ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

CLAUDE LAMOUREUX

Quelques conditions d'existence de feuilles compactes

Annales de l'institut Fourier, tome 24, nº 4 (1974), p. 229-240

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1974__24_4_229_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
24, 4 (1974), 229-240.

QUELQUES CONDITIONS D'EXISTENCE DE FEUILLES COMPACTES

par Claude LAMOUREUX

Les feuilletages $\mathcal{F}$ étudiés sont des feuilletages de codimension 1, transversalement orientables pour simplifier l'exposé, transversalement C^2 sauf mention contraire, et tangents au bord éventuel ∂X de la variété connexe X qu'ils feuillettent.

L'un des objets de ce travail est de démontrer le théorème suivant :

Théorème 1. — *Soit* $(M_i)_{i\in I}$ *une famille d'ensembles fermés saturés d'un feuilletage* $\mathcal{F}$ *d'une variété* X, *tels que* $\bigcap_{i\in J} M_i$ *est vide pour tout sous-ensemble infini* J *de* I (*). *Nous notons* $\mathcal{R}$ *la réunion* $\bigcup_{i\in I} M_i$. *Alors toute feuille relativement compacte de* $\overline{\mathcal{R}} - \mathcal{R}$ *est une feuille compacte.*

La conclusion du théorème 1 s'applique à toutes les feuilles de $\overline{\mathcal{R}} - \mathcal{R}$ lorsque X est, par exemple, une variété compacte.

Considérons en particulier le cas d'une réunion $\mathcal{R}'$ de feuilles compactes d'une variété compacte : l'enveloppe [5] $\overline{\mathcal{R}'} - \mathcal{R}'$ de $\mathcal{R}'$ est une réunion de feuilles compactes d'après le théorème 1; donc $\overline{\mathcal{R}'}$ est encore une réunion de feuilles compactes. Nous avons donc là, pour les feuilletages transver-

(*) Cette condition est évidemment vérifiée lorsque les ensembles M_i sont deux à deux disjoints.

salement C^2 des variétés compactes, une nouvelle démonstration d'une propriété bien connue due à Haefliger [1], cf. théorème p. 386 de [2], qui permet de réduire la démonstration du théorème de stabilité totale de Reeb [9] à celle du théorème de stabilité locale.

L'énoncé du théorème 1 nous a été suggéré par l'étude des phénomènes de captage dans les variétés X compactes ou non compactes, simplement connexes [3] ou de la forme $X' \times I$ par exemple [4]. Nous avons obtenu pour ces variétés, ainsi que pour les variétés X de groupe fondamental une extension finie de Z [6], des théorèmes similaires dont les démonstrations valables pour des feuilletages seulement C^1, voire C^0, sont toutefois fort différentes [4, 7].

En ce qui concerne les feuilletages des variétés compactes, nous obtenons aussi les :

Corollaire 1. — *La réunion des ensembles minimaux d'un feuilletage $\mathcal{F}$ d'une variété compacte est compacte.*

Théorème 2. — *Un feuilletage $\mathcal{F}$ d'une variété compacte n'admet qu'un nombre fini d'ensembles minimaux exceptionnels.*

Ces deux résultats permettent de mieux comprendre la structure des feuilletages des variétés compactes. Le théorème 2 a déjà trouvé une application directe dans l'étude de la structure des feuilletages transversalement analytiques des variétés compactes (Hector, thèse, 9 juin 1972, p. 97), cf. [12].

Le théorème 2 montre que par un nombre fini de tourbillonnements de Reeb on peut toujours ramener l'étude d'un feuilletage $\mathcal{F}$ d'une variété compacte à celle d'un feuilletage $\mathcal{F}'$ dont tous les ensembles minimaux sont des feuilles compactes.

Une transversale fermée homotope à zéro d'un feuilletage d'une variété quelconque ne rencontre qu'un nombre fini d'ensembles fermés saturés minimaux du feuilletage [3]; cette propriété reste vérifiée pour toute transversale fermée d'un feuilletage d'une variété compacte lorsque les feuilles compactes du feuilletage sont toutes isolées.

Enfin, toujours d'après le théorème 2, un feuilletage d'une variété compacte possédant une infinité d'ensembles compacts saturés deux à deux disjoints et non vides, possède des feuilles compactes.

