ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

ALAIN CONNES

Caractérisation des espaces vectoriels ordonnés sous-jacents aux algèbres de von Neumann

Annales de l'institut Fourier, tome 24, n° 4 (1974), p. 121-155

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1974__24_4_121_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
24, 4 (1974), 121-155.

CARACTÉRISATION DES ESPACES VECTORIELS ORDONNÉS SOUS-JACENTS AUX ALGÈBRES DE VON NEUMANN

par Alain CONNES

Soit M une algèbre de von Neumann (rappelons que M est en particulier une algèbre involutive), l'espace vectoriel M, muni de l'ordre correspondant au cône $M_+ = \{y^*y,\ y \in M\}$ est l'espace vectoriel ordonné sous-jacent à M.

Le but de cet article est de caractériser la classe d'espaces vectoriels ordonnés ainsi obtenue. L'un des outils essentiels de cette caractérisation est la théorie de Tomita-Takesaki [10].

Dans [1] et [3], H. Araki et l'auteur ont associé indépendamment à tout vecteur totalisateur et séparateur ξ_0 pour l'algèbre de von Neumann M dans $\mathscr{H}$ le cône

$$\mathscr{P}^{\natural}_{\xi_0} = \{\Delta^{1/4}_{\xi_0} M_+ \xi_0\}^-,$$

où Δ_{ξ_0} désigne l'opérateur modulaire ([10]) du triplet $\mathscr{H}$, M, ξ_0. De plus quand M est un facteur le double cône $\mathscr{P}^{\natural}_{\xi_0} \cup - \mathscr{P}^{\natural}_{\xi_0}$ coïncide avec l'ensemble des vecteurs (M, J_{ξ_0}) positifs au sens de Woronowicz [11]. Le résultat principal obtenu ci-dessous est la caractérisation des cônes $\mathscr{P}^{\natural}_{\xi_0}$ par trois propriétés géométriques : autopolarité, homogénéité, orientabilité. Un cône $\mathscr{H}^+$ dans $\mathscr{H}$ est autopolaire quand $\mathscr{H}^+ = \{\xi \in \mathscr{H},\ \langle \xi, \eta \rangle \geqslant 0\ \forall \eta \in \mathscr{H}^+\}$. Un cône autopolaire $\mathscr{H}^+$ est orientable quand le quotient par son centre de l'algèbre de Lie involutive du groupe des transformations linéaires du cône est une algèbre de Lie involutive complexe.

Un cône autopolaire $\mathscr{H}^+$ est homogène quand pour toute face F de $\mathscr{H}^+$ l'opérateur $P_F - P_{F^\perp}$ appartient à l'algèbre de Lie du cône, où P_F désigne le projecteur orthogonal sur le sous-espace engendré par F et $F^\perp$ la face orthogonale à F.

Dans la première section nous caractérisons les formes hermitiennes positives non dégénérées $s(x, y) = \langle \Delta_\varphi^{1/2}\pi_\varphi(x)\xi_\varphi, \pi_\varphi(y)\xi_\varphi\rangle$ (où φ est un état normal fidèle sur M) par la propriété d'autopolarité : s définit un isomorphisme de M_+ sur une face de M_+^*, propriété qui ne met en jeu que l'espace ordonné sous-jacent à M.

Dans la deuxième section nous comparons les complétions $\{M_+\}_s^-$ de M_+ relatives aux diverses formes autopolaires s sur M et montrons l'unicité du cône $\{M_+\}_s^-$ obtenu et l'égalité $\{M_+\}_s^- = \mathscr{P}_{\xi_\varphi}^\natural$. La notion de déphasage spatial (élément de M' associé à tout couple ξ_1, ξ_2 de vecteurs totalisateurs et séparateurs pour M dans $\mathscr{H}$) conduit aux résultats que nous avons annoncés dans [3]. En particulier pour ($\mathscr{H}$, M, ξ_0) donné, tout état normal ψ sur M s'écrit $\psi = \omega_\xi$ pour un unique $\xi \in \mathscr{P}_{\xi_0}^\natural$.

Dans la troisième section nous montrons le principal résultat annoncé dans [3] : quand M est un facteur, $\mathscr{P}_{\xi_0}^\natural$ détermine le couple (M, M'). Puis nous explicitons le groupe des transformations linéaires de $\mathscr{P}_{\xi_0}^\natural$ (une telle transformation est nécessairement continue car $\mathscr{P}_{\xi_0}^\natural$ est faiblement complet), ainsi que son algèbre de Lie : au centre près c'est l'algèbre de Lie des dérivations de M, ce qui détermine une orientation I_M de $\mathscr{P}_{\xi_0}^\natural$ associée à M.

Dans la quatrième section nous montrons que $\mathscr{P}_{\xi_0}^\natural$ est homogène en mettant les faces fermées en bijection avec les projecteurs de M. Puis nous déterminons les orientations possibles de $\mathscr{P}_{\xi_0}^\natural$: quand M est un facteur et $M \neq \mathbf{C}$ il y en a deux : I_M et $I_{M'} = - I_M$, quand M est abélienne il n'y en a qu'une.

Enfin dans la cinquième section nous associons une algèbre de von Neumann à tout cône autopolaire homogène orienté $\mathscr{H}^+$. Quand $\mathscr{H}^+$ est de genre dénombrable (cf. définition 5.8 ci-dessous) elle admet un vecteur totalisateur séparateur ξ_0

tel que $\mathcal{H}^+ = \mathcal{P}_{\xi_0}^{\natural}$. Cela achève d'établir l'isomorphisme de la catégorie des algèbres de von Neumann avec celle des cônes autopolaires homogènes orientés et conduit à une caractérisation des algèbres de von Neumann comme espaces vectoriels ordonnés (Pb posé dans [8]).

1. Formes autopolaires sur l'espace vectoriel ordonné associé à une algèbre de von Neumann.

Soit E, E^+ un espace vectoriel complexe ordonné (i.e. E^+ est un cône convexe dans E). On suppose que E^+ est saillant et que $E^+ - E^+ + iE^+ - iE^+ = E$.

Pour $\xi_1, \xi_2 \in E$, $\xi_2 - \xi_1 \in E^+$ on écrit $\xi_1 \leqslant \xi_2$; et pour toute famille $(\xi_\alpha)_{\alpha \in I}$ d'éléments de E, on note $\bigvee \xi_\alpha$ (resp. $\bigwedge \xi_\alpha$) le plus petit majorant (resp. plus grand minorant), s'il existe, de la famille $(\xi_\alpha)_{\alpha \in I}$. L'élément ξ est une unité d'ordre quand $\forall \eta \geqslant 0$, $\exists n > 0$ tel que $\eta \leqslant n\xi$. Soit E^* le dual algébrique de E; on notera E^*_+ le cône des formes linéaires positives sur E^+.

Soient E, E^+ un espace vectoriel ordonné complexe, s une forme sesquilinéaire sur E; nous notons s^* l'application de E dans E^* qui, à $\xi \in E$ associe s^*_ξ, défini par

$$s^*_\xi(\xi') = s(\xi', \xi), \qquad \forall \xi' \in E.$$

Définition 1.1. — *On appelle forme autopolaire sur l'espace vectoriel ordonné complexe* E, E^+ *toute forme hermitienne positive non dégénérée* s *telle que l'image de* E^+ *par* s^* *soit une face de* E^*_+.

On note alors $\mathcal{H}_s$ l'espace de Hilbert complété de E, η_s l'injection canonique de E dans $\mathcal{H}_s$ et $\mathcal{H}_s^+$ la fermeture de $\eta_s(E^+)$.

Proposition 1.2. — *Soient* E, s, η_s, $\mathcal{H}_s^+$ *comme ci-dessus.*

a) $\xi, \eta \in \mathcal{H}_s^+ \Longrightarrow \langle \xi, \eta \rangle \geqslant 0$.

b) $0 \leqslant \xi \leqslant \eta \Longrightarrow \|\xi\| \leqslant \|\eta\|$.

c) $\eta_s(E^+)$ *est une face de* $\mathcal{H}_s^+$.

d) $\eta_s(x) \geqslant 0 \Longleftrightarrow x \geqslant 0$, $\forall x \in E$.

e) Pour tout $x \in E^+$ *la forme linéaire* s_x^* *est normale au sens suivant: pour toute famille filtrante décroissante* $(y_\alpha)_{\alpha \in I}$ *d'éléments de* E^+, *telle que* $\wedge y_\alpha = 0$, *on a* $s_x^*(y_\alpha) \to 0$ *selon* I.

f) Si $x \in E^+$ *est une unité d'ordre, la forme linéaire* s_x^* *est fidèle:*

Démonstration. — Pour $x, y \in E^+$ on a $s(x, y) = s_y^*(x) \geqslant 0$, les assertions *a*) et *b*) en résultent facilement.

Soient $x \in E^+$ et $\xi \in \mathscr{H}_s^+$ tels que $\xi \leqslant \eta_s(x)$. Pour tout $y \in E$ posons $\psi(y) = \langle \eta_s(y), \xi \rangle$. On a $\psi \in E_+^*$, $\psi \leqslant s_x^*$ donc il existe un $X \in E^+$ tel que $s_X^* = \psi$. Ainsi $\eta_s(X) = \xi$ d'où *c*).

Soit $x \in E$ tel que $\eta_s(x) \geqslant 0$. Comme E^+ engendre E il existe des $x_j \in E^+$, $j = 1, 2, 3, 4$, tels que

$$x = x_1 - x_2 + i(x_3 - x_4),$$

de plus η_s étant injective on a $x_3 - x_4 = 0$. On a

$$\eta_s(x) \leqslant \eta_s(x_1)$$

donc d'après (*c*) il existe $X \in E^+$ tel que $\eta_s(x) = \eta_s(X)$ d'où $x = X \geqslant 0$.

Montrons *e*). Le convexe $[0, \eta_s(y)]$ est faiblement compact d'après (b), pour tout $y \in E^+$. On peut donc supposer que $\eta_s(y_\alpha)$ converge faiblement vers un $\xi \geqslant 0$ quand $\alpha \to \infty$. Soit [voir *c*)] $X \in E^+$ tel que $\eta_s(X) = \xi$; d'après *d*) on a $X \leqslant y_\alpha$ pour tout α, donc $X = 0$ et $\xi = 0$.

L'assertion *f*) est immédiate.

Théorème 1.3. — *Soient* M, M_+ *l'espace vectoriel ordonné associé à une algèbre de von Neumann* M *et* 1 *l'unité de* M.

Pour toute forme linéaire positive normale fidèle φ *sur* M, *il existe une forme autopolaire unique* s *telle que* $s_1^* = \varphi$.

Remarque 1.4. — L'élément 1 de M^+ est une unité d'ordre ($\forall x \geqslant 0$, $\exists n$ tel que $x \leqslant n1$); le théorème 1.3 reste valable pour toute unité d'ordre h de M_+, car l'application $x \to h^{-1/2} x h^{-1/2}$ est de manière évidente un automorphisme d'ordre de (M, M_+), remplaçant h par 1.

Nous employons les notations usuelles de la théorie de

Tomita-Takesaki. A φ correspondent $\mathscr{H}_\varphi$, π_φ, ξ_φ, Δ_φ, J_φ, S_φ, $D_\varphi^\#$ (cf. [10]).

LEMME 1.5. — *Soit* φ *une forme linéaire positive normale fidèle sur l'algèbre de von Neumann* M; *alors la forme sesquilinéaire* s *vérifiant*

$$(1) \qquad s(x, y) = \langle \Delta_\varphi^{1/2} \pi_\varphi(x)\xi_\varphi, \quad \pi_\varphi(y)\xi_\varphi\rangle$$

est une forme autopolaire sur M *telle que* $s_1^* = \varphi$.

Démonstration. — Il est clair que s est hermitienne, positive et non dégénérée car Δ_φ est positif et non singulier. Soit l l'application de $\pi_\varphi(M)'_+$ sur la face de φ dans M_*^+, qui à $y \in \pi_\varphi(M)'_+$ associe la forme linéaire $z \to \langle \pi_\varphi(z)\xi_\varphi, \ y\xi_\varphi\rangle$. Comme $J_\varphi \pi_\varphi(M)_+ J_\varphi = \pi_\varphi(M)'_+$, on voit que l'application qui à $x \geqslant 0$ associe $l(J_\varphi \pi_\varphi(x) J_\varphi)$ est un isomorphisme de M_+ sur la face de φ dans M_+^*. On vérifie que cette application n'est autre que s^* grâce à l'égalité :

$$\langle \pi_\varphi(z)\xi_\varphi, \quad J_\varphi \pi_\varphi(x) J_\varphi \xi_\varphi\rangle = \langle \Delta_\varphi^{1/2} \pi_\varphi(z)\xi_\varphi, \quad \pi_\varphi(x)\xi_\varphi\rangle$$

pour tout $x, z \in M_+$.

Rappelons qu'un isomorphisme de Jordan α de l'algèbre M_1 sur l'algèbre M_2 est une bijection linéaire de M_1 sur M_2, avec $\alpha(xy + yx) = \alpha(x)\alpha(y) + \alpha(y)\alpha(x)$ pour tous $x, y \in M$. Rappelons un lemme connu [7].

LEMME 1.6. — *Soient* M_1 *et* M_2 *des algèbres de von Neumann,* α *une bijection linéaire de* M_1 *sur* M_2 *telle que* $\alpha(M_1^+) = M_2^+$ *et* $\alpha(1) = 1$; *alors* α *est un isomorphisme de Jordan de* M_1 *sur* M_2.

Dans la suite de la démonstration du théorème 1.3, nous désignons par s une forme autopolaire sur M, par φ la forme linéaire positive normale fidèle $\varphi = s_1^*$ et par t la forme autopolaire associée à φ par (1).

LEMME 1.7. — *Il existe un automorphisme de Jordan* α *de* M *tel que*

$$(2) \qquad s(x, y) = t(x, \alpha(y))$$

pour tous $x, y \in M$.

Démonstration. — En effet l'application $(t^*)^{-1}s^*$ de M_+ dans M_+ a un sens car $s^*(M_+) =$ Face de φ dans

$$M_*^+ = t^*(M_+).$$

On applique alors le lemme 1.6 en utilisant l'égalité $s_1^* = t_1^*$.

