ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

MASAYUKI ITÔ

Sur le cône convexe maximum formé par des diviseurs d'un noyau de convolution et son application

Annales de l'institut Fourier, tome 25, nº 3-4 (1975), p. 289-308
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1975__25_3-4_289_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
25, 3 et 4 (1975), 289-308.

SUR LE CÔNE CONVEXE MAXIMUM FORMÉ PAR DES DIVISEURS D'UN NOYAU DE CONVOLUTION ET SON APPLICATION

par Masayuki ITÔ

Dédié à Monsieur M. Brelot à l'occasion de son 70e anniversaire.

1. Introduction.

Dans toute la suite X désignera un groupe abélien localement compact, séparé et dénombrable à l'infini, et ξ sera une mesure de Haar sur X.

Rappelons qu'un noyau de convolution N (sur X) est une mesure (de Radon) positive (dans X) et que, pour une mesure réelle μ, le N-potentiel de μ est la convolution $N * \mu$ dès que $N * |\mu|$ a un sens, où $|\mu|$ est la variation totale de μ.

Soient N et N' deux noyaux de convolution. On dira que N' est un diviseur de N s'il existe un noyau de convolution N'' tel que $N' * N'' = N$. Si N'' est uniquement déterminé, on notera $N'' = N/N'$. On désignera par $D(N)$ l'ensemble des diviseurs de N.

Le premier but de cette note est de discuter le cône convexe formé par des diviseurs d'un noyau de convolution donné. Soit N_0 un noyau de convolution injectif [1]. Nous montrerons qu'il existe un plus grand cône convexe $C_s(N_0)$ formé

[1] On dit qu'un noyau de convolution N est injectif si, pour une mesure réelle μ quelconque, $\mu = 0$ dès que $N * |\mu|$ a un sens et que $N * \mu = 0$. Dans ce cas on dit aussi que N satisfait au principe d'unicité.

par des diviseurs de N_0 et contenant N_0. Nous obtiendrons qu'un noyau de convolution N est contenu dans $C_s(N_0)$ si et seulement si N_0/N a un sens et s'il est un noyau de convolution de Hunt.

On dit qu'une famille $(\alpha_t)_{t\geqslant 0}$ de mesures positives est un semi-groupe vaguement continu si $\alpha_0 = \varepsilon$ (la mesure d'unité à l'origine), $\alpha_t * \alpha_s = \alpha_{t+s}$ $(\forall t \geqslant 0, \ \forall s \geqslant 0)$ et si l'application $t \to \alpha_t$ est vaguement continue. Si un noyau de convolution N s'écrit, avec un semi-groupe vaguement continu $(\alpha_t)_{t\geqslant 0}$, comme $N = \int_0^\infty \alpha_t \, dt$, alors N s'appelle un noyau de convolution de Hunt. Dans ce cas $(\alpha_t)_{t\geqslant 0}$ est uniquement déterminé et s'appelle le semi-groupe associé à N. On notera (H) l'ensemble des noyaux de convolution de Hunt.

Comme application du premier résultat, nous discuterons l'unicité de la classe fractionnaire d'un noyau de convolution de Hunt. Soit N un noyau de convolution. On dira qu'une famille $(N^\alpha)_{0\leqslant\alpha\leqslant 1}$ de noyaux de convolution est une classe fractionnaire de N si $N^1 = N$ et si, pour α, $\beta \in [0, 1]$ quelconques, $N^\alpha * N^\beta = N^{\alpha+\beta}$ dès que $\alpha + \beta \leqslant 1$. Évidemment une classe fractionnaire de N n'existe pas toujours. Soit N un noyau de convolution de Hunt. Alors on sait bien qu'il existe une classe fractionnaire de N contenue dans (H) (cf. par exemple [3]). Dans cette note, nous montrerons que, pour une classe fractionnaire $(N^\alpha)_{0\leqslant\alpha\leqslant 1}$ de N contenue dans (H) quelconque, il existe une fonction exponentielle φ sur $[0, 1]$ satisfaisant à $\varphi(0) = \varphi(1) = 1$ telle que

$$N^\alpha = \frac{\varphi(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{1-\alpha} \alpha_t \, dt \ (0 < \forall_\alpha \leqslant 1) \quad \text{et} \quad N^0 = \varepsilon,$$

où $(\alpha_t)_{t\geqslant 0}$ est le semi-groupe associé à N. On rappelle que $\varphi(t)$ est exponentielle sur $[0, 1]$ si, pour $t \geqslant 0$ et $s \geqslant 0$ quelconques, $\varphi(t+s) = \varphi(t)\varphi(s)$ dès que $t + s \leqslant 1$. Par conséquent, pour un noyau de convolution de Hunt $N = \int_0^\infty \alpha_t \, dt$, il existe une classe fractionnaire $(N^\alpha)_{0\leqslant\alpha\leqslant 1}$ de N, et une seule telle que $(N^\alpha)_{0\leqslant\alpha\leqslant 1} \subset (H)$ et que $\lim_{\alpha \searrow 0} N$ existe vaguement. Dans ce cas, $N^\alpha = \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \displaystyle\int_0^\infty t^{1-\alpha} \alpha_t \, dt.$

2. La somme d'un noyau de convolution et de son diviseur.

Rappelons qu'une résolvante $(N_p)_{p\geqslant 0}$ est une famille de noyaux de convolution satisfaisant à

$$(1) \qquad N_p - N_q = (q-p)N_p * N_q \ (\forall p \geqslant 0, \forall q \geqslant 0).$$

L'égalité (1) s'appelle l'équation résolvante. Évidemment l'application $p \to N_p$ est vaguement continue et décroissante. On obtient facilement la remarque suivante (cf. par exemple [2]).

Remarque 1. — Soient $(N_p)_{p\geqslant 0}$ et $(N'_p)_{p\geqslant 0}$ deux résolvantes. S'il existe $p_0 > 0$ tel que $N_{p_0} = N'_{p_0}$, alors, pour tout $p > 0$, $N_p = N'_p$.

Si, pour un noyau de convolution N, il existe une résolvante $(N_p)_{p>0}$ satisfaisant à $\lim\limits_{p\to 0} N_p = N$ (vaguement), alors on notera $N \in (R)$. Dans ce cas $(N_p)_{p>0}$ est uniquement déterminée (cf. [2]), et en posant $N_0 = N$, on dit que $(N_p)_{p\geqslant 0}$ est la résolvante associée à N. Évidemment $(N_p)_{p\geqslant 0} \subset (R)$ et $N - N_p = pN * N_p$ $(\forall p \geqslant 0)$. Pour un noyau de convolution de Hunt $N = \int_0^\infty \alpha_t \, dt$, on pose

$$N_p = \int_0^\infty \exp(-pt)\alpha_t \, dt \ (\forall p \geqslant 0).$$

Alors $(N_p)_{p\geqslant 0}$ est la résolvante associée à N.

Lemme 1 (cf. [1] et [4]). — *Soit* N *un noyau de convolution; alors les trois énoncés suivants sont équivalents :*

(1) $N \in (H)$.

(2) $N \in (R)$ *et* N *est injectif.*

(3) $N \in (R)$ *et* N *est non-périodique* ([2]).

Le corollaire suivant est un résultat immédiat du présent lemme.

([2]) Cela signifie que, pour tout $x \neq 0$ de X, $N \neq N * \varepsilon_x$, où ε_x est la mesure d'unité à x.