Le plan de ce travail est le suivant : nous démontrons au paragraphe 1 ces trois lemmes :

LEMME 1. — *Une feuille* F *d'un feuilletage topologique* $\mathcal{F}$ *est compacte si et seulement si la condition suivante est réalisée : la feuille* F *n'est pas captée, au sens de* [4] *ou* [5], *et son adhérence contient une feuille compacte.*

LEMME 2. — *Soit* x_0 *un point d'une feuille compacte* G *d'un feuilletage topologique* $\mathcal{F}$. *Il existe un voisinage ouvert* $\mathcal{V}$ *de* x_0 *dans* X *tel que l'adhérence de toute feuille de* $\mathcal{F}$ *rencontrant* $\mathcal{V}$ *contient une feuille compacte et que toute feuille non captée de* $\mathcal{F}$ *rencontrant* $\mathcal{V}$ *est une feuille compacte. Si* G *est une feuille compacte isolée, on peut choisir* $\mathcal{V}$ *tel que l'enveloppe* $\overline{\mathrm{F}} - \mathrm{F}$ *de toute feuille* F *de* $\mathcal{F}$ *rencontrant* $\mathcal{V}$ *et différente de la feuille* G, *contient la feuille compacte* G.

LEMME 3. — *Une feuille* F *d'un feuilletage* $\mathcal{F}$ *dont l'adhérence contient un ensemble minimal exceptionnel compact* E *est une feuille captée.*

La démonstration des lemmes 1 et 2 utilise les ouverts distingués réguliers de Reeb [9]; le lemme 2 n'intervient que dans la démonstration du théorème 2. Le lemme 3 résulte du lemme 12.1 de Sacksteder [10].

Nous pouvons alors démontrer au paragraphe 2 la caractérisation suivante des feuilles compactes et quelques-unes de ses applications :

CARACTÉRISATION DES FEUILLES COMPACTES. — *Soit* $\mathcal{F}$ *un feuilletage d'une variété* X *connexe vérifiant l'une des trois propriétés suivantes :*

— $\mathcal{F}$ *possède une feuille non partout dense ;*
— $\mathcal{F}$ *possède une feuille dont l'holonomie n'est pas triviale ;*
— X *n'est pas compacte.*

Alors une feuille F *relativement compacte de* $\mathcal{F}$ *est compacte si et seulement si elle n'est pas captée.*

Les démonstrations du théorème 1, du corollaire 1 et du théorème 2 occupent le paragraphe 3.

Pour éclairer le contenu des théorèmes 1 et 2, nous présentons au paragraphe 4 une remarque concernant la caractérisation des feuilles compactes, puis

— un feuilletage $\mathscr{F}^1$ d'une variété non compacte M^2 qui contient une réunion $\mathscr{R}$ de feuilles fermées dont l'enveloppe $\overline{\mathscr{R}} - \mathscr{R}$ est non vide et ne contient aucune feuille fermée; de plus la réunion de tous les ensembles fermés saturés minimaux de $\mathscr{F}^1$ n'est pas fermée;

— un feuilletage $\mathscr{F}^2$ d'une variété non compacte qui possède une infinité d'ensembles minimaux exceptionnels; voir aussi à ce sujet la remarque 6;

— une famille $(\mathscr{F}^3_N)_{N=1,\dots}$ de feuilletages de variétés M_N compactes, connexes, sans bord, qui est telle que le feuilletage $\mathscr{F}^3_N$ a exactement N ensembles minimaux exceptionnels et n'a aucune feuille compacte.

Remarquons que les exemples connus possèdent un seul ensemble minimal exceptionnel provenant d'un sous-groupe convenable de $\mathrm{Diff}^2(S^1)$, ou bien possèdent des feuilles compactes provenant d'un recollement de plusieurs variétés compactes à bord admettant un seul ensemble minimal exceptionnel. Ce dernier procédé permet d'ailleurs de construire pour tout entier N et sur toute variété compacte orientable de dimension 3 un feuilletage C^∞ ayant exactement N ensembles minimaux exceptionnels.

