Annales de l'institut Fourier

Bent Fuglede

Fonctions harmoniques et fonctions finement harmoniques

Annales de l'institut Fourier, tome 24, nº 4 (1974), p. 77-91

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1974__24_4_77_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
24, 4 (1974), 77-91.

FONCTIONS HARMONIQUES ET FONCTIONS FINEMENT HARMONIQUES

par Bent FUGLEDE

Introduction.

Dans mon livre [8] j'ai introduit les notions d'harmonicité et d'hyperharmonicité pour des fonctions définies dans un ouvert fin U (c'est-à-dire ouvert pour la topologie fine) d'un espace harmonique fort Ω au sens de Bauer, satisfaisant à l'axiome D (de domination). On renvoie à [8, § 8] pour les définitions. Rappelons que tout sous-espace ouvert de Ω est un espace harmonique de même espèce (1).

Il s'agit d'une extension naturelle de la notion de fonction harmonique, resp. hyperharmonique, au sens habituel, définie dans un ouvert ordinaire (c'est-à-dire ouvert pour la topologie ordinaire ou initiale sur Ω).

Plus précisément il y a identité entre la notion de fonction [hyper]harmonique ordinaire sur l'ouvert ordinaire U et celle de fonction à la fois finement [hyper-]harmonique et localement bornée [inférieurement] dans U (pour la topologie ordinaire). — Voir [8, th. 9.8].

On se demande si l'on peut supprimer cette condition supplémentaire de borne locale [inférieure], c'est-à-dire si elle est automatiquement remplie pour toute fonction finement [hyper]harmonique dans l'ouvert ordinaire U.

(1) Dans le présent travail on ne s'occupe que des questions de caractère local, de sorte qu'il suffit de supposer que l'espace localement compact Ω et le faisceau des fonctions harmoniques font partie localement de la catégorie indiquée ci-dessus. En particulier on peut prendre pour Ω le plan euclidien $\mathbf{R}^2$ muni du faisceau des fonctions harmoniques classiques.

C'est le but principal du présent travail de montrer qu'il en est ainsi dans le cas très particulier du plan euclidien $\mathbf{R}^2$, mais non pas pour $\mathbf{R}^k$ avec $k \geqslant 3$.

Ajoutons que, dans le même esprit, on trouve dans [8, th. 10.16] le résultat suivant :

Soit Ω un espace euclidien de dimension quelconque ($\geqslant 2$), ou plus généralement un espace harmonique fort satisfaisant au principe de continuité ([2]) (hypothèse d'ailleurs nécessaire). Alors toute fonction finement harmonique et localement bornée *dans un sens* dans l'ouvert ordinaire $U \subset \Omega$ est harmonique dans U.

Rappelons qu'une fonction finement hyperharmonique dans un ouvert fin U est dite *finement surharmonique* lorsqu'elle est $< +\infty$ *quasi partout* dans U (c'est-à-dire partout dans U sauf au plus dans une partie polaire). Tous les énoncés ci-dessus restent valables si l'on remplace partout le mot hyperharmonique par le mot surharmonique.

A la fin du présent travail on caractérise les fonctions finement harmoniques par une propriété d'approximation finement localement uniforme par des restrictions de fonctions harmoniques ordinaires.

1. Le plus grand sous-ouvert d'harmonicité.

Dans ce numéro Ω est un espace harmonique fort satisfaisant à l'axiome D.

THÉORÈME. — *Soit u une fonction finement [hyper-] harmonique dans un ouvert ordinaire $U \subset \Omega$. Le plus grand sous-ouvert $U_0 \subset U$ dans lequel u est [hyper-]harmonique au sens ordinaire est non vide et même partout dense dans U (pour la topologie ordinaire).*

Démonstration. — Grâce à [8, § 9.5, cor. 1] on se ramène au cas d'une fonction finement *hyperharmonique* u dans U. On sait que u est finement continue dans U ([8, th. 9.10].

([2]) Le principe de continuité (qui est strictement plus fort que l'axiome D) affirme qu'un potentiel p sur Ω est partout continu lorsque sa restriction au support harmonique de p est continue. (Il suffit d'ailleurs de considérer des potentiels finis, voir [6, exerc. 9.2.11].)

Or, sur le sous-espace harmonique fort U les fonctions finement continues appartiennent à la première classe de Baire pour la topologie ordinaire, voir [10]. Cela entraîne que u admet un ensemble D, partout dense dans U, de points de continuité (ordinaire). Comme $u > -\infty$, tout point de D possède un voisinage ouvert ordinaire dans lequel u est bornée inférieurement et par suite hyperharmonique d'après un résultat rappelé dans l'introduction, à savoir [8, th. 9.8]. Cela montre que $D \subset U_0$, et par suite que U_0 est partout dense dans U.

