Annales de l'institut Fourier

Ivan-Pierre Ramadanov

Le problème de l'inversion d'un théorème de Bremerman et ses applications à la transformation biholomorphe

Annales de l'institut Fourier, tome 25, nº 2 (1975), p. 193-211
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1975__25_2_193_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
25, 2 (1975), 193-211

LE PROBLÈME DE L'INVERSION D'UN THÉORÈME DE BREMERMAN ET SES APPLICATIONS A LA TRANSFORMATION BIHOLOMORPHE

par Ivan-Pierre RAMADANOV

Introduction.

On étudie ici la possibilité d'inverser un théorème de Bremerman [7] concernant la fonction-noyau de Bergman [1] du produit cartésien de deux domaines et les applications qui en découlent dans quelques questions de la représentation biholomorphe. Ce théorème de Bremerman est le suivant :

THÉORÈME. – *Si* B *et* D *sont deux domaines bornés dans* $\mathbf{C}^n$ *et* $\mathbf{C}^m$ *respectivement et si* $G = B \times D$, *alors*

$$K_G(z, w, \bar{\zeta}, \bar{\omega}) = K_B(z, \bar{\zeta})\, K_D(w, \bar{\omega})$$

pour tout z *et* ζ *de* B *et pour tout* w *et* ω *de* D *et où* K *est la fonction-noyau de Bergman du domaine correspondant.*

La possibilité d'inverser ce théorème est envisagée de différentes manières. Dans le § 1 on introduit une classe spéciale de domaines dans l'espace $\mathbf{C}^{n+m}$ des variables complexes $z_1, \ldots, z_n, w_1, \ldots, w_m$, la classe (S), ainsi que différentes fonctions "correctives". D'une manière générale, si G est un domaine borné dans $\mathbf{C}^{n+m}$ et si B est sa projection dans $\mathbf{C}^n$, on peut considérer le rapport :

$$N_G(z, w) = K_G(z, w, \bar{z}, \bar{w})\, [K_B(z, \bar{z})]^{-1}.$$

Les fonctions "correctives" α_G et γ_G sont introduites de telle manière qu'elles expriment la "différence" entre N_G et les fonctions-noyaux qui peuvent être considérées dans des domaines de $\mathbf{C}^m$, liés évidemment à G. Une place plus spéciale est attribuée à la fonction δ_G, dont l'introduction est soumise à d'autres considérations.

Sous certaines conditions concernant les fonctions "correctives" et les domaines envisagés, on obtient quelques propositions qui permettent de conclure que ces domaines sont identiques à des produits cartésiens. Dans le § 3 on étudie le comportement des fonctions "correctives" par rapport à certaines transformations biholomorphes.

En utilisant les résultats obtenus, on étudie alors la question des conditions suffisantes pour qu'un domaine de classe (S) soit isomorphe (transformé par une application biholomorphe) à un polycylindre. La réponse finale est obtenue pour le cas de domaines de Hartogs dans C^2 au § 4.

Enfin, le § 5 a pour but d'éclaircir définitivement les causes exactes de l'impossibilité d'inverser le théorème de Bremerman dans le cas général en étudiant d'une manière plus précise la métrique de Bergman des domaines de classe (S).

Certains des résultats de cet article ont été annoncés dans deux notes aux Comptes Rendus de l'Académie Bulgare des Sciences.

*

* *

1. Domaines de classe (S). Fonctions correctives.

Notations. – Soit C^n l'espace des variables complexes $z_1, z_2, \ldots, z_n$, dont les points sont notés par $z = (z_1, \ldots, z_n)$. De même, soit $C^m = \{w = (w_1, \ldots, w_m), w_k \in C, k = 1, 2, \ldots, m\}$. On considère l'espace $C^{n+m} = C^n \times C^m$, dont les points sont interprétés comme des couples $(z, w), z \in C^n, w \in C^m$. On introduit les projections naturelles $\pi_j, j = 1, 2, \pi_1(z, w) = z, \pi_2(z, w) = w$ de C^{n+m} dans C^n et C^m.

Soit G un domaine borné dans l'espace C^{n+m} contenant l'origine $(0, 0) \in C^{n+m}$. L'ensemble $\pi_1(G)$ est borné, ouvert, connexe et contient $0 \in C^n$. Le domaine $B = \pi_1(G)$ est appelé *base de* G. Notons $S_0 = G \cap \pi_1^{-1}(0)$ et $S_z = \pi_2(G \cap \pi_1^{-1}(z))$ pour z de B, c'est-à-dire $S_z = \{w \in C^m : \exists (z, w) \in G, z = \pi_1(z, w), w = \pi_2(z, w)\}$ et nous les appellerons respectivement *fibre de* G *au-dessus de 0 et fibre de* G *au-dessus de z.* Dans le cas général, les fibres S_z sont des ensembles bornés et ouverts, mais elles peuvent ne pas être connexes. Pour cette raison, on introduit :

DEFINITION 1.1. – *Le domaine borné* G *dans* $\mathbf{C}^{n+m}$, *contenant l'origine* $(0, 0) \in \mathbf{C}^{n+m}$ *est appelé domaine de classe* (S) *et est noté par* $G \in (S)$, *si, pour chaque point z de* B, *la fibre correspondante* S_z *est un domaine dans* $\mathbf{C}^m$, *contenant l'origine* $0 \in \mathbf{C}^m$.

Ainsi, en plus de la connexité des fibres S_z, les conditions requises impliquent le fait que B est un sous-ensemble de G.

Exemples. – A) Soit $n = m = 1$.

a) tous les domaines complets de Reinhardt et les domaines de Hartogs, dont les fibres contiennent l'origine du plan w, sont de classe (S).

b) les domaines de Reinhardt de la forme

$$\widetilde{R}_p = \{|z|^2 + |w|^{2/p} < 1\}\ ,\ p > 0\ ,\ [5],$$

peuvent être envisagés comme domaines de classe (S), de base $|z| < 1$ et de fibre $|w| < (1 - |z|^2)^{p/2}$. On peut alors définir

$$\widetilde{R}_0 = \{|z| < 1\ ,\ |w| < 1\} = U.$$

c) il n'est pas exclu que (S) contienne des domaines "inhabituels", tels que :

$$L = \{|z| < R_1\ ,\ |w| < \rho_1\} \cup \{R_1 \leqq |z| < R_2\ ,\ |w| < \rho_2\},$$

où $0 < R_1 < R_2\ ,\quad 0 < \rho_2 < \rho_1$.

