JACQUES FARAUT

KHELIFA HARZALLAH

Distances hilbertiennes invariantes sur un espace homogène

Annales de l'institut Fourier, tome 24, nº 3 (1974), p. 171-217

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1974__24_3_171_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
24, 3 (1974), 171-217

DISTANCES HILBERTIENNES INVARIANTES SUR UN ESPACE HOMOGÈNE

par Jacques FARAUT et Khélifa HARZALLAH

L'objet de cet article est de déterminer sur un espace homogène $X = G/K$ les distances invariantes par G qui proviennent d'un plongement de X dans un espace de Hilbert, c'est-à-dire les distances hilbertiennes invariantes. Le carré d'une telle distance est un noyau invariant de type négatif. Pour certains espaces homogènes il est possible de donner une représentation de ces noyaux, c'est la formule de Lévy-Kinchine. Dans le cas de $\mathbf{R}^n$ c'est une formule classique. La formule de Lévy-Kinchine a été démontrée par Gangolli pour certains espaces homogènes localement compacts [11]. Nous en donnons une nouvelle démonstration dans un cadre plus général.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude des distances hilbertiennes invariantes sur les variétés riemanniennes doublement transitives.

Pages

CHAPITRE I

DISTANCES HILBERTIENNES INVARIANTES SUR UN ESPACE HOMOGENE FORMULE DE LEVY-KINCHINE

1. Distances hilbertiennes invariantes sur un espace homogène, hélices.

Soient G un groupe topologique et K un sous-groupe fermé de G. Soit X l'espace homogène X = G/K, notons 0 l'image dans X de l'élément neutre e de G.

Soit ξ une application continue de X dans un espace de Hilbert réel $\mathcal{H}$. Si ξ est injective l'application d définie sur X × X par

$$d(x, y) = \| \xi(x) - \xi(y) \|$$

est une distance sur X. Nous dirons qu'une telle distance est hilbertienne. Dans cet article nous nous proposons d'étudier les distances hilbertiennes invariantes sur X, c'est-à-dire les distances hilbertiennes d sur X qui vérifient, pour tout g de G et tout couple de points (x, y) de X

$$d(gx, gy) = d(x, y)$$

Dans le cas où la distance hilbertienne d est invariante l'application ξ est appelée une hélice ([20] p. 291, dans [25] p. 226 screw line). En effet dans le cas de l'hélice circulaire classique

$$\xi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$$
$$\xi(x) = (a \cos x, a \sin x, bx)$$

la distance sur $\mathbf{R}$ qui lui est associée est invariante par translation

$$\| \xi(x) - \xi(y) \|^2 = 4\, a^2 \sin^2 \frac{x - y}{2} + b^2 (x - y)^2$$

Géométriquement cela signifie que la longueur d'une corde ne dépend que de la longueur de l'arc correspondant.

Les hélices ont été étudiées dans le cas de $\mathbf{R}^n$ ($G = X = \mathbf{R}^n$) par Schoenberg et Von Neumann [25], et dans le cas des sphères (G est le groupe orthogonal) par Bochner [3].

Dans la suite nous supposerons toujours que $\xi(0) = 0$. Soit π une représentation unitaire de G dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ pour laquelle il existe un élément a de $\mathcal{H}$, non nul, tel que

$$\forall k \in \mathrm{K}, \ \pi(k)\, a = a$$

L'application ξ de X dans $\mathcal{H}$ définie par

$$\xi(g0) = a - \pi(g)\, a$$

est une hélice. Elle est bornée et est tracée sur la sphère de centre a et de rayon $\|a\|$. Une telle hélice sera dite hélice élémentaire. Nous verrons que si G est compact les hélices sont toutes élémentaires ; mais il n'est pas nécessaire que G soit compact pour que toutes les hélices soient élémentaires, nous verrons qu'il existe des espaces homogènes non compacts pour lesquels toutes les hélices sont élémentaires.

PROPOSITION 1.1. – *Soit ξ une hélice de* X *dans un espace de Hilbert réel $\mathcal{H}$ Il existe une représentation unitaire π de* G *dans $\mathcal{H}$ telle que*

$$\xi(gx) = \xi(g0) + \pi(g)\, \xi(x)$$

pour tout g de G *et tout x de* X.

Soit h un élément de $\mathcal{H}$ situé dans le sous-espace vectoriel engendré dans $\mathcal{H}$ par l'image de ξ :

$$h = \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} c_i\, \xi(x_i)$$

Puisque $\xi(0) = 0$ nous pouvons supposer que $\sum_{i=1}^{\mathrm{N}} c_i = 0$. Posons

$$\pi(g)\, h = \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} c_i\, \xi(gx_i)$$

nous avons

$$\|\pi(g)\, h\|^2 = -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{\mathrm{N}} \|\xi(gx_i) - \xi(gx_j)\|^2\, c_i\, c_j$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{\mathrm{N}} \|\xi(x_i) - \xi(x_j)\|^2\, c_i c_j = \|h\|^2$$

la définition de $\pi(g)\, h$ ne dépend pas de la décomposition choisie de h, et $\pi(g)$ est une isométrie, de plus

$$\pi(gg') = \pi(g)\, \pi(g')$$

il est donc possible de prolonger chaque isométrie $\pi(g)$ de façon à obtenir une représentation unitaire de G dans $\mathcal{H}$ et nous avons

$$\begin{aligned}\pi(g)\, \xi(x) &= \pi(g)\, [\xi(x) - \xi(0)] \\ &= \xi(gx) - \xi(g0)\end{aligned}$$

d'où la relation annoncée.

COROLLAIRE 1.2. – *Supposons que* G *soit compact, alors toute hélice définie sur* X *est élémentaire.*

Il existe sur X une mesure invariante de masse totale égale à 1, notée dx. Soit ξ une hélice définie sur X à valeurs dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ et π la représentation unitaire de G dans $\mathcal{H}$ considérée ci-dessus. Posons

$$a = \int_{\mathrm{X}} \xi(x)\, dx$$

En intègrant la relation

$$\xi(gx) = \xi(g0) + \pi(g)\, \xi(x)$$

nous obtenons

$$a = \xi(g0) + \pi(g)\, a$$

Remarque. – Si π est une représentation unitaire de G dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ on appelle cocycle une application ξ de G dans $\mathcal{H}$ vérifiant

$$\xi(gh) = \xi(g) + \pi(g)\, \xi(h)$$

et si a appartient à $\mathcal{H}$ on appelle cobord de a le cocycle

$$\partial a(g) = \pi(g)\, a - a$$

(Voir [13])

Ainsi une hélice est un cocycle invariant à droite par K et une hélice élémentaire est le cobord d'un élément a de $\mathcal{H}$ vérifiant

$$\forall k \in \mathrm{K},\ \pi(k)\, a = a$$

2. Noyaux de type positif, noyaux de type négatif.

Pour l'étude des distances hilbertiennes une notion essentielle est celle de noyau de type négatif. Cette notion, ou plutôt celle de fonction de type négatif (on dit aussi définie négative) a été introduite par Schoenberg [22], et reprise par Herz dans [16] p. 198. Nous donnons dans ce paragraphe quelques propriétés des noyaux de type positif et de type négatif que nous utiliserons par la suite, en particulier des propriétés de calcul symbolique.

Dans ce paragraphe X désigne un ensemble.

1. *Noyaux de type positif*

DEFINITION 2.1. – *Un noyau de type positif est une fonction φ à valeurs complexes définie sur* $X \times X$ *telle que*

$$\forall x_1 , x_2 , \dots , x_N \in X, \quad \forall c_1 , c_2 , \dots , c_N \in \mathbf{C}$$

$$\sum_{i,j=1}^{N} \varphi(x_i , x_j) \, c_i \, \overline{c_j} \geqslant 0$$

Par exemple, si f est une fonction définie sur X à valeurs complexes, le noyau φ défini par

$$\varphi(x , y) = f(x) \, \overline{f(y)}$$

est de type positif.

Rappelons quelques propriétés des noyaux de type positif

PROPOSITION 2.1. – a) *Un noyau de type positif est hermitien :*

$$\varphi(x , y) = \overline{\varphi(y , x)}$$

et vérifie

$$\varphi(x , x) \geqslant 0$$

$$|\varphi(x , y)|^2 \leqslant \varphi(x , x) \, \varphi(y , y)$$

b) *Le produit de deux noyaux de type positif est un noyau de type positif.*

c) *Soit* F *une fonction définie par*

$$F(u) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k u^k, \quad avec \quad a_k \geqslant 0$$

Soit φ un noyau de type positif, si la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \, [\varphi(x\,,y)]^k$$

converge en tout point $(x\,,y)$, alors le noyau $F(\varphi)$ est de type positif.

Nous utiliserons dans la suite les fonctions suivantes

$$F(u) = e^{au} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k\,!} u^k, \quad a > 0$$

$$F(u) = \text{Arc sin } u = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1.3\ldots(2k-1)}{2.4\ldots 2k} \, \frac{u^{2k+1}}{2k+1}$$

$$F(u) = (1-u)^{-\alpha}, \quad \alpha > 0$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+k-1)}{k\,!} \, u^k$$

2. *Noyaux de type négatif.*

DEFINITION 2.2. – *Un noyau de type négatif est une fonction ψ à valeurs réelles définie sur $X \times X$ vérifiant*

$$\psi(x\,,y) = \psi(y\,,x) \tag{1}$$

$$\psi(x\,,x) = 0 \tag{2}$$

$$\forall x_1\,,x_2\,,\ldots,x_N \in X, \ \forall c_1\,,c_2\,,\ldots,c_N \in \mathbf{R} \tag{3}$$

tels que $\displaystyle\sum_{i=0}^{N} c_i = 0$

$$\sum_{i,j=1}^{N} \psi(x_i\,,x_j)\, c_i\, c_j \leqslant 0$$

Par exemple si φ est un noyau réel de type positif, le noyau ψ défini par

$$\psi(x , y) = \frac{1}{2} [\varphi(x , x) + \varphi(y , y) - 2\varphi(x , y)]$$

est un noyau de type négatif. En effet si $\sum_{i=1}^{N} c = 0$ nous avons

$$\sum_{i,j=1}^{N} \psi(x_i , x_j)\, c_i\, c_j = - \sum_{i,j=1}^{N} \varphi(x_i , x_j)\, c_i\, c_j \leqslant 0$$

Un noyau de type négatif est positif ou nul.

