X_S \in U^c$, $X_T \in V^c$, et la relation $S = T$ entraîne donc $S = T \geqslant \zeta$. Comme B est nulle en ∂, nous pouvons remplacer $\{T < S\}$ par

$$\{T \leqslant S\} = \{S < T\}^c = \{S < L\}^c \in \mathscr{F}_{L-}.$$

D'autre part, par définition des lois $\overline{P}^{x,1}$, le processus tué à la première renaissance J en partant de $(x, 1)$ a même loi qu'une copie sur E_1 d'un processus sur E obéissant à (P_t). Ainsi

$$(6) \quad \overline{E}^{x,1}[B \circ X_L I_{\{L<J\}} | \mathscr{F}_{L-}] = E^x_P[B \circ X_T | \mathscr{F}_{T-}] I_{\{T \leqslant J\}}$$
$$= N(k_T\omega, B) I_{\{T \leqslant J\}}$$
$$= N(k_T\omega, B) I_{\{T < S\}}(\omega)$$

puisque $\qquad N([\partial], B) = 0.$

Passons au premier terme au second membre de (5). Nous

[8] Le cas où $\varphi = 1$ étant évident, nous pouvons supposer a et b nulles en $[\partial]$.

pouvons remplacer $\{L = J\} = \{T \geqslant S\}$ par

$$\{T < S\}^c = \{T < L\}^c \in \mathscr{F}_{L-} \subset \mathscr{F}_{J-}.$$

Alors la première espérance conditionnelle s'écrit, par définition de la renaissance à J

$$(7) \quad I_{\{T \geqslant S\}} \overline{E}^{x,1}[B \circ X_J | \overline{\mathscr{F}}_{J-}] = I_{\{T \geqslant S\}} \int N(k_J \overline{\omega}, dx_2)\, B(x_2)$$
$$= I_{\{T \geqslant S\}} N(k_S \omega, B)$$
$$= I_{\{T \geqslant S\}} N(k_S \omega, B)$$

Ceci vaut aussi $I_{\{T < L\}}.c.N(k_L \omega, B)$, qui est $\mathscr{F}_{L-}$-mesurable, et il est inutile de reconditionner par $\overline{\mathscr{F}}_{L-}$. Regroupant (6) et (7) il vient simplement

$$(8) \qquad \overline{E}^{x,1}[B \circ X_L | \overline{\mathscr{F}}_{L-}] = N(k_L \omega, B)$$

et par conséquent

$$(9) \qquad \overline{E}^{x,1}[a \circ k_L . b \circ \theta_L] = \overline{E}^{x,1}[a \circ k_L N(k_L ., B)]$$

On a évidemment le même calcul pour $\overline{E}^{x,2}$, et pour finir il suffit de vérifier que pour toute fonction φ sur Ω, positive $\mathscr{F}^0$-mesurable

$$(10) \quad \overline{E}^{x,1}[\varphi \circ k_L] = \overline{E}^{x,2}[\varphi \circ k_L] \quad \text{pour tout} \quad x \in U \cap V$$

Mais ceci est évident : les deux membres valent $E^x_R[\varphi]$, (R_t) étant le semi-groupe tué de (P_t) et (Q_t) à $S \wedge T$.

Nous avons établi (4) : c'est la partie délicate de la démonstration, et nous laisserons le reste au lecteur.

3. Mélanges de processus de Markov.

Ici nous avons très peu à dire, la relation entre les renaissances et les mélanges ayant été découverte par Heath, reprise par Griego-Moncayo. Nous nous donnons n espaces d'états $E_1, \ldots, E_n$, munis de n semi-groupes droits $(P^1_t), \ldots, (P^n_t)$. Un même ∂ est adjoint à tous ces espaces. Nous désignons par E la somme des E_i, à laquelle nous adjoignons ∂. Nous construisons les espaces Ω_i, Ω, des réalisations canoniques à valeurs dans E_i, E. Nous nous donnons pour chaque couple (i, j), $i \neq j$, un noyau de renaissance $N_{ij}(\omega_i, dx_j)$ de Ω_i dans $E_j \cup \{\partial\}$, et aussi des coefficients positifs $\lambda_{ij} (i \neq j)$ tels que $\sum_j \lambda_{ij} = 1$.