2. Le cas du plan.

Dans ce numéro on prend pour Ω le plan $\mathbf{R}^2$ muni du faisceau des fonctions harmoniques classiques. On utilise le fait bien connu que tout voisinage fin d'un point $x \in \mathbf{R}^2$ contient des circonférences aussi petites que l'on veut de centre x.

Lemme 2.1. (un principe de minimum pour le plan). — *Dans un ouvert ordinaire borné* $U \subset \mathbf{R}^2$ *soit* u *hyperharmonique au sens ordinaire et telle que*

$$(1) \quad \liminf_{x \to y,\, x \in U} \text{fine } u(x) \geqslant 0 \qquad \textit{pour tout} \qquad y \in \partial_f U.$$

Alors on a $u \geqslant 0$ *dans* U (3).

Démonstration. — Fixons $x_0 \in U$ et $\varepsilon > 0$, et montrons qu'on a $u(x_0) \geqslant -\varepsilon$.

Tout point $y \in \partial U$ possède un voisinage fin W_y ne contenant pas x_0 et tel que

$$u \geqslant -\varepsilon \qquad \text{dans} \qquad W_y \cap U.$$

Ceci est évident lorsque $y \in \partial U \setminus \partial_f U$, car alors y n'appartient pas à l'adhérence fine de U, de sorte qu'on peut prendre

(3) La frontière d'un ensemble $E \subset \Omega$ par rapport à la topologie ordinaire se note ∂E, et celle par rapport à la topologie fine par $\partial_f E$. — Ce qui est nouveau dans le lemme c'est qu'il ne faut pas supposer u bornée inférieurement (voir Brelot [4, lemme 1]). Le lemme ci-dessus ne s'étend pas aux espaces $\mathbf{R}^k$, $k > 2$. (Voir le th. 3.3 ci-dessous.)

$W_y = \complement U$ (4). Et pour $y \in \partial_f U$ l'existence de W_y découle de l'inégalité (1).

Désignons par D_y un disque ouvert de centre y tel que $\partial D_y \subset W_y$ et que $\overline{D}_y \subset \complement\{x_0\}$. Comme ∂U est compact il existe une partie finie $\{y_1, \ldots, y_m\}$ de ∂U telle que l'ouvert

$$\omega = \bigcup_{i=1}^{m} D_{yi}$$

couvre ∂U. Noter que

$$\overline{\omega} = \bigcup_{i=1}^{m} \overline{D}_{yi} \subset \complement\{x_0\}$$

et que

$$\partial\omega \subset \bigcup_{i=1}^{m} \partial D_{yi}.$$

Pour l'ouvert borné

$$V = U \setminus \overline{\omega}$$

on trouve $x_0 \in V$ et

$$\overline{V} \subset \overline{U} \setminus \omega = U \setminus \omega$$

puisque $\partial U \subset \omega$. D'où il vient

$$\partial V = \overline{V} \setminus V \subset U \cap \partial\omega.$$

Il en résulte que $u + \varepsilon \geqslant 0$ sur ∂V. Cela montre, d'après le principe de minimum ordinaire, que $u + \varepsilon \geqslant 0$ dans V, et en particulier que $u(x_0) \geqslant -\varepsilon$.

Moyennant ce lemme montrons que l'ouvert maximal U_0 dans le théorème 1 est identique à l'ouvert donné U tout entier (dans le cas actuel du plan).

Théorème 2.2. — *Toute fonction finement [hyper]harmonique dans un ouvert ordinaire* $U \subset \mathbf{R}^2$ *est [hyper]harmonique au sens ordinaire.*

Démonstration. — On se ramène encore au cas d'une fonction finement *hyperharmonique* u dans U. De plus on peut supposer que l'ouvert ordinaire U est borné. C'est donc un espace harmonique fort satisfaisant à l'axiome D.

(4) On pourrait d'ailleurs se ramener au cas d'un *domaine* borné U (d'où $\partial_f U = \partial U$ dans le cas actuel du plan).

Désignons par U_0 le sous-ouvert le plus grand de U dans lequel u est hyperharmonique au sens ordinaire (voir le théorème 1), et raisonnons par l'absurde en supposant que $U \setminus U_0$ soit non vide.

Comme dans la démonstration du théorème 1 on voit que u, étant finement continue, appartient à la première classe de Baire pour la topologie ordinaire sur U. La restriction $u|U \setminus U_0$ est donc de la 1[re] classe de Baire sur le sous-espace topologique non vide $U \setminus U_0$. Il existe par suite un point de continuité $x_0 \in U \setminus U_0$ pour cette restriction.