LEMME 1.8. — *Il existe un unitaire* $U \in \mathscr{L}(D_\varphi^\#)$ *tel que*

(3) $\quad s(x, y) = \langle \Delta_\varphi^{1/2}\pi_\varphi(x)\xi_\varphi, \quad U\pi_\varphi(y)\xi_\varphi\rangle \quad \forall x, y \in M.$

Démonstration. — Il faut prouver que l'application

$$\pi_\varphi(y)\xi_\varphi \rightarrow \pi_\varphi(\alpha(y))\xi_\varphi$$

de $\pi_\varphi(M)\xi_\varphi$ dans $\pi_\varphi(M)\xi_\varphi$ est isométrique pour la norme du domaine $D_\varphi^\#$ de S_φ. Il suffit donc de montrer que pour tout $x \in M$ avec $x = x^*$, on a

$$\|\pi_\varphi(\alpha(x))\xi_\varphi\|_\# = \|\pi_\varphi(x)\xi_\varphi\|_\#, \text{ i.e. } \|\pi_\varphi(\alpha(x))\xi_\varphi\| = \|\pi_\varphi(x)\xi_\varphi\|$$

On a

$$\begin{aligned}\|\pi_\varphi(\alpha(x))\xi_\varphi\|^2 &= \langle\xi_\varphi, \pi_\varphi(\alpha(x))^2\xi_\varphi\rangle = \langle\xi_\varphi, \pi_\varphi(\alpha(x^2))\xi_\varphi\rangle \\ &= s(1, x^2) = s(x^2, 1) = \varphi(x^2) = \|\pi_\varphi(x)\xi_\varphi\|^2.\end{aligned}$$

LEMME 1.9. — *Soit* P_φ *la restriction à* $D_\varphi^\#$ *de l'opérateur* $\Delta_\varphi^{1/2}(1 + \Delta_\varphi)^{-1}$. *Alors* P_φ *et* $P_\varphi U$ *sont des opérateurs positifs de* $D_\varphi^\#$ *dans* $D_\varphi^\#$, *et* $U = 1$.

Démonstration. — Comme $0 \leqslant t(1 + t^2)^{-1} \leqslant 1/2$ pour $t \geqslant 0$, P_φ a un sens; de plus pour $\xi \in D_\varphi^\#$ on a

$$\langle P_\varphi\xi, \xi\rangle_\# = \langle P_\varphi\xi, \xi\rangle + \langle\Delta_\varphi^{1/2}P_\varphi\xi, \Delta_\varphi^{1/2}\xi\rangle \geqslant 0.$$

Pour ξ_1 et ξ_2 dans $D_\varphi^\#$ on a $\langle P_\varphi\xi_1, \xi_2\rangle_\# = \langle\Delta_\varphi^{1/2}\xi_1, \xi_2\rangle$. Ainsi pour $x \in M$ on a

$$\langle\Delta_\varphi^{1/2}\pi_\varphi(x)\xi_\varphi, U\pi_\varphi(x)\xi_\varphi\rangle = \langle\pi_\varphi(x)\xi_\varphi, P_\varphi U\pi_\varphi(x)\xi_\varphi\rangle_\#$$

et comme le premier membre de cette égalité est positif, on a montré que $P_\varphi U$ qui est un opérateur borné, est positif de $D_\varphi^\#$ dans $D_\varphi^\#$.

L'unicité de la décomposition polaire, dans l'espace $D_\varphi^\#$, montre que $U = 1$ et achève la démonstration du théorème 1.3 en utilisant l'égalité (3).

Remarque 1.10. — Soient s une forme autopolaire sur l'algèbre de von Neumann M, A une bijection linéaire de M sur M telle que $A(M_+) = M_+$; alors la forme

$$(x, y) \to s(Ax, Ay)$$

est autopolaire. Nous étudierons en 2.8 une réciproque de ce fait.

2. Comparaison des formes autopolaires sur l'espace vectoriel ordonné associé à une algèbre de von Neumann.

THÉORÈME 2.1. — *Soient s_1 et s_2 deux formes autopolaires sur l'algèbre de von Neumann* M; $\mathcal{H}_{s_1}$, $\mathcal{H}^+_{s_1}$; $\mathcal{H}_{s_2}$, $\mathcal{H}^+_{s_2}$ *les espaces de Hilbert ordonnés associés.*

Il existe une isométrie U *de* $\mathcal{H}_{s_1}$ *sur* $\mathcal{H}_{s_2}$ *telle que*

$$U\mathcal{H}^+_{s_1} = \mathcal{H}^+_{s_2}.$$

La démonstration utilise plusieurs lemmes qui ont leur intérêt propre.

LEMME 2.2. — *Soient* M *une algèbre de von Neumann dans l'espace* $\mathcal{H}$, ξ_1 *et* ξ_2 *des vecteurs totalisateurs et séparateurs pour* M, $\mathcal{H}_4$ *un espace de Hilbert de dimension* 4, *de base* ε_{ij} $i, j = 1, 2$, F *le facteur engendré dans* $\mathcal{H}_4$ *par les* e_{ij}, $e_{ij}\varepsilon_{kl} = \delta_{jk}\varepsilon_{il}$, F′ *le facteur engendré par les* f_{ij} *où*

$$f_{ij}\varepsilon_{kl} = \delta_{li}\varepsilon_{kj}.$$

Soient $\mathcal{K} = \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_4$, $\eta_0 = \xi_1 \otimes \varepsilon_{11} + \xi_2 \otimes \varepsilon_{22}$, $P = M \otimes F$ *et* U_{ij} *l'isométrie de* $\mathcal{H}$ *dans* $\mathcal{K}$ *telle que* $U_{ij}\,\xi = \xi \otimes \varepsilon_{ij}$, $\forall \xi \in \mathcal{H}$, $i, j = 1, 2$.

Le vecteur η_0 *est totalisateur et séparateur pour* P *dans* $\mathcal{K}$ *et l'involution* S_{η_0} *associée à* P *et* η_0 *vérifie :*

$$(4) \qquad S_{\eta_0} = U_{11}S_{\xi_1}U^*_{11} + U_{21}S_{\xi_1,\xi_2}U^*_{12} + U_{12}S_{\xi_2,\xi_1}U^*_{21} + U_{22}S_{\xi_2}U^*_{22}$$

où S_{ξ_1,ξ_2} *désigne la fermeture de l'opérateur défini sur* $M\xi_2$ *par l'égalité :*

$$(5) \qquad S_{\xi_1,\xi_2}\, x\xi_2 = x^*\xi_1 \quad \textit{pour tout } x \in M.$$

Démonstration. — Soient $x_{ij} \in M$; $i, j = 1, 2$, $x = \Sigma x_{ij} \otimes e_{ij}$. On a

$$x\eta_0 = x_{11}\xi_1 \otimes \varepsilon_{11} + x_{12}\xi_2 \otimes \varepsilon_{12} + x_{21}\xi_1 \otimes \varepsilon_{21} + x_{22}\xi_2 \otimes \varepsilon_{22}$$

ainsi η_0 est totalisateur et séparateur pour P dans $\mathcal{H}$.

Soit $\alpha \in D^{\#}_{\eta_0}$, $\alpha = \Sigma \alpha_{ij} \otimes \varepsilon_{ij}$. Soit (X_n) une suite d'éléments de P tels que $\operatorname{Lim} X_n\eta_0 = \alpha$ et $\operatorname{Lim} X_n^*\eta_0 = S_{\eta_0}\alpha$. Posons

$$X_n = a_n \otimes e_{11} + b_n \otimes e_{12} + c_n \otimes e_{21} + d_n \otimes e_{22}.$$

On a alors $X_n^* = a_n^* \otimes e_{11} + c_n^* \otimes e_{12} + b_n^* \otimes e_{21} + d_n^* \otimes e_{22}$ et les égalités :

$\operatorname{Lim} a_n\xi_1 = \alpha_{11}$, $\operatorname{Lim} b_n\xi_2 = \alpha_{12}$, $\operatorname{Lim} c_n\xi_1 = \alpha_{21}$, $\operatorname{Lim} d_n\xi_2 = \alpha_{22}$

et

$\operatorname{Lim} a_n^*\xi_1 = (S_{\eta_0}\alpha)_{11}$, $\operatorname{Lim} b_n^*\xi_1 = (S_{\eta_0}\alpha)_{21}$, $\operatorname{Lim} c_n^*\xi_2 = (S_{\eta_0}\alpha)_{12}$,

$\operatorname{Lim} d_n^*\xi_2 = (S_{\eta_0}\alpha)_{22}$ d'où l'inclusion

$$S_{\eta_0} \subset U_{11}S_{\xi_1}U_{11}^* + U_{21}S_{\xi_1,\xi_2}U_{12}^* + U_{12}S_{\xi_2,\xi_1}U_{21}^* + U_{22}S_{\xi_2}U_{22}^*$$

L'inclusion inverse est immédiate.

LEMME 2.3. — *Avec les notations du lemme* 2.2, *soit*

$$S_{\xi_1,\xi_2} = J_{\xi_1,\xi_2}\Delta^{1/2}_{\xi_1,\xi_2}$$

la décomposition polaire de S_{ξ_1,ξ_2}. *On a alors*

$$(6) \quad J_{\eta_0} = U_{11}J_{\xi_1}U_{11}^* + U_{21}J_{\xi_1,\xi_2}U_{12}^* + U_{12}J_{\xi_2,\xi_1}U_{21}^* + U_{22}J_{\xi_2}U_{22}^*$$

$$(7) \quad \Delta_{\eta_0} = U_{11}\Delta_{\xi_1}U_{11}^* + U_{21}\Delta_{\xi_2,\xi_1}U_{21}^* + U_{12}\Delta_{\xi_1,\xi_2}U_{12}^* + U_{22}\Delta_{\xi_2}U_{22}^*$$

Démonstration. — Par construction, le second membre de (6) est une isométrie de $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{H}$ et le second membre de (7) un opérateur positif auto adjoint dans $\mathcal{H}$. Il suffit donc de vérifier l'égalité $S_{\eta_0} = J_{\eta_0}\Delta^{1/2}_{\eta_0}$, ce qui est immédiat.

LEMME 2.4. — *Avec les notations des lemmes* 2.2 *et* 2.3, *il existe une unitaire unique* $v \in M'$ *tel que*

$$(8) \quad J_{\eta_0}(1 \otimes e_{21})J_{\eta_0} = v \otimes f_{12}$$

et on a:

(9) $$J_{\xi_2,\xi_1} = v J_{\xi_1}, \quad J_{\xi_1,\xi_2} = J_{\xi_1} v^*, \quad J_{\xi_2} = v J_{\xi_1} v^*$$

Démonstration. — On a $J^2_{\eta_0} = 1$ donc

$$J_{\xi_2,\xi_1} J_{\xi_1,\xi_2} = J_{\xi_1,\xi_2} J_{\xi_2,\xi_1} = 1$$

Pour $\xi_{ij} \in \mathcal{H}$, $i, j = 1, 2$ on a:

$$J_{\eta_0}(1 \otimes e_{11}) J_{\eta_0}(\Sigma \xi_{ij} \otimes \varepsilon_{ij}) = \xi_{11} \otimes \varepsilon_{11} + (J_{\xi_1,\xi_2} J_{\xi_2,\xi_1} \xi_{21}) \otimes \varepsilon_{21}.$$

De même $J_{\eta_0}(1 \otimes e_{22}) J_{\eta_0} = 1 \otimes f_{22}$. Comme

$$J_{\eta_0}(1 \otimes e_{21}) J_{\eta_0} \in M' \otimes F'$$

il existe un unitaire $v \in M'$ tel que $J_{\eta_0}(1 \otimes e_{21}) J_{\eta_0} = v \otimes f_{12}$. On obtient

$$J_{\eta_0}(1 \otimes e_{21})(\xi \otimes \varepsilon_{11}) = J_{\eta_0}(\xi \otimes \varepsilon_{21}) = J_{\xi_2,\xi_1} \xi \otimes \varepsilon_{12}$$
$$J_{\eta_0}(1 \otimes e_{21}) J_{\eta_0} J_{\eta_0}(\xi \otimes \varepsilon_{11}) = (v \otimes f_{12}) J_{\xi_1} \xi \otimes \varepsilon_{11} = v J_{\xi_1} \xi \otimes \varepsilon_{12}$$

pour tout $\xi \in \mathcal{H}$. De même,

$$\begin{aligned} J_{\xi_2} \xi \otimes \varepsilon_{22} = J_{\eta_0}(\xi \otimes \varepsilon_{22}) &= J_{\eta_0}(1 \otimes e_{21}) J_{\eta_0} J_{\eta_0}(\xi \otimes \varepsilon_{12}) \\ &= (v \otimes f_{12})\, J_{\xi_1} v^* \xi \otimes \varepsilon_{21} = v J_{\xi_1} v^* \xi \otimes \varepsilon_{22} \end{aligned}$$

d'où les égalités (9). L'unitaire unique v défini dans le lemme 2.4 sera noté $\theta_M(\xi_2, \xi_1)$ (déphasage spatial de ξ_2 par rapport à ξ_1). On montre facilement que pour tout triplet ξ_1, ξ_2, ξ_3 de vecteurs totalisateurs et séparateurs pour M dans $\mathcal{H}$ on a $\theta(\xi_3, \xi_1) = \theta(\xi_3, \xi_2)\theta(\xi_2, \xi_1)$.

LEMME 2.5. — *Soient* $\mathcal{H}$, M, ξ_1 *et* ξ_2 *comme dans le lemme* 2.2, u *un unitaire de* M'.

a) On a $\theta(u\xi_2, \xi_1) = u\theta(\xi_2, \xi_1)$.

b) Si $\theta(\xi_2, \xi_1) = 1$, *posons* $J = J_{\xi_1} = J_{\xi_2}$ (9) *et* $\tilde{x} = Jx^*J$ *pour tout* $x \in M$ *alors* (10) $\langle x\tilde{x}^*\xi_1, \xi_2 \rangle \geqslant 0$ *pour tout* $x \in M$.

Démonstration. — *a*) On a $S_{u\xi_2,\xi_1} = uS_{\xi_2,\xi_1}$, $J_{u\xi_2,\xi_1} = uJ_{\xi_2,\xi_1}$ d'où *a*) en utilisant (9).

b) Montrons (10) c'est-à-dire montrons que pour tout $x \in M$ on a $\langle x\xi_1, Jx^*\xi_2 \rangle \geqslant 0$. On a $Jx^*\xi_2 = J^{-1}_{\xi_2,\xi_1} S_{\xi_2,\xi_1} x\xi_1$ donc l'inégalité cherchée résulte de la positivité de l'opérateur $\Delta^{1/2}_{\xi_2,\xi_1}$.

Définition 2.6. — *Soient* M *une algèbre de von Neumann dans* $\mathscr{H}$, ξ_0 *un vecteur totalisateur et séparateur pour* M, J_{ξ_0} *l'involution isométrique correspondante, et pour tout* $x \in M$, $\tilde{x} = J_{\xi_0} x^* J_{\xi_0}$.

On pose $\mathscr{P}^{\natural}_{\xi_0} = \{x\tilde{x}^*\xi_0,\ x \in M\}^-$ *et* $\mathscr{P}^{\natural}_{\xi_0}$ *est appelé cône autopolaire associé à* M *et* ξ_0 (cf. Thm. 2.7).