Nous munissons Ω de mesures P^x, $x \in E$, de la manière suivante : si $x \in E_i$, nous prenons la mesure P^x sur Ω_i, et nous la considérons comme une mesure sur Ω portée par Ω_i. Ainsi nous réalisons simultanément les semi-groupes sur E, les uns à côté des autres.

Nous définissons un noyau de renaissance sur Ω : soit $\omega \in \Omega$. Si juste avant l'instant $\zeta(\omega)$ la trajectoire a oscillé une infinité de fois entre les E_i, nous ne la ressuscitons pas : $N(\omega, \bullet) = \varepsilon_\delta$. Sinon, il existe un intervalle $[h, \zeta(\omega)[$ sur lequel ω est à valeurs dans E_i, et nous posons alors

$$N(\omega, dx) = \sum_{j \neq i} \lambda_{ij} N_{ij}(\theta_h \omega, dx_j)$$

Cela ne dépend pas de h, et il est clair que c'est un noyau de renaissance sur Ω. D'où la possibilité de ressusciter les lois P^x suivant N.

On obtient un bon exemple de ce genre de construction de la manière suivante : tous les E_i sont des copies d'un même espace $\mathbf{E}$, de sorte que $E = \mathbf{E} \times \{1, 2, \ldots, n\}$. Sur $\mathbf{E}$ on se donne n semi-groupes markoviens (Q_t^i), et on pose sur E_i, identifié à $\mathbf{E}$ pour un instant par la bijection $x \rightarrow (x, i)$

$$P_t^i(x, dy) = e^{-q_i t} Q_t^i(x, dy) \quad (0 < q_i < \infty)$$

D'autre part, nous définissons $N_{ij}(\omega_i, dx_j)$ de la manière suivante : si ω_i admet une limite à gauche à l'instant $\zeta(\omega_i)$, égale à (x, i), nous posons

$$N_{ij}(\omega_i, \bullet) = \varepsilon_{x, j}.$$

Cette situation a lieu pour presque tout ω_i, car la durée de vie ζ a une loi exponentielle, qui ne charge pas l'ensemble dénombrable des t où ω_i n'admet pas de limite à gauche. Si la limite à gauche n'existe pas, nous posons $N_{ij}(\omega_i, 0) = \varepsilon_\partial$. Le processus construit sur E au moyen du procédé de renaissance décrit plus haut est alors un « mélange » des processus (X_t^i) correspondant aux (Q_t^i) — mais il faut bien noter que c'est un processus sur la somme E, non sur $\mathbf{E}$.

4. Ralentissement d'un processus de Ray.

Nous arrivons maintenant à l'idée qui est à l'origine de cet exposé : nous considérons sur un espace métrique compact E une résolvante de Ray sousmarkovienne (U_p), nous adjoignons à E un point ∂ isolé, nous désignons par B l'ensemble des points de branchements, nous construisons le semi-groupe de Ray droit (P_t) admettant (U_p) comme résolvante, et le processus (X_t) correspondant. Notre but consiste à *ralentir* le branchement aux points de B, de telle sorte que le processus (X_t) — tout en cessant d'être un processus de Ray sur E-devienne un *processus de Hunt* sur E. Il apparaîtra ainsi que tout processus de Markov droit s'obtient en *accélérant* un processus de Hunt défini sur un compactifié de Ray. C'est sans doute inutile, mais plutôt agréable.

Nous désignons par Ω l'ensemble des applications de $\mathbf{R}_+$ dans $E \cup \{\partial\}$, continues à droite sur $]0, \infty[$, admettant des limites à gauche sur $]0, \infty[$ et une limite à droite en 0, à durée de vie, avec les notations habituelles X_t, X_{0+}, $\mathcal{F}_t^0$... Nous munissons Ω des mesures P^x, $x \in E$.

