ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

GUY ALLAIN

Sur la représentation des formes de Dirichlet

Annales de l'institut Fourier, tome 25, nº 3-4 (1975), p. 1-10

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1975__25_3-4_1_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
25, 3 et 4 (1975), 1-10.

SUR LA REPRÉSENTATION DES FORMES DE DIRICHLET

par Guy ALLAIN

Dédié à Monsieur M. Brelot à l'occasion de son 70e anniversaire.

Dans ce travail [1] on établit une formule de représentation pour une forme quadratique positive sur un sous-espace uniformément dense de $\mathcal{K}(X)$ (espace des fonctions continues à support compact sur X localement compact) et qui vérifie un principe de contraction. On montre qu'une telle forme se décompose en deux formes intégrales et une forme locale, généralisant ainsi le théorème de décomposition énoncé sans démonstration par Beurling et Deny [2] pour une forme de Dirichlet. On précise ensuite la forme de cette partie locale dans le cas d'une forme de Dirichlet sur un ouvert de R^m dont le domaine contient suffisamment de fonctions dérivables.

1. Un théorème de décomposition.

Étant donné un espace localement compact X on désigne par $\mathcal{K}(X)$ l'espace des fonctions continues sur X, à valeurs réelles et à support compact. On considère une forme bilinéaire symétrique positive Q définie sur un sous-espace V de $\mathcal{K}(X)$.

[1] Ceci est une version abrégée d'une partie de la thèse de troisième cycle de l'auteur [1], soutenue à Orsay en Septembre 1973.

DÉFINITION 1.1. — *On appelle contraction normale toute application de* **R** *dans* **R** *contractante et conservant l'origine.*

On note T_α la contraction normale définie par

$$T_\alpha(x) = \inf(x^+, \alpha)$$

pour $\alpha \geqslant 0$, et par $T_\alpha(x) = \sup(-x^-, \alpha)$ pour $\alpha \leqslant 0$.

DÉFINITION 1.2. — *On dit qu'une contraction normale* T *opère sur* Q *si, pour tout élément* f *de* V, *on a* $T \circ f \in V$ *et* $Q(T \circ f, T \circ f) \leqslant Q(f, f)$.

Si T_1 opère sur Q on a les propriétés suivantes :

(i) *Pour tout* α *réel la contraction* T_α *opère sur* Q.

C'est immédiat; il en résulte que les contractions $x \to x^+$ et $x \to x^-$ opèrent sur Q. V est donc réticulé et V_+ (ensemble des fonctions de V à valeurs positives) engendre V.

(ii) *Pour tout couple* (f, g) *d'éléments de* V_+, *où* g *est comprise entre* 0 *et* 1 *et vaut* 1 *sur le support de* f, *on a* $Q(f, g) \geqslant 0$.

La démonstration donnée dans [3] pour un espace de Dirichlet s'applique : pour tout $\varepsilon > 0$ on a $T_1(\varepsilon f + g) = g$, d'où $Q(g, g) \leqslant Q(\varepsilon f + g, \varepsilon f + g)$. Développant et faisant tendre ε vers 0, on obtient la relation cherchée.

(iii) *Si* f *et* g *sont deux éléments de* V_+ *vérifiant*

$$\inf(f, g) = 0,$$

on a $Q(f, g) \leqslant 0$.

La démonstration est toute semblable à celle de (ii).

(iv) *On suppose que* T_1 *opère sur* Q *et que* V *est uniformément dense dans* $\mathcal{K}(X)$; *alors, pour tout élément* $f \in \mathcal{K}_+(X)$ *et tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $g \in V_+$ *dont le support est contenu dans celui de* f, *et vérifiant* $\|f - g\| \leqslant \varepsilon$ (ici $\|.\|$ désigne la norme uniforme).

En effet, si h est une fonction de V approchant uniformément f à $\varepsilon/2$ près, la fonction $g = h^+ - T_{\varepsilon/2} \circ h$ convient.

On peut observer que si, pour tout élément $f \in V$ on a $T_1 \circ f \in V$, l'ensemble des propriétés (ii) et (iii) est équivalent au fait que T_1 opère sur Q.

DÉFINITION 1.3. — *On dit que* Q *est à caractère local si, pour tout couple* (f, g) *d'éléments de* V *tel que* g *soit constante dans un voisinage du support de* f, *on a* $Q(f, g) = 0$.