Corollaire 1. — *Soient m un entier >0 et $N_1, N_2, \ldots, N_m$ des noyaux de convolution de Hunt. Si $N_1 * N_2 * \cdots * N_m$ a un sens, alors $N_1 * N_2 * \cdots * N_m$ est injectif.*

Soit $N = \int_0^\infty \alpha_t\, dt$ un noyau de convolution de Hunt et η un noyau de convolution. On dit que η est N-invariant si, pour tout $t \geqslant 0$, $\eta = \eta * \alpha_t$.

La remarque suivante est une conséquence immédiate de l'injectivité de la transformation de Laplace.

Remarque 2. — Soit $N = \int_0^\infty \alpha_t\, dt$ un noyau de convolution de Hunt et $(N_p)_{p\geqslant 0}$ la résolvante associée à N. Alors pour qu'un noyau de convolution η soit N-invariant, il faut et il suffit que, pour tout $p > 0$, $\eta = p\eta * N_p$.

Nous montrerons la première proposition.

Proposition 1. — *Soit N_0 un noyau de convolution injectif et $N \neq 0$ un noyau de convolution. Alors pour que N soit, pour un noyau de convolution de Hunt N' et un noyau de convolution N'-invariant η, de la forme $N_0 = N * N' + \eta$, il faut et il suffit que, pour tout $p > 0$, $N + pN_0$ soit un diviseur de N_0.*

Démonstration. — Montrons d'abord que la condition est suffisante. Pour tout $p > 0$, il existe un noyau de convolution N'_p tel que $(N + pN_0) * N'_p = N_0$. On montrera que $(N'_p)_{p>0}$ est une résolvante. Pour tous $p > 0$ et $q > 0$, on a

$$\begin{aligned} N_0 * N'_p = ((N + qN_0) * N'_q) * N'_p &= ((N + qN_0) * N'_p) * N'_q \\ &= ((N + pN_0) * N'_p + (q-p)N_0 * N'_p) * N'_q \\ &= N_0 * (N'_q + (q-p)N'_p * N'_q). \end{aligned}$$

Comme N_0 est injectif, l'égalité $N'_p - N'_q = (q-p)N'_p * N'_q$ a lieu, donc $(N'_p)_{p>0}$ est une résolvante. La remarque 1 donne que, pour tout $p > 0$, N'_p est uniquement déterminé. Donc $N_0/(N + pN_0)$ a un sens et cela est égal à N'_p. Ayant $N \neq 0$ et $N * N'_p \leqslant N_0$ $(\forall_p > 0)$, on voit qu'il existe un noyau de convolution N' tel que $N' = \lim_{p\to 0} N'_p$ (vaguement). En posant $N'_0 = N'$, on obtient que $(N'_p)_{p\geqslant 0}$ est la résolvante associée à N'. Comme $(N + pN_0) * N'_p = N_0$ et N_0 est injectif, N'_p

est non-périodique. On voit donc que N' est aussi non-périodique. D'après le lemme 1, on a $N' \in (H)$. En vertu de la semi-continuité inférieure de la convolution, $N * N'$ a un sens et $N_0 \geqslant N * N'$. Posons $\eta = N_0 - N * N'$; alors, pour tout $p > 0$, $\eta = p\eta * N'_p$. La remarque 2 donne que η est N'-invariant, et on a $N_0 = N * N' + \eta$.

Montrons ensuite que la condition est nécessaire. Soit $(N'_p)_{p\geqslant 0}$ la résolvante associée à N'. Comme, pour tout $p > 0$, $N' * N'_p \leqslant \frac{1}{p} N'$, $N_0 * N'_p$ a un sens. Donc

$$\begin{aligned}(N + pN_0) * N'_p &= (N + pN * N' + p\eta) * N'_p \\ &= N * N'_p + N * (N' - N'_p) + \eta = N_0.\end{aligned}$$

Par conséquent $N + pN_0$ est un diviseur de N_0. La démonstration est ainsi complète.

Remarque 3. — Dans la présente proposition, le couple (N', η) est uniquement déterminé, car, pour tout $p > 0$, $N_0/(N + pN_0)$ a un sens et

$$N' = \lim_{p\to 0} N_0/(N + pN_0)$$

(vaguement).

Remarque 4. — Soient N' et η les noyaux de convolution dans la proposition 1. Désignons par $(\alpha'_t)_{t\geqslant 0}$ le semi-groupe associé à N'. Alors on a facilement $\eta = \lim_{t\to\infty} N_0 * \alpha'_t$ (vaguement).

La proposition 1 donne immédiatement le corollaire suivant :

COROLLAIRE 2. — *Soient* N_0 *et* N *comme dans la proposition* 1. *Alors pour que* N_0/N *ait un sens et soit un noyau de convolution de Hunt, il faut et il suffit que, pour tout* $p \geqslant 0$, $N + pN_0$ *soit un diviseur de* N_0.

Discutons le principe du balayage.

LEMME 2 (cf. [2] et [4]). — *Soit* $N \in (R)$. *Alors* N *satisfait au principe du balayage sur tout ouvert; c'est-à-dire que, pour une mesure positive* μ *à support compact et un ouvert* ω *dans* X *quelconques, il existe une mesure positive* μ' *portée par* $\overline{\omega}$ *telle que* : (*a*) $N * \mu \geqslant N * \mu'$ (*dans* X).

(*b*) $N * \mu = N * \mu'$ *dans* ω.

(*c*) *Pour une mesure positive* ν *quelconque,* $N * \nu \geqslant N * \mu'$ *dès que* $N * \nu$ *a un sens et que* $N * \nu \geqslant N * \mu$ *dans* ω.

Dans ce cas, $N * \mu'$ est uniquement déterminé. On dit que μ' est une mesure balayée de μ sur ω relativement à N.

Lemme 3 (cf. *par exemple* [4]). — *Soit* $N \in (R)$ *et* μ *une mesure positive à support compact. Soit* $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ *une suite de compacts de* X *telle que* $F_n \subset \mathring{F}_{n+1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *et* $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = X$, *ou* $\mathring{F}_{n+1}$ *désigne l'intérieur de* F_{n+1}; *on note* μ_n' *une mesure balayée de* μ *sur* CF_n *relativement à* N. *Alors* $N * \mu_n' \searrow 0$ *(vaguement) lorsque* $n \nearrow \infty$.

Pour un ouvert ω dans X, $C_K(\omega)$ désigne l'espace vectoriel topologique usuel des fonctions finies et continues dans ω à support compact. On pose $C_K^+(\omega) = \{f \in C_K(\omega);\ f \geqslant 0\}$. On note C_K et C_K^+ au lieu de $C_K(X)$ et de $C_K^+(X)$.

Discutons la convergence de potentiels.

Lemme 4. — *Soient* $N_1, N_2 \in (R)$. *Supposons que* $N_1 * N_2$ *a un sens. Soit* $(\mu_n)_{n=1}^{\infty}$ *une suite de mesures positives qui converge vaguement vers une mesure positive* μ *lorsque* $n \to \infty$. *S'il existe une mesure positive* ν *telle qu'à* $f \in C_K^+$ *quelconque, on puisse associer* $g \in C_K^+$ *satisfaisant à*

$$N_1 * N_2 * \mu_n * f \leqslant N_1 * N_2 * \nu * g \quad (\forall_n \geqslant 1),$$

alors $\lim_{n\to\infty} N_1 * N_2 * \mu_n = N_1 * N_2 * \mu$ (*vaguement*).