Rappelons quelques propriétés des noyaux de type négatif

PROPOSITION 2.2. – ([22] p. 525). *Pour qu'un noyau ψ soit de type négatif il faut et suffit qu'il existe une application ξ de* X *dans un espace de Hilbert réel $\mathfrak{H}$ telle que*

$$\| \xi(x) - \xi(y) \|^2 = \psi(x , y)$$

PROPOSITION 2.3. – (*Théorème de Schoenberg* [22] p. 527). *Pour qu'un noyau réel ψ soit de type négatif il faut et suffit que ψ soit nul sur la diagonale* ($\psi(x , x) = 0$) *et que pour tout $t \geqslant 0$ le noyau $e^{-t\psi}$ soit de type positif.*

Du théorème de Schoenberg résultent des propriétés de calcul symbolique. Rappelons qu'une fonction complètement monotone est une fonction de classe C^∞ sur $]0 , \infty[$ telle que

$$\forall n \geqslant 0, \quad (-1)^n\, G^{(n)}(u) \geqslant 0$$

D'après le théorème de Bernstein (voir [4] p. 82), pour qu'une fonction G soit complètement monotone il faut et suffit qu'il existe une mesure positive μ sur $[0 , \infty[$ telle que

$$G(u) = \int_{[0,\infty[} e^{-su}\, d\mu(s)$$

PROPOSITION 2.4. – *Soient* G *une fonction complètement monotone bornée et ψ un noyau de type négatif, alors* $G(\psi)$ *est un noyau de type positif.*

DEFINITION 2.3. – *Une fonction de Bernstein est une fonction* F *définie sur* $[0 , \infty[$ *de la forme*

$$F(u) = a + bu + \int_{]0,\infty[} (1 - e^{-su})\, d\mu(s)$$

où a et b sont deux constantes positives ou nulles, et μ est une mesure positive sur $]0\,,\infty[$ *telle que*

$$\int \frac{s}{1+s}\, d\mu(s) < \infty$$

Pour qu'une fonction continue F sur $[0\,,\infty[$ soit une fonction de Bernstein il faut et suffit que $F(0) \geqslant 0$ et que pour tout $t \geqslant 0$ la fonction e^{-tF} soit une fonction complètement monotone (voir [4] p. 86).

PROPOSITION 2.5. – *Soit* F *une fonction de Bernstein nulle en* 0. *Si ψ est un noyau de type négatif, il en est de même du noyau* $F(\psi)$.

Nous utiliserons dans la suite les fonctions de Bernstein suivantes

$$\begin{aligned} F(u) &= u^{\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1 \\ &= \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{\infty} (1 - e^{-su}) \frac{ds}{s^{1+\alpha}} \\ F(u) &= \operatorname{Log}(1+u) \\ &= \int_0^{\infty} (1 - e^{-su}) \frac{e^{-s}}{s}\, ds \end{aligned}$$

3. *Noyaux invariants sur un espace homogène.*

Soit G un groupe topologique.

DÉFINITION 2.4. – *Une fonction φ définie sur* G *est dite de type positif (respectivement de type négatif) si elle est continue et si le noyau Φ défini sur* $G \times G$ *par*

$$\Phi(x\,,y) = \varphi(y^{-1}x)$$

est de type positif (respectivement de type négatif).

Soient K un sous-groupe fermé de G et X l'espace homogène $X = G/K$. Notons 0 l'image dans X de l'élément neutre e de G. Un noyau Φ sur $X \times X$ est dit invariant si pour tout élément g de G nous avons

$$\Phi(gx , gy) = \Phi(x , y)$$

Si Φ est un noyau continu invariant sur X, il existe une fonction continue φ unique sur G biinvariante par K telle que

$$\Phi(x\mathrm{K} , y\mathrm{K}) = \varphi(y^{-1} x)$$

Cette relation établit une bijection entre l'ensemble des noyaux continus invariants sur X et les fonctions continues sur G biinvariantes par K. Le noyau continu Φ est de type positif (respectivement de type négatif) si et seulement si φ est une fonction de type positif (respectivement de type négatif).

Ainsi déterminer les distances hilbertiennes invariantes sur X revient à déterminer les fonctions de type négatif sur G, biinvariantes par K (proposition 2.2). L'hélice associée est élémentaire si et seulement si la fonction de type négatif ψ est de la forme

$$\psi(g) = \varphi(e) - \varphi(g)$$

où φ est une fonction de type positif.

Du théorème de Schoenberg (Proposition 2.3) nous déduisons

PROPOSITION 2.6. – *Soit ψ une fonction de type négatif sur* G, *biinvariante par* K, *il existe une suite φ_n de fonctions de type positif sur* G, *biinvariantes par* K, *telle que*

$$\psi(g) = \lim_{n\to\infty} [\varphi_n(e) - \varphi_n(g)]$$

la convergence étant uniforme sur tout compact.

3. Formule de Lévy-Kinchine.

1. *Le groupe* G *est commutatif.*

Une fonction ψ de type négatif sur $\mathbf{R}^n$ admet la représentation

$$\psi(x) = Q(x) + \int [1 - \cos (x , y)] \, d\mu(y)$$

où Q désigne une forme quadratique positive et μ une mesure positive symétrique sur $\mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ telle que

$$\int \frac{|y|^2}{1 + |y|^2} \, d\mu(y) < \infty$$

Réciproquement toute fonction ψ admettant la représentation précédente est une fonction de type négatif. C'est la formule de Lévy-Kinchine.

Cette formule a été généralisée au cas d'un groupe abélien localement compact G. Dans ce cas une forme quadratique est une fonction continue Q sur G vérifiant la relation du parallèlogramme

$$Q(x + y) + Q(x - y) = 2Q(x) + 2Q(y)$$

Si une forme quadratique est positive alors c'est une fonction de type négatif.

La formule de Lévy-Kinchine s'écrit

$$\psi(x) = Q(x) + \int [1 - \operatorname{Re} \gamma(x)] \, d\mu(\gamma)$$

où μ est une mesure positive sur $\Gamma \backslash \{0\}$, Γ étant le groupe dual de G. ([21], [14])

2. *Transformation de Fourier sphérique.*

A partir de maintenant et jusqu'à la fin du chapitre les hypothèses seront les suivantes : *nous supposons que* G *est un groupe localement compact et que* K *est un sous-groupe compact de* G. *Soit* $M^{\natural}(G)$ *l'algèbre de convolution des mesures bornées sur* G *biinvariantes par* K, *nous supposons que l'algèbre* $M^{\natural}(G)$ *est commutative.* Il en résulte en particulier que G est unimodulaire (voir [2] p. 3). Cette hypothèse est vérifiée dans le cas où X est un espace riemannien symétrique (voir [15] p. 408). Dans ce cadre il existe une transformation de Fourier et un théorème de représentation des fonctions de type positif analogue au théorème de Bochner.

Une fonction sphérique ω (relativement au couple (G , K)) est une fonction continue sur G qui est une solution non nulle de l'équation fonctionnelle

$$\int_K \omega(xky) \, dk = \omega(x) \, \omega(y)$$

où dk est la mesure de Haar normalisée du groupe K. Une fonction sphérique est biinvariante par K et vérifie $\omega(e) = 1$.

Soit Ω l'ensemble des fonctions sphériques de type positif. Pour la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de G c'est un espace localement compact.

Si σ est une mesure de l'algèbre $M^{\natural}(G)$, la transformée de Fourier de σ est la fonction $\hat{\sigma}$ définie sur Ω par

$$\hat{\sigma}(\omega) = \int_G \overline{\omega(x)}\, d\sigma(x)$$

la fonction $\hat{\sigma}$ est continue sur Ω et bornée. Si σ_1 et σ_2 sont deux mesures de $M^{\natural}(G)$ nous avons

$$\widehat{\sigma_1 * \sigma_2} = \hat{\sigma}_1 \cdot \hat{\sigma}_2$$

La transformation de Fourier est injective sur $M^{\natural}(G)$.

Il existe dans ce cadre une généralisation du théorème de Bochner:

THEOREME 3.1. – (*Théorème de Bochner-Godement* [12]). *Si* φ *est une fonction de type positif sur* G, *biinvariante par* K, *il existe une mesure positive bornée* μ *sur* Ω *telle que*

$$\varphi(x) = \int_\Omega \omega(x)\, d\mu(\omega)$$

La mesure μ *est unique.*

Sur Ω nous pouvons considérer la symétrie $\omega \mapsto \bar{\omega}$. Si φ est une fonction de type positif biinvariante par K réelle, et par suite symétrique ($\varphi(x^{-1}) = \varphi(x)$), la mesure μ sur Ω qui lui est associée est symétrique.

Si σ est une mesure de $M^{\natural}(G)$ et φ une fonction continue de type positif biinvariante par K nous avons

$$\sigma * \varphi(x) = \int \omega(x)\, \hat{\sigma}(\omega)\, d\mu(\omega)$$

où μ est la mesure associée à φ par le théorème de Bochner-Godement.

3. *Formes quadratiques généralisées.*

Nous allons au paragraphe suivant énoncer dans ce cadre une formule de Lévy-Kinchine. Avant de l'énoncer définissons ce qui remplacera la forme quadratique.

DÉFINITION 3.1. – *Une forme quadratique généralisée, relativement au couple* (G , K), *est une fonction* Q *continue sur* G *à valeurs réelles, symétrique, biinvariante par* K *et vérifiant la "relation du parallèlogramme"* :

$$\int_K Q(xky)\,dk + \int_K Q(xky^{-1})\,dk = 2Q(x) + 2Q(y)$$

Dans la suite nous noterons Σ la famille des mesures de $M^{\natural}(G)$ positives, de masse 1, symétriques et à support compact.

PROPOSITION 3.2. – *Soit* Q *une forme quadratique généralisée, relativement au couple* (G , K)

a) *Pour toute mesure* σ *de* Σ *nous avons*

$$Q * \sigma - Q = \int Q d\sigma$$

b) *Si* Q *est bornée alors* Q *est identiquement nulle.*

a) La fonction Q et la mesure σ étant biinvariantes par K et symétriques nous avons

$$Q * \sigma(x) = \frac{1}{2} \iint [Q(xky) + Q(xky^{-1})]\, dk\, d\sigma(y)$$

et par suite

$$Q * \sigma(x) = Q(x) + \int Q(y)\, d\sigma(y)$$

b) Posons

$$\sigma_x = \frac{1}{2}\, m_K * (\delta_x + \delta_{x^{-1}}) * m_K$$

où m_K désigne la mesure de Haar normalisée de K, considérée comme mesure sur G. Soit σ_x^n la puissance n-ième de convolution de σ_x. D'après a) nous avons

$$Q * \sigma_x^n(e) = nQ(x)$$

d'où le résultat annoncé.

Dans le cas où G est commutatif les formes quadratiques positives sont de type négatif. Dans [11] p. 169 Gangolli pose une question qui peut être formulée comme suit : les formes quadratiques généralisées positives sont-elles de type négatif ? Nous verrons sur un exemple que la réponse est non (Théorème 6.4).

