

# ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

HÉLÈNE AIRAULT

## **Minorantes harmoniques et potentiels - Localisation sur une famille de temps d'arrêt - Réduite forte**

*Annales de l'institut Fourier*, tome 24, n° 3 (1974), p. 67-118

[http://www.numdam.org/item?id=AIF\\_1974\\_\\_24\\_3\\_67\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1974__24_3_67_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

# MINORANTES HARMONIQUES ET POTENTIELS LOCALISATION SUR UNE FAMILLE DE TEMPS D'ARRÊT-RÉDUITE FORTE

par **Hélène AIRAULT**

## Introduction .

Dans la théorie classique, on a la décomposition de Riesz suivante : si  $E$  est un espace localement compact,  $P_t$  un semi-groupe sur  $E$ , toute fonction excessive sur  $E$  est la somme d'une fonction harmonique dans  $E$  et d'un potentiel (3) ; une fonction excessive  $u$  est un potentiel si sa seule minorante harmonique est nulle. Si  $B_n$  est une suite croissante de compacts dont les intérieurs recouvrent  $E$ , on a la caractérisation suivante : (3). Pour que  $u$  soit un potentiel, il faut et il suffit que  $P_{B_n}^c u$  tende vers 0 p.p. On a la généralisation suivante de ce résultat : Si  $A$  est un fermé de  $E$ , on obtient la décomposition de Riesz ci-dessous.

Toute fonction excessive est somme d'une fonction harmonique dans le complémentaire de  $A$  et d'un potentiel dans le complémentaire de  $A$ . On dit qu'une fonction excessive  $u$  est un potentiel dans le complémentaire de  $A$  si sa seule minorante au sens fort, harmonique dans le complémentaire de  $A$  est nulle.

Dans la partie I, on localise, les propriétés d'harmonicité d'une fonction excessive sur une famille  $\mathfrak{C}$  de temps d'arrêt. On obtient la décomposition de Riesz :

Toute fonction excessive est la somme d'une fonction  $\mathfrak{C}$ -harmonique et d'un  $\mathfrak{C}$ -potentiel. Un  $\mathfrak{C}$ -potentiel est caractérisé par : sa plus grande minorante  $\mathfrak{C}$ -harmonique au sens fort est la fonction 0.

*Si on fait sur la famille  $\mathfrak{C}$  l'hypothèse de séparabilité* : il existe une suite  $(\tau_n)$  de  $\mathfrak{C}$  telle que :

$$\forall \tau \in \mathfrak{C}, \quad \text{il existe } n \text{ tel que } \tau \leq \tau_n \quad (\text{A})$$

(Une telle suite est appelée dominante),

les potentiels  $h$  sont caractérisés par l'ensemble qui porte leur mesure spectrale  $\mu^h$ .

On a :  $h$  est  $\mathfrak{C}$ -harmonique équivaut à  $\mu^h$  est portée par :

$$\mathfrak{U}_{\mathfrak{C}} = \{z \in \mathfrak{U} \mid k_z \text{ est } \mathfrak{C}\text{-harmonique}\} \quad (1)$$

$h$  est un  $\mathfrak{C}$ -potentiel équivaut à  $\mu^h$  portée par :  $\mathfrak{U} - \mathfrak{U}_{\mathfrak{C}}$  ;  $\mathfrak{U}$  étant l'espace des sorties (2).

Dans la partie II, on fait l'hypothèse de séparabilité (A) sur la famille  $\mathfrak{C}$ . Dans le § 1, on considère des familles fondamentales de temps d'arrêt.

La famille  $\mathfrak{C}$  de temps d'arrêt est *fondamentale* si elle vérifie l'hypothèse (A) de séparabilité et si la suite dominante  $(\tau_n)$  tend vers le temps de vie  $\xi$   $P_x$  p.s. pour tout  $x$  appartenant à  $E$ .