En effet, prenons une suite $(V_n)_{n=1}^{\infty}$ de voisinages compacts de l'origine telle que $V_n \subset \mathring{V}_{n+1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ et $\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n = X$. On désigne par $\varepsilon_{j,n}'$ une mesure balayée de ε sur CV_n relativement à N_j $(j = 1, 2)$. Comme $N_j * \varepsilon_{j,n}' \searrow 0$ (vaguement) lorsque $n \nearrow \infty$, on a aussi $N_1 * N_2 * \varepsilon_{j,n}' \searrow 0$ (vaguement) lorsque $n \nearrow \infty$. Soit $f \in C_K^+$ quelconque. Prenons $g \in C_K^+$ telle que, pour tout $n \geqslant 1$,

$$N_1 * N_2 * \mu_n * \check{f} \leqslant N_1 * N_2 * \nu * \check{g},$$

où $\check{f}(x) = f(-x)$. Alors, pour tout $m \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}
&\limsup_{n\to\infty} \int f\, d\mathrm{N}_1 * \mathrm{N}_2 * \mu_n \\
&\qquad = \limsup_{n\to\infty} \Big(\int f\, d\mathrm{N}_1 * \mathrm{N}_2 * (\varepsilon - \varepsilon'_{1,m}) * (\varepsilon - \varepsilon'_{2,m}) * \mu_n \\
&\qquad + \int f\, d\mathrm{N}_1 * \mathrm{N}_2 * (\varepsilon'_{1,m} + \varepsilon'_{2,m} - \varepsilon'_{1,m} * \varepsilon'_{2,m}) * \mu_n \Big) \\
&\qquad \leqslant \int f\, d\mathrm{N}_1 * \mathrm{N}_2 * (\varepsilon - \varepsilon'_{1,m}) * (\varepsilon - \varepsilon'_{2,m}) * \mu \\
&\qquad + \int g\, d\mathrm{N}_1 * \mathrm{N}_2 * (\varepsilon'_{1,m} + \varepsilon'_{2,m}) * \nu \\
&\qquad \leqslant \int f\, d\mathrm{N}_1 * \mathrm{N}_2 * \mu + \int g\, d\mathrm{N}_1 * \mathrm{N}_2 * (\varepsilon'_{1,m} + \varepsilon'_{2,m}) * \nu.
\end{aligned}$$

En faisant $m \nearrow \infty$, on obtient que

$$\limsup_{n\to\infty} \int f\, d\mathrm{N}_1 * \mathrm{N}_2 * \mu_n \leqslant \int f\, d\mathrm{N}_1 * \mathrm{N}_2 * \mu.$$

En vertu de la semi-continuité inférieure de la convolution, on voit que $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{N}_1 * \mathrm{N}_2 * \mu_n = \mathrm{N}_1 * \mathrm{N}_2 * \mu$ (vaguement), d'où le lemme 4.

LEMME 5. — *Soient* $\mathrm{N}_1, \mathrm{N}_2 \in (\mathrm{H})$. *Supposons que* $\mathrm{N}_1 * \mathrm{N}_2$ *a un sens. Soient* $(\mu_n)_{n=1}^{\infty}$ *et* μ *une suite de mesures positives et une mesure positive, respectivement. Si*

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{N}_1 * \mathrm{N}_2 * \mu_n = \mathrm{N}_1 * \mathrm{N}_2 * \mu$$

(vaguement) et s'il existe une mesure positive ν *telle qu'à* $f \in \mathrm{C}_{\mathrm{K}}^{+}$ *quelconque, on puisse associer* $g \in \mathrm{C}_{\mathrm{K}}^{+}$ *satisfaisant à* $\mathrm{N}_1 * \mathrm{N}_2 * \mu_n * f \leqslant \mathrm{N}_1 * \mathrm{N}_2 * \nu * g$ $(\forall n \geqslant 1)$, *alors*

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n = \mu \ \textit{(vaguement)}.$$

En effet, évidemment $(\mu_n)_{n=1}^{\infty}$ est vaguement bornée. Soit μ' un point vaguement adhérent de $(\mu_n)_{n=1}^{\infty}$ quelconque. D'après le lemme 4, on a $\mathrm{N}_1 * \mathrm{N}_2 * \mu = \mathrm{N}_1 * \mathrm{N}_2 * \mu'$. Donc le corollaire 1 donne que $\mu = \mu'$, d'où $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n = \mu$ (vaguement).

Montrons la deuxième proposition.

PROPOSITION 2. — *Soient* N_1 *et* N_2 *deux noyaux de convolution de Hunt. Désignons par* $(\mathrm{N}_{j,p})_{p\geqslant 0}$ *et par* $(\alpha_{j,t})_{t\geqslant 0}$ *la résolvante associée à* N_j *et le semi-groupe associé à* N_j $(j = 1, 2)$, *respectivement. Supposons que* $\mathrm{N}_1 * \mathrm{N}_2$ *a un sens; on pose*

$N_0 = N_1 * N_2$. *Alors* $N_0/(N_1 + N_2)$ *a un sens et cela est un noyau de convolution de Hunt. Posons* $\tilde{N} = N_0/(N_1 + N_2)$. *Alors le semi-groupe associé à* $\tilde{N}$ *est égal à* $(\alpha_{1,t} * \alpha_{2,t})_{t\geqslant 0}$ *et*

$$\tilde{N} = \lim_{p\to\infty} \frac{1}{2p}\left(\varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{p}{2}(N_{1,p}+N_{2,p})\right)^n\right) \tag{2}$$

(vaguement) [3].

Démonstration. — Pour simplifier la notation, on pose $N_j^{(p)} = N_j + \frac{1}{p}\varepsilon$ ($j = 1, 2$; $\forall p > 0$) et $N_0^{(p)} = N_1^{(p)} * N_2^{(p)}$. Il est bien connu que, pour tout $p > 0$,

$$N_j^{(p)} = \frac{1}{p}\left(\varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty}(pN_{j,p})^n\right)$$

et $N_j^{(p)} \in (H)$ (cf. [2]). Soit $(N_{j,q}^{(p)})_{q\geqslant 0}$ la résolvante associée à $N_j^{(p)}$. Alors, pour tout $q \geqslant 0$,

$$N_{j,q}^{(p)} = \frac{1}{p+q}\left(\varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{p^2}{p+q}N_{j,p}\right)^n\right) \ (j = 1, 2).$$

Regardons la démonstration de la proposition 1; on voit que

$$(N_1^{(p)} + qN_0^{(p)}) * N_{2,q}^{(p)} = N_0^{(p)} \quad \text{et} \quad (N_2^{(p)} + qN_0^{(p)}) * N_{1,q}^{(p)} = N_0^{(p)}.$$

On a donc

$$N_1^{(p)} + N_2^{(p)} + 2qN_0^{(p)} = 2(p+q)N_0^{(p)} * \left(\varepsilon - \frac{p^2}{2(p+q)}(N_{1,p} + N_{2,p})\right).$$

Par conséquent $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{p^2}{2(p+q)}(N_{1,p} + N_{2,p})\right)^n$ a un sens et la suite $\left(N_0^{(p)} * \left(\frac{p^2}{2(p+q)}(N_{1,p} + N_{2,p})\right)^n\right)_{n=1}^{\infty}$ est décroissante. En posant

$$\tilde{N}_q^{(p)} = \frac{1}{2(p+q)}\left(\varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{p^2}{2(p+q)}(N_{1,p} + N_{2,p})\right)^n\right),$$