Soit g une fonction p-surmédiane continue. La fonction g-$P_0 g$ est possitive, nulle hors de B, et l'on sait que

$$\text{(1)} \qquad E^\bullet\Big[\sum_s (g - P_0 g) \circ X_{s-} e^{-ps}\Big] \leqslant g.$$

Par conséquent, la fonction $E^\bullet\Big[\sum_{s \leqslant 1} (g - P_0 g) \circ X_{s-}\Big]$ est bornée. Choisissons une suite (g_n) de fonctions p_n-surmédianes continues, bornées par 1, telles que $B = \bigcup_n \{g_n > P_0 g_n\}$, et soit $h = \sum_n a_n g_n$, où les constantes a_n sont toutes > 0, telles que $\sum_n a_n = 1$ et que la fonction

$$E^\bullet\Big[\sum_{s \leqslant 1} (h - P_0 h) \circ X_{s-}\Big]$$

soit bornée. La fonction $f = h - P_0 h$ possède les propriétés suivantes :

(2) Elle est borélienne, on a $B = \{f > 0\}$, et $0 \leqslant f \leqslant 1$. La fonction $E^\bullet\Big[\sum_{s \leqslant 1} f \circ X_{s-}\Big]$ est bornée (donc aussi les fonctions $E^\bullet\Big[\sum_s e^{-ps} f \circ X_{s-}\Big]$ sont bornées).

La fonction f va jouer un grand rôle dans ce qui suit.

Nous conviendrons de poser $X_{0-}(\omega) = X_0(\omega)$, et, pour tout ω

$$(3) \quad M(\omega) = \{t \geqslant 0 : X_{t-}(\omega) \in B\}, \qquad M = \{(t, \omega) : t \in M(\omega)\}$$

Il est facile de représenter M comme une réunion de graphes de temps d'arrêt T_n disjoints : *restreignons* une fois pour toutes Ω aux ω pour lesquels la somme

$$\sum_s e^{-s} f \circ X_{s-}(\omega)$$

est finie. Il n'y a alors qu'un nombre fini de s pour lesquels $e^{-s}f \circ X_{s-}(\omega) > 1$, que nous numérotons dans leur ordre naturel, après quoi nous numérotons les s tels que

$$e^{-s}f \circ X_s(\omega) \in \left]\frac{1}{2}, 1\right], \text{ etc.}$$

Munissons $\mathbf{R}_+^{\mathbf{N}}$ de la loi de probabilité λ pour laquelle les applications coordonnées S_n sont des v.a. exponentielles indépendantes, de paramètre 1, et posons $W = \Omega \times \mathbf{R}_+^{\mathbf{N}}$, muni des lois $P^\mu \otimes \lambda$ (encore notées P^μ), et posons pour $w = (\omega, u) \in W$

$$\begin{gathered} X_t(w) = X_t(\omega) \\ (4) \quad S_t(w) = 0 \text{ si } t \notin M(\omega), \quad S_t(\omega) = f(X_{t-}(\omega))S_n(u) \\ \text{si } \ t = T_n(\omega). \end{gathered}$$

Conditionnellement à ω, projection de w sur Ω, les v.a. S_t sur W sont indépendantes entre elles, de paramètre $1/f \circ X_{t-}(\omega)$; elles ne sont $\neq 0$ que pour $t \in M(\omega)$. Comme toutes les v.a. S_n ont une espérance égale à 1, la propriété (2) nous dit que

$$E_W^\bullet\Big[\sum_t S_t(w)e^{-t}\Big] = E_\Omega^\bullet\Big[\sum_t f \circ X_{t-}(w)e^{-t}\Big] \text{ est bornée sur } E.$$

Nous restreindrons W à l'ensemble des w tels que la somme $\sum_t e^{-t} S_t(w)$ soit finie, et nous définirons le processus ralenti de (X_t) de la manière suivante : posons

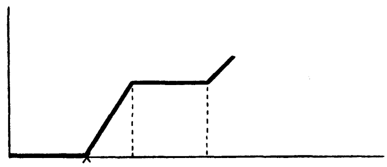
$$(5) \qquad H_{0-}(w) = 0, \quad H_t(w) = t + \sum_{u \leqslant t} S_u(w)$$

C'est une fonction de t strictement croissante, qui tend vers

$+\infty$ avec t. Nous construisons sa fonction inverse, continue,

$$(6) \qquad \tau_t(w) = \inf \{u : \ H_u(\omega) \geqslant t\}$$

Noter que $\tau_t(\omega) \leqslant t$ — il s'agit d'un ralentissement. Dessinons le graphe de $\tau_\bullet(w)$.