Le théorème 2.1 est une conséquence immédiate du théorème suivant :

Théorème 2.7. — *Soient* M *une algèbre de von Neumann dans* $\mathscr{H}$, ξ_0 *un vecteur totalisateur et séparateur pour* M, $J = J_{\xi_0}$ *et* $\mathscr{P}^{\natural}_{\xi_0}$ *comme dans la définition* 2.6, $\varphi = \omega_{\xi_0}$ *et* s *la forme autopolaire associée à* φ *par* (1).

a) *Soit* $\mathscr{P}^{\#}_{\xi_0} = \{M^+\xi_0\}^-$ ([10]), *alors*

$$\mathscr{P}^{\natural}_{\xi_0} = \{\Delta^{1/4}_{\xi_0}\mathscr{P}^{\#}_{\xi_0}\}^- = \{\Delta^{1/4}_{\xi_0}M_+\xi_0\}^-.$$

b) *L'application qui à* $\eta_s(x)$, $x \in M$, *associe* $\Delta^{1/4}_{\xi_0}x\xi_0$ *se prolonge en une isométrie* V *de* $\mathscr{H}_s$ *sur* $\mathscr{H}$ *telle que*

$$V\mathscr{H}^+_s = \mathscr{P}^{\natural}_{\xi_0}.$$

c) $\mathscr{P}^{\natural}_{\xi_0}$ *est un cône convexe fermé autopolaire; autrement dit* $(\langle\xi, \eta\rangle \geq 0\ \forall\eta \in \mathscr{P}^{\natural}_{\xi_0}) \Longleftrightarrow (\xi \in \mathscr{P}^{\natural}_{\xi_0})$.

d) *Soit* $\xi_1 \in \mathscr{P}^{\natural}_{\xi_0}$ *un vecteur totalisateur et séparateur pour* M, *alors* $\theta(\xi_1, \xi_0) = 1$.

e) *Soit* ξ_1 *un vecteur totalisateur et séparateur pour* M *tel que* $\theta(\xi_1, \xi_0) = 1$; *alors* $\xi_1 \in \mathscr{P}^{\natural}_{\xi_0}$, $\mathscr{P}^{\natural}_{\xi_1} = \mathscr{P}^{\natural}_{\xi_0}$.

f) *Soit* φ_1 *une forme linéaire positive normale fidèle sur* M; *il existe un vecteur totalisateur et séparateur* $\xi_1 \in \mathscr{P}^{\natural}_{\xi_0}$ *unique tel que* $\omega_{\xi_1} = \varphi_1$.

Démonstration. — *a*) La restriction de $\Delta^{1/4}_{\xi_0}$ à l'espace vectoriel réel des $\xi \in D^{\#}_{\xi_0}$, $S_{\xi_0}\xi = \xi$ est continue.

L'assertion *a*) résultera donc de l'égalité

$$\{\Delta^{1/4}_{\xi_0}M_+\xi_0\}^- = \mathscr{P}^{\natural}_{\xi_0}.$$

Rappelons que $\mathscr{A} = M\xi_0$ est muni d'une structure d'algèbre hilbertienne à gauche ([10]) telle que $x\xi_0 y\xi_0 = xy\xi_0$ pour

$x, y \in \mathrm{M}$, et $(x\xi_0)^\# = x^*\xi_0$ pour $x \in \mathrm{M}$. Soit $\mathscr{B}$ une algèbre hilbertienne modulaire contenue dans $\mathscr{A}$, équivalente à $\mathscr{A}$ au sens de [10]; $\mathscr{B}$ est stable par $\Delta_{\xi_0}^z$, $z \in \mathbf{C}$ et pour ξ_1, ξ_2, $\Delta_{\xi_0}^z\xi_1\xi_2 = \Delta_{\xi_0}^z\xi_1\Delta_{\xi_0}^z\xi_2$. Le théorème de densité de Kaplansky montre que l'ensemble des $y\tilde{y}^*\xi_0$, $y\xi_0 \in \mathscr{B}$ est dense dans $\mathscr{P}_{\xi_0}^\natural$, et que l'ensemble des $x^*x\xi_0$, $x\xi_0 \in \mathscr{B}$ est dense dans $\mathrm{M}_+\xi_0$. Si $y\xi_0 = \Delta_{\xi_0}^{1/4}x^*\xi_0$ on a :

$$y\tilde{y}^*\xi_0 = y\mathrm{J}y\xi_0 = (\Delta_{\xi_0}^{1/4}x^*\xi_0)(\Delta_{\xi_0}^{1/4}x\xi_0) = \Delta_{\xi_0}^{1/4}x^*x\xi_0$$

d'où a).

b) On a

$$\langle \eta_s(x), \eta_s(y)\rangle = \langle \Delta_{\xi_0}^{1/4}x\xi_0, \Delta_{\xi_0}^{1/4}y\xi_0\rangle,$$

donc b) résulte de l'assertion a).

c) Soit $\mathscr{P}_{\xi_0}^{\natural 0}$ le polaire de $\mathscr{P}_{\xi_0}^\natural$ dans $\mathscr{H}$.

On a pour $t \in \mathbf{R}$ l'égalité

$$\Delta_{\xi_0}^{it}\mathscr{P}_{\xi_0}^\natural = \mathscr{P}_{\xi_0}^\natural,$$

donc $\Delta_{\xi_0}^{it}\mathscr{P}_{\xi_0}^{\natural 0} = \mathscr{P}_{\xi_0}^{\natural 0}$ et $\left(\int f(t)\Delta_{\xi_0}^{it}\, dt\right)(\mathscr{P}_{\xi_0}^{\natural 0} \subset \mathscr{P}_{\xi_0}^{\natural 0}$ pour toute $f \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R}), f \geqslant 0$.

Ainsi l'intersection de $\mathscr{P}_{\xi_0}^{\natural 0}$ avec le domaine de $\Delta_{\xi_0}^z$ est dense dans $\mathscr{P}_{\xi_0}^{\natural 0}$, quel que soit $z \in \mathbf{C}$. Pour

$$\eta \in \mathscr{P}_{\xi_0}^{\natural 0} \cap \mathrm{D}_{om}(\Delta_{\xi_0}^{-1/4})$$

et $\xi \in \mathscr{P}_{\xi_0}^\#$ on a $\langle \Delta_{\xi_0}^{-1/4}\eta, \Delta_{\xi_0}^{1/2}\xi\rangle = \langle \eta, \Delta_{\xi_0}^{1/4}\xi\rangle \geqslant 0$.

Comme $\Delta_{\xi_0}^{1/2}\mathscr{P}_{\xi_0}^\# = \mathscr{P}_{\xi_0}^{\# 0}$ ([10]) on a $\Delta_{\xi_0}^{-1/4}\eta \in \mathscr{P}_{\xi_0}^\#$ et $\eta \in \mathscr{P}_{\xi_0}^\natural$.

d) On a $\xi_1 \in \mathscr{P}_{\xi_0}^\natural$, donc $\langle \xi_1, x\mathrm{J}_{\xi_0}x\xi_0\rangle \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathrm{M}$. Ainsi : $\langle \mathrm{S}_{\xi_1,\xi_0}x\xi_0, \mathrm{J}_{\xi_0}x\xi_0\rangle \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathrm{M}$ donc $\langle \mathrm{J}_{\xi_0}\mathrm{S}_{\xi_1,\xi_0}\eta, \eta\rangle \geqslant 0$ pour tout $\eta \in \mathrm{D}_{om}(\mathrm{S}_{\xi_1,\xi_0})$.

Le lemme 2.2 montre que l'adjoint de S_{ξ_1,ξ_0} est la fermeture de l'opérateur de domaine $\mathrm{M}'\xi_0$ qui à $y\xi_0$ $y \in \mathrm{M}'$ associe $y^*\xi_1$. Pour $y \in \mathrm{M}'$ on a

$$\langle y^*\xi_1, \quad \mathrm{J}_{\xi_0}y\xi_0\rangle = \langle \xi_1, \quad (\mathrm{J}_{\xi_0}y\mathrm{J}_{\xi_0})\mathrm{J}_{\xi_0}(\mathrm{J}_{\xi_0}y\mathrm{J}_{\xi_0})\xi_0\rangle \geqslant 0$$

donc on a $\langle (\mathrm{J}_{\xi_0}\mathrm{S}_{\xi_1,\xi_0})^*\eta, \eta\rangle \geqslant 0$ pour tout η dans le domaine de $(\mathrm{J}_{\xi_0}\mathrm{S}_{\xi_1,\xi_0})^*$. Par unicité de décomposition polaire de S_{ξ_1,ξ_0} on a $\mathrm{J}_{\xi_1,\xi_0} = \mathrm{J}_{\xi_0}$ et d).

e) Le lemme 2.5 b) montre que $J_{\xi_0} = J_{\xi_1}$; d'après 2.7 c), ξ_1 est limite d'éléments de la forme $x\tilde{x}^*\xi_0$ car $\xi_1 \in \mathscr{P}^{\natural 0}_{\xi_0}$. Pour tout $y \in M$, $y\tilde{y}^*\xi_1$ est limite d'éléments de la forme $y\tilde{y}^*x\tilde{x}^*\xi_0 = yx(yx)^{*\sim}\,\xi_0$ donc est dans $\mathscr{P}^{\natural}_{\xi_0}$.

L'égalité $\mathscr{P}^{\natural}_{\xi_1} = \mathscr{P}^{\natural}_{\xi_0}$ en résulte.

f) L'existence de ξ_1 résulte facilement du lemme 2.5 a) et de e). Soit ξ_2 tel que $\omega_{\xi_2} = \omega_{\xi_1}$, avec ξ_2 séparateur et totalisateur pour M. Il existe alors un unitaire $u \in M'$ tel que $\xi_2 = u\xi_1$. Le lemme 2.5 a) montre qu'alors $\theta(\xi_2, \xi_0) = u$. En particulier (d)) si $\xi_2 \in \mathscr{P}^{\natural}_{\xi_0}$ on a $u = 1$ et $\xi_2 = \xi_1$.

Corollaire 2.8. — *Soient* M *une algèbre de von Neumann,* s_1 *et* s_2 *deux formes autopolaires sur* M, $\varepsilon > 0$. *Il existe un* $h \in M$, *positif et inversible, tel que :*

$$|s_1(hxh, hyh) - s_2(x, y)| \leqslant \varepsilon\|x\|\,\|y\| \quad \forall x, y \in M$$

Démonstration. — Soient $\mathscr{H}$ un espace hilbertien dans lequel M admet deux vecteurs séparateurs et totalisateurs ξ_1 et ξ_2 tels que :

$\mathscr{P}^{\natural}_{\xi_1} = \mathscr{P}^{\natural}_{\xi_2}$, $s_j(x, y) = \langle \Delta^{1/2}_{\xi_j} x\xi_j, y\xi_j \rangle$, $j = 1, 2$, x, $y \in M$.
Soit $J = J_{\xi_1} = J_{\xi_2}$; pour $x, y \in M$ on a

$$s_2(x, y) = \langle x\xi_2, Jy^*\xi_2 \rangle = \langle xJyJ\xi_2, \xi_2 \rangle$$

et pour $h \in M$, $h = h^*$

$$s_1(hxh, \ hyh) = \langle hxhJhyhJ\xi_1, \ \xi_1 \rangle = \langle xJyJhJhJ\xi_1, \ hJhJ\xi_1 \rangle$$

Le corollaire 2.8 résulte donc du lemme suivant :

Lemme 2.9. — *Soient* M, ξ_0, J, $\mathscr{P}^{\natural}_{\xi_0}$ *comme dans* 2.6 *alors :*

$$\mathscr{P}^{\natural}_{\xi_0} = \{hJhJ\xi_0, \ h \in M_+\}^-$$

Démonstration. — Soit $y \in M_+$ inversible, montrons que $\Delta^{1/4}_{\xi_0} y\xi_0$ est limite d'éléments de la forme $bJb\xi_0$, $b \in M_+$. Soit $u = \theta_{M'}(y^{1/2}\xi_0, \ \xi_0)$; on a $u \in M$, $u^*y^{1/2}\xi_0 = \xi_1 \in \mathscr{P}^{\natural}_{\xi_0}$. Soient $a = u^*y^{1/2}$ et (a_n) $(n \in \mathbf{N})$ une suite d'éléments de M, analytiques pour le groupe d'automorphismes modulaires σ_t de ω_{ξ_0} et de la forme $\int_{\mathbf{R}} f_n(t)\sigma_t(a)\,dt$ avec $f_n \geqslant 0$,

$f_n \in L^1(\mathbf{R})$, telle que $a_n \to a$, quand $n \to \infty$, pour la topologie $*$ forte.

On a $a_n \xi_0 = \int f_n(t) \Delta_{\xi_0}^{it} a \xi_0$ donc $\Delta_{\xi_0}^{1/4} b_n \xi_0 \in \mathscr{P}_{\xi_0}^{\natural}$, $\forall n$ où $b_n = \sigma_{i/4}(a_n)$. Ainsi $b_n \xi_0 \in \mathscr{P}_{\xi_0}^{\#}$ et $b_n \geqslant 0$.

On a $J b_n \xi_0 = \Delta_{\xi_0}^{1/2} b_n \xi_0 = \Delta_{\xi_0}^{1/4} a_n \xi_0$ donc

$$b_n J b_n J \xi_0 = \Delta_{\xi_0}^{1/4} a_n^* a_n \xi_0$$

converge vers $\Delta_{\xi_0}^{1/4} a^* a \xi_0 = \Delta_{\xi_0}^{1/4} y \xi_0$, quand $n \to \infty$.

3. Groupe des transformations linéaires du cône autopolaire associé à une algèbre de von Neumann.

Soient M_j une algèbre de von Neumann dans $\mathscr{H}_j$, ξ_j un vecteur totalisateur et séparateur pour M_j, $\mathscr{H}_j^+ = \mathscr{P}_{\xi_j}^{\natural}$ le cône autopolaire correspondant.

THÉORÈME 3.1. — (Isomorphismes d'algèbres).
Soit Φ *un isomorphisme de l'algèbre* M_1 *sur l'algèbre* M_2 *(pas nécessairement un* $*$*-isomorphisme). Il existe alors une application linéaire* $L = L_\Phi$ *unique de* $\mathscr{H}_1^+$ *sur* $\mathscr{H}_2^+$ *telle que:* $\Phi(x) = LxL^{-1}$ $\forall x \in M_1$.