THÉORÈME 1. — *Soit* Q *une forme bilinéaire symétrique positive sur un sous-espace* V *de* $\mathcal{K}(X)$. *Si* V *est uniformément dense dans* $\mathcal{K}(X)$ *et si* T_1 *opère sur* Q, *alors il existe un triplet unique* (μ, σ, N), *où* μ *est une mesure de Radon positive sur* X, σ *une mesure de Radon positive symétrique sur* $X^2\setminus\Delta$ *(où* Δ *est la diagonale de* X^2*),* N *une forme bilinéaire symétrique sur* V, *à caractère local, tel que, pour tout couple* (f, g) *d'éléments de* V, *on ait*

$$(1.1)\quad Q(f, g) = \int fg\, d\mu + \int (f(x) - f(y))(g(x) - g(y))\, d\sigma(x, y) + N(f, g).$$

De plus la forme N *est positive et* T_1 *opère sur* N.

Démonstration. — La démonstration de l'unicité du triplet (μ, σ, N) donnée dans [5] s'applique ici. En effet, on a

$$N(f, g) = 0$$

pour tout couple (f, g) d'éléments de V à supports disjoints, d'où, d'après la symétrie de σ,

$$(1.2)\quad Q(f, g) = \int (f(x) - f(y))(g(x) - g(y))\, d\sigma(x, y) = -2\int f(x)g(y)\, d\sigma(x, y).$$

Si f est un élément de V_+, on a

$$(1.3)\qquad \int f\, d\mu = \inf \{Q(f);\ \varphi \in E_f\},$$

où E_f désigne l'ensemble des fonctions de V comprises entre 0 et 1 et valant 1 sur un voisinage du support de f. Compte tenu de la propriété (iv), ces relations déterminent σ et μ, donc aussi N.

Pour établir l'existence du triplet (μ, σ, N), montrons d'abord l'existence de mesures σ et μ vérifiant (1.2) et (1.3).

LEMME 1.1. — *Il existe une mesure de Radon positive symétrique* σ *sur* $X^2 \setminus \Delta$ *telle que, pour tout couple* (f, g) *de fonctions de* V *à supports disjoints, la relation* (1.2) *soit vérifiée.*

C'est une conséquence immédiate du lemme suivant, qui exprime un résultat bien connu (voir par exemple [4]).

LEMME 1.2. — *Soient* S *et* T *deux espaces localement compacts. Si* B *est une forme bilinéaire sur* $\mathscr{K}(S) \times \mathscr{K}(T)$, *positive* (en ce sens que, pour tout élément (f, g) de

$$\mathscr{K}_+(S) \times \mathscr{K}_+(T)$$

on a $B(f, g) \geqslant 0$), *il existe une mesure de Radon* $\alpha \geqslant 0$ *sur* $S \times T$ *unique telle que, pour tout élément* (f, g) *de*

$$\mathscr{K}(S) \times \mathscr{K}(T)$$

on ait

$$B(f, g) = \int f(x)g(y)\, d\alpha(x, y).$$

Si S et T sont deux ouverts disjoints de X, on déduit du lemme 1.2 et des propriétés (i), (iii) et (iv) l'existence d'une mesure de Radon positive $\sigma_{S,T}$ sur $S \times T$, vérifiant, pour tout couple (f, g), avec

$$f \in V \cap \mathscr{K}(S) \qquad \text{et} \qquad g \in V \cap \mathscr{K}(T),$$
$$-\,Q(f, g) = 2 \int f(x)g(y)\, d\sigma_{S,T}(x, y).$$

On obtient la mesure σ par recollement de la famille $\sigma_{S,T}$ indexée par les couples (S, T) d'ouverts disjoints de X.

LEMME 1.3. — *Il existe une mesure de Radon positive* μ *sur* X *vérifiant la relation* (I.3).

En effet soit $f \in V_+$. La famille $\{Q(f, \varphi)\}_{\varphi \in E_f}$ est positive et filtrante décroissante, d'après les propriétés (ii) et (iii). La borne inférieure de cette famille est donc positive et c'est la limite de $Q(f, \varphi)$ pour le filtre des sections croissantes de E_f. Comme V_+ engendre V, il existe une forme linéaire positive L sur V définie par

$$L(f) = \inf \{Q(f, \varphi) ; \varphi \in E_f\} \quad (f \in V_+).$$

D'après la propriété (iv), L se prolonge en une mesure de Radon positive μ sur X vérifiant (1.3).