On a sur la figure $\alpha = S_0(w)$. Nous définissons $Y_t(w)$ de la manière suivante

(7) Si t est un point de croissance à droite de $\tau_\bullet(w)$,

$$Y_t(w) = X_{\tau_t}(w)$$

Si t n'est pas un point de croissance à droite,

$$Y_t(w) = X_{\tau_{t-}}(w).$$

Par exemple, si $t \in [0, \alpha[$, $Y_t = X_{0-} (= X_0)$; si $t \in [\beta, \gamma[$, $Y_t = X_{\tau_\beta -}$, mais $Y_\gamma = X_{\tau_\gamma}$. Il est clair que la trajectoire $Y_\bullet(w)$ est continue à droite et pourvue de limites à gauche. Noter aussi que la valeur τ_β est un instant de saut de $H_\bullet(w)$, donc un point de $M(\omega)$, et que $X_{\tau_{\beta -}}(w)$ appartient donc à W.

Autrement dit, comment passons-nous de la trajectoire $X_\bullet(w)$ à la trajectoire $Y_\bullet(w)$? Chaque fois que $X_{t-}(w) \in B$, nous immobilisons la trajectoire $X_\bullet$ pour une durée $S_t(w)$, exponentielle de paramètre $1/f(X_{t-}(w))$. Au bout de ce temps, nous la laissons repartir. Nous désirons maintenant prouver que *pour les lois* P^x, *le processus* (Y_t) *est un processus de Hunt sur* E.

Nous allons, sans changer la fonction f qui définit le ralentissement, et *sans changer les notations*, remplacer la résolvante (U_p) par la résolvante (U_{p+r}), où r est > 0 fixé. Cela revient à tuer le processus (X_t) par une v.a. exponentielle de paramètre r, et la résolvante a maintenant un noyau $U = U_0$ borné. Mais attention, cela ne revient pas à tuer (Y_t) à une v.a. exponentielle ! Il faudra ensuite faire tendre r vers 0, mais cette étape-là sera laissée au lecteur.

Nous introduisons les noyaux sur E

$$(8) \qquad W_p g = E^{\bullet}\left[\int_0^\infty e^{-pt} g \circ Y_t \, dt\right]$$

$$(9) \quad Wg = W_0 g = E^{\bullet}\left[\int_0^\infty g \circ Y_t \, dt\right] = Ug + E^{\bullet}\left[\sum_{s \geqslant 0} f \circ X_{s-} g \circ X_{s-}\right]$$

l'expression (9) se voit directement sur la définition du processus (Y_t). Comme nous avons remplacé (U_p) par (U_{p+r}), la propriété (2) de la fonction f signifie à présent que la fonction $E^{\bullet}\left[\sum_{s \geqslant 0} f \circ X_{s-}\right]$ est bornée sur E. Par conséquent, *le noyau* W *est borné*. Nous ignorons pour l'instant si les noyaux W_p forment une résolvante : nous le montrerons plus loin.

Maintenant, nous posons $B_n = \{f \geqslant 1/n\}$, $B'_n = B \setminus B_n$, $f^n = f . I_{B_n}$, et nous désignons par (Y^n_t) le processus construit sur W de manière analogue à (Y_t), mais en utilisant f^n au lieu de f. Cela peut se décrire ainsi : nous posons comme en (5) $H^n_t(w) = t + \sum_{u \leqslant t,\, X_{u-} \in B_n} S_u(w)$, la fonction inverse τ^n_t, et $Y^n_t(w)$ comme en (7). Nous introduisons les noyaux

$$W^n_p g = E^{\bullet}\left[\int_0^\infty e^{-pt} g \circ Y^n_t \, dt\right]$$

$$(10) \quad W^n g = W^n_0 g = Ug + E^{\bullet}\left[\sum_{s \geqslant 0} f^n \circ X_{s-} g \circ X_{s-}\right]$$

Et maintenant, nous avons un résultat simple, mais crucial :

A. Lemme. — *Le processus* (Y^n_t) *est un processus de Markov droit, admettant les points de* B'_n *comme points de branchement. En particulier, les noyaux* W^n_p *forment une résolvante.*