B) $n \geqq 1\ ,\ m \geqq 1$. Tous les exemples de A) peuvent être modifiés et représenter des domaines de classe (S).

Soit $G \in (S)$. L'ensemble $R = \pi_2(G)$ est un domaine borné dans $\mathbf{C}^m$, $0 \in R$ et $R = \bigcup_{z \in B} S_z$. Alors

$$G \subset B \times R\ ,\quad S_z \subset R, \tag{1.1}$$

pour tout z de B.

Soit G un domaine borné dans $\mathbf{C}^{n+m}$ et $B = \pi_1(G)$.

DEFINITION 1.2. – *Notons par* N_G *la fonction définie par*

$$N_G(z, w) = K_G(z, w, \bar{z}, \bar{w}) [K_B(z, \bar{z})]^{-1}. \tag{1.2}$$

Il est évident que $N_G : G \to R_+$.

DEFINITION 1.3. – *Soit* $G \in (S)$. *Par* α_G *on désigne la fonction*

$$\alpha_G(z, w) = \frac{K_G(z, w, \bar{z}, \bar{w})}{K_B(z, \bar{z}) K_R(w, \bar{w})}, \tag{1.3}$$

appelée aussi fonction corrective commune.

De (1.1) et de la propriété de monotonie de la fonction-noyau de Bergman [1], on trouve

$$K_G(z, w, \bar{z}, \bar{w}) \geqq K_{B\times R}(z, w, \bar{z}, \bar{w}).$$

En appliquant le théorème de Bremerman pour B x R, il résulte que

$$\alpha_G(z, w) \geqq 1 \tag{1.4}$$

où l'égalité est vérifiée seulement si $G = B \times R$. Notons que de (1.2) et (1.3), on obtient

$$N_G(z, w) = \alpha_G(z, w) K_R(w, \bar{w}). \tag{1.5}$$

DEFINITION 1.4. – *Soit* $G \in (S)$. *Notons par* γ_G *la fonction*

$$\gamma_G(z, w) = \frac{K_G(z, w, \bar{z}, \bar{w})}{K_B(z, \bar{z}) K_{S_z}(w, \bar{w})} \tag{1.6}$$

et appelons la : fonction corrective par fibres. Cette définition est correcte car si $(z, w) \in G$, *alors* $z \in B$ *et* $w \in S_z$. *Ainsi* $\gamma_G : G \to R_+$.

De (1.1), on obtient $K_{S_z}(w, \bar{w}) \geqq K_R(w, \bar{w})$ pour chaque w de S_z. En outre, l'égalité est vérifiée seulement si $S_z = R$. De (1.6) et (1.3), il vient :

$$\gamma_G(z, w) \leqq \alpha_G(z, w) \tag{1.7}$$

pour chaque $w \in S_z$ et $z \in B$, donc pour chaque $(z, w) \in G$, et l'égalité en (z_0, w_0) est vérifiée seulement si $S_{z_0} = R$.

On emploiera assez fréquemment les restrictions de α et γ sur la base B de G : $\alpha_G|_B = \alpha_G(z, 0)$ et $\gamma_G|_B = \gamma_G(z, 0)$.

Notons enfin que :

$$\mathrm{N_G}(z\,,\,w) = \gamma_{\mathrm{G}}(z\,,\,w)\,\mathrm{K}_{\mathrm{S}_z}(w\,,\,\bar{w}). \tag{1.8}$$

DEFINITION 1.5. – *On dit que* G *est un domaine de classe* (S*) *si* G ∈ (S) *et vérifie la condition supplémentaire :*

(*) $\mathrm{K_B}(z\,,\,\bar{0}) \neq 0$ *pour tout* $z \in \mathrm{B}$ *et* $\mathrm{K}_{\mathrm{S}_z}(w\,,\,\bar{0}) \neq 0$ *pour tout* $(z\,,\,w) \in \mathrm{G}$.

DEFINITION 1.6. – *Soit* G ∈ (S*). *Notons par* δ_{G} *la fonction :*

$$\delta_{\mathrm{G}}(z\,,\,w) = \frac{\mathrm{K_G}(z\,,\,w\,,\,\bar{0}\,,\bar{0})}{\mathrm{K_B}(z\,,\,\bar{0})\,\mathrm{K}_{\mathrm{S}_z}(w\,,\,\bar{0})} \tag{1.9}$$

qu'on appellera fonction corrective triangulaire. C'est une application de la forme $\delta : \mathrm{G} \to \mathbf{C}$.

PROPRIETES GENERALES DES FONCTIONS CORRECTIVES

I. Soit G ∈ (S). D'après (1.2), $\mathrm{N_G}$ est analytique en $x_j\,,\,y_j\,,\,u_k\,,\,v_k$, $1 \leqq j \leqq n\,,\,1 \leqq k \leqq m$, où $z_j = x_j + iy_j\,,\,w_k = u_k + iv_k$. En prenant le logarithme, il vient :

$$ln\ \mathrm{K_G} = ln\ \mathrm{N_G} + ln\ \mathrm{K_B} \tag{1.10}$$

d'où on conclut que $ln\ \mathrm{N_G}$ admet des dérivées en $z_1, \ldots, z_n\,, \bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_n$, $w_1, \ldots, w_m\,, \bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_m$ de second degré. Si on note $w_l = z_{n+l}$, $l = 1, 2, \ldots, m$ et si $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_{m+n}) \in \mathbf{C}^{n+m}$, alors la forme

$$\mathrm{H}(ln\ \mathrm{N_G}\,,\,\omega\,,\,\bar{\omega}) = \sum_{j,k=1}^{n+m} \frac{\partial^2\, ln\ \mathrm{N_G}}{\partial z_j\, \partial \bar{z}_k}\,\omega_j\,\bar{\omega}_k \tag{1.11}$$

existe. En choisissant $\omega = dz$, on obtient, après un rapide calcul et en prenant compte de la définition de la métrique de Bergman [1] :

$$d\mathrm{S}^2_{\mathrm{G}} = d\mathrm{S}^2_{\mathrm{B}} + \mathrm{H}(ln\ \mathrm{N_G}\,,\,dz\,,\,d\bar{z}). \tag{1.12}$$

Nous reviendrons sur cette observation au § 5.