1. Démonstration des lemmes 1, 2 et 3.

Une feuille compacte F n'est pas captée, cf. [5], et son adhérence contient une feuille compacte. Pour démontrer le lemme 1, il suffit de démontrer la réciproque de cette affirmation. Considérons une feuille compacte G adhérente à une feuille non captée F; nous pouvons supposer G différente de F.

Soit $\mathscr{U}$ un recouvrement fini de la feuille G par des ouverts distingués réguliers au sens de Reeb [9], $U_1, \dots, U_i, \dots, U_N$: l'adhérence de chaque U_i est ainsi contenue dans un ouvert distingué du feuilletage. Nous pouvons supposer que chaque U_i contient exactement une plaque de la feuille G. Nous fixons un point-base x_0 de G dans $U_1 \cap G$.

Nous considérons les chaînes finies de plaques du recouvrement $\mathcal{U}_G$ induit par $\mathcal{U}$ sur G, dont les plaques initiale et finale sont $U_1 \cap G$: puisque le recouvrement $\mathcal{U}_G$ de G est fini, il nous suffit pour la suite de considérer une famille finie de telles chaînes fermées $\gamma_1, \ldots, \gamma_j, \ldots, \gamma_K$ à l'aide de laquelle on pourra écrire toutes les autres.

Il existe alors un voisinage ouvert $\mathcal{V}$ de x_0 dans X tel que, pour tout point x de $\mathcal{V}$, chaque chaîne fermée γ_j, ainsi que la chaîne inverse γ_j^{-1}, est relevable en une chaîne $\gamma_j(x)$, resp. $\gamma_j^{-1}(x)$, de plaques de la feuille F_x de $\mathcal{F}$ qui contient x.

S'il existe une de ces chaînes, notée γ, telle que $\gamma(x)$ est définie et n'est pas une chaîne fermée de la feuille F_x, alors la feuille F_x est captée : soit en effet une application continue i de $[0, 1[\times S^1$ dans X, transverse à $\mathcal{F}$, telle que $i(0 \times S^1)$ est un lacet contenu dans la réunion des plaques de γ dont le relevé dans F_x d'origine x est contenu dans la réunion des plaques de $\gamma(x)$ et n'est pas un lacet; une théorie topologique de Poincaré-Bendixson pour $i^*(\mathcal{F})$ conclut alors au captage de la feuille F_x de $\mathcal{F}$. Pour plus de détails, cf. chap. III, 3 de [7].

Nous notons par P_x la réunion des plaques des chaînes $\gamma_1(x), \ldots, \gamma_j(x), \ldots, \gamma_K(x)$ pour une feuille F_x rencontrant $\mathcal{V}$ au point x. Si F_x n'est pas captée, P_x est une réunion finie de plaques de $\mathcal{F}$ d'après ce qui précède : P_x est alors relativement compacte dans F_x et dans X. On peut supposer que l'ouvert $\mathcal{V}$ a été choisi de telle façon que l'adhérence de chaque plaque de P_x dans F_x est contenue dans P_x, puisque chaque ouvert de $\mathcal{U}$ est régulier et puisque $\mathcal{U}$ est un recouvrement fini. Donc P_x est fermé dans F_x et dans X.

Or P_x est évidemment un ouvert non vide de la feuille F_x, donc P_x est exactement la feuille F_x qui est une feuille fermée relativement compacte de $\mathcal{F}$. Le lemme 1 est donc démontré.

Afin de démontrer le lemme 2, nous reprenons le voisinage ouvert $\mathcal{V}$ de x_0 de la démonstration du lemme 1. D'après ce qui précède, toute feuille non captée F de $\mathcal{F}$ rencontrant $\mathcal{V}$ est une feuille compacte. Soit F une feuille qui rencontre

$\mathscr{V}$ en un point x et qui est différente de la feuille G. Nous pouvons supposer que $\mathscr{V}$ est un ouvert distingué de $\mathscr{F}$ et considérer un segment $I = [0, 1]$ plongé dans $\mathscr{V}$, transverse à $\mathscr{F}$, d'origine $x_0 = 0$ et d'extrémité $x = 1$. D'après ce qui précède, l'une au moins des chaînes $\gamma_1(x), \ldots, \gamma_K(x), \gamma_1^{-1}(x), \ldots, \gamma_K^{-1}(x)$ n'est pas une chaîne fermée si F n'est pas une feuille compacte. Donc la feuille F recoupe I en un point x' strictement compris entre 0 et 1. Cette construction peut être répétée une infinité de fois et montre que $I \cap F$ est infini lorsque F n'est pas compacte. Posons dans ce cas $z = \operatorname{Inf}(I \cap F)$; nous pouvons évidemment supposer $z \neq 0$ sans restreindre la généralité.