Démonstration. — Posons $D = \inf \{t > 0 : X_{t-} \in B_n\}$; c'est un temps terminal parfait exact, sans point régulier. Nous munissons $E \cup B'_n$ du processus (X_t) tué à l'instant D. Nous munissons B_n du processus (Z_t) obtenu en tuant le processus identité :

$$Z_t(u) = Z_0(u) \text{ pour } t < \zeta(u), \quad Z_t(u) = \partial \text{ pour } t \geqslant \zeta(u)$$

avec la loi $Q^x \, (x \in B_n)$ pour laquelle ζ est une v.a. exponentielle de paramètre $f(x)^{-1}$. Nous mélangeons ces deux processus au moyen des noyaux de renaissance suivants

$N_{12}(\omega, .) = \varepsilon_{X_{\zeta-}(\omega)}$ si $X_{\zeta-}(\omega) \in B_n$, $= \varepsilon_\partial$ sinon, pour le passage de $E \cup B'_n$ dans B_n;

$N_{21}(u, 0) = P_0(Z_{\zeta-}(u), .)$ pour le passage de B_n dans $E \cup B'_n$.

Il est évident (au moins pour l'auteur de cet exposé) que le processus sur $E = (E \cup B'_n) + B_n$ obtenu par ce mélange est identique en loi au processus (Y^n_t). Celui-ci est donc bien un processus droit.

Nous en déduisons une conséquence :

B. Lemme. — W *satisfait au principe complet du maximum.*

Démonstration. — Nous voulons démontrer que si g et h sont des fonctions positives, si a est une constante positive $a + Wh \geqslant Wg$ sur $\{g > 0\}$ entraîne la même inégalité partout. Il nous suffit de démontrer que $a + Wh \geqslant W^n g$ partout. Or W^n est l'opérateur potentiel du semi-groupe droit associé à (Y^n_t), tandis que

$$a + Wh = a + E^\bullet \Big[\sum_{s\geqslant 0} (f - f^n) \circ Y^n_{s-} g \circ Y^n_{s-}\Big]$$

est surmédiane par rapport à la résolvante correspondante. On conclut par les théorèmes 68-68 du chapitre IX de Meyer [10.3].

Maintenant, nous allons démontrer un début de propriété de Markov du processus (Y_t). Nous notons $\mathscr{H}_t$ la tribu engendrée par les v.a. Y_s, $s \leqslant t$.

C. Lemme. — $E^\bullet\Big[\int_0^\infty g \circ Y_s\, ds | \mathscr{H}_t\Big] = Wg \circ Y_t$ *p.s.*

Démonstration. — Il nous suffit de démontrer que, si $s_1, \ldots, s_k$ sont des instants $\leqslant t$, si $f_1, \ldots, f_k$ sont des fonctions continues bornées sur E, si g est continue bornée nulle en ∂, on a

$$(11) \quad E^\bullet\Big[f_1 \circ Y_{s_1} \ldots f_k \circ Y_{s_k} . \int_t^\infty g \circ Y_s\, ds\Big] = E^\bullet[f_1 \circ Y_{s_1} \ldots f_k \circ Y_{s_k} . Wg \circ Y_t]$$

Or on a

$$(12) \quad E^\bullet\Big[f_1 \circ Y^n_{s_1} \ldots f_k \circ Y^n_{s_k} . \int_t^\infty g \circ Y^n_s\, ds\Big] = E^\bullet[f_1 \circ Y^n_{s_1} \ldots f_k \circ Y^n_{s_k} . W^n g \circ Y^n_t]$$

D'autre part, comment se construit (Y_s^n) à partir de (Y_s)? Nous considérons le processus croissant continu

$$\beta_s^n = \int_0^s I_{E \cup B_n} \circ Y_s \, ds$$

nous considérons la fonction inverse $\sigma_u^n = \inf \{t : \beta_t^n > u\}$, et nous avons $Y_t^n = Y_{\sigma_t^n}$. En effet, ce changement de temps revient tout simplement à supprimer les intervalles de ralentissement pendant lesquels $Y_\bullet \in B_n'$, et on retrouve ainsi le processus (Y_t^n).