Fixons un nombre $\lambda < u(x_0)$, et choisissons un voisinage ordinaire ω de x_0 dans U tel que

$$u \geqslant \lambda \quad \text{dans} \quad \omega \setminus U_0. \tag{2}$$

Comme u elle-même est *finement* continue en x_0, il existe un voisinage *fin* $V \subset \omega$ de x_0 tel qu'on a

$$u \geqslant \lambda \quad \text{dans} \quad V. \tag{3}$$

Il existe un disque ouvert D de centre x_0 tel que

$$\overline{D} \subset \omega, \qquad \partial D \subset V.$$

D'après (2) et (3) il en résulte que

$$u - \lambda \geqslant 0 \qquad \text{sur} \qquad \partial_f(D \cap U_0),$$

et même sur $\partial(D \cap U_0)$, car

$$\begin{aligned} \partial(D \cap U_0) &\subset (\partial D) \cup (\overline{D} \cap \partial U_0) \\ &\subset V \cup (\omega \setminus U_0). \end{aligned}$$

On peut maintenant appliquer le lemme précédent à la fonction hyperharmonique $u - \lambda$ dans l'ouvert borné $D \cap U_0$, car $u - \lambda$ est finement continue sur l'adhérence fine de $D \cap U_0$ (même sur l'adhérence ordinaire

$$\overline{D \cap U_0} \subset \overline{D} \subset \omega \subset U).$$

Cela montre que $u \geqslant \lambda$ dans $D \cap U_0$, et par suite sur D tout entier grâce à (2). Par conséquent u est hyperharmonique au sens ordinaire dans D (encore d'après [8, th. 9.8]), donc $x_0 \in D \subset U_0$, ce qui est contradictoire puisque

$$x_0 \in U \setminus U_0.$$

Comme première application du théorème 2.2 on va maintenant étendre le lemme 2.1 au cas « fin » correspondant.

THÉORÈME 2.3. — *Dans un ouvert fin borné* $U \subset \mathbf{R}^2$ *soit* u *finement hyperharmonique et telle que*

$$\liminf_{x \to y,\, x \in U} \text{fine } u(x) \geqslant 0 \qquad \textit{pour tout} \qquad y \in \partial_f U.$$

Alors on a $u \geqslant 0$ *dans* U.

Démonstration. — En remplaçant au besoin u par $\min(u, 0)$ on peut supposer que $u \leqslant 0$ dans U. Soit alors ω un ouvert borné ordinaire dans R^2 qui contient le compact $\overline{U}$. Le prolongement de u à ω obtenu en posant $u = 0$ dans $\omega \setminus U$ est finement hyperharmonique d'après [8, lemme 10.1] ([5]), et par suite hyperharmonique au sens ordinaire d'après le théorème précédent. D'où le résultat parce que u s'annule dans la « bande » $\omega \setminus \overline{U}$ à la frontière $\partial\omega$.

Remarque. — Il suffit d'ailleurs de supposer que la fonction finement hyperharmonique u dans l'ouvert fin borné $U \subset \mathbf{R}^2$ satisfasse aux conditions suivantes :

$$\liminf_{x \to y,\, x \in U} \text{fine } u(x) \begin{cases} \geqslant 0 & \text{pour tout } \ y \in \partial_{f,r} U, \\ > -\infty & \text{pour tout } \ y \in \partial_{f,i} U. \end{cases}$$

Ici $\partial_{f,r}U = \partial_f U \cap b(\complement U)$ désigne la partie *régulière* de la frontière fine $\partial_f U$, et $\partial_{f,i}U = \partial_f U \setminus b(\complement U)$ la partie *irrégulière* de $\partial_f U$ ([6]). Comme $\partial_{f,i}U$ est polaire il résulte de la dernière condition ci-dessus que u se prolonge par continuité fine en une fonction v finement hyperharmonique dans l'ouvert fin

$$V = U \cup \partial_{f,i} U = \complement(b(\complement U))$$

([5]) Je profite de l'occasion de compléter la démonstration de ce lemme dans [8], qui est incomplète sauf pour la fonction donnée u *finie* (dans la notation de [8]). Pour achever dans le cas général, utiliser le même résultat pour les fonctions finies $\min(u, nq)$, $n = 1, 2, \ldots,$ avec $q > 0$ un potentiel fini sur Ω, puis faire $n \to \infty$ et utiliser [8, 9.5, cor. 2].

([6]) Pour tout ensemble $E \subset \Omega$ on note $b(E)$ la *base* de E, autrement dit l'ensemble des points de Ω en lesquels E est ineffilé. On sait que $b(E)$ est un G_δ pour la topologie ordinaire, et que $b(b(E)) = b(E)$.