II. Soit G ∈ (S). La fonction corrective commune α_{G} est aussi analytique en $x_j\,,\,y_j\,,\,u_k\,,\,v_k$ et vérifie (1.4). Si G est un polycylindre dans $\mathbf{C}^{n+m}$, ou même un produit cartésien de $\mathrm{B} \subset \mathbf{C}^n$ et $\mathrm{R} \subset \mathbf{C}^m$, alors $\alpha_{\mathrm{G}} \equiv 1$.

III. Quelques propriétés de γ_{G} :

i) quand $z = z_0$ est fixé dans B, $\gamma_{\mathrm{G}}(z_0, w)$ est analytique en u_k, v_k. Si l'on fixe $w = w_0$ dans S_0, rien ne nous garantit que w_0 appartiendra à toutes les fibres S_z quand z varie dans B (voir l'exemple A.c). On peut cependant considérer $\gamma_{\mathrm{G}}|_{\mathrm{B}} = \gamma_{\mathrm{G}}(z, 0)$ qui est bien définie dans B.

ii) calculons γ dans certains cas :

a) si $\mathrm{G} \equiv \mathrm{U} = \{|z| < 1, |w| < 1\}$, alors $\gamma_{\mathrm{U}} \equiv 1$,

b) si $\mathrm{G} \equiv \mathrm{P} = \{|z|^2 + |w|^2 < 1\}$, alors

$$\gamma_{\mathrm{P}}(z, w) = \frac{2(1 - |z|^2)}{1 - |z|^2 - |w|^2}. \tag{1.13}$$

Notons alors que $\gamma_{\mathrm{P}}|_{\mathrm{B}} \equiv 2$ et que $2 = \mathrm{V}(\mathrm{B} \times \mathrm{S}_0)/\mathrm{V}(\mathrm{P})$ où V désigne le volume du domaine envisagé. Les domaines P, B et S_0 sont minimaux dans le sens de Bergman [1], [9].

c) soit $\mathrm{G} \equiv \widetilde{\mathrm{R}}_p$. D'après [5], on calcule K_{G}, K_{B} et $\mathrm{K}_{\mathrm{S}_z}$ et il vient:

$$\gamma_{\widetilde{\mathrm{R}}_p} = \frac{(p+1)(1-|z|^2)^p + (p-1)|w|^2}{(1-|z|^2)^p - |w|^2}, \tag{1.14}$$

$$\gamma_{\widetilde{\mathrm{R}}_p}|_{\mathrm{B}} = p + 1. \tag{1.15}$$

iii) soit $\mathrm{G} \in (\mathrm{S})$ tel qu'il existe $z_1 \in \mathrm{B}$ avec $\mathrm{S}_{z_1} \supset \mathrm{S}_z$ pour tout $z \in \mathrm{B}$, $z \neq z_1$. On dit alors que G *admet une fibre maximale* S_{z_1} au-dessus de z_1. L'inclusion $\mathrm{G} \subset \mathrm{B} \times \mathrm{S}_{z_1}$ nous donne

$$\mathrm{K}_{\mathrm{G}} \geqq \mathrm{K}_{\mathrm{B} \times \mathrm{S}_{z_1}} = \mathrm{K}_{\mathrm{B}} \mathrm{K}_{\mathrm{S}_{z_1}}$$

et donc $\gamma_{\mathrm{G}}(z_1, w) \geqq 1$ pour tout $w \in \mathrm{S}_{z_1}$. Si G admet une fibre strictement maximale ($\mathrm{S}_{z_1} \supset \mathrm{S}_z$, $\mathrm{S}_{z_1} \neq \mathrm{S}_z$), on a $\gamma_{\mathrm{G}}(z_1, w) > 1$ pour tout $w \in \mathrm{S}_{z_1}$.

Par analogie, on peut considérer des domaines G qui admettent au-dessus de $z_2 \in \mathrm{B}$ une fibre minimale S_{z_2} et on aura $\gamma_{\mathrm{G}}(z_2, w) \leqq 1$, $w \in \mathrm{S}_{z_2}$.

iv) soit $G \in (S)$. Introduisons la fonction :

$$\rho(z) = K_R(0, \overline{0}) [K_{S_z}(0, \overline{0})]^{-1}. \tag{1.16}$$

Evidemment $0 < \rho(z) \leqq 1$; l'égalité au point z_0 implique $S_{z_0} = R$ et inversement, si $S_{z_0} = R$, $\rho(z_0) = 1$. Grâce à $\rho(z)$, on obtient une liaison entre α_G et γ_G :

$$\gamma_G(z, 0) = \rho(z)\, \alpha_G(z, 0) \tag{1.17}$$

IV. Soit $G \in (S^*)$. Quand $z = z_0$ est fixé dans B, $\delta_G(z_0, w)$ est une fonction holomorphe de w dans S_{z_0}. Notons aussi que $\delta_U \equiv 1$.

2. Le théorème de Bremerman et quelques inverses pour les domaines de classe (S).

Grâce aux fonctions correctives introduites au § 1, on peut formuler le théorème de Bremerman [7] ainsi : si $G \in (S)$ et $S_z = R$ pour chaque z de B, alors $\alpha_G \equiv \gamma_G \equiv \delta_G \equiv 1$.

On va étudier le problème suivant : si G est un domaine de (S) dans $\mathbf{C}^{n+m}$ tel que $\alpha_G \equiv 1$ ($\gamma_G \equiv 1$, $\delta_G \equiv 1$), résulte-t-il que G est identique au produit cartésien de sa base B et de sa fibre zéro S_0 ?

En ce qui concerne le cas $\alpha_G \equiv 1$, la réponse est positive et élémentaire. Elle résulte de la remarque suivant (1.4). Notons donc :

PROPOSITION 2.1. – *Si* $G \in (S)$ *et si* $\alpha_G = 1$ *au point* $(z_0, w_0) \in G$, *alors* $G = B \times R$.

DEFINITION 2.1 – *On dit que* G *est un domaine de classe* (S , A) *ou que* G *est un domaine dont les fibres sont "comparables", si* $G \in (S)$ *et* G *vérifie la condition*

A) *pour tout couple* $(z_1, z_2) \in B \times B$, $z_1 \neq z_2$, *on a ou bien* $S_{z_1} \supset S_{z_2}$, *ou bien* $S_{z_1} = S_{z_2}$, *ou bien* $S_{z_1} \subset S_{z_2}$. *Il est facile de voir que les exemples cités au* § 1 *sont tous des domaines de* (S , A).