Lemme 1.4. — *Pour tout couple* (f, g) *d'éléments de* V, *où* g *est constante sur un voisinage du support de* f, *on a*

$$(1.4) \quad Q(f, g) = \int fg\, d\mu + \int (f(x) - f(y))(g(x) - g(y))\, d\sigma(x, y).$$

En effet, d'après le lemme 1.1, la relation (1.4) est vraie si g est nulle sur un voisinage du support de f. Il suffira donc d'établir (1.4) pour f positive et g à valeurs comprises entre 0 et 1, valant 1 sur un voisinage du support de f. Mais alors, pour toute $\varphi \in V$ vérifiant $g \leqslant \varphi \leqslant 1$, on a

$$- Q(f, \varphi - g) = \int [f(x)(\varphi(y) - g(y)) + f(y)(\varphi(x) - g(x))]\, d\sigma(x, y),$$

d'où

$$\sup \{Q(f, g - \varphi) ;\ \varphi \in V,\ g \leqslant \varphi \leqslant 1\} = \int [f(x)(1 - g(y)) + f(y)(1 - g(x))]\, d\sigma(x, y)$$

ce qui s'écrit bien

$$Q(f, g) - \int fg\, d\mu = \int (f(x) - f(y))(g(x) - g(y))\, d\sigma(x, y).$$

Lemme 1.5. — *Pour tout élément* $f \in V$ *on a*

$$(1.5) \quad \int f^2\, d\mu + \int (f(x) - f(y))^2\, d\sigma(x, y) \leqslant Q(f, f).$$

Soit en effet $f \in V$. Pour tout entier n positif et tout entier k (de signe quelconque) désignons par $f_{k,n}$ l'élément de V défini par

$$f_{k,n} = T_{\frac{k+1}{2^n}} \circ f - T_{\frac{k}{2^n}} \circ f \quad \text{pour} \quad k \geqslant 0$$
$$f_{k,n} = T_{\frac{k}{2^n}} \circ f - T_{\frac{k+1}{2^n}} \circ f \quad \text{pour} \quad k < 0 \text{ [2]}.$$

On a alors, pour tout entier $n \geqslant 0$, $f = \sum_k f_{k,n}$, et

$$Q(f, f) = \sum_k \Big\{ \sum_{l<k-1} Q(f_{k,n}, f_{l,n}) + \sum_{l>k+1} Q(f_{k,n}, f_{l,n}) \Big\} + \sum_k \{Q(f_{k,n}, f_{k,n}) + 2Q(f_{k,n}, f_{k+1,n})\}.$$

[2] L'idée d'utiliser un procédé de « découpage en tranches » m'a été suggérée par M. Deny.

Appliquant (1.4) aux couples $(f_{k,n}, f_{l,n})$, où k et l sont des entiers distincts et non consécutifs, on obtient

$$Q(f, f) = \int \Phi_n \, d\mu + \int \Psi_n \, d\sigma + \sum_k \{Q(f_{k,n}, f_{k,n}) + 2Q(f_{k,n}, f_{k+1,n})\}$$

où on a posé

$$\varphi_n(x) = \sum_k \left\{ \sum_{l<k-1} f_{k,n}(x) f_{l,n}(x) + \sum_{l>k+1} f_{k,n}(x) f_{l,n}(x) \right\}$$

$$\psi_n(x, y) = \sum_k \left\{ \sum_{l<k-1} (f_{k,n}(x) - f_{k,n}(y))(f_{l,n}(x) - f_{l,n}(y)) + \sum_{l>k+1} (f_{k,n}(x) - f_{k,n}(y))(f_{l,n}(x) - f_{l,n}(y)) \right\}$$

D'après la propriété (ii) on a

$$\sum_k \{Q(f_{k,n}, f_{k,n}) + 2Q(f_{k,n}, f_{k+1,n})\} \geqslant 0.$$

C'est ce terme qui va donner $N(f, f)$, par passage à la limite.

On a

$$\lim_n \int \varphi_n \, d\mu = \int f^2 \, d\mu,$$

car on a $0 \leqslant \varphi_n \leqslant f^2$, et la suite $\{\varphi_n\}$ converge uniformément vers f^2, d'après la relation

$$f^2 - \varphi_n = \sum_{k=-2^n p}^{2^n p-1} [f_{k,n}^2 + 2f_{k,n} f_{k+1,n}]$$

où p est un entier majorant $|f|$.