(voir [8, th. 9.14]). On achève en utilisant le théorème 2.3 pour la fonction v (dans V), car $\partial_f V = \partial_{f,r} U$.

THÉORÈME 2.4. (7). — *Pour toute fonction finement hyperharmonique* u *dans un ouvert fin* $U \subset \mathbf{R}^2$ *et pour tout point-frontière ordinaire* $y \in \partial U$ *on a*

$$\liminf_{x \to y,\, x \in U} u(x) = \liminf_{z \to y,\, z \in \partial_f U} (\liminf_{x \to z,\, x \in U} \text{fine}\, u(x)).$$

Démonstration. — Montrons d'abord que la limite inférieure (ordinaire) pour $z \to y$, $z \in \partial_f U$ a un sens pour tout $y \in \partial U$. Cela signifie que la frontière fine $\partial_f U$ d'un ensemble U est dense dans la frontière ordinaire ∂U :

$$\overline{\partial_f U} = \partial U.$$

Et ceci résulte de ce que tout voisinage ouvert connexe (p. ex. un disque) d'un point $y \in \partial U$ rencontre U et $\complement U$, donc aussi $\partial_f U$ parce que ω est également *finement* connexe [7, th. 2].

L'inégalité $\leqslant$ dans l'énoncé du théorème résulte de ce que $\partial_f U \subset \partial U$ et que toute limite inférieure fine majore la limite inférieure ordinaire correspondante.

Pour établir l'inégalité $\geqslant$ (pour un point donné $y \in \partial U$) on désigne par ω un voisinage ouvert de y pour la topologie ordinaire tel que

$$(4) \quad \liminf_{x \to z,\, x \in U} \text{fine}\, u(x) \geqslant \lambda \quad \text{pour tout} \quad z \in \omega \cap \partial_f U,$$

avec λ quelconque inférieur au second membre de l'identité cherchée. Si l'on pose

$$w = \begin{cases} \min(u, \lambda) & \text{dans } \omega \cap U \\ \lambda & \text{dans } \omega \setminus U, \end{cases}$$

(7) Le premier résultat du type du th. 2.4 est dû à M. Brelot [4, th. 1]. On considère là une fonction surharmonique au sens ordinaire dans un ouvert ordinaire U. On suppose en outre que u est bornée inférieurement, que U est bornée, et que le point-frontière y est régulier. D'autre part il suffit alors de faire varier z dans $(\partial_f U) \setminus E$ avec E intérieurement négligeable pour toute mesure harmonique pour U. En outre cette version s'étend à $\mathbf{R}^k$ pour tout $k \geqslant 2$. Ces améliorations cependant ne sont plus possibles lorsqu'on supprime l'hypothèse que u est bornée inférieurement et que U est borné.

il résulte de (4) d'après [8, lemme 10.1] que w est finement hyperharmonique dans ω. Grâce au théorème 2.2 cela montre que w est hyperharmonique au sens ordinaire dans ω et par suite semicontinue inférieurement en y. Il en résulte que

$$\liminf_{x \to y,\, x \in U} u(x) \geqslant \liminf_{x \to y,\, x \in \omega \cap U} w(x) \geqslant w(y) = \lambda.$$

3. Le cas des espaces $\mathbf{R}^k$ de dimension $k \geqslant 3$.

Lorsqu'on remplace le plan $\mathbf{R}^2$ par l'espace $\mathbf{R}^k$ pour $k \geqslant 3$ chacun des résultats 2.1 jusqu'à 2.4 tombe en défaut. Par exemple, en ce qui concerne le théorème 2.2, on va donner ici un exemple affirmant que l'ensemble résiduel $U \setminus U_0$ (voir le théorème 1) peut être non vide et formé d'un seul point.

La construction de cet exemple sera fondée sur le lemme suivant (d'ailleurs valable même pour $k = 2$ et alors dû à H. Bohr [1]).

Lemme 3.1. — *Dans* $\mathbf{R}^k$ $(k \geqslant 2)$ *soit* G *un ouvert pour lequel l'origine* 0 *est un point-frontière accessible et non isolé* ([8]). *Il existe une fonction harmonique* $u \not\equiv 0$ *dans* $\mathbf{R}^k \setminus \{0\}$, *et même régulière à l'infini* ([9]) *telle que*

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in \complement(G \cup \{0\})}} u(x) = 0.$$

([8]) Un point-frontière p pour un ouvert $G \subset \mathbf{R}^k$ est dit *accessible* lorsqu'il existe une application continue $t \longmapsto x(t)$ de $[0, 1]$ dans $\mathbf{R}^k$ telle que $x(t) \in G$ pour $t < 1$ tandis que $x(1) = p$.