THÉORÈME 3.2. — (Isomorphismes de Jordan.)
Soit α *un* $*$*-isomorphisme de Jordan de l'algèbre* M_1 *sur l'algèbre* M_2. *Alors il existe une isométrie unique* U_α *de* $\mathscr{H}_1^+$ *sur* $\mathscr{H}_2^+$ *telle que* $\langle \alpha(x)\xi, \xi \rangle = \langle x U_\alpha^{-1}\xi, U_\alpha^{-1}\xi \rangle$ *pour tout* $\xi \in \mathscr{H}_2^+$ *et tout* $x \in M_1$.

THÉORÈME 3.3. — (Isomorphismes des espaces ordonnés.)
Soit L *une bijection linéaire de* $\mathscr{H}_1^+$ *sur* $\mathscr{H}_2^+$ *et soit* $L = UT$ *la décomposition polaire de* L.
Il existe un isomorphisme de Jordan unique α *de* M_1 *sur* M_2 *tel que* $U = U_\alpha$.
Il existe un opérateur positif inversible unique $h \in M_1$ *tel que* $T = hJhJ$.

THÉORÈME 3.4. — *Soient* M *une algèbre de von Neumann dans* $\mathscr{H}$, ξ_0 *un vecteur totalisateur et séparateur pour* M,

$\mathcal{H}^+ = \mathcal{P}^\natural_{\xi_0}$ *et* $\delta \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $J = J_{\xi_0}$. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) $e^{t\delta}\mathcal{H}^+ = \mathcal{H}^+$ *pour tout* $t \in \mathbf{R}$.

b) $J\delta = \delta J$ *et* $[\delta, M] \subset M$.

c) *Il existe* $x \in M$ *tel que* $\delta = x + JxJ$.

Pour tout $\xi \in \mathcal{H}_j^+$, séparateur (et totalisateur) pour M_j, soit b_ξ l'application $x \to b_\xi(x) = \Delta_\xi^{1/4}x\xi$ de M_j dans $\mathcal{H}_j$.

LEMME 3.5. — *Soit* α *un* $*$*-isomorphisme de* M_1 *sur* M_2. *Il existe une isométrie* U_α *de* $\mathcal{H}_1^+$ *sur* $\mathcal{H}_2^+$ *telle que :*

a) *pour tout* $\xi \in \mathcal{H}_1^+$ *séparateur et totalisateur pour* M_1 *on a, pour tout* $x \in M_2$:

$$\langle xU_\alpha\xi, U_\alpha\xi\rangle = \langle\alpha^{-1}(x)\xi, \xi\rangle$$

b) *Pour tout* ξ *comme dans a*) *on a* $U_\alpha b_\xi(x) = b_{U_\alpha\xi}(\alpha(x))$ *pour tout* $x \in M_1$.

c) *On a* $U_\alpha x U_\alpha^* = \alpha(x)$ *pour tout* $x \in M_1$.

Démonstration. — Soit U_1 une isométrie de $\mathcal{H}_1$ sur $\mathcal{H}_2$ telle que $\alpha(x) = U_1xU_1^*$ pour tout $x \in M_1$. Comme

$$\theta(U_1\xi_1, \xi_2) \in M_2'$$

on peut supposer que $\theta(U_1\xi_1, \xi_2) = 1$ donc que $U_1\xi_1 \in \mathcal{H}_2^+$. Comme $U_1M_1U_1^* = M_2$ on a

$$S_{U_1\xi_1} = U_1S_{\xi_1}U_1^*, \quad J_{U_1\xi_1} = U_1J_{\xi_1}U_1^*$$

donc $\mathcal{P}^\natural_{U_1\xi_1} = U_1\mathcal{P}^\natural_{\xi_1}$. Ainsi $U_1\mathcal{H}_1^+ = \mathcal{H}_2^+$ et on a trouvé une isométrie de $\mathcal{H}_1^+$ sur $\mathcal{H}_2^+$ vérifiant *c*).

On déduit facilement *a*) et *b*) de la condition *c*).

LEMME 3.6. — *Soit* e *un projecteur du centre de* M_1. *On suppose que* $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$, $\xi_1 = \xi_2$ *et que* M_2 *est l'image de* M_1 *par l'application* β *définie par* $\beta(x) = ex + (1 - e)Jx^*J$ *pour tout* $x \in M_1$.

Alors l'isométrie $U_\beta = 1$ *vérifie les conditions a*) *et b*) *du lemme* 3.5 *relativement à l'isomorphisme de Jordan* β *de* M_1 *sur* M_2.

Démonstration. — On vérifie facilement que $\mathscr{H}_1^+ = \mathscr{H}_2^+$. Soit $\xi \in \mathscr{H}_1^+$ totalisateur et séparateur pour M_1. On a

$$\langle \beta(x)\xi, \xi \rangle = \langle ex\xi, \xi \rangle + \langle J(1-e)x^*J\xi, \xi \rangle$$
$$= \langle (e + (1-e))x\xi, \xi \rangle = \langle x\xi, \xi \rangle$$

pour tout $x \in M_1$. L'opérateur modulaire relatif à ξ_2 et $M_2 = eM_1 + (1-e)M_1'$ est égal à $e\Delta_{\xi_1} + (1-e)\Delta_{\xi_1}^{-1}$ avec les notations évidentes. L'égalité 3.5 *b*) résulte donc de :

$$\Delta_{\xi_1}^{1/4} x\xi_1 = (e\Delta_{\xi_1}^{1/4} + (1-e)\Delta_{\xi_1}^{-1/4})(ex + (1-e)Jx^*J)\xi_1$$

pour tout $x \in M_1$.

LEMME 3.7. — *Soit* U *une isométrie de* $\mathscr{H}_1^+$ *sur* $\mathscr{H}_2^+$ *telle que* $\langle UxU^*\xi, \xi \rangle = \langle x\xi, \xi \rangle$ *pour* $x \in M_1$ *et* $\xi \in \mathscr{H}_1^+$.
Alors $U = 1$.

Démonstration. — Soit ξ un vecteur totalisateur et séparateur pour M avec $\xi \in \mathscr{H}_1^+$. Alors $U^*\xi$ est un vecteur totalisateur et séparateur pour M car $U^*\xi \in \mathscr{H}_1^+$ et la face qu'il engendre dans $\mathscr{H}_1^+$ est totale dans $\mathscr{H}_1$. Le théorème 2.7 *f*) montre donc que $U^*\xi = \xi$.

Démonstration du théorème 3.1. — Le corollaire 4.1.21 de [9] montre qu'il existe un $*$-isomorphisme Φ_1 de M_1 sur M_2 et un opérateur inversible $h \in M_1$ tels que pour tout $x \in M_1$, $\Phi(x) = \Phi_1(hxh^{-1})$. Le lemme 3.5 montre qu'il existe une isométrie U de $\mathscr{H}_1^+$ sur $\mathscr{H}_2^+$ telle que

$$\Phi(x) = (UhJhJ)x(UhJhJ)^{-1}$$

pour tout $x \in M_1$. Il suffit donc de poser $L = UhJhJ$ pour obtenir l'assertion d'existence dans 3.1. L'unicité résulte du lemme 3.7.

Démonstration du théorème 3.2. — Il existe ([7], p. 334) un projecteur e du centre de M_1 tel que la restriction de α à $M_{1,e}$ soit multiplicative et que la restriction de α à $M_{1,1-e}$ soit antimultiplicative. Il suffit alors d'appliquer les lemmes 3.5 et 3.6 en utilisant l'algèbre de von Neumann

$$M_{1,e} + M'_{1,1-e}$$

comme intermédiaire.

Remarque 3.8. — Soient α et U_α comme dans le théorème 3.2 et $\xi \in \mathscr{H}_1^+$ un vecteur totalisateur et séparateur pour M_1. On a alors :

$$U_\alpha b_\xi(x) = b_{U_\alpha \xi}(\alpha(x)) \quad \text{pour tout} \quad x \in M_1$$

Démonstration du théorème 3.3. — Soit d'abord U une isométrie de $\mathscr{H}_1^+$ sur $\mathscr{H}_2^+$. Le vecteur $U\xi_1$ est totalisateur et séparateur pour M_2; on peut donc supposer $\xi_2 = U\xi_1$. On a alors $U(([0, \xi_1]) = [0, \xi_2]$ et il existe une application linéaire α de M_1 sur M_2 telle que $Ub_{\xi_1}(x) = b_{\xi_2}(\alpha(x))$ pour tout $x \in M_1$ (proposition 1.2 *c*)). Comme α vérifie les hypothèses du lemme 1.6, c'est un $*$-isomorphisme de Jordan de M_1 sur M_2.

Pour tout $x \in M_1$, on a

$$\begin{aligned}\langle \alpha(x)\xi_2, \xi_2\rangle = \langle b_{\xi_2}(\alpha(x)), \xi_2\rangle &= \langle Ub_{\xi_1}(x), \xi_2\rangle \\ &= \langle b_{\xi_1}(x), \xi_1\rangle = \langle x\xi_1, \xi_1\rangle\end{aligned}$$

donc $U_\alpha^*\xi_2 = \xi_1$. On a donc $U_\alpha b_{\xi_1}(x) = b_{\xi_2}(\alpha(x)) = Ub_{\xi_1}(x)$ pour tout $x \in M_1$ et $U = U_\alpha$. Soit L une bijection linéaire de $\mathscr{H}_1^+$ sur $\mathscr{H}_2^+$; comme $\mathscr{H}_1$ et $\mathscr{H}_2$ sont autopolaires L^* est une bijection linéaire de $\mathscr{H}_2^+$ sur $\mathscr{H}_1^+$ et L^*L une bijection linéaire positive de $\mathscr{H}_1^+$ sur $\mathscr{H}_1^+$. Le théorème suivant montre qu'il en est de même de $(L^*L)^\alpha$ pour tout $\alpha \in \mathbf{R}$ et achève la démonstration du théorème 3.3.

THÉORÈME 3.9. — *Soient* M *une algèbre de von Neumann dans* $\mathscr{H}$, ξ_0 *un vecteur totalisateur et séparateur pour* M, $\mathscr{H}^+ = \mathscr{P}_{\xi_0}^\natural$. *Pour tout opérateur positif inversible de* $\mathscr{H}$ *dans* $\mathscr{H}$ *tel que* $T\mathscr{H}^+ = \mathscr{H}^+$ *il existe un* $h \in M$ *tel que* $T = hJhJ$.

On vérifie facilement que h est unique et nécessairement inversible.

LEMME 3.10. — *Soient* M, $\mathscr{H}$, ξ, $\mathscr{H}^+$ *comme ci-dessus et* b *une application linéaire de* M *dans* $\mathscr{H}$ *telle que* $b(M_+)$ *soit une face dense de* $\mathscr{H}_+$. *Il existe alors une isométrie* $U \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ *telle que* $U\mathscr{H}_+ = \mathscr{H}_+$ *et un* $\xi_2 \in \mathscr{H}_+$, *séparateur et totalisateur pour* M *tels que :*

$$b(x) = Ub_{\xi_2}(x) \quad \textit{pour tout} \quad x \in M.$$

Démonstration. — Comme $b(\mathrm{M}_+)$ est dense dans $\mathscr{H}^+$, l'intervalle $[0, b(1)]$ est total dans $\mathscr{H}$. Soit $\xi_1 = b(1)$ et soit $x \in \mathrm{M}$; $x\mathrm{J}x\mathrm{J}\xi_1 = 0$ implique $x\mathrm{J}x\mathrm{J} = 0$ donc $x = 0$. Ainsi ξ_1 est séparateur et totalisateur pour M, car $\mathrm{J}\xi_1 = \xi_1$. L'application b_{ξ_1}, $b_{\xi_1}(x) = \Delta_{\xi_1}^{1/4} x\xi_1$ est un isomorphisme de M^+ sur la face de ξ_1 dans $\mathscr{H}^+$. Il existe donc une bijection linéaire α de M_+ sur M_+ telle que $\alpha(1) = 1$ et que

$$b(x) = b_{\xi_1}(\alpha(x))$$

pour tout $x \in \mathrm{M}_+$. Soit $\xi_2 = \mathrm{U}_\alpha^{-1}\xi_1$; on a

$$\mathrm{U}_\alpha b_{\xi_2}(x) = b_{\xi_1}\alpha(x) = b(x)$$

pour tout $x \in \mathrm{M}$.

Lemme 3.11. — *Soient* M, $\mathscr{H}$, ξ_0, $\mathscr{H}^+$ *et* T *comme dans* 3.9. *Il existe alors un* $\xi_2 \in \mathscr{H}^+$ *totalisateur et séparateur pour* M *tel que l'opérateur* $\Delta_{\xi_0}^{1/4} x\xi_0 \to \Delta_{\xi_2}^{1/4} x\xi_2$, *soit borné, inversible et de module égal à* T.

Démonstration. — L'application $b = \mathrm{T}b_{\xi_0}$ est un isomorphisme de M_+ sur une face dense de $\mathscr{H}^+$ donc il existe U et ξ_2 vérifiant les conditions 3.10. On a

$$\mathrm{U}^*\mathrm{T}\Delta_{\xi_0}^{1/4} x\xi_0 = \Delta_{\xi_2}^{1/4} x\xi_2$$

pour tout $x \in \mathrm{M}$. L'opérateur $\mathrm{U}^*\mathrm{T}$ étant borné et inversible on a 3.11.

Lemme 3.12. — *Soient* P *une algèbre de von Neumann dans* $\mathscr{H}$, η_0 *un vecteur totalisateur et séparateur pour* P, $\varphi = \omega_{\eta_0}$ *et* $a \in \mathrm{P}$ *tel que la fonction* $t \to \sigma_t^\varphi(a)$ *se prolonge en une fonction analytique* $z \to \sigma_z^\varphi(a)$ *de* $\mathrm{D}_{-1/4} = \{z \in \mathbf{C}, \operatorname{Im} z \in]-1/4, 0[\}$ *dans* M, *continue dans* $\mathrm{D}_{-1/4}$. *Alors pour tout* $x \in \mathrm{P}$ *on a*

$$\sigma_{-i/4}^\varphi(a)\mathrm{J}_{\eta_0}\sigma_{-i/4}^\varphi a\mathrm{J}_{\eta_0}\Delta_{\eta_0}^{1/4}x\xi_0 = \Delta_{\eta_0}^{1/4}axa^*\eta_0.$$

Démonstration. — Soient $t \in \mathbf{R}$, $x \in \mathrm{P}$, $\mathrm{J} = \mathrm{J}_{\eta_0}$ on a

$$\sigma_t(a)\Delta^{it}x^*\eta_0 = \Delta^{it}ax^*\eta_0$$

donc

$$\sigma_{-i/4}(a)\Delta^{1/4}x^*\eta_0 = \Delta^{1/4}ax^*\eta_0$$

et

$$\sigma_{-i/4}(a)J\Delta^{1/4}x\eta_0 = \Delta^{1/4}ax^*\eta_0.$$

Remplaçant x par ax^* on obtient

$$\sigma_{-i/4}(a)J\Delta^{1/4}ax^*\eta_0 = \Delta^{1/4}axa^*\eta_0$$

et l'égalité cherchée.