[3] Pour une mesure positive σ, on note $(\sigma)^1 = \sigma$ et $(\sigma)^n = (\sigma)^{n-1} * \sigma$ ($\forall n \geqslant 2$) dès que cela a un sens.

on a, pour tous $p > 0$ et $q \geqslant 0$,

$$(N_1^{(p)} + N_2^{(p)} + 2qN_0^{(p)}) * \tilde{N}_q^{(p)} = N_0^{(p)} - \lim_{n\to\infty} N_0^{(p)} * \left(\frac{p^2}{2(p+q)}(N_{1,p} + N_{2,p})^n\right).$$

Comme $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{p}{2}(N_{1,p} + N_{2,p})\right)^n = 0$ (vaguement), le lemme 4 donne que

$$(N_1^{(p)} + N_2^{(p)} + 2qN_0^{(p)}) * \tilde{N}_q^{(p)} = N_0^{(p)}.$$

Pour tout $q \geqslant 0$, $(\tilde{N}_q^{(p)})_{p\geqslant 1}$ est vaguement bornée. Soit $\tilde{N}_q$ un point vaguement adhérent de $(\tilde{N}_q^{(p)})_{p\geqslant 1}$ lorsque $p \to \infty$. Alors le lemme 4 donne encore que

$$(N_1 + N_2 + 2qN_0) * \tilde{N}_q = N_0 \quad (\forall_q \geqslant 0).$$

Comme N_0 est injectif, le corollaire 2 donne que

$$\tilde{N} = N_0/(N_1 + N_2)(= \tilde{N}_0)$$

a un sens et que cela est un noyau de convolution de Hunt. On voit aussi que, pour tout $q \geqslant 0$,

$$\tilde{N}_q = N_0/(N_1 + N_2 + 2qN_0) = \lim_{p\to\infty} \tilde{N}_q^{(p)}$$

(vaguement). En considérant la démonstration de la proposition 1, on voit que $(\tilde{N}_{q/2})_{q\geqslant 0}$ est la résolvante associée à $\tilde{N}$.

Montrons finalement que le semi-groupe associé à $\tilde{N}$ est égal à $(\alpha_{1,t} * \alpha_{2,t})_{t\geqslant 0}$. Soit $(\alpha_{j,t}^{(p)})_{t\geqslant 0}$ le semi-groupe associé à $N_j^{(p)}$ ($j = 1, 2$; $p > 0$). Alors

$$\alpha_{j,t}^{(p)} = \exp(-pt)\left(\varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(pt)^n}{n!}(pN_{j,p})^n\right) \quad (= \exp(-pt(\varepsilon - pN_{j,p})))$$

(cf. [2]). Pour $p > 0$ quelconque $(\alpha_{1,t}^{(p)} * \alpha_{2,t}^{(p)})_{t\geqslant 0}$ est un semi-groupe vaguement continu et on a, pour tout $t \geqslant 0$,

$$\alpha_{1,t}^{(p)} * \alpha_{2,t}^{(p)} = \exp - 2pt\left(\left(\varepsilon - \frac{p}{2}(N_{1,p} + N_{2,p})\right)\right).$$

Donc, pour tout $q > 0$,

$$\tilde{N}_q^{(p)} = \int_0^\infty \exp(-2qt)\alpha_{1,t}^{(p)} * \alpha_{2,t}^{(p)}\, dt.$$

On sait déjà que $\lim_{p\to\infty} \alpha_{j,t}^{(p)} = \alpha_{j,t}$ (vaguement) (cf. [2] et [4]). Comme, pour tout $p > 0$ et pour tout $t \geqslant 0$,

$$\mathrm{N}_j * \alpha_{j,t}^{(p)} = (p\mathrm{N}_{j,p}) * \left(\mathrm{N}_j + \frac{1}{p}\,\varepsilon\right) * \alpha_{j,t}^{(p)}$$
$$\leqslant (p\mathrm{N}_{j,p}) * \left(\mathrm{N}_j + \frac{1}{p}\,\varepsilon\right) = \mathrm{N}_j,$$

le lemme 4 donne que

$$\lim_{p\to\infty} \mathrm{N}_j * \alpha_{j,t}^{(p)} = \lim_{p\to\infty} \left(\mathrm{N}_j + \frac{1}{p}\,\varepsilon\right) * \alpha_{j,t}^{(p)} = \mathrm{N}_j * \alpha_{j,t} (j = 1,\ 2)$$

(vaguement). Donc le théorème de Lebesgue donne que, pour f, $g \in \mathrm{C}_{\mathrm{K}}^{+}$ quelconques,

$$\lim_{p\to\infty} \int \left(\mathrm{N}_1 + \frac{1}{p}\,\varepsilon\right) * \alpha_{1,t}^{(p)} * f(x) \left(\mathrm{N}_2 + \frac{1}{p}\,\varepsilon\right) * \alpha_{2,t}^{(p)} * g(-x)\, d\xi(x)$$
$$= \int \mathrm{N}_1 * \alpha_{1,t} * f(x) \mathrm{N}_2 * \alpha_{2,t} * g(-x)\, d\xi(x),$$

car

$$\left(\mathrm{N}_j + \frac{1}{p}\,\varepsilon\right) * \alpha_{j,t}^{(p)} \leqslant \mathrm{N}_j + \frac{1}{p}\,\varepsilon \quad \text{et} \quad \left(\mathrm{N}_1 + \frac{1}{p}\,\varepsilon\right) * \left(\mathrm{N}_2 + \frac{1}{p}\,\varepsilon\right)$$

a un sens. Par conséquent, pour tout $t \geqslant 0$, $\alpha_{1,t} * \alpha_{2,t}$ a un sens et

$$\lim_{p\to\infty} \mathrm{N}_0^{(p)} * \alpha_{1,t}^{(p)} * \alpha_{2,t}^{(p)} = \lim_{p\to\infty} \mathrm{N}_0 * \alpha_{1,t}^{(p)} * \alpha_{2,t}^{(p)} = \mathrm{N}_0 * \alpha_{1,t} * \alpha_{2,t}$$

(vaguement). Comme, pour tout $p > 0$, $\mathrm{N}_0 * \alpha_{1,t}^{(p)} * \alpha_{2,t}^{(p)} \leqslant \mathrm{N}_0$, le lemme 5 donne que

$$\lim_{p\to\infty} \alpha_{1,t}^{(p)} * \alpha_{2,t}^{(p)} = \alpha_{1,t} * \alpha_{2,t}$$

(vaguement). On a, pour tous $t \geqslant 0$ et $s \geqslant 0$,

$$\mathrm{N}_0 * (\alpha_{1,t} * \alpha_{2,t}) * (\alpha_{1,s} * \alpha_{2,s}) = \mathrm{N}_0 * (\alpha_{1,t+s} * \alpha_{2,t+s}),$$

et donc il résulte de l'injectivité de N_0 que

$$\alpha_{1,t} * \alpha_{2,t} * \alpha_{1,s} * \alpha_{2,s} = \alpha_{1,t+s} * \alpha_{2,t+s}.$$