La feuille H de $\mathscr{F}$ contenant z n'est pas la feuille F, sinon la construction précédente serait applicable au point z et fournirait un point de F dans $]0, z[$, contrairement à la définition de z.

La feuille H, qui est adhérente à F d'après ce qui précède, est compacte : sinon elle rencontrerait $]0, z[$, d'après la construction faite ci-dessus pour F, et la feuille F rencontrerait à nouveau $]0, z[$ contrairement à la définition de z.

Lorsque la feuille G est isolée, nous pouvons de plus choisir le voisinage ouvert $\mathscr{V}$ de telle façon qu'il ne rencontre qu'une feuille compacte, la feuille G, et la totalité du lemme 2 est démontrée.

Remarque 1. — Il résulte directement du lemme 2 qu'une feuille compacte possède un voisinage saturé $S(\mathscr{F})$ tel que tout ensemble minimal de $\mathscr{F}$ rencontrant $S(\mathscr{F})$ est réduit à une feuille compacte.

Remarque 2. — Il existe des feuilles non captées, dont l'enveloppe est constituée d'une feuille fermée non compacte, qui ne sont pas fermées, cf. les spirales d'un voisinage ouvert convenable d'un cycle-limite λ d'un feuilletage analytique auquel on a retiré un point de λ.

Le lemme 3 résulte du lemme 12.1 de [10]. En effet tout ensemble minimal exceptionnel compact E d'un feuilletage transversalement orientable et transversalement de classe C^2 contient une feuille H portant un lacet d'holonomie monotone de part et d'autre; puisque E adhère à la feuille F, on vérifie que la feuille F est une feuille captée par la feuille H.

Remarque 3. — Les feuilles du feuilletage C^1 de Denjoy sont des feuilles non captées dont l'adhérence contient un ensemble minimal exceptionnel compact.

2. Démonstration de la caractérisation des feuilles compactes.

Nous avons déjà vu qu'une feuille compacte n'est pas captée : une feuille compacte est évidemment relativement compacte. Réciproquement, considérons une feuille F relativement compacte non captée d'un feuilletage $\mathcal{F}$ transversalement C^2 d'une variété X connexe.

L'adhérence de F dans X est un compact saturé non vide de $\mathcal{F}$ qui contient au moins un ensemble minimal compact E. Rappelons que E peut être X, ou une feuille compacte de $\mathcal{F}$, dans les autres cas il est dit exceptionnel. Le lemme 3 montre que E n'est pas exceptionnel.

Lorsque E est réduit à une feuille compacte, la caractérisation des feuilles compactes que constitue le lemme 1 montre que la feuille F est une feuille compacte.

Si E est la variété X toute entière, alors X est compacte : toutes les feuilles du feuilletage sont partout denses dans X; enfin le feuilletage $\mathcal{F}$ est sans holonomie, c'est-à-dire que toute feuille de $\mathcal{F}$ est d'holonomie triviale : sinon il existerait une feuille H portant un lacet d'holonomie monotone, et comme F est partout dense dans X, on vérifie qu'elle serait captée par la feuille H. Ces propriétés ne peuvent pas être vérifiées toutes les trois simultanément, par hypothèse, donc la feuille F est compacte et la caractérisation annoncée est démontrée.