([9]) Une fonction harmonique u, définie dans $\mathbf{R}^k$ hors d'un compact, est dite *régulière à l'infini* si $\|x\|^{k-2}\, u(x)$ tend vers une limite finie λ, pour $\|x\| \to +\infty$, autrement dit si la transformée de Kelvin u^* de u est harmonique au voisinage de l'origine [après prolongement par continuité à l'origine en posant $u^*(0) = \lambda$]. Dans le plan $(k = 2)$ ceci équivaut encore à dire que u elle-même est harmonique au voisinage du point ∞ dans la compactification d'Alexandroff $\mathbf{R}^k_\infty = \mathbf{R}^k \cup \{\infty\}$ [après prolongement par continuité au point ∞ en posant $u(\infty) = \lambda$]. Cette dernière équivalence ne s'étend aux dimensions $k \geqslant 3$ que pour $\lambda = 0$. Voir Brelot [2] pour la notion d'harmonicité à l'infini. — D'ailleurs on pourrait imposer à la fonction u dans le lemme 3.1 et dans le th. 3.2 plus loin la condition plus forte d'être harmonique dans $\mathbf{R}^k_\infty \setminus \{0\}$ et de s'annuler à ∞. Soulignons cependant que c'est le comportement de u au voisinage de l'origine qui constitue l'essentiel dans ces deux résultats.

Démonstration. — Après une transformation de Kelvin échangeant l'origine et le point à l'infini pour $\mathbf{R}^k$ le lemme affirme l'existence d'une fonction harmonique entière $u \not\equiv 0$ sur $\mathbf{R}^k$ telle que

$$\lim_{\substack{\|x\| \to +\infty \\ x \in \complement G}} \|x\|^{k-2} u(x) = 0, \tag{5}$$

où G désigne un ouvert donné dans $\mathbf{R}^k$ (de complémentaire non borné) tel que G contient une courbe tendant à l'infini.

Pour $k = 2$ le lemme (sous cette dernière forme) découle de (et même équivaut à) l'énoncé analogue relatif à une fonction *holomorphe* entière d'une variable complexe. Et cet énoncé-là, à son tour, a été établi par H. Bohr [1] en réponse à un problème (plus faible) posé par E. Borel.

Dans sa construction, Bohr utilise la méthode de déplacement des pôles introduite par C. Runge. Or, cette méthode s'applique aussi pour les fonctions harmoniques dans $\mathbf{R}^k$, $k \geqslant 2$, voir Brelot [3, n° 6]. Ainsi la démonstration de Bohr se transpose *mutatis mutandis* au cas harmonique du lemme 3.1 (avec la singularité à l'infini) pour toute dimension $k \geqslant 2$. Bien entendu le développement d'une fonction holomorphe dans $\mathbf{C}$ hors d'un disque (et s'annulant à l'infini) en sa série de Laurent, sera maintenant remplacé par celui d'une fonction u harmonique dans $\{x \in \mathbf{R}^k \mid \|x - x_0\| > \rho\}$ (et telle que $\|x\|^{k-2}u(x)$ s'annule à l'infini) en des fonctions sphériques de pôle x_0 :

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n(x - x_0)}{\|x - x_0\|^{k-2+2n}}, \qquad \|x - x_0\| > \rho. \tag{6}$$

Ici les H_n sont des polynômes harmoniques homogènes de degré n. On sait que la série (6), même après multiplication par $\|x - x_0\|^{k-2}$, converge uniformément pour

$$\|x - x_0\| \geqslant \rho + \varepsilon,$$

étant donné $\varepsilon > 0$. (Utiliser par exemple une transformation de Kelvin échangeant x_0 et l'infini.)

Voici un cas simple de la méthode de Runge, traduite pour les fonctions harmoniques.

Soit Γ *une courbe dans* $\mathbf{R}^k$ *d'extrémités* p *et* q, *et soit* G *un voisinage ouvert de* Γ *dans* $\mathbf{R}^k$. *Pour toute fonction harmonique* u *dans* $\mathbf{R}^k \setminus \{p\}$ *telle que*

$$(7) \qquad \lim_{\|x\| \to \infty} \|x\|^{k-2}\, u(x) = 0$$

et pour tout $\varepsilon > 0$ *il existe une fonction harmonique* v *dans* $\mathbf{R}^k \setminus \{q\}$ *ayant la propriété analogue à* (7) *telle que*

$$(1 + \|x\|)^{k-2}\, |u(x) - v(x)| < \varepsilon \quad \textit{pour tout} \quad x \in \complement G.$$