4. *Formule de Lévy-Kinchine*

Voici maintenant le principal théorème de ce chapitre

THEOREME 3.3. – *(Formule de Lévy-Kinchine). Soit ψ une fonction de type négatif sur* G, *biinvariante par* K. *La fonction ψ admet la représentation*

$$\psi(x) = Q(x) + \int [1 - \mathrm{Re}\,\omega(x)]\, d\mu(\omega)$$

où Q *est une forme quadratique généralisée relativement au couple* (G , K), *qui est de type négatif, et μ est une mesure positive symétrique sur $\Omega \setminus \{1\}$ telle que l'intégrale ait un sens pour tout x de* G. *De plus la fonction* Q *et la mesure μ sont uniques.*

Dans [11] p. 160 Gangolli énonce cette formule sans introduire la notion de forme quadratique généralisée. La démonstration qu'il en donne est différente de celle que nous allons donner dans le prochain paragraphe.

4. Démonstration de la formule de Lévy-Kinchine.

1. *Une propriété de convolution des fonctions de type négatif*

PROPOSITION 4.1. – *Soit ψ une fonction de type négatif sur* G, *biinvariante par* K. *Alors pour toute mesure σ de la famille Σ* la *fonction $\psi * \sigma - \psi$ est de type positif.*

a) Supposons d'abord que

$$\psi(x) = \varphi(e) - \varphi(x)$$

où φ est une fonction de type positif. La fonction φ est réelle, et d'après le théorème de Bochner-Godement (Théorème 3.1) il existe sur Ω une mesure positive bornée μ, symétrique, telle que

$$\varphi(e) - \varphi(x) = \int [1 - \mathrm{Re}\,\omega(x)]\, d\mu(\omega)$$

Par suite

$$\begin{aligned} \psi * \sigma(x) - \psi(x) &= \varphi(x) - \sigma * \varphi(x) \\ &= \int \mathrm{Re}\,\omega(x)\, [1 - \hat{\sigma}(\omega)]\, d\mu(\omega) \end{aligned}$$

Comme la fonction $1 - \hat{\sigma}$ est positive ou nulle, la fonction $\psi * \sigma - \psi$ est de type positif.

b) Dans le cas général le résultat se déduit de a) et de la proposition 2.6.

PROPOSITION 4.2. — *Les hypothèses étant celles de la proposition* 4.1, *il existe une mesure positive bornée μ_σ sur Ω, symétrique telle que*

$$\psi * \sigma(x) - \psi(x) = \int \operatorname{Re} \omega(x) \, d\mu_\sigma(\omega)$$

Dans les deux cas suivants la mesure μ_σ ne charge pas le point $\omega = 1$ de Ω :

a) *La fonction ψ est de la forme $\varphi(e) - \varphi$ où φ est une fonction de type positif*

b) *Le point* 1 *est isolé dans Ω.*

L'existence de la mesure μ_σ résulte de la proposition 4.1 et du théorème de Bochner-Godement (Théorème 3.1).

a) Dans le cas où $\psi = \varphi(e) - \varphi$ nous avons

$$\mu_\sigma = (1 - \hat{\sigma}) \mu$$

où μ désigne la mesure correspondant à φ dans la représentation de Bochner-Godement.

b) Si nous avons

$$\psi(x) = \lim_{n \to \infty} [\varphi_n(e) - \varphi_n(x)]$$

où φ_n est une suite de fonctions de type positif, les mesures $(1 - \hat{\sigma}) \mu_n$, où μ_n correspond à φ_n, convergent étroitement vers la mesure μ_σ, d'où le résultat.

2. *Détermination de la mesure.*

PROPOSITION 4.3. — *Les hypothèses et les notations étant celles des propositions* 4.1 *et* 4.2, *il existe une mesure positive μ sur $\Omega \backslash \{1\}$, symétrique telle que pour toute mesure σ de la famille Σ nous ayons*

$$\mu_\sigma = A_\sigma \delta_1 + (1 - \hat{\sigma})\mu$$

où A_σ *est un nombre positif ou nul. La mesure* μ *est déterminée de façon unique.*

Soient σ et σ' deux mesures de la famille Σ ; nous avons (Proposition 4.2) :

$$(\sigma - \delta) * \psi(x) = \int \operatorname{Re} \omega(x)\, d\mu_\sigma(\omega)$$

et en convolant par la mesure σ' :

$$\sigma' * (\sigma - \delta) * \psi(x) = \int \operatorname{Re} \omega(x)\, \hat{\sigma}'(\omega)\, d\mu_\sigma(\omega)$$

comme $M^{\natural}(G)$ est commutative nous obtenons par différence

$$\begin{aligned}(\sigma' - \delta) * (\sigma - \delta) * \psi(x) &= \\ &= \int \operatorname{Re} \omega(x)\, (1 - \hat{\sigma}'(\omega))\, d\mu_\sigma(\omega) \\ &= \int \operatorname{Re} \omega(x)\, (1 - \hat{\sigma}(\omega))\, d\mu_{\sigma'}(\omega)\end{aligned} \tag{1}$$

vu la symétrie des mesures $(1 - \hat{\sigma}')\mu_\sigma$ et $(1 - \hat{\sigma})\mu_{\sigma'}$, et l'unicité de la représentation de Bochner-Godement, ces mesures sont égales, en particulier ces mesures sont nulles sur le fermé

$$\{\omega \in \Omega \mid \hat{\sigma}(\omega) = 1\}$$

Remarquons que si ω est un point de Ω, $\omega \neq 1$. il existe une mesure σ de la famille Σ telle que $\hat{\sigma}(\omega) \neq 1$. En effet il existe un point x de G tel que $\omega(x) \neq 1$ et la mesure σ_x convient car

$$\hat{\sigma}_x(\omega) = \operatorname{Re} \omega(x).$$

Rappelons que nous avons posé

$$\sigma_x = \frac{1}{2} m_K * (\delta_x + \delta_{x^{-1}}) * m_K$$

Ainsi par recollement des morceaux il existe une mesure μ positive et symétrique sur $\Omega \setminus \{1\}$ telle que pour toute mesure σ de la famille Σ la mesure μ_σ et la mesure $(1 - \hat{\sigma})\mu$ coïncident dans l'ouvert

$$\{\omega \in \Omega \mid \hat{\sigma}(\omega) \neq 1\}$$

Il en résulte les égalités

$$(1 - \hat{\sigma})\,\mu_{\sigma'} = (1 - \hat{\sigma}')\,\mu_\sigma = (1 - \hat{\sigma})\,(1 - \hat{\sigma}')\,\mu \tag{2}$$

par conséquent la mesure

$$\mu_\sigma - (1 - \hat{\sigma})\,\mu$$

est nulle au voisinage de tout point ω de Ω, $\omega \neq 1$; il existe donc un nombre $A_\sigma \geqslant 0$ tel que

$$\mu_\sigma = A_\sigma\,\delta_1 + (1 - \hat{\sigma})\,\mu$$

3. *Détermination et propriétés de la fonction* Q.

PROPOSITION 4.4. – *Les hypothèses et les notations étant celles des propositions* 4.1 *et* 4.2 *nous avons*

$$\psi(x) = Q(x) + \int [1 - \operatorname{Re}\,\omega(x)]\, d\mu(\omega)$$

où Q *est la fonction positive définie par*

$$Q(x) = A_{\sigma_x}$$

Pour toute mesure σ de Σ, la mesure μ_σ est bornée ; en particulier lorsque $\sigma = \sigma_x$ nous avons

$$\int [1 - \operatorname{Re}\,\omega(x)]\, d\mu(\omega) < \infty$$

D'autre part en écrivant au point $y = e$ la relation

$$\psi * \sigma(y) - \psi(y) = \int \operatorname{Re}\,\omega(y)\, d\mu_\sigma(\omega)$$

nous obtenons

$$\psi(x) = Q(x) + \int [1 - \operatorname{Re}\,\omega(x)]\, d\mu(\omega)$$

où Q est la fonction définie par

$$Q(x) = A_{\sigma_x}$$

PROPOSITION 4.5. – *La fonction* Q *introduite à la proposition* 4.4 *possède les propriétés suivantes*

a) *La fonction* Q *est continue.*

b) *La fonction* Q *est une forme quadratique généralisée.*

c) *La fonction* Q *est de type négatif.*

a) Posons $\psi = Q + \psi_1$ et montrons que ψ_1 est continue. D'après sa représentation intégrale

$$\psi_1(x) = \int [1 - \operatorname{Re} \omega(x)] \, d\mu(\omega)$$

la fonction ψ_1 est semi-continue inférieurement et le noyau

$$(x, y) \mapsto \psi_1(y^{-1}x)$$

est de type négatif, il en résulte (Proposition 2.2)

$$\sqrt{\psi_1(xy)} \leqslant \sqrt{\psi_1(x)} + \sqrt{\psi_1(y)}$$

et par suite ψ_1 est bornée sur tout compact.

Supposons que la mesure σ de la famille Σ ait une densité continue par rapport à la mesure de Haar de G, nous avons

$$\psi_1(x) = \psi_1 * \sigma(x) - \int \operatorname{Re} \omega(x) \, [1 - \hat{\sigma}(\omega)] \, d\mu(\omega)$$

Ainsi ψ_1 est la différence de deux fonctions continues car $(1 - \hat{\sigma})\,\mu$ est une mesure bornée.

b) En utilisant les relations (1) et (2) nous avons

$$\psi * (\sigma - \delta) * (\sigma' - \delta)(x) = \int \operatorname{Re} \omega(x) \, [1 - \hat{\sigma}(\omega)] \, [1 - \hat{\sigma}'(\omega)] \, d\mu(\omega)$$

La fonction ψ_1 vérifie la même relation ; par différence nous obtenons donc

$$Q * (\sigma - \delta) * (\sigma' - \delta) = 0$$

Prenons $\sigma = \sigma_x$ et $\sigma' = \sigma_y$ et écrivons la relation ci-dessus au point e ; nous obtenons, compte tenu de ce que $Q(e) = 0$, de la biinvariance et de la symétrie de Q :

$$Q(x) + Q(y) =$$

$$= \frac{1}{4} \int [Q(xky) + Q(xky^{-1}) + Q(x^{-1}ky) + Q(x^{-1}ky^{-1})] \, dk$$

En utilisant la commutativité de $M^{\mathfrak{h}}(G)$ et de nouveau la symétrie de Q nous obtenons finalement

$$Q(x) + Q(y) = \frac{1}{2} \int [Q(xky) + Q(xky^{-1})] \, dk$$

ce qui est la "relation du parallèlogramme".