Pour $t \geqslant s \geqslant 0$ quelconques, on a

$$0 \leqslant \mathrm{N}_0 * (\alpha_{1,s} * \alpha_{2,s} - \alpha_{1,t} * \alpha_{2,t})$$
$$\leqslant \mathrm{N}_1 * \left(\int_s^t \alpha_{2,u}\, du\right) + \mathrm{N}_2 * \left(\int_s^t \alpha_{1,u}\, du\right).$$

Comme

$$N_2 * \left(N_1 * \left(\int_s^t \alpha_{2,u}\, du\right)\right) = N_0 * \left(\int_s^t \alpha_{2,u}\, du\right) \leqslant (t-s)N_0$$

et aussi $N_1 * \left(N_2 * \left(\int_s^t \alpha_{1,u}\, du\right)\right) \leqslant (t-s)N_0$, le lemme 5 donne que

$$\lim_{s \to t} N_1 * \left(\int_s^t \alpha_{2,u}\, du\right) = \lim_{s \to t} N_2 * \left(\int_s^t \alpha_{1,u}\, du\right) = 0$$

(vaguement). Donc l'application $t \to N_0 * \alpha_{1,t} * \alpha_{2,t}$ est vaguement continue. En utilisant encore le lemme 5, on voit que $t \to \alpha_{1,t} * \alpha_{2,t}$ est vaguement continue. Donc $(\alpha_{1,t} * \alpha_{2,t})_{t \geqslant 0}$ est un semi-groupe vaguement continu. D'après le lemme 4, on obtient que, pour tout $q > 0$,

$$\begin{aligned} N_0 * \tilde{N}_q = \lim_{p \to \infty} N_0 * \tilde{N}_q^{(p)} &= \lim_{p \to \infty} \int_0^\infty \exp(-2qt) N_0 * \alpha_{1,t}^{(p)} * \alpha_{2,t}^{(p)}\, dt \\ &= \int_0^\infty \exp(-2qt) N_0 * \alpha_{1,t} * \alpha_{2,t}\, dt \\ &= N_0 * \left(\int_0^\infty \exp(-2qt) \alpha_{1,t} * \alpha_{2,t}\, dt\right), \end{aligned}$$

et donc $\tilde{N}_q = \int_0^\infty \exp(-2qt)\alpha_{1,t} * \alpha_{2,t}\, dt$. En faisant $q \searrow 0$, on arrive à

$$\tilde{N} = \int_0^\infty \alpha_{1,t} * \alpha_{2,t}\, dt.$$

La démonstration est ainsi complète.

3. Notre théorème principal.

Nous allons démontrer notre théorème principal.

Théorème 1. — *Soit* N_0 *un noyau de convolution injectif. Alors il existe un cône convexe maximum* $C_s(N_0)$ *formé par des diviseurs de* N_0 *et contenant* N_0, *et* $C_s(N_0)$ *est de la forme*

$$\begin{aligned} C_s(N_0) &= \{N \in D(N_0);\ N_0/N \in (H)\} \\ &= \{N \in D(N_0);\ N + pN_0 \in D(N_0) (\forall p \geqslant 0)\}. \end{aligned}$$

Démonstration. — Posons

$$C'_s(N_0) = \{N \in D(N_0);\ N_0/N \in (H)\}.$$

Si $C'_s(N_0)$ est un cône convexe, on voit, d'après le corollaire 2, que $C'_s(N_0)$ est le cône convexe demandé $C_s(N_0)$. On montrera seulement que $C'_s(N_0)$ est un cône convexe. Soient N_1, $N_2 \in C'_s(N_0)$ quelconques. Notons $N'_j = N_0/N_j$ et $(N'_{j,p})_{p\geqslant 0}$ la résolvante associée à $N_j (j = 1, 2)$. Soit $q > 0$ quelconque. Alors, pour tout $p > 0$,

$$(N_j + qN_0) * N'_{j,q} = (N_j + qN_0) * (pN'_{j,p+q}) * \left(N'_{j,q} + \frac{1}{p}\varepsilon\right) = N_0.$$

Comme

$$N'_{j,p} + \frac{1}{p}\varepsilon = \frac{1}{p}\left(\varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty}(pN'_{j,p+q})^n\right),$$

on a

$$(N_1 + qN_0) * (pN'_{1,p+q}) + (N_2 + qN_0) * (pN'_{2,p+q})$$
$$= 2pN_0 * \left(\varepsilon - \frac{p}{2}(N'_{1,p+q} + N'_{2,p+q})\right).$$

Donc $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{p}{2}(N'_{1,p+q} + N'_{2,p+q})\right)^n$ a un sens et

$$\left(N_0 * \left(\frac{p}{2}(N'_{1,p+q} + N'_{2,p+q})\right)^n\right)_{n=1}^{\infty}$$

est décroissante. Pour un nombre p' satisfaisant à

$$p < p' < p + q,$$

on a aussi

$$N_0 * \left(\frac{p'}{2}(N'_{1,p+q} + N'_{2,p+q})\right)^n \leqslant N_0 \quad (\forall n \geqslant 1).$$

Donc

$$\lim_{n\to\infty} N_0 * \left(\frac{p}{2}(N'_{1,p+q} + N'_{2,p+q})\right)^n = 0$$

(vaguement). Par conséquent, en posant

$$\tilde{N}_q^{(p)} = \frac{1}{2p}\left(\varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{p}{2}(N'_{1,p+q} + N'_{2,p+q})\right)^n\right),$$

on a

$$((N_1 + qN_0) * (pN'_{1,p+q}) + (N_2 + qN_0) * (pN'_{2,p+q})) * \tilde{N}_q^{(p)} = N_0.$$

Comme $N_0 * N'_{j,q}$ a un sens et $N_0 * N'_{j,q} \leqslant \frac{1}{q} N_0$ $(j = 1, 2)$, $N'_{1,q} * N'_{2,q}$ a aussi un sens. Regardons la démonstration de la proposition 2; on voit que

$$\left(N'_{1,q} + N'_{2,q} + \frac{2}{p}\,\varepsilon\right) * \tilde{N}_q^{(p)} = \left(N'_{1,q} + \frac{1}{p}\,\varepsilon\right) * \left(N'_{2,q} + \frac{1}{p}\,\varepsilon\right).$$

Donc la proposition 2 donne qu'il existe un noyau de convolution de Hunt $\tilde{N}_q$ tel que

$$(N'_{1,q} + N'_{2,q}) * \tilde{N}_q = N'_{1,q} * N'_{2,q} \qquad \text{et} \qquad \lim_{p\to\infty} \tilde{N}_q^{(p)} = \tilde{N}_q$$

(vaguement). Pour $f \in C_K^+$ quelconque, il existe $g \in C_K^+$ telle que, pour tout $p \geqslant 1$, $\tilde{N}_q^{(p)} * f \leqslant (N'_{1,q} + \varepsilon) * (N'_{2,q} + \varepsilon) * g$. Comme $N_0 * (N'_{1,q} + \varepsilon) * (N'_{2,q} + \varepsilon)$ a un sens, le théorème de Lebesgue donne que

$$\begin{aligned}\lim_{p\to\infty} \int \check{f}\, dN_0 * \tilde{N}_q^{(p)} &= \lim_{p\to\infty} \int \tilde{N}_q^{(p)} * f(-\,x)\, dN_0(x)\\ &= \int \tilde{N}_q * f(-\,x)\, dN_0(x) = \int \check{f}\, dN_0 * \tilde{N}_q.\end{aligned}$$