LEMME 1. – *Si* $G \in (S, A)$, *alors pour tout couple* $(z_1, z_2) \in B \times B$, *les inégalités* $\rho(z_1) \underset{>}{\leqq} \rho(z_2)$ *impliquent* $S_{z_1} \underset{\supset}{\subseteqq} S_{z_2}$.

La démonstration est obtenue en raisonnant par l'absurde et en appliquant la propriété de monotonie des fonctions de Bergman.

Posons $M = \sup_B \rho(z)$, $m = \inf_B \rho(z)$. Evidemment $0 \leqq m \leqq M = 1$. Soit $\gamma_G(z, 0) \equiv 1$. Si B contient un point z_0, tel que $\rho(z_0) = M = 1$, suivant (1.17), il vient $\gamma_G(z_0, 0) = \alpha_G(z_0, 0) = 1$ et d'après la proposition 2.1, on a $G = B \times R$. Si pour tout $z \in B$, $\rho(z) < M = 1$, alors :

a) ou bien m n'est pas assumé dans B,

b) ou bien m est assumé dans B.

Examinons le second cas. On trouve d'abord $m \neq 0$. Ainsi $0 < m < 1$ et il existe un point $\xi \in B$, tel que

$$0 < \rho(\xi) = m \leqq \rho(z) < 1.$$

Du lemme 1, on a $S_\xi \subset S_z \subsetneqq R$ et ainsi G admet une fibre strictement minimale au-dessus de ξ et donc $\gamma_G(\xi, 0) < 1$, ce qui est en contradiction avec la supposition $\gamma_G|_B \equiv 1$. Enonçons alors :

PROPOSITION 2.2. – *Si* $G \in (S, A)$ *et* $\gamma_G(z, 0) \equiv 1$, *alors ou bien* $G = B \times R$, *ou bien ni* M *ni* m *ne sont assumés dans* B.

L'étude des domaines de (S, A) nous mène à considérer le cas des domaines de Reinhardt complets. On a alors :

THEOREME 2.3. – *Soit* G *un domaine complet de Reinhardt borné dans* $\mathbf{C}^2$, $G = \{|z| < 1, |w| < g(|z|)\}$, *et soit* $\gamma_G(z, 0) \equiv 1$. G *est alors produit cartésien des disques* $B : |z| < 1$ *et* $S_0 : |w| < g(0)$.

Démonstration. – Le fait que G soit complet implique la décroissance monotone de $g(|z|)$ dans l'intervalle $[0, 1)$. La valeur maximale de $g(|z|)$ sera donc atteinte au point zéro. $S_0 : |w| < g(0)$ est alors une fibre maximale coïncidant avec $R = \pi_2(G)$. Grâce à (1.17), on trouve $\gamma_G(0, 0) = \alpha_G(0, 0)$ et on applique la proposition 2.1 avec $S_0 = R$.

Remarque. – En général, si $G \in (S)$ (ou même (S, A)) et si $\gamma_G(z, 0) \equiv 1$, il ne s'en suit pas toujours que $G = B \times S_0$. Nous donnerons au § 3 un exemple d'un domaine de Hartogs de (S, A) pour lequel $\gamma_G \equiv 1$, mais $G \neq B \times S_0$. Notons ici que certaines affirmations concernant l'existence de tels domaines peuvent être obtenues de (1.17). En effet, on peut avoir $\gamma_G(z, 0) \equiv 1$ sans pour autant exclure $\rho(z) < 1$, $\alpha_G(z, 0) > 1$. Au contraire même, ces inégalités impliquent (1.1) avec des inclusions strictes.

Prenons maintenant la fonction corrective triangulaire δ_G :

THEOREME 2.4. – *Si* $G \in (S^*, A)$ *et* $\delta_G|_B = \delta_G(z, 0) = \text{const}$, *alors* $G = B \times S_0$ *et* const $= 1$.

Démonstration. – La condition $\delta_{G|B} \equiv c$ est équivalente à

$$K_{S_z}(0, \overline{0}) = K_G(z, 0, \overline{z}, \overline{0}) \, [c \, K_B(z, \overline{0})]^{-1}. \tag{2.1}$$

A droite on a une fonction holomorphe de z, [1], qui assume des valeurs réelles positives : $K_{S_z}(0, \overline{0}) > 0$. Donc cette fonction est constante. La partie gauche de (2.1) ne dépend pas de z :

$$K_{S_z}(0, 0) = K_{S_0}(0, \overline{0}),$$

et puisque G vérifie la condition (A), d'après le lemme 1, on obtient $S_z = S_0$ et ainsi $G = B \times S_0$, d'où évidemment on conclut aussi $c = 1$.

Notons que la condition $\delta_G|_B \equiv c$ est de beaucoup plus exigeante que $\gamma_G|_B \equiv 1$.

3. Transformations biholomorphes et fonctions correctives.

Soit G un domaine de classe (S) dans l'espace $\mathbf{C}^{n+1}$ des variables complexes $(z, w) = (z_1, \dots, z_n, w)$, de base $B \subset \mathbf{C}^n$ et de fibres S_z dans $\mathbf{C}$.

Désignons par $\mathcal{C}_G$ l'ensemble des isomorphismes (transformations biholomorphes) T de G sur T(G), qui ont la forme :

$$T = \begin{cases} \zeta = \varphi(z), \\ \omega = \psi(z, w), \end{cases} \tag{3.1}$$

où $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est un isomorphisme de la base B à Jacobien

$\mathcal{J}(\varphi) \neq 0$, $\psi(z, w)$ est holomorphe dans G, $\dfrac{\partial \psi}{\partial w} \neq 0$ dans G et $\psi(z, 0) = 0$.

Prenons un domaine fixé $G \in (S)$ dans $\mathbf{C}^{n+1}$ et soit $T \in \mathcal{C}_G$. Notons $G^* = T(G)$. On obtient facilement :

LEMME 3.1. – *Si* G *est un domaine de classe* (S) *dans* $\mathbf{C}^{n+1}$ *de base* B *et de fibres* S_z, *et si* $T \in \mathcal{C}_G$, *alors* $G^* = T(G)$ *est un domaine de la forme*

$$G^* = \bigcup_{\zeta \in B^*} \{\zeta \times S^*_\zeta\} \tag{3.2}$$

de base $B^* = \varphi(B)$ *et de fibres* S^*_ζ. $S^*_{\zeta_0}$ *est l'image de* $S_{\varphi^{-1}(\zeta_0)}$ *par la transformation conforme* $\psi(\varphi^{-1}(\zeta_0), w)$.