Lemme 3.13. — *Soient* M, $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}^+$, J *comme dans* 3.9, ξ_1, $\xi_2 \in \mathcal{H}^+$ *séparateurs (et totalisateurs) pour* M, $\varphi_1 = \omega_{\xi_1}$, $\varphi_2 = \omega_{\xi_2}$, s_1 *et* s_2 *les formes autopolaires associées à* φ_1 *et* φ_2 *respectivement. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) L'application $t \to u_t = (D\varphi_2 : D\varphi_1)_t$ *se prolonge analytiquement à* $D_{-1/4}$ *et continûment à* $\bar{D}_{-1/4}$ *avec* $\|u_z\| \leqslant 1$ $\forall z \in D_{-1/4}$ (cf. [4]).

b) $\|\Delta_{\xi_2}^{1/4}x\xi_2\| \leqslant \|\Delta_{\xi_1}^{1/4}x\xi_1\|$ $\forall x \in M$.

c) $s_2(x, x) \leqslant s_1(x, x)$ $\forall x \in M$.

d) $s_2(x, x) \leqslant s_1(x, x)$ $\forall x \in M_+$.

e) $\xi_2 \leqslant \xi_1$ $(\mathcal{H}^+)$.

Démonstration. — *a)* $\Longrightarrow$ *b)*. Reprenons les notations de 2.4. On a $\theta(\xi_2, \xi_1) = 1$, $J_{\xi_1} = J_{\xi_1, \xi_2} = \cdots = J$, $J_{\eta_0} = \Sigma U_{ij}JU_{ji}^*$ $i, j = 1, 2$. Par hypothèse $a = 1 \otimes e_{21}$ vérifie les conditions du lemme 3.13 et ([4]) $\sigma_{-i/4}(a) = u_{-i/4} \otimes e_{21}$. Ainsi pour tout $x \in M$

$$(u_{-i/4} \otimes e_{21})J_{\eta_0}(u_{-i/4} \otimes e_{21})J_{\eta_0}\Delta_{\eta_0}^{1/4}(x \otimes e_{11})\eta_0$$
$$= \Delta_{\eta_0}^{1/4}(1 \otimes e_{21})(x \otimes e_{11})(1 \otimes e_{12})\eta_0.$$

On a $(x \otimes e_{11})\eta_0 = x\xi_1 \otimes \varepsilon_{11}$ donc le premier membre de l'égalité ci-dessus s'écrit :

$$(u_{-i/4} \otimes e_{21})J_{\eta_0}(u_{-i/4} \otimes e_{21})[J\Delta_{\xi_1}^{1/4}x\xi_1 \otimes \varepsilon_{11}]$$
$$= (u_{-i/4}Ju_{-i/4}J\Delta_{\xi_1}^{1/4}x\xi_1) \otimes \varepsilon_{22}$$

d'où l'égalité

$$\Delta_{\xi_2}^{1/4}x\xi_2 = u_{-i/4}Ju_{-i/4}J\Delta_{\xi_1}^{1/4}x\xi_1. \tag{11}$$

b) $\Longrightarrow$ *c)* et *c)* $\Longrightarrow$ *d)* sont immédiats.

d) $\Longrightarrow$ *e)*. On a par hypothèse $\langle hJhJ\xi_2, \xi_2\rangle \leqslant \langle hJhJ\xi_1, \xi_1\rangle$ pour tout $h \in M_+$. Soit $H = hJhJ$ pour $h \in M_+$; comme

H est positif, on a (inégalité de Schwartz) :

$$|\langle H\xi_1, \xi_2\rangle|^2 \leqslant \langle H\xi_1, \xi_1\rangle\langle H\xi_2, \xi_2\rangle$$

et comme $\langle H\xi_1, \xi_2\rangle \geqslant 0$ et $\langle H\xi_2, \xi_2\rangle \leqslant \langle H\xi_1, \xi_1\rangle$ il vient :

$$\langle H\xi_1, \xi_2\rangle \leqslant \langle H\xi_1, \xi_1\rangle \text{ et } \langle hJhJ\xi_1, \xi_1 - \xi_2\rangle \geqslant 0$$

Le lemme 2.19 montre alors que $\xi_2 \leqslant \xi_1$ $(\mathscr{H}^+)$.

e) $\Longrightarrow$ *a*). Reprenons les notations de 2.4. On a

$$S_{\xi_2,\xi_1} = J\Delta^{1/2}_{\xi_2,\xi_1}$$

donc pour tout $x \in M$,

$$\langle\Delta^{1/2}_{\xi_2,\xi_1}x\xi_1, x\xi_1\rangle = \langle Jx^*\xi_2, x\xi_1\rangle = \langle\xi_2, JxJx\xi_1\rangle$$
$$\leqslant \langle\xi_1, JxJx\xi_1\rangle.$$

Ainsi pour tout ξ dans le domaine de $\Delta^{1/4}_{\xi_1}$ on a

$$\|\Delta^{1/4}_{\xi_2,\xi_1}\xi\| \leqslant \|\Delta^{1/4}_{\xi_1}\xi\|.$$

La fonction $t \to \Delta^{it}_{\xi_2,\xi_1}\Delta^{-it}_{\xi_1}$ se prolonge donc analytiquement à $D_{-1/4}$ continûment à $\overline{D}_{-1/4}$ avec une norme $\leqslant 1$.

Pour tout $t \in \mathbf{R}$ et tout $\xi \in \mathscr{H}$, on a

$$\Delta^{it}_{\xi_2,\xi_1}\xi \otimes \varepsilon_{21} = \Delta^{it}_{\eta_0}(\xi \otimes \varepsilon_{21}) = \Delta^{it}_{\eta_0}(1 \otimes e_{21})\Delta^{-it}_{\eta_0}(\Delta^{it}_{\eta_0}(\xi \otimes \varepsilon_{11}))$$
$$= (u_t \otimes e_{21})(\Delta^{it}_{\xi_1}\xi \otimes \varepsilon_{11}).$$

Ainsi pour tout $t \in \mathbf{R}$, $\Delta^{-it}_{\xi_2,\xi_1}\Delta^{-it}_{\xi_1} = u_t$.

Démonstration du théorème 3.9. — Le lemme 3.11 montre que T est le module d'un opérateur de la forme

$$\Delta^{1/4}_{\xi_0}x\xi_0 \to \Delta^{1/4}_{\xi_2}x\xi_2,\ x \in M.$$

Les conditions équivalentes du lemme 3.13 montrent, en appliquant l'égalité 11 que T est le module d'un opérateur de la forme XJXJ, $X \in M$. On a donc $T = hJhJ$, où h est le module de X.

Démonstration du théorème 3.4. — *a*) $\Longrightarrow$ *b*) : L'ensemble $D(\mathscr{H}^+)$ des $\delta \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ tels que $e^{t\delta}\mathscr{H}^+ = \mathscr{H}^+$, $\forall t$, est un sous-espace vectoriel réel auto-adjoint de $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ (formule de Trotter) on peut donc supposer que $\delta = \delta^*$ ou $\delta = -\delta^*$. Si $\delta = \delta^*$ le théorème 3.9 montre qu'il existe un groupe à un paramètre $t \to h_t$ d'opérateurs positifs inversibles de M tels que $e^{t\delta} = h_t J h_t J$ $\forall t \in \mathbf{R}$. D'où $e^{t\delta} M e^{-t\delta} = M$ et

$$[\delta, M] \subset M.$$

Si $\delta = -\delta^*$ il existe (théorème 3.3) pour tout $t \in \mathbf{R}$ un isomorphisme de Jordan α_t de M sur M tel que $e^{t\delta} = U_{\alpha_t}$. Comme δ est borné l'application $t \to U_{\alpha_t}$ est continue en norme et le théorème 3.2 montre que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $t_0 > 0$ tel que pour t, $|t| \leqslant t_0$ on ait :

$$\|\alpha_t(x) - x\| \leqslant \varepsilon \|x\|$$

Il est donc clair que le centre de M est invariant par les α_t et, comme $\alpha_t = (\alpha_{t/2})^2$, que chaque α_t est un automorphisme de M. On a alors $U_{\alpha_t} M U_{\alpha_t}^{-1} = M$ et $[\delta, M] \subset M$.

b) $\Longrightarrow$ *c*) Par hypothèse l'application $x \to [\delta, x]$ est une dérivation de M il existe donc $h \in M$ ([9]) tel que

$$\delta - h \in M'.$$

Alors $\delta - (h + JhJ)$ commute avec M et M′ donc appartient à $M \cap M'$ et commute avec J. Il existe donc un $x \in M$ tel que $\delta = x + JxJ$.

c) $\Longrightarrow$ *a*) On a, comme x et JxJ commutent :

$$e^{t(x+JxJ)} = e^{tx} J e^{tx} J$$

4. Propriétés du cône autopolaire associé à une algèbre de von Neumann.

Proposition 4.1. — *Soient* $\mathcal{H}$ *un espace hilbertien complexe,* $\mathcal{H}^+$ *un cône convexe autopolaire dans* $\mathcal{H}$ *et* $\mathcal{H}^J = (\mathcal{H}^+ - \mathcal{H}^+)^-$.

a) $\mathcal{H}^J$ *est un espace hilbertien réel dans lequel* $\mathcal{H}^+$ *est autopolaire.*

b) $\mathcal{H} = \mathcal{H}^J \oplus i\mathcal{H}^J$ *et l'application qui à* $\xi_1 + i\xi_2$, $\xi_j \in \mathcal{H}^J$ *associe* $J(\xi_1 + i\xi_2) = \xi_1 - i\xi_2$ *est une involution isométrique de* $\mathcal{H}$ *sur* $\mathcal{H}$.

c) *Pour tout* $\xi \in \mathcal{H}^J$ *il existe* $\xi^+, \xi^- \in \mathcal{H}^+$ *tels que*

$$\xi = \xi^+ - \xi^-, \qquad \xi^+ \perp \xi^-.$$

d) Pour toute face F *de* $\mathcal{H}^+$, *l'ensemble*

$$F^\perp = \{\xi \in \mathcal{H}^+, \ \xi \perp \eta, \ \forall \eta \in F\}$$

est une face fermée de $\mathcal{H}^+$.

Démonstration. — *a*) Pour $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{H}^J$ on a $\langle \xi_1, \xi_2 \rangle \in \mathbf{R}$.

b) Comme $\mathcal{H}^+$ est autopolaire il est total dans $\mathcal{H}$ donc $\mathcal{H}^J + i\mathcal{H}^J$ est dense dans $\mathcal{H}$. Pour $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{H}^J$ on a $\mathrm{Re}\langle \xi_1, i\xi_2 \rangle = 0$ donc $i\mathcal{H}^J$ est orthogonal à $\mathcal{H}^J$ pour la structure réelle sous-jacente à $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}^J + i\mathcal{H}^J$ est fermé donc égal à $\mathcal{H}$.

c) Soient ξ^+ la projection orthogonale de ξ sur $\mathcal{H}^+$, $\xi^- = \xi^+ - \xi$. On a par construction $\langle \xi^-, \eta \rangle \geqslant 0$, $\forall \eta \in \mathcal{H}^+$ donc $\xi^- \in \mathcal{H}^+$, $\xi^+ \perp \xi^-$.

d) Immédiat.

Théorème 4.2. — *Soient* M *une algèbre de von Neumann dans* $\mathcal{H}$, ξ_0 *un vecteur totalisateur et séparateur pour* M, $\mathcal{H}^+ = \mathcal{P}^\natural_{\xi_0}$.

a) Pour toute face F *de* $\mathcal{H}^+$ *il existe un projecteur* $e \in$ M *tel que* $\overline{F} = eJeJ\mathcal{H}^+$, *on a alors* $P_F = eJeJ$, *où* P_F *désigne le projecteur orthogonal de* $\mathcal{H}$ *sur l'espace vectoriel fermé engendré par* F.

b) Pour tout projecteur $e \in$ M, $eJeJ\mathcal{H}^+$ *est une face fermée* F_e *de* $\mathcal{H}^+$ *et* $P_{F_e} = eJeJ$.

c) L'application $e \to F_e$ *est un isomorphisme d'ordre de l'ensemble des projecteurs de* M *sur l'ensemble des faces fermées de* $\mathcal{H}^+$ *et on a* $F_{1-e} = F_e^\perp$ *pour tout projecteur* $e \in$ M.

La démonstration utilise les lemmes suivants :

Lemme 4.3. — *Soient* M, $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}^+$, ξ_0 *comme dans* 4.2. *Pour* $\xi \in \mathcal{H}^+$ *les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) $\eta \geqslant 0$, $\xi \perp \eta \Longrightarrow \eta = 0$.

b) ξ *est séparateur pour* M.

c) ξ *est totalisateur pour* M.

d) La face de ξ *dans* $\mathcal{H}^+$ *est dense dans* $\mathcal{H}^+$.

Démonstration. — $a) \Longrightarrow b)$ Soit e un projecteur de M tel que $e\xi = 0$ alors $\langle eJeJ\eta, \xi\rangle = 0$ pour tout $\eta \in \mathscr{H}^+$ et comme $eJeJ\mathscr{H}^+ \subset \mathscr{H}^+$ on a $eJeJ = 0$ puis $e = 0$.

$b) \Longrightarrow c)$ On a $J\xi = \xi$ et $JMJ = M'$.

$c) \Longrightarrow d)$ Si ξ est totalisateur pour M, il est aussi totalisateur et séparateur, le lemme 2.7 *d*) *e*) montre que $\mathscr{P}_\xi^\natural = \mathscr{H}^+$. L'application qui à $x \in M$ associe $\Delta_\xi^{1/4}x\xi$ définit alors (2.7 et 1.2) un isomorphisme de M^+ sur la face de ξ dans $\mathscr{H}^+$, d'où la conclusion.

LEMME 4.4. — *Soient* M, $\mathscr{H}$, $\mathscr{H}^+$, ξ_0 *comme dans* 4.2 *et* $\eta \in \mathscr{H}^+$, $e \in M$ *le support de* ω_η. *Il existe* $\xi \in \mathscr{H}^+$ *séparateur pour* M *tel que :*

a) $e\Delta_\xi^{it} = \Delta_\xi^{it}e \ \forall t \in \mathbf{R}$.

b) $eJeJ\xi = \eta$.

c) *La construction de Gelfand Segal associée à la restriction* ψ *de* ω_η *à* M_e *s'identifie au triplet* $(eJeJ\mathscr{H}, \eta, \pi)$ *où, pour* $x \in M_e$, $\pi(x)$ *désigne la restriction de* x *à* $\mathscr{K} = eJeJ\mathscr{H}$.

d) *Le cône autopolaire correspondant au couple* $\pi(M_e)$, η *dans* $\mathscr{K}$ *est* $\mathscr{H}^+ \cap \mathscr{K} = eJeJ\mathscr{H}^+$.