Lorsque $n \to \infty$, on a $\sigma_t^n \downarrow t$ pour tout t. Comme $f_1, \ldots, f_k$ sont continues, $f_i \circ Y_{s_i}^n \to f_i \circ Y_{s_i}$. Notons $\bar\zeta^n$, $\bar\zeta$ les durées de vie des processus Y_t^n, Y_t respectivement; on a $\bar\zeta^n \leqslant \bar\zeta$. Supposons g comprise entre 0 et 1. On a

$$g \circ Y_s^n \leqslant I_{[0, \bar\zeta_n[} \leqslant I_{[0, \bar\zeta[}, \quad \text{et} \quad E^\bullet[\bar\zeta] = W1$$

est bornée, donc le premier membre de (12) converge vers le premier membre de (11) par le théorème de Lebesgue. Il reste donc seulement à étudier si $W^n g \circ Y_t^n$ converge simplement vers $Wg \circ Y_t$. Nous écrivons

$$(13) \quad |W^n g \circ Y_t^n - Wg \circ Y_t| \leqslant |Wg \circ Y_t^n - Wg \circ Y_t| \\ + (Wg - W^n g) \circ Y_t^n$$

Le premier terme est le plus facile à étudier : sur $E \setminus B$, Wg est une fonction excessive bornée, donc les fonctions

$$Wg \circ X_\bullet(\omega)$$

sont (p.s.) continues à droite et pourvues de limites à gauche. Considérons maintenant un temps d'arrêt prévisible T annoncé par une suite (T_n); nous avons pour toute loi μ $Wg \circ X_{T_n} = E^\mu\left[\int_{T_n}^\infty g \circ X_s \, ds + \sum_{s \geqslant T_n} fg \circ X_{s-} | \mathscr{F}_{T_n}\right]$ d'où d'après le théorème de convergence des martingales (lemme de Hunt)

$$(Wg \circ X)_{T-} = E^\mu\left[\int_T^\infty g \circ X_s \, ds + \sum_{s \geqslant T} fg \circ X_{s-} | \mathscr{F}_{T-}\right]$$

D'autre part, d'après la propriété de Markov modérée du processus (X_{s-}) on a aussi

$$Wg \circ X_{T-} = E\left[\int_T^\infty g \circ X_s \, ds + \sum_{s \geqslant T} fg \circ X_{s-} | \mathscr{F}_{T-}\right]$$

Par conséquent, les processus $(Wg \circ X_{t-})$ et $((Wg \circ X)_{t-})$ sont indistinguables, et *on voit que la trajectoire* $(Wg \circ Y_\bullet)$ *s'obtient par ralentissement de la trajectoire* $(Wg \circ X_\bullet)$, de la même manière que $(Y_\bullet)$ à partir de $(X_\bullet)$. Elle est donc continue à droite et pourvue de limites à gauche.

Mais alors $Wg \circ Y_t^n = Wg \circ Y_{\sigma_t^n}$ converge vers $Wg \circ X_t$.

Reste le dernier terme. Nous écrivons que pour tout temps d'arrêt T

$$\begin{aligned} Wg \circ X_T - W_g^n \circ X_T &= E^\mu \Big[\sum_{s \geqslant T} (fg) \circ X_s - I_{\{f \leqslant 1/n\}} \circ X_s - | \mathscr{F}_T \Big] \\ &\leqslant E^\mu \Big[\sum_s (f - f^n) \circ X_s - | \mathscr{F}_T \Big] \end{aligned}$$

On rappelle que g est comprise entre 0 et 1. D'après l'inégalité de Doob

$$\lambda P^\bullet \{ \sup_t (Wg - W^n g) \circ X_t \geqslant \lambda \} \leqslant W(f - f^n)$$

De la même manière, en utilisant les temps d'arrêt prévisibles et les remarques faites plus haut

$$\lambda P^\bullet \{ \sup_t (Wg - W^n g) \circ X_{t-} \geqslant \lambda \} \leqslant W(f - f^n).$$

Comme les valeurs de $Y_\bullet$ sont, soit des valeurs de $X_\bullet$, soit des valeurs de $X_{\bullet -}$, on voit que $\sup_t (W - W^n) g \circ Y_t$ converge vers 0 en probabilité, et cela règle le sort du second terme de (13). Le lemme est établi. Noter un sous-produit de la démonstration :