Pour démontrer cet énoncé soit d inférieur à la distance entre Γ et $\complement G$, et soient $z_0, z_1, \ldots, z_N$ des points de Γ tels que $z_0 = p$, $z_N = q$, et que

$$\|z_i - z_{i-1}\| < d, \qquad i = 1, 2, \ldots, N.$$

A partir de la fonction donnée $u_0 = u$, harmonique dans $\complement\{z_0\}$ et satisfaisant à (7), on va construire par récurrence des fonctions u_i, $i = 1, 2, \ldots, N$ telles que u_i est harmonique dans $\complement\{z_i\}$, satisfait à la condition correspondant à (7), et enfin telle que

$$(1 + \|x\|)^{k-2}\, |u_i(x) - u_{i-1}(x)| < \varepsilon/N \quad \text{pour} \quad x \in \complement G.$$

Évidemment $v = u_N$ possède alors les propriétés cherchées. Pour construire u_i à partir de u_{i-1} noter que u_{i-1} est harmonique hors de la boule de centre z_i et de rayon d, car la singularité z_{i-1} est intérieure à cette boule. Il suffit donc de prendre pour u_i une somme partielle suffisamment longue du développement de u_{i-1} en fonctions sphériques de pôle z_i, cf. (6) avec $u = u_{i-1}$, $x_0 = z_i$. (Noter que

$$(1 + \|x\|)^{k-2} / \|x - z_i\|^{k-2}$$

reste borné dans $\complement G$.)

Cela étant, abordons la construction (par la méthode de Bohr) d'une fonction harmonique entière $u \not\equiv 0$ ayant la propriété (5) pour l'ouvert donné $G \subset \mathbf{R}^k$ contenant l'image Γ de $[0, +\infty[$ par une application continue $t \longmapsto x(t)$ de $[0, +\infty[$ dans $\mathbf{R}^k$ telle que $\|x(t)\| \to +\infty$ pour $t \to +\infty$.

Choisissons une suite croissante (t_n) de nombres positifs tels que

$$\|x(t)\| > n \qquad \text{pour} \qquad t \geqslant t_n,$$

et posons $x_n = x(t_n)$, et

$$G_n := \{x \in G \mid \|x\| > n\}.$$

On va construire par récurrence une suite de fonctions harmoniques u_n dans $\complement\{x_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, telle que chaque $\|x\|^{k-2}u_n(x)$ s'annule à l'infini et que

$$(8) \quad (1 + \|x\|)^{k-2}\,|u_{n+1}(x) - u_n(x)| < \varepsilon/2^n \text{ pour } x \in \complement G_n,$$

étant donné $\varepsilon > 0$. Posons d'abord

$$u_1(x) = \frac{H_1(x - x_1)}{\|x - x_1\|^k},$$

où la forme linéaire H_1 est choisie de façon que u_1 prend la valeur 2ε en un point donné $x_0 \in \complement G$.

Pour passer de u_n à u_{n+1} il suffit d'utiliser la méthode de Runge comme explicitée ci-dessus, maintenant pour l'ouvert G_n et la partie de Γ qui correspond à l'intervalle

$$t_n \leqslant t \leqslant t_{n+1}.$$

En vertu des inégalités (8) la suite des fonctions

$$(1 + \|x\|)^{k-2}u_n(x)$$

converge uniformément sur $\complement G_m$ pour tout m vers une fonction de la forme $(1 + \|x\|)^{k-2}u(x)$, définie sur $\mathbf{R}^k$. La fonction u est harmonique dans chaque boule

$$\{x \in \mathbf{R}^k \mid \|x\| < m\} \left(\subset \complement G_m\right),$$

donc dans $\mathbf{R}^k$ tout entier. De plus, la relation (5) a lieu pour tout u_n, donc aussi pour u, car elle est préservée par la convergence uniforme des $\|x\|^{k-2}u_n(x)$ vers $\|x\|^{k-2}u(x)$ dans $\complement G \left(\subset \complement G_m\right)$. Enfin on a

$$(1 + \|x\|)^{k-2}\,|u(x) - u_1(x)| < \varepsilon \quad \text{pour} \quad x \in \complement G,$$

d'où $u(x_0) \neq 0$ parce que $u_1(x_0) = 2\varepsilon$. — Cela achève la démonstration du lemme 3.1.

Remarque. — L'hypothèse que le point-frontière donné pour G (dans ce cas l'origine) soit accessible est aussi *nécessaire* pour l'existence d'une fonction u avec les propriétés indiquées dans le lemme, comme l'a remarqué déjà M. Bohr dans [1] (pour le cas holomorphe). Ceci résulte dans notre cas d'une extension du théorème de F. Iversen au cas harmonique, voir [9, § 3, cor. 1].