Si  $\mathfrak{C}$  est une famille fondamentale de temps d'arrêt, par exemple la famille des premiers temps de sortie des compacts de  $E - F$  où  $F$  est un ensemble polaire, on a une deuxième caractérisation des  $\mathfrak{C}$ -potentiels :  $h$  est un  $\mathfrak{C}$ -potentiel équivaut à :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(h(X_{\tau_n})) = 0 \quad \text{où } (\tau_n) \text{ est une suite dominante de } \mathfrak{C} \quad (2)$$

Dans le § 2 on cherche une *caractérisation du type* (2) des  $\mathfrak{C}$ -potentiels, pour une famille  $\mathfrak{C}$  de temps d'arrêt qui ne vérifie pas l'hypothèse : " $\mathfrak{C}$  est fondamentale".

On est ainsi amené à calculer de façon explicite la plus grande minorante  $\mathfrak{C}$ -harmonique au sens fort d'une fonction excessive  $h$ . Si  $\mathfrak{C}$  est une famille de temps d'arrêt dans laquelle il existe une suite dominante  $\alpha = (\tau_n)$ . On pose :

$$\tau = \lim_{n \rightarrow +\infty} \tau_n$$

$$\Omega(\mathfrak{C}) = \{\tau = \xi \ ; \ \forall n \ \tau_n < \xi\}$$

$$T\Omega(\mathfrak{C}) = \bigcup_{t \geq 0} (t < \xi) \theta_t \Omega(\mathfrak{C})$$

$$R_\tau = \bigcap_{0 \leq t < \xi} (\tau \circ \theta_t + t < \xi) \quad ; \quad S_\tau = \bigcup_{t \geq 0} (t < \xi) (\tau \circ \theta_t + t = \xi)$$

Les résultats sont les suivants :

Soit  $h$  une fonction excessive  $\gamma$ -intégrable.

1) Pour un temps d'arrêt  $\tau$ , il existe une fonction excessive unique  $F_\tau h$ , réduite forte [5] et [12] telle que (théorème 2) pour tout  $x$  tel que  $h(x) < +\infty$ , on a :

$$F_\tau h(x) = h(x) E_x^h [R_\tau]$$

2) Pour la famille  $\mathfrak{G}$ , il existe une fonction excessive unique  $K_{\mathfrak{G}} h$  telle que (théorème 1) pour tout  $x$  tel que  $h(x) < +\infty$ , on a :

$$K_{\mathfrak{G}} h(x) = h(x) E_x^h [T\Omega(\mathfrak{G})]$$

La fonction  $F_\tau h$  est une minorante de  $h$  avec l'ordre fort sur les fonctions excessives et :

$$h - F_\tau h = G_\tau h \quad \text{où} \quad G_\tau h(x) = h(x) E_x^h (S_\tau)$$

pour tout  $x$  tel que  $h(x) < +\infty$ .

$F_\tau h$  est une minorante avec l'ordre fort de  $P_\tau h$  où  $P_\tau h$  est la fonction excessive réduite définie par  $P_\tau h(x) = E_x[h(X_\tau)]$  pour tout  $x$  tel que  $h(x) < +\infty$  (théorème 3).

La fonction excessive  $K_{\mathfrak{G}} h$  est une minorante avec l'ordre fort de  $h$  (théorème 4).

On obtient finalement (théorème 6) :

La plus grande minorante  $\mathfrak{G}$ -harmonique avec l'ordre fort d'une fonction excessive  $h$  est égale à :

$$F_\tau h + K_{\mathfrak{G}} h$$

Dans le § 3, on fait quelques remarques complémentaires sur la réduite forte  $F_\tau h$ , d'une fonction excessive  $h$ . Soit  $w$  une fonction excessive et  $\tau$  un temps d'arrêt tel que  $\tau \circ \theta_\tau + \tau = \tau$ , p.s. ; si  $h$  est une fonction excessive inférieure à  $P_\tau w$ , avec l'ordre fort, alors  $F_\tau h = h$ .