Comme f est quelconque, on a $\lim_{p\to\infty} N_0 * \tilde{N}_q^{(p)} = N_0 * \tilde{N}_q$ (vaguement). On a, pour $j = 1, 2$,

$$\begin{aligned}N'_{j,q} * ((N_j + qN_0) * \tilde{N}_q^{(p)}) * f &= N_0 * \tilde{N}_q^{(p)} * f\\ &\leqslant N_0 * (N'_{1,q} + \varepsilon) * (N'_{2,q} + \varepsilon) * g\\ &= N'_{j,q} * (N_j + qN_0) * (N'_{1,q} + \varepsilon) * (N'_{2,q} + \varepsilon) * g,\end{aligned}$$

et donc le lemme 5 donne que

$$\lim_{p\to\infty} (N_j + qN_0) * \tilde{N}_q^{(p)} = (N_j + qN_0) * \tilde{N}_q$$

(vaguement). Comme

$$\begin{aligned}&N'_{j,q} * ((N_j + qN_0) * (pN'_{j,p+q}) * \tilde{N}_q^{(p)})\\ &\qquad = N'_{j,q} * (N_j + qN_0) * \tilde{N}_q^{(p)} - N'_{j,p+q} * (N_j + qN_0) * \tilde{N}_q^{(p)},\end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned}&\lim_{p\to\infty} N'_{j,q} * ((N_j + qN_0) * (pN'_{j,p+q}) * \tilde{N}_q^{(p)})\\ &\qquad\qquad = N'_{j,q} * ((N_j + qN_0) * \tilde{N}_q)\end{aligned}$$

(vaguement). En utilisant encore le lemme 5, on obtient que, pour $j = 1, 2$,

$$\lim_{p\to\infty} (N_j + qN_0) * (pN'_{j,p+q}) * \tilde{N}_q^{(p)} = (N_j + qN_0) * \tilde{N}_q$$

(vaguement). Par conséquent

$$(N_1 + N_2 + 2qN_0) * \tilde{N}_q = N_0.$$

Comme $q > 0$ est quelconque, la proposition 1 donne qu'il existe un noyau de convolution de Hunt $\tilde{N}$ et un noyau de convolution $\tilde{N}$-invariant η tels que

$$N_0 = (N_1 + N_2) * \tilde{N} + \eta$$

et que $(\tilde{N}_{q/2})_{q\geqslant 0}$ est la résolvante associée à $\tilde{N}$, où $\tilde{N}_0 = \tilde{N}$. Notons $(\alpha'_{j,t})_{t\geqslant 0}$ le semi-groupe associé à N'_j $(j = 1, 2)$. Comme, pour $q > 0$ quelconque

$$(N'_{1,q} + N'_{2,q}) * \tilde{N}_q = N'_{1,q} * N'_{2,q},$$

la proposition 2 donne que, pour tout $t \geqslant 0$, $\alpha'_{1,t} * \alpha'_{2,t}$ a un sens et que $(\exp(-2qt)\alpha'_{1,t} * \alpha'_{2,t})_{t\geqslant 0}$ est le semi-groupe associé à $\tilde{N}_q$. En faisant $q \searrow 0$, on voit que

$$(\alpha'_{1,t} * \alpha'_{2,t})_{t\geqslant 0}$$

est le semi-groupe associé à $\tilde{N}$. En remarquant que N_0 est le N'_j-potentiel de la mesure N_j $(j = 1, 2)$, on a, pour tout $t \geqslant 0$, $N_0 * \alpha'_{j,t} \leqslant N_0$ et $\lim_{t\to\infty} N_0 * \alpha'_{j,t} = 0$ (vaguement). En rappelant la remarque 4, on a

$$\eta = \lim_{t\to\infty} N_0 * \alpha'_{1,t} * \alpha'_{2,t} \leqslant \lim_{t\to\infty} N_0 * \alpha'_{2,t} = 0$$

(vaguement), et donc $\eta = 0$, d'où $N_0 = (N_1 + N_2) * \tilde{N}$. On obtient ainsi $N_1 + N_2 \in C'_s(N_0)$. Par conséquent $C'_s(N_0)$ est un cône convexe. La démonstration est ainsi complète.

Remarque 5. — Soit N_0 un noyau de convolution injectif et C un cône convexe formé par des diviseurs de N_0 et contenant ε. Alors on a :

(*a*) Si, pour tout N de C, N_0/N a un sens et si

$$C^* = \{N_0/N;\ N \in C\}$$

forme un cône convexe, alors $C \subset (H)$.

(*b*) Si $C \subset C_s(N_0)$, alors $N_0 \in (H)$.

En effet, $\varepsilon \in C$ implique $N_0 \in C^*$, et donc $C^* \subset C_s(N_0$.) L'énoncé (*a*) résulte du théorème 1. L'énoncé (*b*) est aussi un résultat immédiat du théorème 1.

Considérons finalement $C_s(N_0)$ dans le cas où N_0 est un noyau de convolution de Hunt. Posons $N_0 = \int_0^\infty \alpha_t \, dt$. On dit qu'un noyau de convolution N est *conditionnellement sous-médian par rapport à* N_0 si, pour tout $t \geqslant 0$, $N * \alpha_t$ a un sens et si $\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} (\alpha_t - \varepsilon) * N$ définit une mesure positive en dehors de l'origine 0; c'est-à-dire, il existe une mesure positive ν en dehors de 0 et un sous-ensemble dense $\mathscr{D}$ de $C_K^+(X - \{0\})$ tels que, pour $f \in \mathscr{D}$ quelconque,

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} (\alpha_t - \varepsilon) * N(f) = \nu(f). \tag{3}$$

PROPOSITION 3. — *Soit* N_0 *un noyau de convolution de Hunt. Alors tout* N *de* $C_s(N_0)$ *est conditionnellement sous-médian par rapport à* N_0 *et* $N = O(N_0)$ [4].

Démonstration. — Soit $(\alpha_t)_{t \geqslant 0}$ le semi-groupe associé à N_0. On a évidemment $N = O(N_0)$, et donc, pour tout $t \geqslant 0$, $N * \alpha_t$ a un sens. Posons $N' = N_0/N$; on note $(N'_p)_{p \geqslant 0}$ la résolvante associée à N'. On désigne par (V) l'ensemble des voisinages compacts de 0, et on associe à tout V de (V) une mesure balayée ε'_{CV} de ε sur CV relativement à N'. On pose

$$\mathscr{D} = \{(\check{N}' - \check{N}' * \check{\varepsilon}'_{CV}) * f ; f \in C_K^+(X - \{0\}), \\ \operatorname{supp}(f) \cap V = \emptyset\} \text{ [5]}.$$

Alors $\mathscr{D} \subset C_K^+(X - \{0\})$ et $\mathscr{D}$ est dense dans $C_K^+(X - \{0\})$, car, pour tout $V \in (V)$, $N' \neq N' * \varepsilon'_{CV}$. Soit

$$g = (\check{N}' - \check{N}' * \check{\varepsilon}'_{CV}) * f \in \mathscr{D}$$

quelconque. Alors on a

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \int g d(\alpha_t - \varepsilon) * N = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \int f d(\alpha_t - \varepsilon) * N_0 * (\varepsilon - \varepsilon'_{CV})$$
$$= \lim_{t \to 0} \int f d\left(\frac{1}{t} \int_0^t \alpha_s \, ds\right) * (\varepsilon'_{CV} - \varepsilon) = \int f d\varepsilon'_{CV} \geqslant 0,$$

[4] La notation $N = O(N_0)$ signifie que, pour $f \in C_K^+$ quelconque, il existe $g \in C_K^+$ et un compact F de X tels que $N * f \leqslant N_0 * g$ sur CF.