Théorème 3.2. — *Pour toute dimension* $k \geqslant 3$ *il existe une fonction finement harmonique* u *sur* $\mathbf{R}^k$ *tout entier, harmonique au sens ordinaire dans* $\mathbf{R}^k \setminus \{0\}$, *et même régulière à l'infini, mais essentiellement singulière à l'origine.*

Démonstration. — Désignons par G une « épine de Lebesgue », plus précisément un ouvert borné $G \subset \mathbf{R}^k \setminus \{0\}$, effilé à l'origine et contenant un segment ouvert dont l'une des extrémités est l'origine. Il suffit alors de prendre pour u une fonction comme celle du lemme précédent, prolongée à $\mathbf{R}^k$ en posant $u(0) = 0$. Car u devient alors finement continue dans $\mathbf{R}^k$, même à l'origine puisque $\complement G$ en est un voisinage fin. De plus u est en particulier *finement* harmonique dans $\mathbf{R}^k \setminus \{0\}$ d'après [8, th. 9.8]. Il en résulte que u est bien finement harmonique dans $\mathbf{R}^k$ tout entier grâce à un théorème sur les singularités apparentes pour une fonction finement harmonique [8, th. 9.15].

Reste à montrer que u est essentiellement singulière à l'origine. D'abord u est non bornée (donc singulière) au voisinage de l'origine. [Sinon, u serait harmonique entière et régulière à l'infini, donc constante $= u(0) = 0$.] Raisonnons par l'absurde en supposant que $u\ (\not\equiv 0)$ possède un pôle d'ordre m à l'origine. Comme u est régulière à l'infini on a alors le développement en série finie

$$(9) \qquad u(x) = \sum_{n=0}^{m} \frac{H_n(x)}{\|x\|^{k-2+2n}} \qquad \text{pour} \qquad x \in \mathbf{R}^k \setminus \{0\}.$$

Ici H_n est un polynôme harmonique homogène de degré n. De plus on a $H_m \not\equiv 0$; d'où il existe un cône ouvert non vide

$C \subset \mathbf{R}^k$ de sommet 0 tel que

$$(10) \qquad |H_m(x)| > c\|x\|^m \quad \text{pour} \quad x \in C,$$

$c > 0$ étant une constante. Or (9) s'écrit

$$(11) \qquad \|x\|^{k-2+m}\, u(x) = \frac{H_m(x)}{\|x\|^m} + \sum_{n=0}^{m-1} \frac{H_n(x)}{\|x\|^{2n-m}}.$$

Comme $2n - m < n$ pour $n \leqslant m - 1$, le second membre à droite (qui manque si $m = 0$) tend vers 0 pour $x \to 0$. D'autre part, $u(x)$ a la limite *fine* 0 à l'origine, et il en est de même pour $\|x\|^{k-2+m}\, u(x)$. En vertu de l'identité (11) ceci aboutit à une contradiction avec (10) puisque le cône C est ineffilé à l'origine.

THÉORÈME 3.3. — *Pour toute dimension $k \geqslant 3$ il existe une fonction harmonique non bornée u dans une boule* U *telle que*

$$\lim_{x \to y,\, x \in U} \text{fine}\ u(x) = 0 \quad \textit{pour tout} \quad y \in \partial U \ (= \partial_f U),$$

et même que la limite ordinaire de u est 0 en tout point-frontière à un seul point près.

Démonstration. — Soit U une boule ouverte dans $\mathbf{R}^k$ telle que $0 \in \partial U$, et considérons la fonction u du théorème précédent, construite à partir d'un ouvert G qu'on suppose maintenant contenu dans U. Alors u est harmonique dans U, finement harmonique dans $\overline{U}$, et continue au sens ordinaire dans $\overline{U} \setminus \{0\}$. La restriction, f, de u à ∂U est finie continue même à l'origine puisque $\partial U \subset \complement G$. Pour construire une fonction ayant les propriétés cherchées il suffit donc de soustraire de u la solution classique H_f^U (intégrale de Poisson) du problème de Dirichlet pour la boule U avec la donnée-frontière finie continue f. En effet, H_f^U est bornée dans U tandis que u est non bornée même dans $G \subset U$ (car u est continue à 0 relativement à $\complement G$).

Remarque. — L'exemple construit dans la démonstration du théorème 3.3 montre aussi que le théorème 2.4 ne s'étend pas aux dimensions $k \geqslant 3$.

4. Caractérisation de l'harmonicité fine par approximation.

Retournons au cadre d'un espace harmonique fort Ω satisfaisant à l'axiome D (de domination).