Remarquons que G^* peut ne pas être borné. Cependant, G^* sera un domaine de "type borné" [7], c'est-à-dire tel que sa fonction-noyau est bien définie.

Soient $G \in (S)$, $T \in \mathcal{C}_G$. En utilisant l'invariance des fonctions-noyaux par rapport aux transformations biholomorphes [1], on trouve :

THEOREME 3.2. – *Si* G *est un domaine de classe* (S) *dans* $\mathbf{C}^{n+1}$, *de base* B *et de fibres* S_z *et* $T \in \mathcal{C}_G$, *alors pour tout* $(z, w) \in G$, *l'égalité*

$$\gamma_G(z, w) = \gamma_{G^*}(\zeta, \omega) \tag{3.3}$$

est vérifiée, c'est-à-dire que la fonction corrective par fibres est invariable par rapport aux isomorphismes de $\mathcal{C}_G$.

En remarquant que l'ensemble $\{(z, w) \in G : w = 0\}$ est transformé en $\{(\zeta, \omega) \in G^* : \omega = 0\}$, il vient :

$$\gamma_G(z, 0) = \gamma_{G^*}(\zeta, 0). \tag{3.4}$$

D'autre part :

$$K_G(z, w, \overline{0}, \overline{0}) =$$

$$= K_{G^*}(\zeta, \omega, \overline{\zeta}_0, \overline{0})\, \mathcal{J}(\varphi)|_z \left.\frac{\partial \psi}{\partial w}\right|_{(z,w)} \overline{\mathcal{J}(\varphi)}|_0 \left.\overline{\frac{\partial \psi}{\partial w}}\right|_{(0,0)} \tag{3.5}$$

où $\zeta_0 = \varphi(0)$,

$$K_B(z, \overline{0}) = K_{B^*}(\zeta, \overline{\zeta}_0)\, \mathcal{J}(\varphi)|_z \overline{\mathcal{J}(\varphi)}|_0, \tag{3.6}$$

$$K_{S_z}(w, \bar{0}) = K_{S^*_\zeta}(\omega, \overline{0}) \left.\frac{\partial \psi}{\partial w}\right|_{(z,w)} \overline{\left.\frac{\partial \psi}{\partial w}\right|_{(z,0)}}. \tag{3.7}$$

Posons :

$$\Delta(T) = \left[\left.\overline{\frac{\partial \psi}{\partial w}}\right|_{(0,0)}\right] \left[\left.\overline{\frac{\partial \psi}{\partial w}}\right|_{(z,0)}\right]^{-1}. \tag{3.8}$$

THEOREME 3.3. – *Si* $G \in (S^*)$ *et* $T \in \mathcal{C}_G$ *avec* $\varphi(0) = 0$, *alors*

$$\delta_G(z, w) = \delta_{G^*}(\zeta, \omega)\, \Delta(T) \tag{3.9}$$

pour chaque $(z, w) \in G$.

Soit $\mathcal{C}_G^*$ l'ensemble des isomorphismes T de $\mathcal{C}_G$ qui vérifient les conditions $\varphi(0) = 0$ et $\Delta(T) \equiv 1$. Evidemment $\phi \neq \mathcal{C}_G^* \subset \mathcal{C}_G$.

COROLLAIRE. – *Si* $G \in (S^*)$ *et* $T \in \mathcal{C}_G^*$, *alors, pour tout* $(z, w) \in G$ *simultanément seront vérifiées*

$$\delta_G(z, w) = \delta_{G^*}(\zeta, \omega) \quad , \quad \gamma_G(z, w) = \gamma_{G^*}(\zeta, \omega). \tag{3.10}$$

Remarque. – Soit G un domaine de (S^*) dans $\mathbf{C}^2$ de base simplement connexe B. Notons par $\varphi(z)$ la fonction qui réalise la transformation conforme de B sur $|\zeta| < 1$ avec $\varphi(0) = 0$ et soit

$$T = \{\zeta = \varphi(z) \,,\, \omega = w\}.$$

Ainsi $T \in \mathcal{C}_G^*$, $G^* = T(G)$ aura pour base le disque $|\zeta| < 1$ et ses fibres S_ζ^* seront les mêmes que G. En outre $\gamma_G = \gamma_{G^*}$, $\delta_G = \delta_{G^*}$. Donc, si G satisfait les conditions mentionnées plus haut, sans causer de restrictions sur la généralité, on peut envisager la base de G comme un disque unité.

A la fin du § 2 nous avons affirmé l'existence de domaines dont $\gamma \equiv 1$, mais qui ne sont pas des produits cartésiens. Voici un exemple :

Exemple. – Soit

$$G = \left\{(z, w) \in \mathbf{C}^2 : |z| < 1 \,,\, |w| < \exp\left[\frac{1}{2}(z + \overline{z})\right]\right\}.$$

C'est un domaine de (S) dans $\mathbf{C}^2$. Posons $T = \{\zeta = z, \omega = e^{-z} w\}$. De rapides vérifications nous prouvent que $T \in \mathcal{C}_G$ (mais pas à $\mathcal{C}_G^*$!) On vérifie que T est injective. Ensuite, on voit facilement que $G^* \subset U$ et il n'est pas difficile d'obtenir alors $G^* = U$. En appliquant le théorème 3.2 pour $T^{-1} \in \mathcal{C}_U$ et compte tenu de $\gamma_U \equiv 1$, il vient $\gamma_G \equiv 1$. Ainsi $G \in (S)$, $\gamma_G \equiv 1$ mais $G \neq B \times S_0$.

Les raisonnements utilisés dans la construction de cet exemple peuvent être légèrement généralisés pour prouver la proposition suivante qui s'avèrera être un outil appréciable au § 4.

THEOREME 3.4. – *Soit* G *un domaine complet de Hartogs dans* $\mathbf{C}^2$, $G = \{|z| < 1, |w| < h(z)\}$ *où* h *est bornée,* $h : B \to \mathbf{R}_+$ *et supposons qu'il existe une fonction* $\theta(z)$, *holomorphe dans* B, $\theta(z) \neq 0$, *telle que* $|\theta(z)| = h(z)$ *pour* $z \in B = \{|z| < 1\}$. *Alors* G *est isomorphe à* $U = \{|\zeta| < 1, |\omega| < 1\}$.