[5] Pour une mesure μ, $\check{\mu}$ est défini par $\int f d\check{\mu} = \int \check{f} d\mu$ pour toute $f \in C_K$.

car, ayant

$$\frac{1}{t}\,\mathrm{N}_0 * \left(\int_0^c \alpha_s\, ds\right) * \varepsilon'_{\mathrm{CV}} = \left(\frac{1}{t}\int_0^t ds \int_s^\infty \alpha_u\, du\right) * \varepsilon'_{\mathrm{CV}} \nearrow \mathrm{N}_0 * \varepsilon'_{\mathrm{CV}}$$

(vaguement) lorsque $t \searrow 0$, le lemme 5 donne que

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(\int_0^t \alpha_s\, ds\right) * \varepsilon'_{\mathrm{CV}} = \varepsilon'_{\mathrm{CV}}$$

(vaguement). On a, d'autre part,

$$\begin{aligned}\lim_{p\to\infty} \int gd(p^2\mathrm{N}'_p) &= \lim_{p\to\infty} \int gd(p(p\mathrm{N}'_p - \varepsilon))\\ &= \lim_{p\to\infty} \int fd(p\mathrm{N}'_p) * (\varepsilon'_{\mathrm{CV}} - \varepsilon) = \int fd\varepsilon'_{\mathrm{CV}},\end{aligned}$$

car $\lim_{p\to\infty} p\mathrm{N}'_p * \varepsilon'_{\mathrm{CV}} = \varepsilon'_{\mathrm{CV}}$ (vaguement) résulte du lemme 5 et de l'égalité

$$\lim_{p\to\infty} \mathrm{N}' * (p\mathrm{N}'_p) * \varepsilon'_{\mathrm{CV}} = \lim_{p\to\infty} (\mathrm{N}' - \mathrm{N}'_p) * \varepsilon'_{\mathrm{CV}} = \mathrm{N}' * \varepsilon'_{\mathrm{CV}}$$

(vaguement). Par conséquent $(p^2\mathrm{N}'_p)_{p>0}$ converge vaguement vers une mesure positive ν en dehors de 0 lorsque $n \to \infty$, et on a, pour g de $\mathscr{D}$ quelconque,

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int gd(\alpha_t - \varepsilon) * \mathrm{N} = \int g\, d\nu.$$

La démonstration est ainsi complète.

Se pose la question de savoir si l'inverse de la proposition 3 a lieu. Dans le cas où N_0 est le noyau newtonien sur l'espace euclidien $\mathrm{R}^n (n \geqslant 3)$, cela est affirmatif (cf. [5]). Dans ce cas, un noyau de convolution N sur R^n est conditionnellement sous-médian par rapport à N_0 si et seulement si N est conditionnellement sous-harmonique; c'est-à-dire, $\Delta \mathrm{N} \geqslant 0$ au sens des distributions en dehors de l'origine, où Δ désigne le laplacien sur R^n.

4. L'unicité de la classe fractionnaire d'un noyau de convolution.

Le théorème 1 donnera le lemme suivant, qui jouera un rôle essentiel dans la démonstration du théorème 2.

LEMME 6. — *Soient* $N_1, N_2 \in (H)$. *Si* $(N_1)^2$ *et* $(N_2)^2$ *sont définis et si* $(N_1)^2 = (N_2)^2$, *alors* $N_1 = N_2$.

En effet, posons $N_0 = (N_1)^2 (= (N_2)^2)$. Alors N_0 est injectif (cf. le corollaire 1). D'après la proposition 1 et la remarque 3, N_0/N_j a un sens et $N_0/N_j = N_j$ $(j = 1, 2)$. Comme $N_j \in (H)$, le théorème 1 donne que $N_j \in C_s(N_0) (j = 1, 2)$. Donc il existe $\tilde{N} \in (H)$ tel que $(N_1 + N_2) * \tilde{N} = N_0$. Soit $(N_{j,p})_{p \geq 0}$ la résolvante associée à N_j. Prenons $p > 0$ quelconque. Alors $N_1 * N_{2,p}$ et $N_2 * N_{1,p}$ sont définis, car $N_0 * N_{j,p}$ $(j = 1, 2)$ a un sens. On a

$$\begin{aligned} N_{1,p} * N_{2,p} &= (N_1 * (\varepsilon - pN_{1,p})) * (N_2 * (\varepsilon - pN_{2,p})) \\ &= N_1 * (N_2 * (\varepsilon - pN_{2,p}) * (\varepsilon - pN_{1,p})) \end{aligned}$$

et aussi

$$N_{1,p} * N_{2,p} = N_2 * (N_1 * (\varepsilon - pN_{1,p}) * (\varepsilon - pN_{2,p})).$$

Par conséquent on a

$$\begin{aligned} 0 &= (N_1)^2 * (\varepsilon - pN_{1,p}) * (\varepsilon - pN_{2,p}) - (N_2)^2 * (\varepsilon - pN_{2,p}) * (\varepsilon - pN_{1,p}) \\ &= (N_1 + N_2) * (N_1 * (\varepsilon - pN_{1,p}) * (\varepsilon - pN_{2,p}) \\ &\qquad\qquad - N_2 * (\varepsilon - pN_{2,p}) * (\varepsilon - pN_{1,p})) \\ &= (N_1 + N_2) * (N_{1,p} * (\varepsilon - pN_{2,p}) - N_{2,p} * (\varepsilon - pN_{1,p})) \\ &= (N_1 + N_2) * (N_{1,p} - N_{2,p}). \end{aligned}$$

La convolution $\tilde{N} * N_j * N_{k,p}$ a un sens $(j, k = 1, 2)$, car $\tilde{N} * N_j \leq N_0$. Donc

$$N_0 * (N_{1,p} - N_{2,p}) = \tilde{N} * ((N_1 + N_2) * (N_{1,p} - N_{2,p})) = 0.$$

En vertu de l'injectivité de N_0, on a $N_{1,p} = N_{2,p}$. En faisant $p \searrow 0$, on arrive à $N_1 = N_2$, d'où le lemme 6.

Dans le cas où N_j $(j = 1, 2)$ ne sont pas de noyaux de convolution de Hunt, $(N_1)^2 = (N_2)^2$ n'implique pas toujours $N_1 = N_2$.

Discutons une classe fractionnaire $(N^\alpha)_{0 \leq \alpha \leq 1}$ d'un noyau de convolution N. Évidemment on a toujours

$$(N^\alpha)_{0 \leq \alpha \leq 1} \subset D(N).$$

PROPOSITION 4. — *Soit* N *un noyau de convolution injectif et* $(N^\alpha)_{0 \leq \alpha \leq 1}$ *une classe fractionnaire de* N. *Alors pour que*

$(N^\alpha)_{0\leqslant\alpha\leqslant 1} \subset (H)$, *il faut et il suffit que, pour* $\alpha \in [0, 1]$ *et* $p > 0$ *quelconques,* $N^\alpha + pN \in D(N)$.

Cela est immédiatement un résultat du corollaire 2.