Applications. — Une feuille *non captée* d'un feuilletage $\mathcal{F}$ d'une variété compacte X est alors automatiquement *compacte* lorsque le feuilletage contient une feuille compacte, éventuellement située dans le bord ∂X (ou plus généralement lorsqu'il contient une feuille non partout dense dans X), mais aussi lorsque le feuilletage $\mathcal{F}$ a de l'holonomie : c'est le cas, d'après des résultats de Reeb, Sacksteder, Tischler, Moussu lorsque X n'est pas fibrée sur S^1, lorsque le groupe fondamental de X n'admet pas de quotient abélien libre de rang strictement supérieur à 1, lorsqu'il n'existe aucun entier fixe $p(\mathscr{F}) \geqslant 2$ tel que la suite

$$0 \to \pi_1(F, x) \xrightarrow{i_\#} \pi_1(X, x) \to Z^{p(\mathscr{F})} \to 0$$

soit exacte pour chaque feuille F de $\mathscr{F}$ d'injection i dans X, lorsque le feuilletage induit sur le revêtement universel $\hat{X}$ de X n'est pas un feuilletage produit $\hat{F} \times R$, etc...

3. Démonstration du théorème 1, du corollaire 1 et du théorème 2.

Les propriétés des feuilles captées et la caractérisation démontrée au paragraphe 2 permettent de passer à la démonstration des résultats annoncés dans l'introduction.

Démonstration du théorème 1. — Soit $(M_i)_{i \in I}$ la famille d'ensembles fermés saturés du feuilletage $\mathscr{F}$ de la variété X intervenant dans l'énoncé du théorème 1. Remarquons immédiatement que l'existence d'une feuille F dans $\overline{\mathscr{R}} - \mathscr{R}$ implique que la réunion $\mathscr{R}$ n'est pas fermée dans X, et que l'un des ensembles fermés saturés de la famille $(M_i)_{i \in I}$ est à la fois non vide et différent de X. Le feuilletage $\mathscr{F}$ possède une feuille non partout dense et la caractérisation du paragraphe 2 montre qu'une feuille de $\mathscr{F}$ est compacte si et seulement si elle est relativement compacte et non captée.

Pour démontrer le théorème 1, il suffit donc de montrer que toute feuille relativement compacte de $\overline{\mathscr{R}} - \mathscr{R}$ est une feuille non captée. Supposons plus généralement que $\overline{\mathscr{R}} - \mathscr{R}$ possède une feuille F captée par une feuille H. En considérant plus attentivement la définition d'une feuille captée, on vérifie que la feuille F possède un voisinage ouvert saturé $\mathscr{W}$ composé de feuilles captées par la feuille H.

Puisque la feuille F est dans l'enveloppe $\overline{\mathscr{R}} - \mathscr{R}$ de la réunion des ensembles saturés M_i qui sont fermés dans X, il existe un sous-ensemble infini I' de I et une suite de points $(x_i)_{i \in I'}$ telle que x_i appartient à $M_i \cap \mathscr{W}$ pour tout élément i de I'. La feuille F_i de $\mathscr{F}$ contenant x_i est alors captée par H pour tout élément i de I'. Or chacun des ensembles $(M_i)_{i \in I'}$ est fermé et la feuille H est dans l'adhérence de chaque feuille de la famille $(F_i)_{i \in I'}$, donc la feuille H appartient à l'intersection $\bigcap_{i \in I'} M_i$, où I' est un sous-ensemble infini de I. Cette contradiction démontre le théorème 1.

Remarque 4. — Une forme très particulière prise par le théorème 1 dans le cas d'une variété compacte est la suivante : *l'enveloppe d'une réunion de compacts saturés deux à deux disjoints est une réunion de feuilles compactes.*

Démonstration du corollaire 1. — La remarque 4 s'applique à la réunion $\mathscr{M}$ de tous les ensembles minimaux du feuilletage de la variété compacte considérée, car deux ensembles minimaux distincts sont disjoints. Donc $\overline{\mathscr{M}} - \mathscr{M}$ est une réunion de feuilles compactes; puisqu'une feuille compacte est un ensemble minimal contenu dans $\mathscr{M}$, il en résulte que $\overline{\mathscr{M}} - \mathscr{M}$ est vide, donc que $\mathscr{M}$ est compacte.