Remarquons qu'il résulte des propositions 3.2 et 4.3 la relation

$$\psi * (\sigma - \delta)(x) = \int Q \, d\sigma + \int \operatorname{Re} \omega(x) \, [1 - \hat{\sigma}(\omega)] \, d\mu(\omega)$$

soit

$$\mu_\sigma = \left(\int Q \, d\sigma\right) \delta_1 + (1 - \hat{\sigma}) \, \mu$$

c) Pour montrer que la fonction Q est de type négatif montrons d'abord que la fonction

$$Q(x) + \int [1 - \operatorname{Re} \omega(x)] \, f(\omega) \, d\mu(\omega)$$

est de type négatif, quelle que soit la fonction continue f à support compact définie sur Ω, comprise entre 0 et 1 et égale à 1 au point $\omega = 1$.

Soit φ_n une suite de fonctions de type positif telle que la suite $\psi_n = \varphi_n(e) - \varphi_n$ converge uniformément sur tout compact vers ψ. D'après le théorème de Bochner-Godement (Théorème 3.1) nous avons

$$\psi_n(x) = \int [1 - \operatorname{Re} \omega(x)] \, d\nu_n(\omega)$$

et pour toute mesure σ de la famille Σ

$$\psi_n * \sigma(x) - \psi_n(x) = \int \operatorname{Re} \omega(x) \, [1 - \hat{\sigma}(\omega)] \, d\nu_n(\omega)$$

Quand n tend vers l'infini, $\psi_n * \sigma - \psi_n$ converge en tout point vers $\psi * \sigma - \psi$ et par suite les mesures $(1 - \hat{\sigma}) \, \nu_n$ convergent étroitement vers

$$\mu_\sigma = \left(\int Q \, \mathrm{d}\sigma\right) \delta_1 + (1 - \hat{\sigma}) \, \mu$$

En prenant $\sigma = \sigma_x$ il vient donc

$$Q(x) + \int [1 - \operatorname{Re} \omega(x)] f(\omega)\, d\mu(\omega) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \int [1 - \operatorname{Re} \omega(x)] f(\omega)\, d\nu_n(\omega)$$

Comme la mesure $[1 - \operatorname{Re} \omega(x)]\, d\mu(\omega)$ sur Ω ne charge pas le point 1, l'intégrale

$$\int [1 - \operatorname{Re} \omega(x)] f(\omega)\, d\mu(\omega)$$

tend vers 0 lorsque le support de f décroit vers $\{1\}$. Il en résulte que Q, limite simple de fonctions de type négatif est également de type négatif.

PROPOSITION 4.6. – *Soit σ_x^n le produit de convolution de n facteurs égaux à σ_x, nous avons*

$$Q(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\, \psi * \sigma_x^n(e)$$

ce qui donne une nouvelle preuve de l'unicité de Q.

A partir de la proposition 3.4 nous obtenons par récurrence sur n

$$Q * \sigma_x^n(y) = n\, Q(x) + Q(y)$$

et par suite

$$\frac{1}{n}\, \psi * \sigma_x^n(e) = Q(x) + \frac{1}{n} \int [1 - (\operatorname{Re} \omega(x))^n]\, d\mu(\omega)$$

et comme

$$\frac{1}{n}\, [1 - (\operatorname{Re} \omega(x))^n] \leqslant 1 - \operatorname{Re} \omega(x)$$

l'intégrale tend vers 0 quand n tend vers l'infini en raison du théorème de convergence dominée.

5. Conséquences de la formule de Lévy-Kinchine.

1. *Fonctions de type négatif bornées.*

Soit ψ une fonction de type négatif définie sur G, biinvariante par K. D'après la formule de Lévy-Kinchine (Théorème 3.3) la fonction ψ peut s'écrire

$$\psi = Q + \psi_1$$

où Q est une forme quadratique généralisée qui est de type négatif, et où ψ_1 admet la représentation

$$\psi_1(x) = \int [1 - \operatorname{Re} \omega(x)]\, d\mu(\omega)$$

où μ désigne une mesure positive symétrique sur $\Omega \backslash \{1\}$

PROPOSITION 5.1. — *Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) *La fonction* ψ *est bornée.*

b) *La fonction* Q *est nulle et la mesure* μ *est bornée.*

c) *Il existe une fonction* φ *de type positif telle que*

$$\psi(x) = \varphi(e) - \varphi(x)$$

Supposons que la fonction ψ soit bornée. Alors les fonctions Q et ψ_1 sont bornées, et d'après la proposition 3.2 la fonction Q est nulle. D'autre part, pour toute mesure σ de la famille Σ nous avons

$$\int \psi \, d\sigma = \int \psi_1 \, d\sigma = \int [1 - \hat{\sigma}(\omega)]\, d\mu(\omega)$$

Quand la mesure σ varie dans Σ le premier membre reste borné, il en résulte que la mesure μ est bornée. Par suite nous pouvons écrire

$$\psi(x) = \varphi(e) - \varphi(x)$$

où φ est la fonction de type positif définie par

$$\varphi(x) = \int \operatorname{Re} \omega(x)\, d\mu(\omega)$$

THEOREME 5.2. – *Si le point* 1 *est isolé dans l'ensemble* Ω, *toute fonction de type négatif, biinvariante par* K *est bornée.*

D'après la proposition 4.2 la mesure μ_σ ne charge pas le point $\omega = 1$ si ce point est isolé dans Ω. Or nous avons (voir la démonstration de la proposition 4.5)

$$\mu_\sigma = \left(\int Q\, d\sigma\right) \delta_1 + (1 - \hat{\sigma})\, \mu$$

donc

$$\mu_\sigma(\{1\}) = \int Q\, d\sigma$$

et par suite la fonction Q est nulle. D'autre part si σ admet une densité par rapport à la mesure de Haar de G, la fonction $\hat{\sigma}$ tend vers 0 à l'infini, si bien que, la mesure $(1 - \hat{\sigma})\,\mu$ étant bornée, la restriction de μ au complémentaire de tout voisinage de 1 est une mesure bornée ; donc si 1 est isolé dans Ω la mesure μ est bornée, et d'après la proposition 5.1 la fonction ψ est bornée.

Dans [17] Kajdan introduit la définition suivante : un groupe G possède la propriété (T) si la représentation triviale i_G de G est un point isolé dans l'ensemble $\hat{G}$ des (classes de) représentations unitaires irréductibles de G muni de la topologie de Fell (voir [9] p. 314). Pour l'étude de cette propriété on peut se reporter par exemple à [17], [27] et [28], [8]. En particulier, pour $n \geqslant 3$, le groupe $SL(n, \mathbf{R})$ possède cette propriété.

PROPOSITION 5.3. – *Si le groupe* G *possède la propriété* (T) *de Kajdan alors le point* 1 *est isolé dans* Ω. (1)

Soit ω un point de Ω. On peut lui associer une représentation unitaire irréductible π_ω, unique aux équivalences près, de G dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}_\omega$ et il existe dans $\mathcal{H}_\omega$ un élément a tel que

$$\omega(x) = (\pi_\omega(x)\, a, a)$$

Nous définissons ainsi une application f de Ω dans $\hat{G}$. Cette application est injective. Montrons qu'elle est continue. Soit E une partie de Ω et ω un point de Ω adhérent à E : la fonction ω est limite uniforme sur les compacts de G de fonctions ω_i de E. Ainsi

----

(1) Cette proposition nous a été communiquée par P. Eymard.

une fonction de type positif associée à la représentation π_ω est limite uniforme sur les compacts de G de fonctions de type positif associées à des représentations de $f(\mathrm{E})$. D'après [9] p. 315, il en résulte que la représentation π_ω est adhérente à $f(\mathrm{E})$, ce qui montre $f(\overline{\mathrm{E}}) \subset \overline{f(\mathrm{E})}$, c'est-à-dire que f est continue.

Si le groupe G possède la propriété (T) de Kajdan, $\{i_\mathrm{G}\}$ est un ouvert de G, et puisque $\{1\}$ est l'image réciproque de $\{i_\mathrm{G}\}$ par f, $\{1\}$ est un ouvert de Ω, c'est-à-dire que 1 est un point isolé de Ω.

COROLLAIRE 5.4. – *Si le groupe* G *possède la propriété* (T) *de Kajdan, toute fonction de type négatif, biinvariante par* K *est bornée.*

Nous connaissons un autre exemple où le point 1 est isolé dans Ω, c'est le cas des espaces hyperboliques sur les quaternions :

$$\mathrm{G} = \mathrm{Sp}(1\,, n), \qquad \mathrm{K} = \mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(n)$$

(voir [18] p. 642). Nous ne savons pas si c'est un cas particulier de la proposition 5.3, c'est-à-dire que nous ne savons pas si le groupe $\mathrm{Sp}(1\,, n)$ possède la propriété (T) de Kajdan.

Le théorème 5.2 admet une réciproque :

THEOREME 5.5. – *Supposons que le groupe* G *soit connexe. Si toute fonction de type négatif, biinvariante par* K, *est bornée, alors le point* 1 *est isolé dans l'ensemble* Ω.

Nous allons montrer que si 1 n'est pas isolé dans Ω, il existe une fonction de type négatif, biinvariante par K non bornée.

Soit V un voisinage compact de e dans G tel que

$$\mathrm{V} = \mathrm{KVK} = \mathrm{V}^{-1}$$

le point 1 n'étant pas isolé il existe une suite ω_n telle que

$$\sup_{x \in V} |1 - \omega_n(x)| \leqslant 2^{-n}$$

posons

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} [1 - \mathrm{Re}\, \omega_n(x)]$$

cette série converge sur V.

Les fonctions $1 - \operatorname{Re} \omega_n$ sont de type négatif, et, par suite de la proposition 2.3, elles vérifient

$$\sqrt{1 - \operatorname{Re} \omega_n (xy)} \leqslant \sqrt{1 - \operatorname{Re} \omega_n (x)} + \sqrt{1 - \operatorname{Re} \omega_n (y)}$$

Puisque G est connexe il en résulte que la série converge partout. Sa somme est une fonction continue de type négatif :

$$\psi(x) = \int [1 - \operatorname{Re} \omega(x)] \, d\mu(\omega)$$

avec

$$\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{\omega_n}$$

La mesure μ n'étant pas bornée la fonction ψ n'est pas bornée (proposition 5.1).