On a d'autre part

$$\lim_n \int \Psi_n(x, y) \, d\sigma(x, y) = \int (f(x) - f(y))^2 \, d\sigma(x, y).$$

Cela va résulter du théorème de convergence monotone. En effet posons $A_{k,l} = (f_{k,n}(x) - f_{k,n}(y))(f_{l,n}(x) - f_{l,n}(y))$. On a

$$A_{k,l} = f_{l,n}(x) \left[\frac{1}{2^n} - f_{k,n}(y)\right] + f_{l,n}(y) \left[\frac{1}{2^n} - f_{k,n}(x)\right] \geqslant 0$$

si $\quad 0 \leqslant k < l,$

$$A_{k,l} = - f_{k,n}(x) f_{l,n}(y) - f_{k,n}(y) f_{l,n}(x) \geqslant 0 \quad \text{si} \quad k < 0 \leqslant l$$

$$A_{k,l} = f_{k,n}(x) \left[-\frac{1}{2^n} - f_{l,n}(y)\right] + f_{k,n}(y) \left[-\frac{1}{2^n} - f_{l,n}(x)\right] \geqslant 0$$

si $\quad k < l < 0$

Par conséquent la fonction Ψ_n est positive. D'autre part la relation $f_{k,n} = f_{2k,n+1} + f_{2k+1,n+1}$ montre qu'on a

$$\psi_{n+1} \geqslant \psi_n.$$

Enfin, comme on a

$$(f(x) - f(y))^2 - \psi_n(x, y) = \sum_{k=-2^n p-1}^{2^n p} \{[f_{k,n}(x) - f_{k,n}(y)]^2 \\ + 2(f_{k,n}(x) - f_{k,n}(y))(f_{k+1,n}(x) - f_{k+1,n}(y))\}$$

on voit que $(f(x) - f(y))^2 - \psi_n(x, y)$ est la somme de $2^{n+1}p$ termes positifs majorés par $3/2^{2n}$, et par conséquent converge uniformément vers 0.

La relation (1.5) se déduit donc par passage à la limite de la relation

$$\int \varphi_n \, d\mu + \int \psi_n(x, y) \, d\sigma(x, y) \leqslant Q(f, f).$$

Pour achever la démonstration du théorème 1, posons

$$N(f, g) = Q(f, g) - \int fg \, d\mu \\ - \iint (f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) \, d\sigma(x, y).$$

D'après le lemme 1.5, N est une forme bilinéaire symétrique sur V, vérifiant $N(f, f) \geqslant 0$ pour toute $f \in V$. D'après (1.4), N est à caractère local. Il reste à prouver que la contraction T_1 opère sur N. Or, d'après la démonstration du lemme 1.5 et la définition de N, on a, pour tout élément $f \in V$,

$$(1.6) \quad N(f, f) = \lim_n \sum_k [Q(f_{k,n}, f_{k,n}) + 2Q(f_{k,n}, f_{k+1,n})],$$

d'où

$$N(T_1 \circ f, T_1 \circ f) = \lim_n \sum_{k=0}^{2^n} [Q(f_{k,n}, f_{k,n}) + 2Q(f_{k,n}, f_{k+1,n})] \\ \leqslant N(f, f).$$

Remarque. — Si toutes les contractions normales opèrent sur Q, elles opèrent aussi sur N.

Voici le principe d'une démonstration, que nous a communiquée J.-P. Roth : On commence par établir une extension des propriétés (ii) et (iii). Étant données deux contractions normales *croissantes* S et T et deux éléments f et g de V, on a

$$Q(Sf, Tg) \leqslant Q(f, g) \quad \text{pour} \quad f \geqslant 0, \ 0 \leqslant g \leqslant 1, \ g(x) = 1$$

en tout point de supp (f);

$$Q(Sf, Tg) \geqslant Q(f, g) \text{ pour } f \text{ et } g \geqslant 0 \text{ et } fg = 0.$$

En utilisant la formule d'approximation (1.6) on montre, à l'aide de ces deux propriétés, que les contractions croissantes opèrent sur N.

On en déduit que si T' et T'' sont deux contractions normales croissantes, on a $N(T' \circ f, T'' \circ f) \geqslant 0$ pour tout élément $f \in V$.

On achève alors en appliquant l'inégalité précédente aux contractions normales T' et T'' définies par

$$T'(x) = \frac{1}{2}(x + T(x)), \quad T''(x) = \frac{1}{2}(x - T(x)),$$

où T est une contraction normale quelconque.

2. Expression de la forme locale dans un cas régulier.

Pour obtenir plus de précisions sur la forme locale N, nous ferons quelques hypothèses complémentaires. Nous nous donnons d'abord une mesure de Radon ξ positive sur X, et on peut supposer que son support est X (sinon on remplacera l'espace localement compact X par ce support).