THÉORÈME 4.1. — *Pour qu'une fonction réelle* u, *définie dans un ouvert fin* $U \subset \Omega$, *soit finement harmonique dans* U *il faut et il suffit qu'il existe, pour tout point* $x \in U$, *un voisinage fin* $V \subset U$ *de* x *et une suite de fonctions* u_n, *définies et harmoniques dans des ouverts ordinaires respectifs* $\omega_n \supset V$, *telles que les restrictions* $u_n|V$ *convergent uniformément vers* $u|V$.

Démonstration. — La *suffisance* de la condition énoncée résulte aussitôt du lemme 9.6 dans [8] parce que chaque $u_n|V$ est finement harmonique dans V.

Pour établir la *nécessité* on utilise le théorème de prolongement local [8, th. 9.9]. Le point donné $x \in U$ possède donc un voisinage fin et finement ouvert $U_0 \subset U$ dans lequel la fonction finement harmonique donnée, u, se représente comme différence entre deux potentiels ordinaires sur Ω qui sont localement bornés dans Ω et finement harmoniques dans U_0.

En remplaçant U par U_0 on se ramène ainsi au cas particulier d'une fonction finement harmonique u dans U qui est la restriction à U d'un potentiel localement borné p sur Ω. Comme p est alors finement harmonique dans U il vient

$$p = \hat{R}_p^{\complement U} \quad (\text{dans } \Omega)$$

d'après le principe fin de domination [8, th. 9.2].

D'après [5, th. 7] le fermé fin $\complement U$ est quasi fermé. Cela entraîne l'existence d'une suite croissante de fermés ordinaires $F_n \subset \complement U$ et d'un polaire e tels que

$$\complement U = \bigcup_n F_n \cup e.$$

Par conséquent,

$$p = \hat{R}_p^{\complement U} = \hat{R}_p^{\cup F_n} = \sup_n \hat{R}_p^{F_n}. \tag{12}$$

Comme p est finement continue partout, le point donné

$x \in \mathrm{U}$ possède un voisinage fin $\mathrm{V} \subset \mathrm{U}$ tel que la restriction de p à V est continue pour la topologie ordinaire. Voir Brelot [5, th. 7 et th. 3]. En remplaçant V par un plus petit voisinage fin convenable de x on peut supposer en outre que V est compact pour la topologie ordinaire.

Sur le compact V la suite croissante des fonctions semi-continues inférieurement $\hat{\mathrm{R}}_p^{\mathrm{F}_n}|\mathrm{V}$ converge simplement vers $p|\mathrm{V}$ d'après (12), donc uniformément selon le lemme de Dini parce que $p|\mathrm{V}$ est finie continue (pour la topologie ordinaire sur V). Cela achève la démonstration, car $\hat{\mathrm{R}}_p^{\mathrm{F}_n}$ est harmonique dans $\omega_n := \complement \mathrm{F}_n \ (\supset \mathrm{U} \supset \mathrm{V})$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. Bohr, Über ganze transzendente Funktionen von einem besonderen Typus, *Sber. Preuss. Akad. Wiss., Phys. Math. Kl.*, (1929), 565-571.

[2] M. Brelot, Sur le rôle du point à l'infini dans la théorie des fonctions harmoniques, *Ann. Éc. Norm. Sup.*, 61 (1944), 301-332.

[3] M. Brelot, Sur l'approximation et la convergence dans la théorie des fonctions harmoniques ou holomorphes, *Bull. Soc. Math. de France*, 73 (1945), 55-70.

[4] M. Brelot, Sur l'allure des fonctions harmoniques et sousharmoniques à la frontière, *Math. Nachr.*, 4 (1950-1951), 298-307.

[5] M. Brelot, Recherches axiomatiques sur un théorème de Choquet concernant l'effilement, *Nagoya Math. J.*, 30 (1967), 39-46.

[6] C. Constantinescu and A. Cornea, *Potential Theory in Harmonic Spaces*. Berlin, 1972.

[7] B. Fuglede, Connexion en topologie fine et balayage des mesures, *Ann. Inst. Fourier*, 21, 3 (1971), 227-244.

[8] B. Fuglede, Finely Harmonic Functions, *Lecture Notes in Mathematics* no 289 (Springer). Berlin, 1972.

[9] B. Fuglede, Asymptotic paths for subharmonic functions (à paraître dans les *Math. Ann.*).

[10] B. Fuglede, Remarks on fine continuity and the base operation in potential theory (à paraître dans les *Math. Ann.*).

Manuscrit reçu le 5 novembre 1973,
accepté par M. Brelot.

Bent Fuglede,
Københavns Universitet
Matematisk Institut
Universitetsparken, 5
2100 Copenhague (Danemark).