2. *Réalisations des hélices*

Soit ψ une fonction de type négatif biinvariante par K. D'après la formule de Lévy-Kinchine (théorème 3.3) elle admet la représentation

$$\psi(x) = Q(x) + \int [1 - \operatorname{Re} \omega(x)] \, d\mu(\omega)$$

La fonction Q étant de type négatif il lui est associée une hélice ξ_Q dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}_Q$ (proposition 2.2). D'autre part à chaque fonction sphérique de type positif ω nous pouvons associer une représentation unitaire irréductible de classe 1 : $(\pi_\omega, \mathcal{H}_\omega)$. Notons a_ω un vecteur de $\mathcal{H}_\omega$ unitaire et invariant par K, c'est-à-dire

$$\pi(k) \, a_\omega = a_\omega$$

pour tout k de K. A la fonction de type négatif ψ nous pouvons associer une hélice ξ dans l'espace de Hilbert

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_Q \oplus \int^{\oplus} \mathcal{H}_\omega \, d\mu(\omega)$$

définie par

$$\xi_\omega(x) = a_\omega - \pi_\omega(x) \, a_\omega$$

Nous avons bien

$$\psi(x) = \| \xi(x) \|^2 + \frac{1}{2} \int \| a_\omega - \pi_\omega(x) \, a_\omega \|^2 \, d\mu(\omega)$$

Dans l'espace $\mathcal{H}_Q$ il existe une représentation unitaire π_Q vérifiant (proposition 1.1)

$$\xi_Q(xy) = \xi_Q(x) + \pi_Q(x)\, \xi_Q(y)$$

la représentation π_Q n'est pas de classe 1. Nous étudierons plus loin sur des exemples des réalisations de la représentation $(\pi_Q\,, \mathcal{H}_Q)$.

PROPOSITION 5.5. – *Si la fonction de type négatif ψ est bornée, l'hélice ξ associée à ψ est tracée sur une sphère de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$. C'est une hélice élémentaire.*

D'après la proposition 5.1 la fonction Q est nulle et la mesure μ est bornée, nous pouvons donc considérer dans $\mathcal{H}$ le vecteur

$$a = \int^{\oplus} a_\omega \, d\mu(\omega)$$

L'hélice ξ est tracée sur la sphère de centre a passant par 0 : pour tout x de G nous avons

$$\| \xi(x) - a \| = \| a \|$$

Soit π la représentation $\pi = \{\pi_\omega\}$, nous avons

$$\xi(x) = a - \pi(x)\, a$$

c'est-à-dire que l'hélice ξ est élémentaire.

Remarquons que dans le cas où G est compact cette relation s'obtient par intégration à partir de

$$\xi(xy) = \xi(x) + \pi(x)\, \xi(y)$$

car nous avons

$$a = \int_G \xi(y)\, dy$$

(voir corollaire 1.2)

COROLLAIRE 5.6. – *Si le point* 1 *est isolé dans* Ω, toute hélice est élémentaire.

CHAPITRE II

DISTANCES HILBERTIENNES SUR UNE VARIETE RIEMANNIENNE DOUBLEMENT TRANSITIVE

6. Variétés riemanniennes doublement transitives.

1. *Introduction.*

Soit X un espace métrique. Notons $r(x, y)$ la distance de x à y. Nous nous proposons d'étudier le problème suivant : pour quelles fonctions H, définies sur $[0, \infty[$ peut-on trouver une application ξ de X dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ telle que

$$\| \xi(x) - \xi(y) \|^2 = \mathrm{H}(r(x, y)) \,?$$

D'après la proposition 2.3 cette question peut être formulée de la façon suivante : pour quelles fonctions H le noyau ψ défini par

$$\psi(x, y) = \mathrm{H}(r(x, y))$$

est-il de type négatif ?

Ce problème ou des problèmes voisins ont déjà été abordés dans le cas des variétés riemanniennes :

a) Dans son livre "Leçons sur la géométrie projective complexe" [7], E. Cartan étudie les représentations réelles des points de l'espace projectif complexe : X est un espace projectif complexe, $\mathcal{H}$ est un espace euclidien. L'image par ξ de X est une variété appelée variété harmonique. On y trouve (p. 312) le théorème suivant : "Sur une variété harmonique donnée, la distance euclidienne de deux points quelconques est une fonction déterminée de la distance hermitienne des deux points de l'espace projectif qu'ils représentent".

b) Von Neumann et Schoenberg [25] résolvent ce problème dans le cas où X est un espace euclidien. Déjà Schoenberg [23] avait résolu ce problème dans le cas où X est un espace de Hilbert séparable. Dans ce cas on doit avoir

$$\mathrm{H}(u) = \mathrm{F}(u^2)$$

où F désigne une fonction de Bernstein (définition 2.3).

c) Bochner [3] étudie ce problème dans le cas des espaces homogènes compacts et en particulier dans le cas des sphères, et Schoenberg [24] dans le cas de la sphère unité de l'espace de Hilbert séparable.

d) Lévy, dans l'étude des fonctions browniennes de plusieurs paramètres ([20], chapitre III), se pose la question de savoir si le problème admet une solution dans le cas où $H(u) = u$. Autrement dit la question est de savoir si la racine carrée de la distance géodésique est une distance hilbertienne. La réponse est oui dans le cas de l'espace euclidien, c'est un cas particulier d'un théorème de Schoenberg. Lévy montre, par une méthode géométrique ([20] p. 338), que la réponse est également affirmative dans le cas d'une sphère.

e) Dans la même optique que Lévy, Bretagnolle, Dacunha Castelle et Krivine [5] et [6] étudient le problème dans le cas ou X est un espace L^p et montrent que si l'espace L^p est de dimension infinie, le problème n'admet de solution que si $p \leqslant 2$ et alors on doit avoir $H(u) = F(u^p)$, où F est une fonction de Bernstein (définition 2.3).

f) Gangolli [11] fait une étude générale de ce problème dans le cas où X est un espace riemannien symétrique. En particulier il donne une démonstration analytique du résultat de Lévy cité ci-dessus dans le cas d'une sphère.

2. *Variétés riemanniennes doublement transitives.*

Dans la suite nous nous interresserons aux variétés riemanniennes doublement trainsitives, c'est-à-dire aux variétés riemanniennes X possèdant la propriété suivante :

Soient x_1, x_2, y_1, y_2 quatre points de X tels que

$$r(x_1, r_2) = r(y_1, y_2)$$

alors il existe une isométrie g de X telle que

$$y_1 = gx_1 \quad \text{et} \quad y_2 = gx_2$$

(en anglais : two points homogeneous space, [15] p. 355).

Si X est une variété riemannienne doublement transitive les deux problèmes suivants sont équivalents :

a) Pour quelles fonctions H définies sur $[0, \infty[$ peut-on trouver une application ξ de X dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ telle que

$$\| \xi(x) - \xi(y) \|^2 = H(r(x, y)) \, ?$$

b) Quelles sont les distances hilbertiennes sur X qui sont invariantes par le groupe des isométries de X ?

Ainsi le problème que nous avons posé au début de l'introduction est résolu par la formule de Lévy-Kinchine qui donne une représentation des noyaux de type négatif sur X invariants par le groupe des isométries de X.

Si $\dim X = 1$ nous noterons G le groupe des isométries de X, si $\dim X > 1$ G sera la composante connexe de l'identité du groupe des isométries de X. Nous fixerons un point 0 de X et K sera le groupe d'isotropie de O.

Si X est une variété riemannienne doublement transitive les noyaux Φ invariants par G sont de la forme

$$\Phi(x, y) = \varphi(r(x, y))$$

et sont en particulier symétriques.

Les variétés riemanniennes doublement transitives sont les espaces euclidiens, le cercle S_1 et les espaces riemanniens symétriques de rang 1 de type compact, et de type non compact ([15] p. 355).

3. *Fonctions sphériques de type positif.*

Notons Δ l'opérateur de Laplace-Beltrani de X. Les seuls opérateurs différentiels sur X invariants par G sont les polynomes en Δ ([15] p. 397) et les fonctions sphériques sont les fonctions ω sur X vérifiant ([15] p. 399)

$$\omega(0) = 1 \tag{1}$$

$$\omega \text{ est invariante par K} \tag{2}$$

$$\exists \lambda \in \mathbf{C}, \ \Delta\omega + \lambda\omega = 0 \tag{3}$$

de plus ([15] p. 401) pour λ fixé il existe au plus une fonction sphérique ω telle que $\Delta\omega + \lambda\omega = 0$. Ainsi l'ensemble des fonctions sphériques peut être identifié à une partie de **C**. En utilisant le paramètre λ l'ensemble Ω des fonctions sphériques de type positif peut être identifié à une partie Λ de $[0, \infty[$. Si X est compact Λ est une suite de nombres λ_j qui tend vers l'infini. Si X est un espace euclidien $\Lambda = [0, \infty[$, de même si X est un espace hyperbolique réel ou complexe ([26] p. 346 et [18] p. 642). Si X est un espace hyperbolique sur les quaternions Kostant a démontré que

$$\Lambda = \{0\} \cup [\lambda_0, \infty[$$

où λ_0 est un nombre strictement positif ([18] p. 642). Ainsi dans ce cas la fonction $\omega = 1$ est isolée dans l'ensemble Ω des fonctions sphériques de type positif. Il en résulte (théorème 5.2) que tout noyau de type négatif invariant est borné, d'où

THEOREME 6.1. – *Sur les espaces hyperboliques des quaternions toute distance hilbertienne invariante est bornée.*

Par suite ni la distance géodésique, ni sa racine carrée ne sont des distances hilbertiennes puisqu'elles ne sont pas bornées.

4. *Formes quadratiques généralisées.*

Rappelons (définition 3.1) qu'une forme quadratique généralisée Q, relativement au couple (G , K) est une fonction continue sur G à valeurs réelles, symétrique, biinvariante par K et vérifiant la "relation du parallèlogramme" :

$$\int_K Q(xky)\, dk + \int_K Q(xky^{-1})\, dk = 2\, Q(x) + 2\, Q(y)$$

La variété riemannienne X étant doublement transitive, toute fonction définie sur G et biinvariante par K est symétrique. En particulier pour x fixé la fonction

$$y \mapsto \int_K Q(xky)\, dk$$

est biinvariante par K donc symétrique. La relation du parallèlogramme s'écrit donc simplement

$$\int_K Q(xky)\, dk = Q(x) + Q(y)$$

PROPOSITION 6.2. – *Soit* Q *une fonction continue sur* G, *biinvariante par* K *et nulle en e. Pour que* Q *soit une forme quadratique généralisée il faut et suffit que* Q *soit de classe* C^∞ *et que*

$$\Delta Q = C$$

où C *est une constante réelle.*

a) Soit Q une forme quadratique généralisée, elle vérifie

$$\int_K Q(xky)\,dk = Q(x) + Q(y)$$

Par régularisation on en déduit que Q est de classe C^∞. En appliquant Δ aux deux membres par rapport à x on obtient

$$\Delta Q(x) = \int_K \Delta Q(xky)\,dk$$

et par suite

$$\Delta Q(x) = \Delta Q(y)$$

b) Soit Q une fonction de classe C^∞ biinvariante par K, nulle en e telle que ΔQ soit constant. Posons

$$F(x) = \int_K Q(xky)\,dk - Q(x)$$

Nous avons $\Delta F = 0$, or les seules fonctions biinvariantes par K telles que $\Delta F = 0$ sont les constantes :

$$F(x) = F(e) = Q(y)$$

COROLLAIRE 6.3. – *Si* X *n'est pas compact les formes quadratiques généralisées forment un espace vectoriel sur* **R** *de dimension* 1. *Elles sont proportionnelles à*

$$Q(r) = \int_0^r \frac{V(\rho)}{A(\rho)}\,d\rho$$

où $V(\rho)$ *désigne le volume de la boule de rayon* ρ, *et* $A(\rho)$ *la mesure riemannienne de la sphère de rayon* ρ.