Démonstration. – Soit $T = \{\zeta = z, \omega = [\theta]^{-1} w\}$. C'est une transformation holomorphe de Jacobien non nul et qui est injective : si $(\zeta_1, \omega_1) = (\zeta_2, \omega_2)$, alors $\zeta_1 = \zeta_2$ et $\omega_1 = \omega_2$, d'où

$$z_1 = z_2 \quad , \quad \theta(z_1) = \theta(z_2)$$

et donc $w_1 = w_2$. Soit $G^* = T(G)$; tout d'abord $G^* \subset U$ et si $(\zeta_0, \omega_0) \in U$, en prenant $z_0 = \zeta_0$, $w_0 = \theta(\zeta_0)\,\omega_0$, on trouve $|z_0| < 1$ et

$$|w_0| = |\theta(\zeta_0)|\,|\omega_0| = |\theta(z_0)|\,|\omega_0| = h(z_0)\,|\omega_0| < h(z_0),$$

c'est-à-dire $(z_0, w_0) \in G$.

Dans le même ordre d'idées, prouvons :

THEOREME 3.5. – *Soit* G *un domaine de classe* (S^*) *dans* $\mathbf{C}^{n+1}$ *de base* $B \subset \mathbf{C}^n$ *et soient ses fibres* S_z *simplement connexes. Soit enfin* $\delta_G(z, w) \equiv 1$. G *est alors isomorphe à* $V = B \times U$, $U = \{|w| < 1\}$.

Démonstration. – Prenons

$$T = \{\zeta = z, \omega = \int_0^w M_{S_z}(\xi, 0)\, d\xi\}, \tag{3.11}$$

où $M_{S_z}(\xi, 0)$ est la fonction-minimale de S_z par rapport à 0, [1]. Il est bien connu que

$$M_{S_z}(\xi\,,0) = K_{S_z}(\xi\,,\bar{0})\,[K_{S_z}(0\,,\bar{0})]^{-1}. \tag{3.12}$$

Compte tenu de la condition $\delta_G(z\,,w) \equiv 1 \equiv \delta_G(z\,,0)$, on obtient que $M_{S_z}(\xi\,,0)$ est une fonction holomorphe de z dans B quand ξ est fixé. De rapides vérifications prouvent que $T \in \mathscr{C}_G^*$. La fonction $\omega = \int_0^w M_{S_z}(\xi\,,0)\,d\xi$ transforme S_z sur $|\omega| < R_\zeta = R_z$, où

$$R_z = [\pi\,K_{S_z}(0\,,\bar{0})]^{-1/2}$$

et $0 \to 0$, [7]. Ainsi G^* est un domaine de Hartogs, $G^* = \{B\,, |\omega| < R_\zeta\}$. D'après le corollaire $\delta_{G^*}(\zeta\,,\omega) \equiv 1$.

Il suffit maintenant de voir que G^* est de classe $(S^*\,,A)$ dans C^{n+1} et d'appliquer le théorème 2.4, suivant lequel $G^* = B \times \{|\omega| < R_0\}$.

Enfin, prenons $T' = \{\zeta' = \zeta\,, \omega' = R_0^{-1}\,\omega\}$. Cette dernière transformation est un isomorphisme de G^* sur $V = B \times \{|\omega'| < 1\}$.

Remarque. – Pour les domaines de classe (S^*), la condition $\delta_G \equiv 1$ entraîne $\gamma_G \equiv 1$: puisque G est isomorphe à G^* et $\gamma_{G^*} \equiv 1$, d'après le théorème 3.2, on trouve $\gamma_G \equiv 1$. L'inverse s'avère faux : prenons l'exemple $G = \left\{|z| < 1\,, |w| < \exp\left[\frac{1}{2}(z + \bar{z})\right]\right\}$. L'isomorphisme T de $\mathscr{C}_G$, qui n'est pas de $\mathscr{C}_G^*$, transforme G sur U et ainsi $\gamma_G \equiv 1$. Si l'on suppose que $\delta_G \equiv 1$, alors d'après le théorème 2.4, il s'en suivrait que $G \equiv U$ ce qui est impossible.

4. Domaines de Hartogs et transformations biholomorphes.

Dans ce paragraphe G sera un domaine de Hartogs de C^2,

$$G = \{B\,, |w| < R(z)\},$$

où $B \subset C$ et $R : B \to R_+$ est une fonction bornée.

Nous voudrions répondre ici à la question suivante : sous quelles conditions un domaine de Hartogs de C^2 est-il isomorphe au bicylindre $U = \{|\zeta| < 1\,, |\omega| < 1\}$? Supposons en outre que l'isomorphisme recherché soit de classe $\mathscr{C}_G$.

THEOREME 4.1. — *Soit* $G = \{B , |w| < R(z)\}$ *et* $\delta_G(z , 0)$ *une fonction antiholomorphe de z dans* B *avec* $\delta_G(z , 0) \neq 0$. *Alors* G *est isomorphe à* $V = B \times U$, $U = \{|\omega| < 1\}$.

Démonstration. — On construit

$$T = \{\zeta = z , \omega = \psi(z , w)\} \tag{4.1}$$

où $\psi(z , w) = h(z) w$ et $h(z)$ est choisie de telle manière que :

$$h(z) = h(0) \, [\overline{\delta_G(z , 0)}]^{-1}. \tag{4.2}$$

Donc $h(z)$ est holomorphe dans B et ainsi

$$\psi \in \mathcal{H}(G) , \psi(z , 0) = 0 , \frac{\partial \psi}{\partial w} = h(z) \neq 0,$$

c'est-à-dire que $T \in \mathcal{C}_G$. En outre :

$$\Delta(T) = \delta_G(z , 0). \tag{4.3}$$

L'image de G par T est de base B et de fibres S^*_ζ qui sont de nouveau des disques de centre zéro car $\psi(z , w) = h(z) w$ est une homothétie combinée d'une rotation de $|w| < R(z)$. Suivant le théorème 3.3 $\delta_G(z , 0) = \delta_{G^*}(\zeta , 0) \, \Delta(T)$ et, compte tenu de (4.3), on trouve $\delta_{G^*}(\zeta , 0) \equiv 1$. Appliquons à G^* le théorème 2.4 et ainsi

$$G^* = B \times S^*_0 = B \times \{|\omega| < R^*_0\}.$$

THEOREME 4.2. — *Soit* $G = \{B , |w| < R(z)\}$ *où* B *est simplement connexe et soit* $-\ln R(z)$ *harmonique dans* B. *Alors* G *est isomorphe à* $V = B \times U$.