Soit $N = \int_0^\infty \alpha_t \, dt$ un noyau de convolution de Hunt. On pose

$$(4) \quad \overline{N}^\alpha = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} \alpha_t \, dt \ (0 < \forall_\alpha \leqslant 1) \quad \text{et} \quad \overline{N}^0 = \varepsilon.$$

Alors on a :

(*a*) $(\overline{N}^\alpha)_{0\leqslant\alpha\leqslant 1}$ est une classe fractionnaire de N.

(*b*) $(\overline{N}^\alpha)_{0\leqslant\alpha\leqslant 1} \subset (H)$.

(*c*) L'application $[0, 1] \ni \alpha \to \overline{N}^\alpha$ est vaguement continue.

Pour cela, on se réfère à [3].

Nous montrerons qu'une classe fractionnaire d'un noyau de convolution de Hunt est essentiellement unique. Nous préparerons d'abord une notation et un lemme élémentaire.

Notons M_K^+ l'ensemble des fonctions ξ-mesurables, bornées et $\geqslant 0$ dans X à support compact. Pour un noyau de convolution N et pour $f \in M_K^+$, on désigne par Nf la densité de $N * (f\xi)$ par rapport à ξ. Soient N_1 et N_2 deux noyaux de convolution. On écrit $N_1 \prec N_2$ si, pour f, $g \in M_K^+$ quelconques, $N_1 f \leqslant N_2 g$ ξ-p.p. sur $\{x \in X; f(x) \neq 0\}$ implique $N_1 f \leqslant N_2 g$ ξ-p.p. sur X (6).

Lemme 7 (cf. [4]). — *Soient* $N_0, N_1 \in (R)$. *Alors on a :*

(1) *Si* N_1 *s'écrit, avec une mesure positive* ν, *comme* $N_1 = N_0 * \nu$, *alors* $N_0 \prec N_1$.

(2) *Si* $N_0 \prec N_1$ *et* $N_1 \prec N_0$, *alors, avec une constante* $c \geqslant 0$, $N_1 = cN_0$.

(3) *L'ensemble* $\{N : \textit{noyau de convolution}; N_0 \prec N\}$ *et l'ensemble* $\{N; N \prec N_1\}$ *sont vaguement fermés dès que* $N_1 \neq 0$.

On dit qu'une fonction φ sur $[0, 1]$ est exponentielle si, pour tous $t, s \in [0, 1]$, $\varphi(t + s) = \varphi(t)\varphi(s)$ dès que $t + s \leqslant 1$.

On remarque qu'une fonction exponentielle φ sur $[0, 1]$ satisfaisant à $\varphi(0) = \varphi(1) = 1$ n'est pas toujours égale à 1.

(6) La notation ξ-p.p. signifie « presque partout pour ξ ».

THÉORÈME 2. — *Soit* $N = \int_0^\infty \alpha_t\,dt$ *un noyau de convolution de Hunt et* $(N^\alpha)_{0 \leqslant \alpha \leqslant 1}$ *une classe fractionnaire de* N. *Si*

$$(N^\alpha)_{0 \leqslant \alpha \leqslant 1} \subset (R),$$

alors il existe une fonction exponentielle $\varphi > 0$ *sur* $[0, 1]$ *satisfaisant à* $\varphi(0) = \varphi(1) = 1$ *telle que* $N^0 = \varepsilon$ *et que, pour tout* $\alpha \in (0, 1]$,

$$N^\alpha = \frac{\varphi(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{1-\alpha}\alpha_t\,dt.$$

Démonstration. — Soit $(\overline{N}^\alpha)_{0 \leqslant \alpha \leqslant 1}$ la classe fractionnaire de N définie par (4). Comme, pour tout $\alpha \in [0, 1]$, $N^\alpha * N^{(1-\alpha)} = N$ et N est non-périodique, N^α l'est aussi, et donc le lemme 1 donne $(N^\alpha)_{0 \leqslant \alpha \leqslant 1} \subset (H)$. Notons $Q = \{m/2^n;\ m, n\text{: entiers} \geqslant 1,\ m \leqslant 2^n\}$. D'après le lemme 6, on a $N^{1/2} = \overline{N}^{1/2}$. Par récurrence, pour $\beta \in Q$ quelconque, $N^\beta = \overline{N}^\beta$. Prenons $\alpha \in (0, 1)$ quelconque. On choisit deux suites

$$(\alpha_n)_{n=1}^\infty, \qquad (\beta_n)_{n=1}^\infty \subset Q$$

telles que $\alpha_n \nearrow \alpha$ et $\beta_n \searrow \alpha$ lorsque $n \nearrow \infty$. Comme, pour tout $n \geqslant 1$,

$$N^\alpha * N^{(\beta_n-\alpha)} = N^{\beta_n} = \overline{N}^{\beta_n}$$

et $N^\alpha = N^{(\alpha-\alpha_n)} * N^{\alpha_n} = N^{(\alpha-\alpha_n)} * \overline{N}^{\alpha_n}$, le lemme 7 donne que $N^\alpha \prec \overline{N}^{\beta_n}$ et $\overline{N}^{\alpha_n} \prec N^\alpha$. En faisant $n \nearrow \infty$, on a $N^\alpha \prec \overline{N}^\alpha$ et $\overline{N}^\alpha \prec N^\alpha$ (cf. (3) du lemme 7). Donc il existe une constante $c_\alpha > 0$, et une seule telle que $N^\alpha = c_\alpha \overline{N}^\alpha$, car $N^\alpha \neq 0$ (cf. (2) du lemme 7). L'égalité $N^0 = \varepsilon$ résulte de $N = N * N^0$ et de l'injectivité de N. En posant $\varphi(t) = c_t$ dans $(0, 1)$ et $\varphi(0) = \varphi(1) = 1$, on obtient que $N^\alpha = \varphi(\alpha)\overline{N}^\alpha$ et que φ est exponentielle. La démonstration est ainsi complète.

COROLLAIRE 3. — *Soit* $N \in (H)$. *Alors il existe une classe fractionnaire* $(N^\alpha)_{0 \leqslant \alpha \leqslant 1}$ *de* N, *et une seule telle que l'on ait :*

(1) $$(N^\alpha)_{0 \leqslant \alpha \leqslant 1} \subset (R).$$

(2) $$\lim_{\alpha \searrow 0} N^\alpha \textit{ existe}.$$

Cela résulte immédiatement du théorème.

Reste la question de savoir si, pour $N \in (H)$, toute la classe fractionnaire de N est contenue dans (H).

BIBLIOGRAPHIE

[1] G. Choquet et J. Deny, Aspects linéaires de la théorie du potentiel II. Noyaux de composition satisfaisant au principe du balayage sur tout ouvert, *C. R. Acad. Sc.*, Paris, 250 (1960), 4260-4262.

[2] J. Deny, Noyaux de convolution de Hunt et noyaux associés à une famille fondamentale, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, 12 (1962), 643-667.

[3] F. Hirsch, Familles résolvantes, générateurs, cogénérateurs, potentiels, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, 22 (1972), 89-210.

[4] M. Itô, Sur le principe relatif de domination pour les noyaux de convolution, *Hiroschima Math. J.*, à paraître.

[5] M. Itô, Sur les noyaux de convolution sous-harmoniques par rapport à un opérateur différentiel, à paraître.

Manuscrit reçu le 17 mars 1975.

Masayuki Itô,
Institut Mathématique
Université de Nagoya
Furo-cho, Chikusa-ku
464 Nagoya (Japon).