Démonstration du théorème 2. — La remarque 4 s'applique également à la réunion $\mathscr{M}_{ex}$ de tous les ensembles minimaux exceptionnels du feuilletage d'une variété compacte, mais cela ne permet pas de démontrer le théorème 2. De même le lemme 3 montre que $\mathscr{M}_{ex}$ est une réunion dénombrable, mais ne permet pas de démontrer que c'est une réunion finie. Supposons que le feuilletage $\mathscr{F}$ possède une infinité d'ensembles minimaux exceptionnels distincts et choisissons exactement un point dans chacun d'eux. Soit x un point d'accumulation de l'ensemble infini ainsi obtenu. Si la feuille F_x de $\mathscr{F}$ contenant x était captée par une feuille G, la feuille G serait contenue dans une infinité d'ensembles minimaux exceptionnels distincts deux à deux, d'après un argument déjà utilisé lors de la démonstration du théorème 1; or cela est impossible. Puisque le feuilletage $\mathscr{F}$ possède des feuilles exceptionnelles, la caractérisation démontrée au paragraphe 2 s'applique : il en résulte que la feuille non captée F_x est compacte. Le voisinage ouvert saturé $S(\mathscr{F})$ de F_x introduit dans la remarque 1 qui suit la démonstration du lemme 2 ne rencontre aucun ensemble minimal exceptionnel, d'où la contradiction désirée. Le théorème 2 est démontré.

4. Remarque et exemples.

Ce paragraphe contient une remarque concernant la caractérisation démontrée au paragraphe 2 ainsi que la construction des feuilletages $\mathcal{F}^1$, $\mathcal{F}^2$ et $\mathcal{F}^3_N$ annoncés dans l'introduction.

Remarque 5. — Nous avons mis en évidence dans des feuilletages C^∞ de variétés non compactes de groupe fondamental de type fini [8] des feuilles non captées qui peuvent être propres non fermées, et des feuilles non captées qui peuvent être denses non partout denses.

Construction de $\mathcal{F}^1$. — Considérons un ensemble de points deux à deux distincts $(x_n)_{n\in Z}$ d'une feuille F d'un feuilletage linéaire $\mathcal{L}$ de T^2 ayant une pente irrationnelle, tel que les réunions $\bigcup_{n>0} x_n$ et $\bigcup_{n<0} x_n$ définissent chacune exactement un bout de F et admettent x_0 comme unique point d'accumulation dans T^2. Le feuilletage $\mathcal{F}^1$ est par définition le feuilletage induit par $\mathcal{L}$ sur la variété ouverte

$$M^2 = T^2 - \bigcup_{n\in Z} x_n ;$$

on vérifie que le feuilletage $\mathcal{F}^1$ possède les propriétés indiquées dans l'introduction.

Construction de $\mathcal{F}^2$. — Considérons un feuilletage de $T^2 \times I$ tangent au bord et admettant une feuille non compacte. Nous faisons une opération de tourbillonnement de Reeb à ce feuilletage, mais en remplaçant le feuilletage de la composante de Reeb par un feuilletage de Raymond admettant un ensemble minimal exceptionnel; puis nous recollons entre eux le long de leurs bords une infinité d'exemplaires de ces variétés feuilletées. Nous obtenons un feuilletage $\mathcal{F}^2$ de $T^2 \times R$ ayant la propriété indiquée dans l'introduction.

Construction des $\mathcal{F}^3_N$. — Pour $\mathcal{F}^3_1$ nous prenons par exemple le feuilletage de Sacksteder [11] de $M_1 = S^1 \times M^2_2$ qui possède un ensemble minimal unique E_1 exceptionnel. En reprenant les notations de [11], nous considérerons un point x de S^1 appartenant à $]5/3, 2[$. Nous pouvons supposer que g est croissante sur $[5/3, 2]$ et que $g(x) \neq x$. Alors $[x, g(x)]$ rencontre toutes les orbites de G non contenues dans C et ne rencontre pas C. Le saturé d'une transversale fermée τ_1 obtenue à partir du segment $[x, g(x)]$ est alors $M_1 - E_1$.