En effet si f est une fonction radiale, c'est-à-dire ne dépend que de la distance géodésique $r(x\,,0)$ de x à 0 nous avons

$$\Delta f = \frac{1}{A(r)}\frac{d}{dr}\left[A(r)\frac{df}{dr}\right]$$

([15] p. 447).

Dans [11] p. 169 Gangolli pose une question que l'on peut formuler ainsi : les formes quadratiques généralisées positives sont-elles de type négatif ? La réponse est non dans le cas des espaces hyperboliques des quaternions, car la forme quadratique Q

$$Q(r) = \int_0^r \frac{V(\rho)}{A(\rho)}\, d\rho$$

est positive, mais comme elle n'est pas bornée elle ne peut pas être de type négatif (proposition 3.2 et théorème 6.1).

THEOREME 6.4. – *Sur les espaces hyperboliques des quaternions les formes quadratiques généralisées positives ne sont pas de type négatif.*

7. Exemples de variétés riemanniennes doublement transitives.

1. *Espaces euclidiens.*

Soit $X = E_n$ l'espace euclidien de dimension n. Le groupe G est le groupe des déplacements $M(n)$ et K est le groupe orthogonal $SO(n)$.

Les fonctions sphériques de type positif sont données par

$$\omega_s(x) = \int_{S_{n-1}} e^{-is(u,x)}\, d\sigma(u),\ s \text{ réel}$$

où S_{n-1} désigne la sphère unité de E_n et σ la mesure uniforme de masse 1 sur S_{n-1}. Nous avons

$$\Delta\omega_s + \lambda_s\omega_s = 0, \quad \lambda_s = s^2, \quad \omega_s = \omega_{-s}$$

En calculant cette intégrale en coordonnées sphériques nous obtenons

$$\omega_s(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_0^\pi e^{-is\|x\|\cos\theta} \sin^{n-2}\theta\, d\theta =$$

$$= \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{s\|x\|}{2}\right)^{1-\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}-1}(s\|x\|)$$

où J_ν désigne la fonction de Bessel d'ordre ν.

Les formes quadratiques généralisées sont proprotionnelles à

$$Q(x) = \|x\|^2$$

qui est de type négatif.

Ainsi d'après la formule de Lévy-Linchine (théorème 3.3) les noyaux invariants de type négatif sont de la forme $\psi = H(r)$ où H est une fonction définie sur $[0, \infty[$ admettant la représentation

$$H(r) = ar^2 + \int_{]0,\infty[} \left[1 - \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{sr}{2}\right)^{1-\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}-1}(sr) \right] d\mu(s)$$

où a est une constante positive ou nulle et μ est une mesure positive sur $]0, \infty[$ telle que l'intégrale ait un sens pour tout $r \geqslant 0$.

Pour toute fonction de Bernstein F, le noyau $F(r^2)$ est de type négatif. Il en résulte que pour tout α, $0 < \alpha < 1$, la distance définie par

$$d(x, y) = \|x - y\|^\alpha$$

est une distance hilbertienne.

2. *Sphères.*

Soit $X = S_n$ la sphère unité de l'espace euclidien E_{n+1} ; c'est l'ensemble des points $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ de E_{n+1} vérifiant

$$\sum_{k=0}^{n} x_k^2 = 1$$

Le groupe G est le groupe $SO(n+1)$, K est le sous-groupe $SO(n)$ laissant invariant le point $a = (1, 0, \ldots, 0)$. La distance géodésique $r(x, y)$ de x à y est donnée par

$$\cos r(x, y) = \sum_{k=0}^{n} x_k y_k = (x, y)$$

$$0 \leqslant r(x, y) \leqslant \pi$$

Les fonctions sphériques sont de type positif, elles sont données par

$$\omega_j(x) = \int_{S_{n-1}} [(a, x) - i(u, x)]^j \, d\sigma(u), \quad j = 0, 1, 2, \ldots$$

où S_{n-1} désigne la sphère unité de centre 0, de dimension $n-1$ située dans l'hyperplan $x_0 = 0$, et σ est la mesure uniforme de masse 1 sur S_{n-1}. Nous avons

$$\Delta\omega_j + \lambda_j \omega_j = 0, \ \lambda_j = j(j+n-1)$$

En calculant cette intégrale en coordonnées sphériques nous obtenons

$$\omega_j(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_0^\pi (\cos r - i \sin r \cos\theta)^j \sin^{n-2}\theta \, d\theta =$$

$$= P_{n,j}(\cos r) \qquad (r = r(x, a))$$

La fonction $P_{n,j}$ est un polynôme ultrasphérique (ou polynôme de Gegenbauer) ; pour $n = 2$ ce sont les polynômes de Legendre.

Ainsi d'après la formule de Lévy-Kinchine (théorème 3.3) les noyaux invariants de type négatif sont de la forme $\psi = H(r)$ où H est une fonction admettant la représentation

$$H(r) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \left[1 - P_{n,j}(\cos r)\right]$$

les nombres a_j vérifiant

$$a_j \geqslant 0, \ \sum_{j=0}^{\infty} a_j < \infty$$

PROPOSITION 7.1. — *La racine carrée de la distance géodésique est une distance hilbertienne.*

Il suffit de montrer que la distance géodésique est un noyau de type négatif (proposition 2.3). Le noyau $\varphi = \cos r$ est de type positif car

$$\varphi(x, y) = \sum_{k=0}^{n} x_k y_k$$

et par suite le noyau

$$\frac{\pi}{2} - r = \text{Arc sin}(\cos r)$$

est ainsi un noyau de type positif (proposition 2.1), il en résulte que r est un noyau de type négatif car si φ est un noyau de type positif le noyau ψ défini par

$$\psi(x, y) = \frac{1}{2}[\varphi(x, x) + \varphi(y, y) - 2\varphi(x, y)]$$

est un noyau de type négatif.

Remarque. – Cette proposition a été démontrée avec d'autres méthodes par Lévy ([20] p. 337) et par Gangolli ([11] p. 174).

PROPOSITION 7.2. – *La distance géodésique n'est pas hilbertienne.*

Nous allons montrer que le noyau $\psi = r^2$ n'est pas de type négatif. Considérons le cas $n = 1$, $X = S_1$ le cercle. Si ψ était de type négatif le développement de Fourier de r^2 serait de la forme

$$r^2 = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (1 - \cos jr)$$

avec des coefficients a_j positfs ou nuls. Or en fait un calcul très simple donne

$$a_j = 4 \frac{(-1)^{j+1}}{j^2}$$

donc r^2 n'est pas un noyau de type négatif.

Considérons maintenant le cas de n quelconque. Si le noyau r^2 était de type négatif sa restriction à tout grand cercle le serait aussi et nous venons de voir qu'il n'en est pas ainsi. Donc la distance géodésique de S_n n'est pas une distance hilbertienne.

3. *Espaces hyperboliques réels.*

Soit $X = L_n$ l'espace de Lobatchevski de dimension n, c'est-à-dire l'ensemble des points $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathbf{R}^{n+1}$ vérifiant

$$x_0^2 - x_1^2 - \ldots - x_n^2 = 1, \ x_0 > 0$$

c'est la nappe supérieure d'un hyperboloïde à deux nappes, de révolution autour de Ox_0. Le groupe G est le groupe $SO_0(1, n)$ et K est le sous-groupe $SO(n)$ laissant invariant le point $a = (1, 0, \ldots, 0)$. Pour x et y dans $\mathbf{R}^{n+1}$ posons

$$[x\,,y] = x_0\,y_0 - x_1\,y_1 - \cdots - x_n\,y_n$$

La distance géodésique de deux points x et y de X est donnée par

$$\operatorname{ch} r(x\,,y) = [x\,,y]$$

a) *La racine carrée de la distance géodésique est une distance hilbertienne.*

PROPOSITION 7.3. – *Le noyau* ψ *défini sur* X *par*

$$\psi(x\,,y) = \operatorname{Log}\,[x\,,y]$$

est de type négatif.

Pour tout α réel le noyau φ_0 défini par

$$\varphi_0(x\,,y) = (x_0\,y_0)^{\alpha}$$

est de type positif sur X, de même le noyau φ_1 défini par

$$\varphi_1(x\,,y) = x_1\,y_1 + x_2\,y_2 + \cdots + x_n\,y_n$$

et par suite le noyau φ défini par

$$\varphi(x\,,y) = (x_0\,y_0)^{-1}\;(x_1\,y_1 + x_2\,y_2 + \cdots + x_n\,y_n)$$

est de type positif, et vérifie, d'après l'inégalité de Schwarz

$$|\varphi(x\,,y)|^2 \leqslant (x_0\,y_0)^{-2}\;(x_0^2 - 1)\;(y_0^2 - 1) < 1$$

donc pour tout $t \geqslant 0$ le noyau

$$[x\,,y]^{-t} = (x_0\,y_0)^{-t}\;[1 - \varphi(x\,,y)]^{-t}$$

est de type positif (proposition 2.1). La proposition résulte alors du théorème de Schoenberg (proposition 2.3). (2)

COROLLAIRE 7.4. – *La racine carrée de la distance géodésique est une distance hilbertienne.*

Pour cela il suffit de montrer (proposition 2.2) que la distance géodésique est un noyau de type négatif. Or nous avons

---

(2) Cette démonstration est inspirée d'une formule donnée par Krein [19] p. 106.

$$\operatorname{ch} r = e^{\psi} \qquad (\psi(x\,,\,y) = \operatorname{Log}\,[x\,,\,y])$$

ou, en résolvant par rapport à r

$$r = \psi + \operatorname{Log}\,(1 + \sqrt{1 - e^{-2\psi}})$$

Puisque le noyau ψ est de type négatif (proposition 7.3) le noyau $e^{-2\psi}$ est de type positif (proposition 2.3) et par suite le noyau $1 - e^{-2\psi}$ est de type négatif, et d'après la proposition 2.5 le noyau $\psi_1 = \sqrt{1 - e^{-2\psi}}$ est aussi de type négatif, et encore d'après cette même proposition il en est de même du noyau $\operatorname{Log}\,(1 + \psi_1)$, donc r est un noyau de type négatif.

b) *Fonctions sphériques de type positif.*

Les fonctions sphériques sont données par

$$\omega_s\,(x) = \int_{S_{n-1}} [x\,,\,u]^{-s}\, d\sigma(u)$$

où S_{n-1} désigne la sphère unité de dimension $n - 1$ de centre $a = (1\,,0\,,\,.\,.\,.\,,0)$ située dans l'hyperplan $x_0 = 1$, et σ est la mesure uniforme de masse 1 sur S_{n-1} ; s désigne un nombre complexe. Nous avons

$$\Delta\omega_s + \lambda_s\omega_s = 0, \qquad \lambda_s = s(n - 1 - s)$$

$$\omega_s = \omega_{n-1-s}$$

En calculant l'intégrale en coordonnées sphériques nous obtenons

$$\omega_s(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_0^{\pi} (\operatorname{ch} r - \cos\theta\, \operatorname{sh} r)^{-s} \sin^{n-2}\theta\, d\theta =$$

$$= \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{\operatorname{sh} r}{2}\right)^{1-\frac{n}{2}} P_{s-\frac{n}{2}}^{1-\frac{n}{2}}(\operatorname{ch} r)$$

$$(r = r(a\,,x))$$

où P_{μ}^{ν} désigne la fonction de Legendre de première espèce ([26] p. 325).