D. Lemme. — *Si* g *est bornée, le processus* $(Wg \circ Y_t)$ *est continu à droite, pourvu de limites à gauche, et les processus* $(Wg \circ Y_{t-})$ *et* $((Wg \circ Y_t)_-)$ *sont indistinguables.*

Maintenant, partant du lemme C et de la transitivité des espérances conditionnelles, nous écrivons que

$$\begin{aligned} E^\bullet \Big[\int_t^\infty du \int_u^\infty g \circ Y_v \, dv | \mathscr{H}_t \Big] &= E^\bullet \Big[\int_t^\infty Wg \circ Y_u \, du | \mathscr{H}_t \Big] \\ &= W^2 g \circ Y_t \end{aligned}$$

Le premier membre vaut aussi $E^\bullet \Big[\int_t^\infty vg \circ Y_v \, dv | \mathscr{H}_t \Big]$. En itérant ce procédé on aboutit à la formule

$$E^\bullet \Big[\int_t^\infty \frac{u^k}{k!} g \circ Y_u \, du | \mathscr{H}_t \Big] = W^{k+1} g \circ Y_t \tag{14}$$

L'opérateur W est borné; si l'on a $p < 1/\|W\|$ la série $\Sigma p^k W^{k+1}$ a pour somme un noyau borné, et l'on a donc $E^\bullet\left[\int_0^\infty e^{pu} g \circ Y_u\, du\right] < \infty$. En remplaçant p par $-p$ on aboutit alors à l'identité

$$\left.\begin{aligned} &(15)\quad W_p g = E^\bullet\left[\int_0^\infty e^{-pu} g \circ Y_u\, du\right] \\ &\qquad\qquad = \Sigma(-1)^k p^k W^{k+1} g \\ &(16)\quad E^\bullet\left[\int_t^\infty e^{-pu} g \circ Y_u\, du | \mathscr{H}_t\right] \\ &\qquad\qquad = W_p g \circ Y_t \text{ p.s.} \end{aligned}\right\} \quad (p < 1/\|W\|)$$

Mais, W étant borné et satisfaisant au principe complet du maximum, il existe une résolvante (W'_p) sous-markovienne unique telle que $W'_0 = W$, et pour $p < 1/\|W\|$ W'_p est donné par le second membre de (15). Donc $W'_p = W_p$ pour $p < 1/\|W\|$, et cela a lieu pour tout p par prolongement analytique. *En particulier, les* W_p *forment une résolvante.* De même, (16) a lieu pour tout p par prolongement analytique.

Il résulte alors du lemme D, et de l'identité

$$W_p = W(I - pW_p),$$

que les p-potentiels $W_p g$ sont aussi continus à droite sur les trajectoires de (Y_t), et satisfont à la propriété de régularité du lemme D. Posons maintenant

$$(16) \qquad R_t g = E^\bullet[g \circ Y_t]$$

la fonction $R_\bullet g$ est continue à droite si g est continue, et il résulte de (16), en inversant la transformation de Laplace, que

$$(17) \qquad E^\bullet[g \circ Y_{t+v} | \mathscr{H}_t] = R_t g \circ Y_t \quad \text{p.s.}$$

Ainsi le processus (Y_t) est markovien. On sait bien que les R_t forment un semi-groupe d'après (17) et la transitivité des espérances conditionnelles. Le processus (Y_t) est sans branchement de par sa construction même. L'extension de la continuité à droite sur les trajectoires aux p-potentiels W_p, qui a été signalée plus haut (extension du lemme D) entraîne la propriété de Markov forte. D'autre part, si g est borélienne bornée, Wg est borélienne

$$Wg = E^{\bullet}\left[\int_0^{\infty} g \circ X_s \, ds + \sum_s fg \circ X_{s-}\right],$$

et la fonction sous le signe $E^{\bullet}$ est $\mathscr{F}^{o}$-mesurable sur Ω. On voit qu'il en est de même pour $W_p g$ grâce aux développements en série de la résolvante, d'abord pour $p < 1/\|W\|$, puis de proche en proche. Le semi-groupe (R_t) est donc borélien lui aussi et les hypothèses droites sont satisfaites.