Démonstration. — Soit $\xi = \eta + (1-e)J(1-e)\xi_0$. On a $\xi \in \mathscr{H}^+$. Pour $x \in M$,

$$\langle x\eta, (1-e)J(1-e)\xi_0\rangle = \langle (1-e)J(1-e)\xi_0, JxJ\eta\rangle = 0$$

car

$$JxJ\eta \in M'\eta \subset e\mathscr{H}.$$

Ainsi

$$\langle x\xi, \xi\rangle = \langle x\eta, \eta\rangle + \langle x(1-e)J(1-e)\xi_0, (1-e)J(1-e)\xi_0\rangle.$$

Pour $x \in M_+$, $\langle x\xi, \xi\rangle = 0$ entraîne $x\eta = 0$ et

$$x(1-e)J(1-e)\xi_0 = 0.$$

La dernière égalité implique

$$(1-e)x(1-e)J(1-e)x(1-e)J\xi_0 = 0$$

donc $(1-e)x(1-e) = 0$

$$(y \in M,\ yJy\xi_0 = 0 \Longrightarrow \langle \Delta_{\xi_0}^{1/2}y\xi_0, y\xi_0\rangle = 0 \Longrightarrow y = 0)$$

On a montré que ξ est séparateur pour M, donc totalisateur pour M (4.3). Pour $x \in \mathrm{M}$, $\omega_\xi(ex) = \langle x\eta, \eta \rangle = \omega_\xi(xe)$ donc $\Delta_\xi^{it} e = e\Delta_\xi^{it}$ $\forall t \in \mathbf{R}$.

On a $e\eta = \eta$ donc $eJeJ\xi = \eta$.

La condition c) résulte des égalités $J_\xi = J$ (lemme 2.7), $\langle x\xi, \xi \rangle = \langle x\eta, \eta \rangle$ $\forall x \in \mathrm{M}_e$, $eJeJ\xi = \eta$ et de [5]. L'involution J_ψ est donc la restriction de J à $\mathcal{K} = eJeJ\mathcal{H}$, ce qui montre que le cône autopolaire associé à $\pi(\mathrm{M}_e)$, η dans $\mathcal{K}$, est contenu dans $\mathcal{H}^+ \cap \mathcal{K}$. Comme le produit scalaire de deux éléments quelconques de $\mathcal{H}^+$ est positif, il est en fait égal à $\mathcal{H}^+ \cap \mathcal{K}$. On a $eJeJ\mathcal{H}^+ = \mathcal{H}^+ \cap \mathcal{K}$ d'où d).

Lemme 4.5. — *Soient* M, $\mathcal{H}$, ξ_0, $\mathcal{H}^+$ *comme ci-dessus.*

a) Soit f un projecteur de M, ξ_1 *et* ξ_2 *des éléments de* $\mathcal{H}^+$ *avec* $\xi_1 \leqslant \xi_2$ $(\mathcal{H}^+)$. *Alors si* $fJfJ\xi_2 = \xi_2$, *on a* $fJfJ\xi_1 = \xi_1$ *et* $f\xi_1 = \xi_1$.

b) Soit $\eta \in \mathcal{H}^+$, *e le support de* ω_η, *alors* $F_e = eJeJ\mathcal{H}^+$ *est la fermeture de la face de* η *dans* $\mathcal{H}^+$.

Démonstration. — a) On a

$$(1-f)J(1-f)\xi_1 \leqslant (1-f)J(1-f)\xi_2 \,(\mathcal{H}^+)$$

donc $(1-f)J(1-f)\xi_1 = 0$. Soient ξ séparateur et totalisateur pour M, tel que $\mathcal{P}_\xi^\natural = \mathcal{H}^+$ et e un projecteur de M_2 tels que $eJeJ\xi = \xi_1$. On a, avec $y = (1-f)e$

$$yJy\xi = (1-f)eJ(1-f)J^2e\xi = (1-f)J(1-f)J\xi_1 = 0.$$

Ainsi $y = 0$ et $(1-f)\xi_1 = 0$ donc $\xi_1 = f\xi_1 = fJfJ\xi_1$.

b) L'assertion a) montre que $F_e = eJeJ\mathcal{H}^+$ est une face fermée de $\mathcal{H}^+$ contenant η. Comme η est totalisateur et séparateur pour $\pi(\mathrm{M}_e)$ dans $\mathcal{K}$, la fermeture de la face engendrée par η dans $\mathcal{H}^+ \cap \mathcal{K}$ est $\mathcal{H}^+ \cap \mathcal{K}$ (4.3). On a donc montré que $F_e = eJeJ\mathcal{H}^+ = \mathcal{H}^+ \cap \mathcal{K}$ est la fermeture de la face de η dans $\mathcal{H}^+$.

Démonstration du théorème 4.2. — a) Pour tout $\eta \in \mathcal{H}^+$, soit $F(\eta)$ la face engendrée par η. On a $F = \cup_{\eta \in F} F(\eta)$ et la famille des $F(\eta)$, $\eta \in F$ est filtrante croissante. Pour tout $\eta \in F$, soit e_η le support de ω_η, le lemme 4.5 montre que $\overline{F}(\eta) = F_{e_\eta}$ donc que $P_{F_\eta} = e_\eta J e_\eta J$. Pour $\eta_1 \leq \eta_2$ on a

$$(x \in M^+,\ x\eta_2 = 0) \Longrightarrow (xJxJ\eta_1 = 0) \Longrightarrow (x\eta_1 = 0)$$

donc $e_{\eta_1} \leq e_{\eta_2}$. Soit $e = \bigvee e_\eta = \lim e_\eta$ pour la topologie forte, quand $\eta \to \infty$ selon F. Pour $\xi \in JeJe\mathscr{H}$, on a $\xi = \operatorname{Lim}_{\eta \to \infty} e_\eta J e_\eta J \xi$ donc $P_F \xi = \xi$. Enfin pour $\xi \in F$ on a $eJeJ\xi = \xi$, ce qui montre que $P_F = eJeJ$. Pour $\xi \in P_F \mathscr{H}^+$ on a $\xi = \operatorname{Lim} e_\eta J e_\eta J \xi \in \overline{\bigcup_{\eta \in F} F(\eta)}$ car $\xi \in \mathscr{H}^+$.

Ainsi $\xi \in \overline{F}$. L'inclusion $\overline{F} \subset P_F \mathscr{H}^+$ est immédiate.

b) résulte de 4.5 *a*).

c) L'application $e \to F_e$ est surjective et croissante. Elle est injective car e est le support de ω_{ξ_1}, $\xi_1 = eJeJ\xi_0$ pour tout projecteur $e \in M$. Soient e et f des projecteurs de M, avec $F_f = F_e^\perp$. On a $eJeJ\xi_0 \perp fJfJ\xi_0$ donc $feJfeJ = 0$ et $fe = 0$. Ainsi $f = 1 - e$.

THÉORÈME 4.6. — *Soient* M *une algèbre de von Neumann dans* $\mathscr{H}$, ξ_0 *un vecteur séparateur et totalisateur pour* M, $\mathscr{H}^+ = \mathscr{P}_{\xi_0}^\natural$.

a) *Pour toute face* F *de* $\mathscr{H}^+$ *on a* $\overline{F} = F^{\perp\perp}$.

b) *Pour toute face* F *de* $\mathscr{H}^+$ *et tout* $t \in \mathbf{R}$ *on a*

$$e^{t(P_F - P_{F^\perp})}\mathscr{H}^+ = \mathscr{H}^+.$$

Démonstration. — L'assertion *a*) résulte facilement de 4.2 *a*) *c*). Montrons *b*). Soit $e_0 \in M$ tel que $P_F = e_0 J e_0 J$,

$$P_{F^\perp} = (1 - e_0)J(1 - e_0)J.$$

On a $P_F - P_{F^\perp} = -1 + e_0 + Je_0J$; et pour $t \in \mathbf{R}$,

$$e^{t(P_F - P_{F^\perp})} = e^{-t} e^{te_0} J e^{te_0} J$$

d'où la conclusion.

PROPOSITION 4.7. — *Soient* $\mathscr{H}$ *un espace hilbertien complexe,* $\mathscr{H}^+$ *un cône convexe autopolaire dans* $\mathscr{H}$, J *comme dans* 4.1 *b*) *et* $D(\mathscr{H}^+)$ *l'ensemble des* $\delta \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ *tels que*

$$e^{t\delta}\mathscr{H}^+ = \mathscr{H}^+ \quad \forall t \in \mathbf{R}.$$

Alors $D(\mathcal{H}^+)$ *est un sous-espace vectoriel réel, stable par involution, et stable par crochet* $(\delta_1, \delta_2) \to [\delta_1, \delta_2] = \delta_1\delta_2 - \delta_2\delta_1$ *de* $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Démonstration. — Montrons que

$$\delta_1, \delta_2 \in D(\mathcal{H}^+) \Longrightarrow [\delta_1, \delta_2] \in D(\mathcal{H}^+).$$

Soit $\delta_3 = [\delta_1, \delta_2]$. On a très facilement :

$$t^{-2}(e^{t\delta_1}e^{t\delta_2}e^{-t\delta_1}e^{-t\delta_2} - 1) \to \delta_3$$

en norme, quand $t \to 0$. Il existe donc une suite (x_n) d'automorphismes de $\mathcal{H}^+$ tels que $x_n = 1 + \frac{1}{n}(\delta_3 + o(1))$. On a donc $e^{\delta_3}\mathcal{H}^+ = \mathcal{H}^+$ car $e^{\delta_3} = \lim\limits_{n\to\infty}(x_n)^n$.

DÉFINITION 4.8. — *Soient* $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}^+$, J *comme ci-dessus,* $D(\mathcal{H}^+)$ *sera appelée algèbre de Lie involutive du cône* $\mathcal{H}^+$.

THÉORÈME 4.9. — *Soient* M *une algèbre de von Neumann dans* $\mathcal{H}$, ξ_0 *un vecteur totalisateur et séparateur pour* M, $\mathcal{H}^+ = \mathcal{P}^{\natural}_{\xi_0}$.

L'application qui à $x \in M$ *associe* $x + JxJ \in D(\mathcal{H}^+)$ *définit par passage au quotient un isomorphisme de l'algèbre de Lie involutive des dérivations de* M *sur le quotient* $\underline{D}(\mathcal{H}^+)$ *de* $D(\mathcal{H}^+)$ *par son centre.*

Démonstration. — Pour $x \in M$ on a $x + JxJ \in D(\mathcal{H}^+)$ (3.4) et pour $x_1, x_2 \in M$ on a

$$[x_1 + Jx_1J, x_2 + Jx_2J] = [x_1, x_2] + J[x_1, x_2]J$$

Le théorème 3.4 montre donc que l'application $x \to x + JxJ$ est un homomorphisme surjectif de l'algèbre de Lie involutive de M sur $D(\mathcal{H}^+)$. L'image du centre de M est donc contenue dans le centre de $D(\mathcal{H}^+)$ et la conclusion 4.9 résulte facilement du *a*) de la proposition suivante :

PROPOSITION 4.10. — *Soient* M, $\mathcal{H}$, ξ_0, $\mathcal{H}^+$ *comme ci-dessus.*

a) *On a Centre* $D(\mathcal{H}^+) = \{ x \in$ *Centre* $M, x = x^*\}$.

b) Soit F *une face fermée de* $\mathcal{H}^+$, *alors*

$$P_F + P_{F^\perp} = 1 \Longleftrightarrow \mathcal{H}^+ = F \oplus F^\perp \Longleftrightarrow \exists e$$

projecteur, $e \in M \cap M'$, *tel que* $F = F_e$.

c) Soit F *une face fermée de* $\mathcal{H}^+$ *vérifiant les conditions b), alors :*

$$\mathcal{H} = e\mathcal{H} \oplus (1-e)\mathcal{H}, \quad M = M_e \oplus M_{1-e}, \quad \mathcal{H}^+ = F \oplus F^\perp,$$
$$D(\mathcal{H}^+) = D(F) \oplus D(F^\perp).$$

Démonstration. — *a)* Soit $x \in M$ tel que $x + JxJ \in$ Centre $D(\mathcal{H}^+)$. Pour tout $y \in M$ on a $[x, y] + J[x, y]J = 0$ donc $[x, y] \in$ Centre M et $[x, y] = 0$. Ainsi $x \in$ Centre M et $x + JxJ = x + x^*$.

b) Comme $\xi \geqslant 0 \Longrightarrow P_F\xi \geqslant 0$ pour tout ξ, on a

$$\mathcal{H}^+ = F \oplus F^\perp$$

dès que $P_F + P_{F^\perp} = 1$.

Inversement $\mathcal{H}^+ = F \oplus F^\perp$ entraîne $P_F + P_{F^\perp} = 1$. Soit e un projecteur de M, on a

$$P_{F_e} + P_{F_{1-e}} = 1 + 2(eJeJ) - (e + JeJ).$$

Ainsi $P_F + P_{F^\perp} = 1$ est équivalent à $(e - JeJ)^2 = 0$, donc à $e = JeJ$($e - JeJ$ est normal). Enfin

$$e = JeJ \Longleftrightarrow e \in \text{Centre } M.$$

c) La seule assertion à montrer est

$$D(\mathcal{H}^+) = D(F) \oplus D(F^\perp).$$

Comme $e \in M \cap M'$, e commute avec tout $\delta \in D(\mathcal{H}^+)$, donc δ laisse $e\mathcal{H}$ et $(1-e)\mathcal{H}$ globalement invariants.

Définition 4.11. — *Soient* $\mathcal{H}$ *un espace hilbertien complexe,* $\mathcal{H}^+$ *un cône convexe autopolaire dans* $\mathcal{H}$. *On appelle orientation de* $\mathcal{H}^+$ *la donnée d'une structure d'espace vectoriel complexe sur* $\underline{D}(\mathcal{H}^+)$, *compatible avec la structure d'algèbre de Lie involutive de* $\underline{D}(\mathcal{H}^+)$.

Une orientation de $\mathcal{H}^+$ est donc caractérisée par un opérateur I, $I^2 = -1$ sur $\underline{D}(\mathcal{H}^+)$ tel que

$$[I\delta_1, \delta_2] = [\delta_1, I\delta_2] = I[\delta_1, \delta_2]$$

$\forall \delta_1, \delta_2 \in \underline{D}(\mathcal{H}^+)$ et que $I(\delta^*) = - I(\delta)^* \; \forall \delta \in \underline{D}(\mathcal{H}^+)$. Soient $\mathcal{H}$, M, ξ_0 et $\mathcal{H}^+$ comme ci-dessus, l'orientation I_M de $\mathcal{H}^+$ déduite de la structure d'algèbre de Lie involutive complexe de l'ensemble des dérivations de M, sera appelée orientation canonique de $\mathcal{H}^+$ associée à M.