Définition 2.1. — *On dit qu'une forme bilinéaire symétrique positive* Q *définie sur un sous-espace* V *de* $L^2(X, \xi)$, *dense dans* $L^2(X, \xi)$, *est une forme de Dirichlet si*

1° Q *est fermée au sens de Friedrichs (autrement dit,* V, *muni de la norme* $f \longmapsto \left(Q(f, f) + \int f^2 \, d\xi\right)^{\frac{1}{2}}$, *est complet).*

2° *La contraction* T_1 *opère sur* Q *(pour tout élément* $f \in V$ *on a* $T_1 \circ f \in V$ *et* $Q(T_1 \circ f, T_1 \circ f) \leqslant Q(f, f)$).

DÉFINITION 2.2. — *On dit qu'une forme de Dirichlet, de domaine* V, *est régulière si* $V \cap \mathcal{K}(X)$ *est uniformément dense dans* $\mathcal{K}(X)$.

On suppose maintenant que X est un ouvert de $\mathbf{R}^m$ et on désigne par $\mathcal{K}^1(X)$ l'espace des fonctions continûment dérivables à support compact dans X. On munit $\mathcal{K}^1(X)$ de la norme $\|\,.\,\|_1$ définie par

$$\|f\|_1 = \|f\| + \sum_{i=1}^{m} \left\|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right\|$$

(où $\|\,.\,\|$ est la norme uniforme).

DÉFINITION 2.3. — *On dit qu'une partie* E *de* $\mathcal{K}^1(X)$ *est riche dans* $\mathcal{K}^1(X)$ *si, pour toute fonction* f *de* $\mathcal{K}^1(X)$, *il existe une suite de fonctions* f_n *de* E *convergeant vers* f *en norme* $\|\,.\,\|_1$ *et dont le support est contenu dans un compact indépendant de* n.

THÉORÈME 2.1. — *Soit* Q *une forme de Dirichlet sur* $L^2(X, \xi)$, *dont le domaine* V *contient une partie riche de* $\mathcal{K}^1(X)$. *Alors* V *contient* $\mathcal{K}^1(X)$ *et il existe un triplet* $(\mu, \sigma, \{\nu_{ij}\}_{1\leqslant i,j\leqslant m})$, *où* μ *est une mesure de Radon positive sur* X, σ *une mesure de Radon positive symétrique sur* $X^2\diagdown\Delta$, *enfin* $\{\nu_{ij}\}$ *une famille de mesures de Radon sur* X *vérifiant*

$$\nu_{ij} = \nu_{ji}$$

pour tout couple (i, j), $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant m$, *et, pour tout couple* (f, g) *d'éléments de* $\mathcal{K}^1(X)$,

$$\text{(2.1)}\quad Q(f, g) = \int fg\, d\mu + \int (f(x) - f(y))(g(x) - g(y))\, d\sigma(x, y) + \sum_i \sum_j \int \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_j}\, d\nu_{ij}$$

En outre la famille $\{\nu_{ij}\}$ *est positive au sens suivant: pour tout élément* $\rho = \{\rho_i\}$ *de* $\mathbf{R}^m$, *la mesure* $\sum_i \sum_j \rho_i\rho_j\nu_{ij}$ *est positive.*

La démonstration de ce résultat est détaillée dans [1]; elle fait appel aux propriétés des « formes approchées », qui sont étudiées dans [3].

Observons encore que si on pose $\nu = \sum_i \sum_j |\nu_{ij}|$ et si on appelle a_{ij} la densité de ν_{ij} par rapport à ν, la partie locale de (2.1) s'écrit

$$N(f, g) = \sum_i \sum_j \int a_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} d\nu.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] G. Allain, Sur la représentation des formes de Dirichlet, Thèse de Troisième Cycle, Orsay, Septembre 1973.

[2] A. Beurling and J. Deny, Dirichlet spaces, *Proc. Nat. Acad. of Sciences*, 45 (1959), 208-215.

[3] J. Deny, Méthodes hilbertiennes en Théorie du Potentiel, *Cours du C.I.M.E.*, Stresa, 1969.

[4] D. H. Fremlin, Tensor products of archimedian vector lattices, *Am. J. of Math.*, 94 (1972), 777-798.

[5] M. Ito, The singular measure of a Dirichlet space, *Nagoya J. of Math.*, 32 (1968), 337-359.

Manuscrit reçu le 25 février 1975.

Guy Allain,
41, rue du Loup-Pendu
92350 Le Plessis-Robinson.