Introduisons maintenant une *notation* commode : soient $\mathscr{G}$ et $\mathscr{G}'$ deux feuilletages C^∞ et tangents au bord de variétés M^n et M'^n admettant respectivement les transversales fermées τ et τ'. Considérons les complémentaires respectifs dans M et M' de voisinages tubulaires ouverts suffisamment petits U et U' de τ et τ' : ce sont deux variétés N et N' à bord munies de feuilletages $\mathscr{G}_0$ et $\mathscr{G}_0'$ transverses le long des composantes du bord introduites n_0 et n_0' : n_0 et n_0' sont difféomorphes à $S^1 \times S^{n-2}$ et sont trivialement feuilletées. On peut alors recoller N et N' entre elles à l'aide de l'identité $i : n_0 \to n_0'$; on obtient ainsi une nouvelle variété que nous noterons $M \bigcup_{\tau\tau'} M'$; elle est munie d'un feuilletage C^∞ tangent au bord que nous noterons $\mathscr{G} \bigcup_{\tau\tau'} \mathscr{G}'$ et elle admet au moins une transversale fermée, notée $\tau \cup \tau'$ par abus de langage, provenant d'une transversale fermée standard de $n_0 = n_0' = S^1 \times S^{n-2}$.

Nous posons $M_2 = M_1 \bigcup_{\tau_1\tau_1'} M_1'$ et $\mathscr{F}_2^3 = \mathscr{F}_1^3 \bigcup_{\tau_1\tau_1'} \mathscr{F}'^3_1$, où $(M_1', \mathscr{F}'^3_1)$ désigne un second exemplaire de $(M_1, \mathscr{F}_1^3)$. Le feuilletage $\mathscr{F}_2^3$ possède les propriétés annoncées, pour $N = 2$, et une transversale fermée τ_2 (par exemple $\tau_1 \cup \tau_1'$) dont le saturé est le complémentaire dans M_2 de la réunion des deux ensembles minimaux exceptionnels de $\mathscr{F}_2^3$.

Pour $N \geqslant 3$, nous posons

$$M_N = M_1 \bigcup_{\tau_1\tau_{N-1}} M_{N-1} \quad \text{et} \quad \mathscr{F}_N^3 = \mathscr{F}_1^3 \bigcup_{\tau_1\tau_{N-1}} \mathscr{F}_{N-1}^3,$$

avec $\tau_{N-1} = \tau_1 \cup \tau_{N-2}$.

Remarque 6. — *a*) En recollant entre eux une infinité d'exemplaires de $(M_1, \mathscr{F}_1^3)$ de la façon indiquée ci-dessus le long de τ_1 et d'une seconde transversale fermée contenue dans $M_1 - E_1 - \tau_1$, on obtient une variété non compacte admettant un feuilletage C^∞ sans feuilles fermées possédant une infinité d'ensembles minimaux exceptionnels.

b) Toute feuille de $\mathcal{F}^3_N$ non contenue dans un ensemble minimal, c'est-à-dire toute feuille du saturé de τ_N, contient dans son adhérence les N ensembles minimaux exceptionnels de $\mathcal{F}^3_N$ (elle est donc captée par au moins N feuilles différentes).

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Haefliger, Sur des feuilletages de variétés de dimension n par des feuilles fermées de dimension $n-1$, *Colloque de Topologie,* Strasbourg, 1955.
[2] A. Haefliger, *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa,* ser. III, vol. XVI (1962), 367.
[3] C. Lamoureux, *C. R. Acad. Sci. Paris,* 270, série A (1970), 1659.
[4] C. Lamoureux, Foliations of codimension one of not necessarily compact spaces. Differentialtopologie : speziell Blätterungen, Oberwolfach, Mai 1971.
[5] C. Lamoureux, *C. R. Acad. Sci. Paris,* 274, série A (1972), 31.
[6] C. Lamoureux, *Annales de l'Institut Fourier,* Grenoble, XXIII, fasc. 4 (1973), 229.
[7] C. Lamoureux, Feuilletages de codimension un des variétés compactes et non compactes (Thèse).
[8] C. Lamoureux, Sur des feuilles simplement connexes d'adhérence éventuellement sans composante connexe compacte (à paraître).
[9] G. Reeb, Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées, Hermann, Paris, 1952.
[10] R. Sacksteder, *American Journal of Mathematics,* 87 (1965), 79.
[11] R. Sacksteder, *Annales de l'Institut Fourier,* Grenoble, XIV, fasc. 2 (1964), 221.
[12] G. Hector, Sur un théorème de structure des feuilletages de codimension un. (Thèse), 1972.

Manuscrit reçu le 30 novembre 1973,
accepté par G. Reeb.

Claude Lamoureux,
64, boulevard Arago
75013 Paris.