Démonstration. — a) $R(z) = R(x , y)$ est définie dans le domaine simplement connexe B et prend ses valeurs dans $(0 , +\infty)$. Notons $u(z) = -\ln R(z)$. Il existe une fonction $f(z)$, holomorphe dans B, $f(z) \neq 0$, telle que $|f(z)| = R^{-1}(z)$. En effet, soit $v(z)$ la conjuguée harmonique de $u(z)$ et posons $f(z) = \exp g(z)$ où $g(z) = u(z) + i v(z)$.

b) considérons $T = \{\zeta = z , \omega = f(z) w\}$. Avec les mêmes raisonnements utilisés dans la démonstration du théorème 3.4, on prouve que T est holomorphe, injective et que $T(G) = B \times U = V$.

Remarque. – Le domaine du théorème 4.2 satisfait une condition de pseudo-convexité un peu spéciale : $-\ ln\ \mathrm{R}(z)$ est harmonique. Notons aussi que le théorème 4.2 nous donne un moyen de construire les isomorphismes de classe $\mathcal{C}_G$ de G sur V pour le cas où G satisfait à cette condition de pseudo-convexité "harmonique". Ainsi par exemple, si $G \equiv U$, il est clair que $u(z) \equiv 0$ et donc $f(z) \equiv 1$ et T = identité. Si G est le domaine de l'exemple du § 3,

$$u(z) \equiv -x\ ,\ v(z) \equiv -y\ ,\ f(z) \equiv e^{-z}$$

et alors $T = \{\zeta = z\ ,\ \omega = e^{-z} w\}$.

THEOREME 4.3. – *Soit* $G = \{|z| < 1\ ,\ |w| < R(z)\}$. *Les conditions :*

i) $\delta_G(z\ ,0)$ *antiholomorphe et* $\neq 0$ *dans* $|z| < 1$,

ii) $-\ ln\ R(z)$ *harmonique dans* $|z| < 1$, *sont équivalentes.*

Démonstration. – (i) $\Rightarrow$ (ii). Calculons $K_G(z\ ,0\ ,\overline{0}\ ,\overline{0})$. En notant B : $|z| < 1$ et S_z : $|w| < R(z)$, on a $K_B(z\ ,\overline{0}) = \pi^{-1}$,

$$K_{S_z}(0\ ,\overline{0}) = [\pi\, R^2(z)]^{-1},\ [9].$$

Donc $K_G(z\ ,0\ ,\overline{0}\ ,\overline{0}) = \delta_G(z\ ,0)\ [\pi^2 R^2(z)]^{-1}$ d'où il résulte que K_G, qui est holomorphe dans B, ne s'annule pas. Ainsi $\dfrac{\partial^2}{\partial z\, \partial \overline{z}}\ ln\ |K_G| = 0$ et d'autre part $\dfrac{\partial^2}{\partial z\, \partial \overline{z}}\ ln\ |\delta_G(z\ ,0)| = 0$. En tenant compte de

$$\frac{\partial^2}{\partial z\, \partial \overline{z}}\ ln\ |K_G| = \frac{\partial^2}{\partial z\, \partial \overline{z}}\ ln\ |\delta_G| + 2\ \frac{\partial^2}{\partial z\, \partial \overline{z}}\ ln\ \frac{1}{R(z)},$$

il suit que $-\ ln\ R(z)$ est harmonique.

(ii) $\Rightarrow$ (i) : on applique la transformation du théorème 4.2, $T = \{\zeta = z\ ,\ \omega = f(z)\, w\}$ où

$$|f(z)| = [R(z)]^{-1}.$$

Alors $\delta_G(z\ ,0) = \delta_U(\zeta\ ,0)\ \Delta(T)$ (théorème 3.3) et

$$\Delta(T) = \overline{f(0)}\ [\overline{f(z)}]^{-1}$$

pour le cas considéré. En outre $\delta_U \equiv 1$ et ainsi

$$\overline{\delta_G(z\ ,0)} = f(0)\ [f(z)]^{-1}.$$

Ceci prouve (i).

Il est possible d'éclaircir le problème de l'équivalence avec le bicylindre des domaines de Hartogs complets et bornés dans C^2 grâce au :

THEOREME 4.4. – *Si* $G = \{B\ ,\ |w| < R(z)\}$ *est un domaine complet de Hartogs dans* C^2 *et si* B *est simplement connexe, il existe un isomorphisme* $T \in \mathscr{C}_G$ *de* G *sur* $U = \{|\zeta| < 1\ ,\ |\omega| < 1\}$ *si et seulement si* – *ln* $R(z)$ *est harmonique.*

Démonstration. – Quand – *ln* $R(z)$ est harmonique, on applique le théorème 4.2. Supposons qu'il existe

$$T \in \mathscr{C}_G\ ,\ T = \{\zeta = \varphi(z)\ ,\ \omega = \psi(z\ ,\ w)\}$$

telle que $T(G) = U$. Alors

$$K_G(z\ ,0\ ,\bar{z}\ ,\bar{0}) = K_U(\zeta\ ,0\ ,\bar{\zeta}\ ,\bar{0})\ |\varphi'(z)|^2 \left|\frac{\partial\psi}{\partial w}\right|^2_{(z,0)}$$

d'où, compte tenu de $\gamma_U \equiv 1$ (et alors dans ce cas, grâce au théorème 3.2, $\gamma_G \equiv 1$), on obtient

$$K_B(z\ ,\bar{z})\ K_{S_z}(0\ ,\bar{0}) = K_{B^*}(\zeta\ ,\bar{\zeta})\ |\varphi'(z)|^2\ \frac{1}{\pi}\left|\frac{\partial\psi}{\partial w}\right|^2_{(z,0)},$$

où B^* : $|\zeta| < 1$. Il vient $K_{S_z}(0\ ,\bar{0}) = \dfrac{1}{\pi}\left|\dfrac{\partial\psi}{\partial w}\right|^2_{(z,0)}$ qui peut s'écrire

$$\frac{1}{\pi R^2(z)} = \frac{1}{\pi}\left|\frac{\partial\psi}{\partial w}\right|^2_{(z,0)}$$

et ainsi

$$2\,\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial\bar{z}}\,ln\,\frac{1}{R(z)} = \frac{\partial^2}{\partial z\,\partial\bar{z}}\,ln\left|\frac{\partial\psi}{\partial w}\right|^2_{(z,0)} = 0.$$

La dernière égalité est satisfaite puisque $\left|\dfrac{\partial\psi}{\partial w}\right|_{(z,0)}$ est holomorphe en z dans B.