Proposition 4.12. — *Soient* M *une algèbre de von Neumann dans* $\mathcal{H}$, ξ_0 *un vecteur séparateur et totalisateur pour* M, $\mathcal{H}^+ = \mathcal{P}^\natural_{\xi_0}$, I_1 *et* I_2 *deux orientations de* $\mathcal{H}^+$.

Il existe alors une face fermée $F = F_e$, e *projecteur de* $M \cap M'$ *de* $\mathcal{H}^+$ *(vérifiant les conditions* 4.11 *b)) telle que* I_1 *coïncide avec* I_2 *sur* $\underline{D}(F)$ *et que* I_1 *coïncide avec* $- I_2$ *sur* $\underline{D}(F^\perp)$.

Quand M *est un facteur* I_M *et* $- I_M$ *sont les seules orientations de* $\mathcal{H}^+$.

Démonstration. — Soit j l'isomorphisme canonique de l'algèbre de Lie des dérivations de M, D(M) sur $\underline{D}(\mathcal{H}^+)$. On a facilement Centre $\underline{D}(\mathcal{H}^+) = \{0\}$. Soit $\varepsilon = I_2 \circ I_1^{-1}$. On a

$$[\varepsilon\delta_1, \delta_2] = \varepsilon[\delta_1, \delta_2] = [\delta_1, \varepsilon\delta_2] \; \forall \delta_1, \delta_2 \in \underline{D}(\mathcal{H}^+)$$

et

$$[\varepsilon\delta_1, \varepsilon\delta_2] = [I_2 I_1^{-1}\delta_1, I_2 I_1^{-1}\delta_2] = - [I_1^{-1}\delta_1, I_1^{-1}\delta_2] = [\delta_1, \delta_2].$$

Donc pour tout $\delta \in \underline{D}(\mathcal{H}^+)$ on a $\delta - \varepsilon^2\delta \in$ Centre $\underline{D}(\mathcal{H}^+)$, d'où $\varepsilon^2 = 1$. Ainsi $\underline{D}(\mathcal{H}^+)$ est la somme directe des deux idéaux

$$\varepsilon_1 = \{\delta \in \underline{D}(\mathcal{H}^+), \varepsilon\delta = \delta\} \quad \text{et} \quad \varepsilon_{-1} = \{\delta \in \underline{D}(\mathcal{H}^+), \varepsilon\delta = - \delta\}.$$

Comme $\varepsilon(\delta^*) = (\varepsilon(\delta))^*$ ces deux idéaux sont autoadjoints. Soient

$$M_1 = \{x \in M, \; j \circ \mathrm{Ad}x \in \varepsilon_1\}, \quad M_{-1} = \{x \in M, \; j \circ \mathrm{Ad}x \in \varepsilon_{-1}\}$$

Pour $x \in M_1$, $y \in M_{-1}$ on a $j \circ \mathrm{Ad}[x, y] = 0$ donc

$$[x, y] \in \text{Centre } M$$

et $[x, y] = 0$. Pour $x \in M_1' \cap M$, $j \circ \mathrm{Ad}x$ commute avec tout $\delta \in \varepsilon_1$ donc appartient à ε_{-1}. On a montré que

$$M_{-1} = M_1' \cap M$$

donc, comme M_1 est autoadjoint, que M_{-1} est une sous-algèbre de von Neumann de M. De même $M_1 = M'_{-1} \cap M$ est une sous-algèbre de von Neumann de M, et M_1 et M_{-1} contiennent le centre de M. Pour tout $x \in M$ on a

$$j \circ \mathrm{Ad}x \in \varepsilon_1 + \varepsilon_{-1}$$

donc il existe $x_1 \in M_1$, $x_{-1} \in M_{-1}$ avec $x = x_1 + x_{-1}$. Pour $x \in M$, $y \in M_1$ on a $[x, y] = [x_1, y] \in M_1$. Pour $x, y \in M_1$ et $z \in M$ on a

$$[x, y]z = [x, y]z_1 + xyz_2 - yxz_2 = [x, y]z_1 + [x, yz_2] \in M_1$$

Ainsi $M_e \subset M_1$, où e désigne le plus grand projecteur de l'idéal bilatère fermé de M_1 engendré par les $[x, y]$ pour $x, y \in M_1$. On a $e \in$ Centre $M_1 =$ Centre M. Comme $M_{1,1-e}$ est abélienne on a $M_1 = M_e +$ Centre M puis

$$M_{-1} = M_{1-e} + \text{Centre } M$$

car $M_{-1} = M'_1$. Il en résulte que ε vaut $+1$ sur $\underline{D}(F_e)$ et -1 sur $\underline{D}(F_{1-e})$.

5. Algèbre de von Neumann associée à un cône autopolaire homogène orienté.

DÉFINITION 5.1. — *Soit $\mathcal{H}^+$ un cône convexe autopolaire dans l'espace hilbertien $\mathcal{H}$. Nous dirons que $\mathcal{H}^+$ est facialement homogène quand pour toute face* F *de $\mathcal{H}^+$ on a $e^{t(P_F - P_{F^\perp})}\mathcal{H}^+ = \mathcal{H}^+$, $\forall t \in \mathbf{R}$ (où P_F (resp $P_{F^\perp}$) désigne la projection orthogonale de $\mathcal{H}$ sur l'espace vectoriel fermé engendré par* F *(resp $F^\perp$)).*

On vérifie facilement que cette condition est équivalente à $\lambda P_F\xi + (1 - P_F - P_{F^\perp})\xi + \lambda^{-1}P_{F^\perp}\xi \in \mathcal{H}^+$ pour tous $\lambda \geqslant 0$, $\xi \geqslant 0$. Dans la suite nous écrirons simplement « homogène » pour « facialement homogène ».

THÉORÈME 5.2. — *Soit $\mathcal{H}^+$ un cône convexe autopolaire homogène dans l'espace hilbertien $\mathcal{H}$,* I *une orientation de $\mathcal{H}^+$.*

a) $M = \{\delta_1 - i\delta_2,\ \delta_1 \in D(\mathcal{H}^+),\ \delta_2 \in I(\delta_1)\}$ *est une algèbre de von Neumann dans $\mathcal{H}$.*

b) On a $M' = \{\delta_1 + i\delta_2,\ \delta_1 \in D(\mathscr{H}^+),\ \delta_2 \in I(\delta_1)\}$ *et*

$$JMJ = M'.$$

c) Pour tout $x \in M$ *on a* $xJxJ\,\mathscr{H}^+ \subset \mathscr{H}^+$.

d) Pour tout $\xi_0 \in \mathscr{H}^+$ *tel que* $(\eta \geqslant 0,\ \eta \perp \xi_0) \Longrightarrow (\eta = 0)$. ξ_0 *est séparateur et totalisateur pour* M, *et*

$$J = J_{\xi_0, M} \qquad \mathscr{H}^+ = \mathscr{P}^\natural_{\xi_0, M}.$$

Lemme 5.3. — *Soit* $\mathscr{H}$, $\mathscr{H}^+$ *un espace hilbertien muni d'un cône autopolaire homogène* $\mathscr{H}^+$, *et soit* $\delta \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) $\delta \in D(\mathscr{H}^+)$.

b) $J\delta = \delta J$ *et* $\xi,\ \eta \geqslant 0,\ \xi \perp \eta \Longrightarrow \delta\xi \perp \eta$.

Démonstration. — Soient ξ, η comme dans *b*), alors

$$\langle e^{t\delta}\xi, \eta\rangle \sim t\langle \delta\xi, \eta\rangle \ qd\ t \to 0,\ \langle \delta\xi, \eta\rangle \neq 0$$

L'implication *a*) $\Longrightarrow$ *b*) est donc immédiate. Montrons que *b*) $\Longrightarrow$ *a*). Il suffit de montrer que $e^{t(\delta-\lambda_0)}\mathscr{H}^+ \subset \mathscr{H}^+$ pour $t \geqslant 0$ et un $\lambda_0 \geqslant 0$. On peut choisir λ_0 tel que la partie réelle de tout élément du spectre de $\lambda_0 - \delta$ soit positive et que

$$\operatorname{Re}\langle(\lambda_0 - \delta)\xi, \xi\rangle \geqslant 0, \quad \forall \xi \in \mathscr{H}.$$

L'opérateur A de $\mathscr{H}^J$ dans $\mathscr{H}^J$ qui à $\xi \in \mathscr{H}^J$ associe $(\lambda_0 - \delta)\xi \in \mathscr{H}^J$ est monotone au sens de [2]. Il est maximal monotone au sens de [2] car $1 + \mu A$ est surjectif pour tout $\mu > 0$, et c'est le générateur du semi-groupe $t \to e^{t(\lambda_0 - \delta)}$ de contractions de $\mathscr{H}^J$. Soit $\xi \in \mathscr{H}^J$, $\xi = \xi^+ - \xi^-$ (4.1 *c*)) alors en utilisant *b*) on a $\langle A\xi, \xi - \xi^+\rangle = \langle A\xi^-, \xi^-\rangle \geqslant 0$. Comme avec les notations de [2] on a $A^0\xi = A\xi$ pour tout $\xi \in \mathscr{H}^J$, la proposition 4.5 de [2] montre que

$$e^{t(\lambda_0-\delta)}\mathscr{H}^+ \subset \mathscr{H}^+$$

pour tout $t \geqslant 0$.

Lemme 5.4. — *Soit* $(\mathscr{H}, \mathscr{H}^+)$ *un espace hilbertien muni d'un cône autopolaire homogène* $\mathscr{H}^+$.

a) *Soit* U *un unitaire de* $\mathcal{H}$ *tel que* $U\mathcal{H}^+ = \mathcal{H}^+$ *et que* U *commute avec tout* $\delta \in D(\mathcal{H}^+)$ *alors* $U = 1$.

b) *Soit* δ *un élément du centre de* $D(\mathcal{H}^+)$ *alors* $\delta = \delta^*$.

Démonstration. — *a*) Il suffit de montrer que $\mathrm{Re}(\mathrm{Sp}\, U) \geqslant 0$ puis d'appliquer le résultat à U^n pour tout n. On a

$$U\mathcal{H}^+ = \mathcal{H}^+$$

donc $UJ = JU$ et pour $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{H}^J$

$$\mathrm{Re}\, \langle U(\xi_1 + i\xi_2), \xi_1 + i\xi_2\rangle = \langle U\xi_1, \xi_1\rangle + \langle U\xi_2, \xi_2\rangle$$

Il suffit donc de montrer que $\langle U\xi, \xi\rangle \geqslant 0$ pour tout $\xi \in \mathcal{H}^J$. Le lemme 4.1 *c*) montre que $\xi = \xi^+ - \xi^-$ avec $\xi^+, \xi^- \geqslant 0$, $\xi^+ \perp \xi^-$. Soit F la face de ξ^+ dans $\mathcal{H}^+$; $F^\perp$ la face orthogonale contient ξ^-. Comme $P_F - P_{F^\perp}$ commute avec U, on a $U\xi^+ \in P_F\mathcal{H}$ et $U\xi^- \in P_{F^\perp}\mathcal{H}$ donc

$$\langle U\xi, \xi\rangle = \langle U\xi^+, \xi^+\rangle + \langle U\xi^-, \xi^-\rangle \geqslant 0$$

b) Il suffit de montrer que si $\delta = -\delta^*$ on a $\delta = 0$ ce qui résulte facilement de *a*) appliqué à $e^{t\delta}$ pour tout $t \in \mathbf{R}$.

LEMME 5.5. — *Soient* $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}^+$ *un espace hilbertien muni d'un cône autopolaire homogène* $\mathcal{H}^+$, I *une structure complexe sur* $\underline{D}(\mathcal{H}^+)$, $M_1 = \{\delta_1 + i\delta_2,\ \delta_1 \in D(\mathcal{H}^+),\ \delta_2 \in I(\delta_1)\}$,

$$M_{-1} = \{\delta_1 - i\delta_2,\ \delta_1 \in D(\mathcal{H}^+),\ \delta_2 \in I(\delta_1)\}.$$

a) *On a* $M_1 \subset M'_{-1}$, $M_{-1} \subset M'_1$.

b) *Si* $\delta \in D(\mathcal{H}^+)$, $\delta = \delta^*$ *il existe un unique*

$$\delta_0 = I_0(\delta) \in I(\delta)$$

tel que $\delta_0^* = -\delta_0$.

c) *Soient* F *une face de* $\mathcal{H}^+$ *et* $\delta_F = 1/2(1 - P_F + P_{F^\perp})$, $\varepsilon_F^+ = \delta_F + iI_0(\delta_F)$, $\varepsilon_F^- = \delta_F - iI_0(\delta_F)$ *alors:*

$$(\varepsilon_F^+)^* = \varepsilon_F^+,\ (\varepsilon_F^-)^* = \varepsilon_F^-,\ \varepsilon_F^+ + \varepsilon_F^- = 2\delta_F$$
$$J\varepsilon_F^+J = \varepsilon_F^-,\ \varepsilon_F^+\xi = \xi\ \forall\xi \in F,\ \varepsilon_F^+\xi = 0\ \forall\xi \in F^\perp$$

d) $X \in M'_1 \Longrightarrow X + JXJ \in D(\mathcal{H}^+)$,

$$X \in M'_{-1} \Longrightarrow X + JXJ \in D(\mathcal{H}^+).$$

e) M_1 *et* M_{-1} *sont des algèbres de von Neumann dans* $\mathscr{H}$, *on a* $M_{-1} = M_1'$, $M_{-1}' = M_1$ *et* $JM_1J = M_{-1}$.