Pour montrer que (Y_t) est un processus de Hunt, il suffit de voir que pour tout temps d'arrêt prévisible T borné, on a $Y_{T-} = Y_T$ p.s., ou encore que

$$E[h \circ Y_{T-} k \circ Y_T] = E[h \circ Y_{T-} k \circ Y_{T-}]$$

pour tout couple (h, k) de fonctions continues sur E. Comme le processus est sans point de branchement, on peut prouver que $E[h \circ Y_{T-} . pW_p k \circ Y_{T-}] = E[h \circ Y_{T-} . pW_p k \circ Y_T]$. Mais il est connu que $E[W_p k \circ Y_T | \mathscr{H}_{T-}] = (W_p k \circ Y)_{T-}$, la limite à gauche du processus $(W_p k \circ Y_{\bullet})$ en T (voir par exemple Meyer, [1] processus de Markov, p. 53). D'après l'extension du lemme D signalée plus haut, cela vaut aussi $W_p k \circ Y_{T-}$. Comme $h \circ Y_{T-}$ est $\mathscr{H}_{T-}$-mesurable, l'égalité en résulte, et le résultat cherché est prouvé : (Y_t) est de Hunt.

Le sujet est loin d'être épuisé. On peut essayer d'utiliser la méthode des ralentissements, par exemple, pour construire un semi-groupe de Markov admettant comme opérateur potentiel l'opérateur U_A, où A est une fonctionnelle additive gauche — mais cela crée des difficultés, car la construction calquée sur celle qui figure plus haut conduit à un semi-groupe non fortement markovien. On peut essayer surtout de l'utiliser en théorie générale des processus, pour éliminer les temps de discontinuité d'une famille de tribus. Nous espérons revenir sur ce sujet dans un autre travail encore plus illisible.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. M. Blumenthal et R. K. Getoor, Markov processes and potential theory, Academic Press, New York, 1968.

[2] Ph. Courrège et P. Priouret, Recollements de processus de Markov, *Publ. ISUP*, 14 (1965), 275-376.

[3] R. K. Getoor et M. J. Sharpe. Last exit decompositions and distributions, *Indiana J. of M.*

[4] R. J. Griego et R. Hersh. Random evolutions, Markov chains and systems of partial differential equations, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 62 (1969), 305-308.

[5] R. J. Griego et A. Moncayo. Random evolutions and piecing out of Markov processes.

[6] D. Heath, Probabilistic analysis of hyperbolic systems of partial differential equations, Thesis, Univ. of Illinois, 1969.

[7] N. Ikeda, M. Nagasawa et S. Watanabe, A construction of Markov processes by piecing out, *Proc. Japan Acad.*, 42 (1966), 370-375.

[8] B. Maisonneuve, Systèmes régénératifs, *Astérisque*, Société Math. de France, nº 15, 1974.

[9] B. Maisonneuve et P. A. Meyer, Ensembles aléatoires markoviens homogènes. Séminaire de Probabilités VIII, 1974, 172-261. *Lecture Notes in Math.*, 381, Springer, Heidelberg.

[10] P. A. Meyer, [1] Processus de Markov, *Lecture Notes in Math.*, 26, Springer, Heidelberg, 1967. [2], Sur les relations entre diverses propriétés des processus de Markov, *Invent. Math.*, 1 (1966), 59-100. [3], Probabilités et potentiel, Hermann, Paris, 1966.

[11] P. A. Meyer, R. T. Smythe et J. B. Walsh, Birth and death of Markov processes, *Proc. 6th Berkeley Symp.*, III (1971), 295-305.

[12] J. Neveu, Bases mathématiques du calcul des probabilités, Masson, Paris, 1964.

[13] J. B. Walsh, The perfection of multiplicative functionals, *Séminaire de Probabilités VI* (1972), 233-242.

[14] M. Weil, Conditionnement par rapport au passé strict, Séminaire de Probabilités V, 1971, 362-372, *Lecture Notes in Math.*, 191, Springer, Heidelberg.

Manuscrit reçu le 20 janvier 1975.

P. A. Meyer,

Département de Mathématiques
Université de Strasbourg
rue René-Descartes
67000 Strasbourg.