La fonction ω_s est de type positif si et seulement si $\lambda_s \geqslant 0$, ce qui se produit dans les cas suivants

$$s = \frac{n-1}{2} + i\nu, \ \nu \text{ réel}$$

$$s \text{ réel}, \ 0 \leqslant s \leqslant n-1$$

([26] p. 346 ; nous donnons dans [10] une autre démonstration de ce résultat en utilisant une propriété de calcul symbolique).

c) *Formes quadratiques généralisées.*

Nous avons vu que les formes quadratiques généralisées forment un espace vectoriel sur **R** de dimension 1. Considérées comme fonctions sur X ce sont les fonctions nulles en a, invariantes par K dont le laplacien est constant (proposition 6.2 et corollaire 6.3).

THEOREME 7.5. – *Les formes quadratiques généralisées sont proportionnelles à*

$$Q(r) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_0^\pi \operatorname{Log}\,(\operatorname{ch} r - \cos\theta \operatorname{sh} r) \sin^{n-2}\theta \, d\theta$$

La forme quadratique généralisée $Q(r)$ *est un noyau de type négatif.*

En particulier pour $n = 2$ nous avons

$$Q(r) = 2 \operatorname{Log} \operatorname{ch} \frac{r}{2}$$

et pour $n = 3$,

$$\omega_s(r) = \frac{\operatorname{sh}(s-1)\,r}{(s-1)\operatorname{sh} r}$$

$$Q(r) = r \coth r - 1$$

Nous avons en général

$$\omega_s(r) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_0^\pi (\operatorname{ch} r - \cos\theta \operatorname{sh} r)^{-s} \sin^{n-2}\theta \, d\theta$$

ainsi quand s tend vers 0, $\frac{1}{s}\,[1 - \omega_s(r)]$ a une limite qui est égale à

$$Q(r) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_0^\pi \operatorname{Log}(\operatorname{ch} r - \cos\theta \operatorname{sh} r) \sin^{n-2}\theta \, d\theta$$

Le noyau $Q(r)$ étant limite de noyaux de type négatif est aussi un noyau de type négatif. D'autre part nous avons

$$-\Delta\omega_s = s(n-1-s)\,\omega_s$$

et par suite

$$\Delta Q = \lim_{s \to 0} (n-1-s)\,\omega_s = n-1$$

donc Q est une forme quadratique généralisée.

Ainsi, d'après la formule de Lévy-Kinchine (théorème 3.3), les noyaux invariants de type négatif sont de la forme $\psi = H(r)$ où H est une fonction admettant la représentation

$$\begin{aligned} H(r) = aQ(r) &+ \int_{\left]0,\frac{n-1}{2}\right]} [1 - \omega_s(r)]\, d\mu_1(s) \\ &+ \int_{]0,\infty[} \left[1 - \omega_{\frac{n-1}{2}+i\nu}(r)\right] d\mu_2(\nu) \end{aligned}$$

où a est un nombre positif ou nul, μ_1 est une mesure positive sur $\left]0, \frac{n-1}{2}\right]$ vérifiant

$$\int s\, d\mu_1(s) < \infty$$

et μ_2 est une mesure positive bornée sur $]0, \infty[$.

Par exemple le noyau Log ch r est de type négatif (proposition 7.3). Pour $n = 3$ la mesure μ_1 correspondante est nulle et nous avons

$$\operatorname{Log} \operatorname{ch} r = r \coth r - 1 + \int_0^\infty \left(1 - \frac{\sin \nu r}{\nu \operatorname{sh} r}\right) \frac{\nu^2}{1+\nu^2} \frac{1}{\operatorname{ch} \pi\nu} d\nu$$

(cette formule s'obtient à partir de résultats énoncés dans [8] p. 406-07).

d) *Hélice associée à la forme quadratique généralisée.*

Soit S la sphère de dimension $n-1$, de rayon 1, de centre $a = (1, 0, \dots, 0)$ située dans l'hyperplan d'équation $x_0 = 1$. Soit φ le noyau défini sur S par

$$\varphi(u, v) = u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n$$

c'est un noyau de type positif et par suite pour tout k, $0 < k < 1$, le noyau $\operatorname{Log}(1 - k\varphi)$ est un noyau de type négatif. Pour toute fonction continue f définie sur S et d'intégrale nulle :

$$\int_S f \, d\sigma(u) = 0$$

nous avons

$$\iint f(u)\, \overline{f(v)} \operatorname{Log}[1 - k\varphi(u, v)]\, d\sigma(u)\, d\sigma(v) \leqslant 0$$

et à la limite quand k tend vers 1 .

$$\iint f(u)\, \overline{f(v)} \operatorname{Log}[u, v]\, d\sigma(u)\, d\sigma(v) \leqslant 0$$

Soit $\mathcal{H}$ l'espace de Hilbert obtenu en séparant et en complètant l'espace des fonctions continues sur S d'intégrale nulle pour la semi-norme définie par

$$\|f\|^2 = -\iint f(u)\, \overline{f(v)} \operatorname{Log}[u, v]\, d\sigma(u)\, d\sigma(v)$$

Soit ξ l'application de X dans $\mathcal{H}$ qui à x fait correspondre la fonction f_x définie par

$$f_x(u) = 1 - [x, u]^{1-n}$$

Cette application est une hélice associée au noyau de type négatif $Q(r)$ et nous avons

$$\|\xi(x) - \xi(y)\|^2 = \|f_x - f_y\|^2 = Q[r(x, y)]$$

e) *La distance géodésique n'est pas une distance hilbertienne*

PROPOSITION 7.6. – *Si $H(r)$ est un noyau de type négatif alors*

$$H(r) = 0(r) \quad (r \to \infty)$$

D'après la formule de Lévy-Kinchine nous avons

$$\mathrm{H}(r) = a\mathrm{Q}(r) + \int_{]0,\frac{n-1}{2}]} [1 - \omega_s(r)]\, d\mu_1(s) + \int_{]0,\infty[} \left[1 - \omega_{\frac{n-1}{2}+iv}(r)\right] d\mu_2(v)$$

avec $a \geqslant 0$, μ_1 et μ_2 sont des mesures positives telles que

$$\int s\, d\mu_1(s) < \infty, \int d\mu_2 < \infty$$

Pour s dans l'intervalle $\left]0, \frac{n-1}{2}\right]$ nous avons

$$(\operatorname{ch} r - \cos\theta \operatorname{sh} r)^{-s} \geqslant e^{-rs}$$

d'où

$$\omega_s(r) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_0^\pi (\operatorname{ch} r - \cos\theta \operatorname{sh} r)^{-s} \sin^{n-2}\theta\, d\theta$$

$$\geqslant e^{-rs}$$

et par suite

$$1 - \omega_s(r) \leqslant rs$$

donc

$$\mathrm{Q}(r) = \lim_{s \to 0} \frac{1}{s} [1 - \omega_s(r)] \leqslant r$$

et

$$\int_{]0,\frac{n-1}{2}]} [1 - \omega_s(r)]\, d\mu_1(s) \leqslant r \int_{]0,\frac{n-1}{2}]} s\, d\mu_1(s)$$

La deuxième intégrale est majorée par deux fois la masse totale de μ_2.

COROLLAIRE 7.7. — *La distance géodésique n'est pas une distance hilbertienne.*

En effet d'après la proposition précédente le carré de la distance géodésique ne peut pas être un noyau de type négatif.

4. *Espaces hyperboliques complexes.*

Ce sont les espaces homogènes $SU(1, n)/U(n)$, $U(n)$ étant considéré comme le sous-groupe de $SU(1, n)$ constitué des matrices de la forme

$$\left(\begin{array}{c|c} \det k^{-1} & 0 \\ \hline 0 & k \end{array}\right), \quad k \in U(n)$$

Par une méthode analogue à celle utilisée dans le cas réel on montre que le noyau Log ch r est de type négatif ; de plus c'est une forme quadratique généralisée. Comme dans le cas réel la racine carrée de la distance géodésique est une distance hilbertienne, et la distance géodésique n'en est pas une.

8. Exemples de variétés riemanniennes de dimension infinie.

Schoenberg, dans [23] et [24] a étudié le cas où X est l'espace de Hilbert réel séparable et le cas où X est la sphère unité de l'espace de Hilbert réel séparable. Dans ce paragraphe nous faisons une étude analogue dans le cas de l'espace hyperbolique réel de dimension infinie. C'est l'ensemble

$$X = \left\{ (x_k)_{k \geq 0} \,\middle|\, x_0^2 - \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 = 1, \; x_0 > 0 \right\}$$

muni de la distance r définie par

$$\operatorname{ch} r(x, y) = x_0 y_0 - \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$$

THEOREME 8.1. – *Pour qu'un noyau* $G(r)$ *soit de type positif il faut et suffit qu'il soit de la forme*

$$G(r) = \int_{[0,\infty[} (\operatorname{ch} r)^{-t} \, d\mu(t)$$

où μ *est une mesure positive bornée sur* $[0, \infty[$.

(Ce théorème est énoncé dans [19] p. 106 sans démonstration. Celle-ci est annoncée pour la troisième partie du même article que nous n'avons pas pu nous procurer).

Notons ω_s^n la fonction sphérique de paramètre s relative à l'espace hyperbolique réel de dimension n. Nous avons

$$\omega_s^n(r) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_0^\pi (\operatorname{ch} r - \cos\theta \operatorname{sh} r)^{-s} \sin^{n-2}\theta \, d\theta$$

de plus

$$\omega_{n-1-s}^n = \omega_s^n$$

et ω_s^n est de type positif soit si $0 \leqslant s \leqslant n-1$, soit si $s = \frac{n-1}{2} + i\nu$, ν réel.