Démonstration. — *a*) Soient $\delta_1, \delta_3 \in D(\mathscr{H}^+)$, $\delta \to \underline{\delta}$ l'application canonique de $D(\mathscr{H}^+)$ sur $\underline{D}(\mathscr{H}^+)$, $\delta_2 \in I(\delta_1)$, $\delta_4 \in I(\delta_3)$. On a

$$[\delta_1 + i\delta_2, \delta_3 - i\delta_4] = [\delta_1, \delta_3] + [\delta_2, \delta_4] + i([\delta_2, \delta_3] - [\delta_1, \delta_4])$$

La bilinéarité du crochet dans $\underline{D}(\mathscr{H}^+)$ montre que

$$\begin{gathered}[\delta_1, \delta_3] + [\delta_2, \delta_4] \in \text{Centre } D(\mathscr{H}^+),\\ [\delta_2, \delta_3] - [\delta_1, \delta_4] \in \text{Centre } D(\mathscr{H}^+)\\ ([\underline{\delta}_1, \underline{\delta}_3] + [I\underline{\delta}_1, I\underline{\delta}_3] = 0,\ [I\underline{\delta}_1, \underline{\delta}_3] - [\underline{\delta}_1, I\underline{\delta}_3] = 0)\end{gathered}$$

Ainsi $[\delta_1 + i\delta_2, \delta_3 - i\delta_4]$ appartient au centre de l'algèbre de von Neumann engendrée par M_1 et M_{-1}, donc est nul.

b) On a $I(\delta)^* = - I(\delta)$ donc $\delta_1 + \delta_1^* \in \text{Centre } D(\mathscr{H}^+)$ pour tout $\delta_1 \in I(\delta)$. Alors $\delta_0 = \delta_{1-1/2}(\delta_1 + \delta_1^*)$ vérifie *b*). Si δ_0 et δ_0' vérifient *b*), on a $\delta_0 - \delta_0' \in \text{Centre } D(\mathscr{H}^+)$ donc $\delta_0 - \delta_0' = \delta_0^* - \delta_0'^*$ (5.4) et $\delta_0 = \delta_0'$.

c) On a $\delta_F^* = \delta_F$ donc $(\varepsilon_F^+)^* = \varepsilon_F^+$, de même $(\varepsilon_F^-)^* = \varepsilon_F^-$ en utilisant *b*), $\varepsilon_F^+ + \varepsilon_F^- = 2\delta_F$, $J\varepsilon_F^+J = J\delta_FJ - iJI_0(\delta_F)J = \varepsilon_F^-$. M_{+1} et M_{-1} sont des sous-espaces vectoriels autoadjoints de $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ et $(M_{+1})''$ commute avec $(M_{-1})''$. Pour tout

$$\delta_1 \in D(\mathscr{H}^+), \quad \delta_2 \in I(\delta_1)$$

on a $J(\delta_1 + i\delta_2)J = \delta_1 - i\delta_2$ donc $JM_1J = M_{-1}$, $JM_1''J = M_{-1}''$. Soit $x \in (M_{+1} \cup M_{-1})'$ et soit $\delta = x + JxJ$. On a $J\delta = \delta J$ et δ commute avec $P_F - P_{F^\perp}$ pour toute face F de $\mathscr{H}^+$ donc :

$$\xi \geqslant 0,\ \eta \geqslant 0,\ \xi \perp \eta \Longrightarrow \delta\xi \perp \eta$$

Le lemme 5.4 montre que $\delta \in D(\mathscr{H}^+)$ et le lemme 5.6 que $\delta = \delta^*$. On en déduit facilement que $JxJ = x^*$ pour tout $x \in (M_{+1} \cup M_{-1})'$. Il en résulte que pour tout projecteur $e \neq 0$, $e \in M_{+1}''$ on a $eJeJ \neq 0$. En effet si $eJeJ = 0$ on a $ueu^*JeJ = 0$ pour tout unitaire u de M_{+1}''; puis $\bar{e}JeJ = 0$

où $\bar{e}$ est le support central de e dans M''_{+1}; puis $\bar{e}J\bar{e}J = 0$ et $\bar{e} = 0$ car $J\bar{e}J = \bar{e}$. Comme $\varepsilon_F^+ + J\varepsilon_F^+J = 2\delta_F$ et $\varepsilon_F^+ \in M_{+1}$, $\mathrm{Sp}\, 2\delta_F \subset [0, 2]$ l'opérateur auto-adjoint ε_F^+ vérifie $0 \leqslant \varepsilon_F^+ \leqslant 1$. Soit $\xi \in F$, on a

$$2\langle \varepsilon_F^+\xi, \xi\rangle = \langle \varepsilon_F^+\xi, \xi\rangle + \langle \xi, \varepsilon_F^+\xi\rangle$$
$$= \langle (\varepsilon_F^+ + J\varepsilon_F^+J)\xi, \xi\rangle = \langle 2\delta_F\xi, \xi\rangle$$

donc $\varepsilon_F^+\xi = \xi$ car $\langle \delta_F\xi, \xi\rangle = \langle \xi, \xi\rangle$. Soit $\xi \in F^\perp$, on a de même $2\langle \varepsilon_F^+\xi, \xi\rangle = \langle 2\delta_F\xi, \xi\rangle = 0$ et $\varepsilon_F^+\xi = 0$.

d) Soit $X \in M_1'$, alors $\delta = X + JXJ$ vérifie $\delta J = J\delta$. Pour toute face F de $\mathscr{H}^+$, X commute avec ε_F^+ donc:

$$\xi_1 \in F \Longrightarrow \varepsilon_F^+ X\xi_1 = X\xi_1, \quad \xi_2 \in F^\perp \Longrightarrow \varepsilon_F^+\xi_2 = 0$$

et on a alors $X\xi_1 \perp \xi_2$, $JX\xi_1 \perp J\xi_2$, $JXJ\xi_1 \perp \xi_2$ et $\delta\xi_1 \perp \xi_2$.

e) Il suffit de montrer que tout élément X de M_1' est dans M_{+1}. Soit $\delta_1 \in D(\mathscr{H}^+)$ tel que $2\delta_1 = X + JXJ$ et soient $\delta_2 \in I(\delta_1)$, $X_1 = \delta_1 - i\delta_2$. On a

$$X_1 \in M_1', \quad (X - X_1) + J(X - X_1)J = 0$$

Ainsi

$$X - X_1 \in M_1' \cap JM_1'J = (M_1 \cup M_{-1})' = \text{Centre } D(\mathscr{H}^+)$$
$$+ i \text{ Centre } D(\mathscr{H}^+).$$

(Tout élément auto-adjoint de $(M_1 \cup M_{-1})'$ vérifie $JxJ = x$ et $x \in D(\mathscr{H}^+)$ donc $x \in$ Centre $D(\mathscr{H}^+)$.) Il existe donc $\delta_1' \in D(\mathscr{H}^+)$, $\delta_2' \in I(\delta_1')$ tels que $X = \delta_1' - i\delta_2'$.

Démonstration du théorème 5.2. — Les assertions *a*) et *b*) résultent du lemme 5.5 *e*). Démontrons *c*). Soit d'abord u un unitaire de M. Il existe un opérateur $h = -h^*$, $h \in M$ tel que $u = e^h$. On a $uJuJ = e^hJe^{\,h}J = e^he^{JhJ}$ et comme JhJ commute avec h on a $uJuJ = e^{(h+JhJ)}$. Comme $h \in M$ on a $h + JhJ \in D(\mathscr{H}^+)$ (5.7 *d*)), donc

$$e^{(h+JhJ)}\mathscr{H}^+ \subset \mathscr{H}^+.$$

Soit ρ un opérateur positif inversible, $\rho \in M$, écrivant $\rho = e^f$ avec $f \in M$, $f = f^*$ on vérifie de même que

$$\rho J\rho J\mathscr{H}^+ \subset \mathscr{H}^+.$$

Pour $x \in M$, x inversible, il existe un unitaire $u \in M$, un opérateur positif inversible $\rho \in \mathrm{M}$ tels que $x = u\rho$. On a alors

$$x\mathrm{J}x\mathrm{J} = u\rho\mathrm{J}u\rho\mathrm{J} = u\mathrm{J}u\mathrm{J}\rho\mathrm{J}\rho\mathrm{J} \qquad \text{car} \qquad \mathrm{JMJ} = \mathrm{M}'.$$

Enfin pour tout $x \neq 0$, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments inversibles de M ([6]) telle que $\|x_n\| \leqslant \|x\|$ pour tout n et que $x_n \to x$ fortement quand $n \to \infty$. Ainsi

$$x\mathrm{J}x\mathrm{J}\xi = \lim_{n\to\infty} x_n\mathrm{J}x_n\mathrm{J}\xi \in \mathscr{H}^+ \text{ pour tout } \xi \in \mathscr{H}^+.$$

d) Soit $\xi_0 \in \mathscr{H}^+$ tel que $\eta \in \mathscr{H}^+$, $\eta \perp \xi_0 \Longrightarrow \eta = 0$. Montrons d'abord que ξ_0 est séparateur (donc totalisateur car $\mathrm{J}\xi_0 = \xi_0$) pour M. Soit $e \in \mathrm{M}$ un projecteur tel que $e\xi_0 = 0$. Pour tout $\xi \in \mathscr{H}^+$ on a $e\mathrm{J}e\mathrm{J}\xi \in \mathscr{H}^+$ (*c*)) et $\langle e\mathrm{J}e\mathrm{J}\xi, \xi_0\rangle = 0$ donc par hypothèse $e\mathrm{J}e\mathrm{J}\xi = 0$. Ainsi $e\mathrm{J}e\mathrm{J} = 0$ et $e = 0$. Pour tout $x \in \mathrm{M}$, on a $x\mathrm{J}x\mathrm{J}\xi_0 \in \mathscr{H}^+$ donc

$$\langle x\mathrm{J}x\mathrm{J}\xi_0, \xi_0\rangle \geqslant 0,$$

ce qui montre en utilisant [11] thm 4.2 que J est égal à J_{ξ_0} l'involution isométrique associée à l'algèbre de von Neumann M dans $\mathscr{H}$ et au vecteur séparateur et totalisateur ξ_0. Pour tout $x \in \mathrm{M}$ on a $x\mathrm{J}_{\xi_0}x\mathrm{J}_{\xi_0}\xi_0 \in \mathscr{H}^+$ donc $\mathscr{P}^\natural_{\xi_0} \subset \mathscr{H}^+$; comme $\mathscr{P}^\natural_{\xi_0}$ et $\mathscr{H}^+$ sont autopolaires, on a $\mathscr{P}^\natural_{\xi_0} = \mathscr{H}^+$.

Définition 5.6. — *Un cône autopolaire $\mathscr{H}^+$ dans $\mathscr{H}$ est de genre dénombrable quand toute famille de vecteurs $\neq 0$ orthogonaux positifs est au plus dénombrable.*

On vérifie facilement que cette condition équivaut à l'existence d'un $\xi \geqslant 0$ tel que $\eta \geqslant 0$, $\eta \perp \xi \Longrightarrow \eta = 0$.

Théorème 5.7. — *Soient* M *une algèbre de von Neumann dans $\mathscr{H}$, ξ_0 un vecteur totalisateur et séparateur pour* M, *$\mathscr{H}^+ = \mathscr{P}^\natural_{\xi_0}$, $\mathrm{I} = \mathrm{I}_\mathrm{M}$ l'orientation canonique de $\mathscr{H}^+$.*

Alors l'algèbre de von Neumann associée à $\mathscr{H}^+$ et I *par le théorème* 5.2 *est égale à* M.

Démonstration. — Soit $\delta \in \mathrm{D}(\mathscr{H}^+)$, et soit $x \in \mathrm{M}$ tel que $\delta = x + \mathrm{J}x\mathrm{J}$. Par hypothèse $\mathrm{I}(\delta)$ est la classe de

$$ix + \mathrm{J}ix\mathrm{J} = i(x - \mathrm{J}x\mathrm{J})$$

modulo le centre de $\mathrm{D}(\mathscr{H}^+)$.

Comme $x + JxJ - ii(x - JxJ) = 2x$ on voit que l'algèbre de von Neumann associée à $\mathcal{H}^+$ est contenue dans M (le lemme 4.10 montre que Centre $D(\mathcal{H}^+) \subset M$). L'inclusion inverse est immédiate.

THÉORÈME 5.8. — *Soit* E, E^+ *un espace vectoriel complexe ordonné avec unité d'ordre. Pour que* E, E^+ *soit l'espace vectoriel ordonné sous-jacent à une algèbre de von Neumann de genre dénombrable, il faut et il suffit qu'il existe une forme autopolaire* s *sur* E *telle que le complété* $\{E^+\}_s^-$ *de* E^+ *soit un cône autopolaire homogène et orientable.*

Démonstration. — La nécessité résulte de 1.3, 2.7 *c*), 4.6, 4.9. Inversement soit u l'unité d'ordre de E^+ et soit $\xi_0 = \eta_s(u)$. Dans $\mathcal{H}_s = \overline{\eta_s(E)}$, ξ_0 vérifie: $\xi \in \mathcal{H}_s^+$, $\xi \perp \xi_0 \Rightarrow \xi = 0$. D'après 1.2 et 5.2, E^+ est isomorphe à la face engendrée par ξ_0 dans $\mathcal{P}^\natural_{\xi_0, M}$ où M désigne l'algèbre de von Neumann de genre dénombrable associée à une orientation de $\mathcal{H}_s^+$ par le théorème 5.2. De plus, l'application b_{ξ_0}, $x \to \Delta_{\xi_0}^{1/4} x \xi_0$ est un isomorphisme de M^+ sur la face de ξ_0 dans $\mathcal{P}^\natural_{\xi_0, M}$ (thm 2.7 *b*) et prop. 1.2 *c*)).

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. ARAKI, Some properties of modular conjugation operator of von Neumann algebras and a non commutative Radon Nikodym theorem (à paraître).

[2] H. BRÉZIS, Opérateurs maximaux monotones et semi groupes de contractions dans les espaces de hilbert, Amst. North Holland, Pub. 1973,

[3] A. CONNES, Groupe modulaire d'une algèbre de Von Neumann, *C. R. Acad. Sci.*, t. 274, série A (1972), 523-526.

[4] A. CONNES, Une classification des facteurs de type III, *Annales Sci. de l'École Normale Supérieure*, 4e série, t. 6 (1973), 133-252.

[5] A. CONNES et A. VAN DAELE, The Group property of the invariant S (à paraître dans *Math. Scand.*).

[6] J. DIXMIER et O. MARECHAL, Vecteurs totalisateurs dans les algèbres de von Neumann, *Commun. Math. Phys.*, 22 (1972).

[7] R. V. KADISON, Isometries of operator algebras, *Ann. Math.*, Princeton, 54 (1951), 325.

[8] S. SAKAI, The absolute value of W* algebras of finite type, *Tohoku Math. J.*, 8 (1956), 70.

[9] S. SAKAI, C* and W* algebras, *Ergebnisse der Mathematik und iher grenzbiete*, Bd 60.
[10] M. TAKESAKI, Tomita's theory of modulas Hilbert algebras and its applications, *Lectures notes in Math.* n° 128, Berlin Springer, 1970.
[11] S. L. WORONOWICZ, On the purification of factor states, *Commun. Math. Phys.*, 28 (1972), 221.

Manuscrit reçu le 2 octobre 1973,
accepté par G. Choquet.

Alain CONNES,
C.N.R.S.
Centre de Physique théorique
31, chemin J.-Aiguier
13274 Marseille.