5. La métrique de Bergman des domaines de classe (S).

Dans ce paragraphe considérons un domaine G de classe (S) dans C^2 de base B et de fibres S_z. Au § 1, nous avons obtenu (1.12) que nous écrirons ici :

$$dS_G^2 = dS_B^2 + H(\ln N_G, dz, d\bar{z}, dw, d\bar{w}) \tag{5.1}$$

où

$$H = \frac{\partial^2 \ln N_G}{\partial z\, \partial \bar{z}} |dz|^2 + \frac{\partial^2 \ln N_G}{\partial z\, \partial \bar{w}} dz\, d\bar{w} + \frac{\partial^2 \ln N_G}{\partial \bar{z}\, \partial w} d\bar{z}\, dw + \frac{\partial^2 \ln N_G}{\partial w\, \partial \bar{w}} |dw|^2. \tag{5.2}$$

Compte tenu de (1.5), il vient :

$$dS_G^2 = dS_B^2 + dS_R^2 + H(\ln \alpha_G, dz, d\bar{z}, dw, d\bar{w}). \tag{5.3}$$

Ainsi l'élément de métrique de Bergman dS_G^2 de G s'exprime à l'aide des éléments dS_B^2 et dS_R^2 ($R = \pi_2(G)$).

Soit $G \in (S)$ dans C^2 et $\gamma_G \equiv 1$. En appliquant (1.8) et (5.1), on obtient

$$dS_G^2 = dS_B^2 + H(\ln K_{S_z}, dz, d\bar{z}, dw, d\bar{w}) \tag{5.4}$$

d'où il vient $dS_G^2|_{dz=0} = dS_{S_z}^2$ et

$$dS_G^2|_{\substack{dw=0\\ w=0}} = dS_B^2 + \frac{\partial^2}{\partial z\, \partial \bar{z}} \ln K_{S_z}(w, \bar{w})|_{w=0} |dz|^2 \tag{5.5}$$

qui montre que la restriction de la métrique de Bergman de G sur B ne coïncide pas avec la métrique de la base dS_B^2. Rien ne nous assure que le second terme de la somme à droite de (5.5) est égal à zéro.

Dans le cas particulier où G est un domaine de Hartogs,

$$G = \{B, |w| < R(z)\},$$

de rapides calculs effectués sur $K_{S_z}(w, \bar{w})$ donnent

$$\frac{\partial^2}{\partial z\, \partial \bar{z}} \ln K_{S_z}(w, \bar{w})|_{w=0} = -2 \frac{\partial^2}{\partial z\, \partial \bar{z}} \ln R(z).$$

Formulons ce résultat ainsi :

THEOREME 5.1. – *Soit* $G = \{B\ ,\ |w| < R(z)\}$ *un domaine de Hartogs dans* C^2, *tel que* $\gamma_G(z\ ,\ w) \equiv 1$. *Alors*

$$dS^2_{G|B} - dS^2_B = 2\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial \bar{z}}\ ln\ \frac{1}{R(z)}\ |dz|^2 . \tag{5.6}$$

On voit que pour inverser le théorème de Bremerman même dans ce cas précis, en plus de $\gamma_G \equiv 1$, il faut nous assurer que

$$\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial \bar{z}}\ ln\ \frac{1}{R(z)} = 0$$

Ceci confirme le théorème 4.2. On trouve alors que G est isomorphe au bicylindre $U = \{|\zeta| < 1\ ,\ |\omega| < 1\}$.

Une autre confirmation du théorème 5.1 peut être obtenue en prenant l'exemple A.b. du § 1, $G \equiv \widetilde{R}_p = \{|z|^2 + |w|^{2/p} < 1\}$. On trouve

$$\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial \bar{z}}\ ln\ \frac{1}{R^2(z)} = \frac{p}{(1 - |z|^2)^2}$$

et $-\ ln\ R(z)$ est harmonique seulement si $p = 0$. On a alors $\widetilde{R}_0 \equiv U$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. BERGMAN, The Kernel function and conformal mapping, *Math. Surveys* N° 5, Amer. Math. Soc., Sec. Ed. (1970).

[2] S. BERGMAN, Sur les fonctions orthogonales de plusieurs variables complexes, *Mem. Sci. Math.*, Paris, 106 (1947).

[3] S. BERGMAN, Uber die Kernfunction eines Bereiches und ihr Verhalten am Rande, *J. Reine Angew. Math.*, 169 (1933),172 (1935).

[4] S. BERGMAN, On Pseudo-conformal images of circular domains, *Journal d'Analyse*, Jerusalem (1969).

[5] S. BERGMAN, Some properties of pseudo-conformal images of circular domains in the theory of two complex variables, *Proc. Conf. Complex Analysis*, Minneapolis, (1964).

[6] H. CARTAN, Les fonctions de deux variables complexes et le problème de la représentation analytique, *J. Math. Pures et Appl.*, 10 (1931).

[7] B.A. FUKS, Special chapters in the theory of functions of several complex variables, Fizmatgiz, Moscow (1963).

[8] A. LICHNEROWICZ, Variétés complexes et tenseur de Bergmann, *Annales Inst. Fourier*, Grenoble, 15,2 (1965).

[9] M. MASCHLER, Minimal domains and their Bergman kernels, *Pacif. J. Math.*, 6 (1956).

[10] I.P. RAMADANOV, An inverse of a theorem of Bremerman for Reinhardt domains, *C.R. Acad. bulg. Sci.*, 28, 1 (1975).

[11] I.P. RAMADANOV, The Bergman kernel function in special domains in C^n and some problems of biholomorphic mappings, *C.R. Acad. bulg. Sci.*, 28, 2 (1975).

[12] Suzuki MASAAKI, Note on Hartogs domains, *Memor. Fac. Sci. Kyushu Univ.*, Ser. A, 22 (1968).

Manuscrit reçu le 8 juillet 1974
Accepté par J.L. Koszul.

Ivan-Pierre RAMADANOV,
Institut de Mathématiques et Mécanique
Académie Bulgare des Sciences
B.P. 373
Sofia (Bulgarie).