Lemme. — *Pour $r > 0$ posons*

$$f_n(s) = \omega_s^n(r) \quad \text{si} \quad 0 \leqslant s \leqslant \frac{n-1}{2} = \omega^n_{\frac{n-1}{2}}(r) \quad \text{si} \quad s \geqslant \frac{n-1}{2}$$

Alors la suite f_n converge uniformément sur $[0, \infty[$ vers $(\operatorname{ch} r)^{-s}$ et par suite

$$\lim_{n\to\infty} \omega^n_{\frac{n-1}{2}}(r) = 0$$

Remarquons que

$$\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \leqslant n$$

il en résulte que pour tout $\eta > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \sin^{n-2}\theta = 0$$

uniformément si $\left|\theta - \frac{\pi}{2}\right| \geqslant \eta$. Par suite

$$\lim_{n\to\infty} \omega_s^n(r) = (\operatorname{ch} r)^{-s}$$

la convergence étant uniforme lorsque s parcourt un intervalle borné de $[0, \infty[$.

La fonction $\omega_s^n(r)$ est une fonction convexe de s sur $[0, n-1]$ et vérifie

$$\omega_s^n(r) = \omega_{n-1-s}^n(r)$$

elle est donc décroissante sur $\left[0, \frac{n-1}{2}\right]$. Les fonctions f_n sont décroissantes sur $[0, \infty[$ et convergent vers $(\operatorname{ch} r)^{-s}$ uniformément sur tout intervalle borné de $[0, \infty[$. Comme la fonction $(\operatorname{ch} r)^{-s}$ tend vers 0 quand s tend vers l'infini, la convergence est uniforme sur $[0, \infty[$. Il en résulte que

$$\lim_{n \to \infty} \omega_{\frac{n-1}{2}}^n(r) = 0$$

Démontrons maintenant le théorème 8.1. La condition est suffisante, en effet on montre comme dans le cas de dimension finie que le noyau $(\operatorname{ch} r)^{-t}$ est de type positif pour tout $t \geqslant 0$ (proposition 7.3). Pour démontrer que la condition est nécessaire nous utiliserons le fait que si $G(r)$ est un noyau de type positif sur X, sa restriction à tout espace hyperbolique réel de dimension finie L_n est de type positif. D'après le théorème de Bochner-Godement (théorème 3.1) il existe pour tout $n \geqslant 2$ deux mesures positives bornées μ_n et μ'_n sur $\left[0, \frac{n-1}{2}\right]$ et $]0, \infty[$ respectivement telles que

$$G(r) = \int_{\left[0, \frac{n-1}{2}\right]} \omega_s^n(r)\, d\mu_n(s) + \int_{]0,\infty[} \omega_{\frac{n-1}{2}+i\nu}^n(r)\, d\mu'_n(\nu)$$

Remarquons que

$$G(0) = \int d\mu_n + \int d\mu'_n$$

Supposons maintenant $r > 0$. Puisque

$$\left| \omega_{\frac{n-1}{2}+i\nu}^n(r) \right| \leqslant \omega_{\frac{n-1}{2}}^n(r)$$

la deuxième intégrale est majorée par $G(0)\, \omega_{\frac{n-1}{2}}^n(r)$ et tend donc vers 0 quand n tend vers l'infini d'après le lemme si $r > 0$.

Prolongeons la mesure μ_n à $[0, \infty]$ en posant

$$\mu_n\left(\left]\frac{n-1}{2}, \infty\right]\right) = 0$$

Ainsi nous avons

$$G(r) = \lim_{n\to\infty} \int_{[0,\infty]} f_n(s)\, d\mu_n(s)$$

où f_n est la suite de fonctions introduite dans le lemme. Il est possible d'extraire de la suite μ_n une sous-suite qui converge vaguement vers une mesure μ pour laquelle nous avons

$$G(r) = \int_{[0,\infty]} (\operatorname{ch} r)^{-s}\, d\mu(s)$$

Puisque $(\operatorname{ch} r)^{-s}$ tend vers 0 quand s tend vers l'infini

$$G(r) = \int_{[0,\infty[} (\operatorname{ch} r)^{-s}\, d\mu(s)$$

Les deux membres sont des fonctions continues de r sur $[0, \infty[$, donc

$$1 = G(0) = \mu([0, \infty[)$$

et donc $\mu(\{\infty\}) = 0$.

Remarque. – Le théorème 8.1 peut s'énoncer : tout noyau $G(r)$ de type positif est une fonction complètement monotone de $\operatorname{Log} \operatorname{ch} r$

COROLLAIRE 8.2. – *Pour qu'un noyau* $H(r)$ *soit de type négatif il faut et suffit qu'il soit de la forme*

$$H(r) = a \operatorname{Log} \operatorname{ch} r + \int_{]0,\infty[} [1 - (\operatorname{ch} r)^{-t}]\, d\sigma(t)$$

où a est une constante positive ou nulle et σ est une mesure positive sur $]0, \infty[$ *vérifiant*

$$\int \frac{t}{1+t}\, d\sigma(t) < \infty$$

Ce corollaire peut s'énoncer : tout noyau $H(r)$ de type positif est une fonction de Bernstein nulle en 0 de $\operatorname{Log} \operatorname{ch} r$.

Pour démontrer que la condition est suffisante on montre, comme dans le cas de dimension finie, que $\operatorname{Log} \operatorname{ch} r$ est un noyau de type négatif (proposition 7.3). Montrons maintenant que la condition est nécessaire : soit $H(r)$ un noyau de type négatif, d'après le théorème de Schoenberg (proposition 2.3) le noyau $e^{-tH(r)}$ est pour tout $t \geqslant 0$ de type positif, et d'après le théorème 9.1 il s'écrit

$$e^{-tH(r)} = G_t(\mathrm{Log\,ch}\, r)$$

où G_t est une fonction complètement monotone. Il en résulte ([4] p. 86) que le noyau $H(r)$ s'écrit

$$H(r) = F(\mathrm{Log\,ch}\, r)$$

où F est une fonction de Bernstein.

Dans le cas d'un espace euclidien de dimension infinie Schoenberg montre le même résultat à condition de remplacer Log ch$r$ par r^2.

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. Berard-Bergery, Laplacien et géodésiques fermées sur les formes d'espace hyperbolique compactes, *Sém. Bourbaki,* 24ème année, 1971/72, n° 406.

[2] C. Berg, Dirichlet forms on symmetric spaces Københavns Universitet, *Matematisk Institut Preprint Series*, (1972) n° 6.

[3] S. Bochner, Hilbert distances and positive definite functions, *Ann. of Math.*, 42 (1941), 647-656.

[4] S. Bochner, Harmonic analysis and the theory of probability University of California Press, Berkeley and Los Angeles.

[5] J. Bretagnolle, D. Dacunha Castelle, J.L. Krivine, Lois stables et espaces L^p, *Ann. Inst. Henri Poincaré,* section B, vol II, n° 3 (1966), 231-259.

[6] J. Bretagnolle, D. Dacunha Castelle, Le déterminisme des fonctions laplaciennes sur certains espaces de suites, *Ann. Inst. Henri Poincaré,* section B, vol V, n° 1 (1969), 1-12.

[7] E. CARTAN, Leçons sur la géométrie projective complexe, Gauthier Villars, Paris (1931).

[8] C. DELAROCHE, A. KIRILLOV, Sur les relations entre l'espace dual d'un groupe et la structure de ses sous-groupes fermés (d'après D.A. Kajdan), *Sém. Bourbaki*, 20ème année, 1967/68, n° 343.

[9] J.D. DIXMIER, Les C*-algèbres et leurs représentations, Gauthier-Villars, Paris (1969).

[10] J. FARAUT, K. HARZALLAH, Fonctions sphériques de type positif sur les espaces hyperboliques, *C.R. Acad. Sc. Paris*, t. 274, 1396-1398 (1972) série A.

[11] R. GANGOLLI, Positive definite kernels on homogeneous spaces and certain stochastic processes related to Levy's Brownian motion of several parameters, *Ann. Inst. H. Poincaré*, section B, vol III, n° 2 (1967) p. 121-225.

[12] R. GODEMENT, Introduction aux travaux de Selberg, *Sém. Bourbaki*, 1956/57, n° 144.

[13] A. GUICHARDET, Sur la cohomologie des groupes topologiques, *Bull. Sc. Math.* 2ème série, 95 (1971) 161-176.

[14] K. HARZALLAH, Sur une démonstration de la formule de Lévy-Kinchine, *Ann. Inst. Fourier*, 19, 2 (1969), 527-532.

[15] S. HELGASON, Differential geometry and symmetric spaces, Academic press (1962).

[16] C. HERZ, The spectral theory of bounded functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 94 (1960), 181-232.

[17] D.A. KAJDAN, Connection of the dual space of a group with the structure of its closed subgroups, Funktcional Anal., *Ego Prilozheniya*, vol 1 (1967), 71-74.

[18] B. KOSTANT, On the existence and irreducibility of certain series of representations, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 75 (1969), 627-642.

[19] M.G. KREIN, Hermitian positive kernels on homogeneous spaces, spaces, *A.M.S. Translations*, (2) 34, 69-164.

[20] P. LEVY, Processus stochastiques et mouvement brownien, Gauthier-Villars, Paris 2ème édition (1965).

[21] K.R. PARTHASARATHY, R. RANGA RAO, S.R. VARADHAN, Probability distributions on locally compact abelian groups, *Illinois J. Math.*, vol 7 (1963), 337-369.

[22] I.J. SCHOENBERG, Metric spaces and positive definite functions, *Trans. Amer. Math. Soc.* 44 (1938), 522-536.

[23] I.J. SCHOENBERG, Metric spaces and completely monotone functions, *Ann. of Math.*, 39 (1938), 811-841.

[24] I.J. SCHOENBERG, Positive definite functions on spheres, *Duke Math. J.*, 9 (1942), 96-108.

[25] I.J. SCHOENBERG, J. VON NEUMANN, Fourier integrals and metric geometry, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 50 (1941), 226-251.

[26] R. TAKAHASHI, Sur les représentations unitaires des groupes de Lorentz généralisés, *Bull. Soc. Math. France*, 91 (1963), 289-433.

[27] S.P. WANG, The dual space of semi-simple groups, *Amer. J. of Math.*, (1969), 921-937.

[28] S.P. WANG, On isolated points in the dual spaces of locally compact groups (à paraître).

Manuscrit reçu le 28 mai 1974
accepté par G. Choquet.

Jacques FARAUT,
Institut de Recherche mathématique Avancée
Laboratoire Associé au C.N.R.S.
Université Louis Pasteur
7, rue René Descartes
67084 Strasbourg Cedex.

Khélifa HARZALLAH,
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université de Tunis
Campus Universitaire
Tunis.