On généralise alors une remarque de J. Azéma (8) et on obtient des informations sur la mesure spectrale de la réduite forte  $F_\tau w$  d'une fonction excessive  $w$  : si  $\tau$  est un temps d'arrêt qui vérifie  $\tau \circ \theta_\tau + \tau = \tau$  p.s. et si  $w$  est une fonction excessive, alors :

$$\mu^{\text{F}\tau^w} = \inf (\mu^{\text{P}\tau^w}, \mu^w)$$

Cette relation n'est pas toujours vraie et la condition  $\tau \circ \theta_\tau + \tau = \tau$  n'est pas une condition nécessaire pour qu'elle soit vérifiée.

Si A est un ensemble fermé polaire, pour toute fonction excessive  $w$  telle que  $\mu^w$  est portée par A, on a pour tout temps d'arrêt  $\tau$  :

$$\mu^{\text{F}\tau^w} = \inf (\mu^w, \mu^{\text{P}\tau^w})$$

Dans la partie III, on fait toujours sur la famille  $\mathfrak{C}$ , l'hypothèse de séparabilité (A) ; on caractérise les  $\mathfrak{C}$ -potentiels et on examine des cas particuliers de familles  $\mathfrak{C}$  de temps d'arrêt :

a) La famille  $\mathfrak{C}$  satisfait à l'hypothèse (H) si et seulement si on a la caractérisation suivante des  $\mathfrak{C}$ -potentiels

$$h \text{ est un } \mathfrak{C}\text{-potentiel équivaut à } K_{\mathfrak{C}} h = 0 \quad (3)$$

b)  $\mathfrak{C}$  satisfait à (R) si et seulement si

$$\text{les } \mathfrak{C}\text{-potentiels sont caractérisés par } F_\tau h = 0 \quad (4)$$

où  $\tau = \lim_{n \rightarrow +\infty} \tau_n$ ,  $(\tau_n)$  étant une suite dominante dans  $\mathfrak{C}$ .

c) Si  $h$  est un  $\mathfrak{C}$ -potentiel,

$$\forall x \text{ tel que } h(x) < +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} E_x [h(X_{\tau_n})] = E_x [h(X_\tau)]$$

Si  $\mathfrak{C}$  est une famille semi-fondamentale qui vérifie l'hypothèse (H), on a :  $h$  est un  $\mathfrak{C}$ -potentiel si et seulement si

$$\forall x \text{ tel que } h(x) < +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} E_x [h(X_{\tau_n})] = E_x [h(X_\tau)] \quad (5)$$

Dans la partie IV, on ne fait plus l'hypothèse (A) de séparabilité sur la famille  $\mathfrak{C}$  de temps d'arrêt. On obtient des caractérisations des  $\mathfrak{C}$ -potentiels analogues à celles de (3), (4) et (5) en considérant une famille  $\mathfrak{C}'$  de temps d'arrêt contenue dans  $\mathfrak{C}$  et qui vérifie l'hypothèse de séparabilité (A).

Evidemment  $h$  est un  $\mathfrak{C}'$ -potentiel entraîne  $h$  est un  $\mathfrak{C}$ -potentiel. On a les résultats suivants :

a) Soit  $\mathfrak{C}$  une famille de temps d'arrêt et soit  $\mathfrak{C}' = (\tau_n)$  une

suite de temps d'arrêt *contenue dans*  $\mathfrak{C}$ . Soit  $\tau = \lim_{n \rightarrow +\infty} \tau_n$ . Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

1) pour toute fonction excessive  $w$ ,  $w$  est un  $\mathfrak{C}$ -potentiel entraîne :  $F_\tau w = 0$

2)  $h$  est un  $\mathfrak{C}$ -potentiel }  $\Leftrightarrow h$  est un  $\mathfrak{C}'$ -potentiel.  
 et  $K_{\mathfrak{C}} h = 0$

b) Soit  $\mathfrak{C}' = (\tau_n)$  une suite de temps d'arrêt contenue dans  $\mathfrak{C}$ . Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1) pour toute fonction excessive  $w$ ,  $w$  est un  $\mathfrak{C}$ -potentiel entraîne :

$$K_{\mathfrak{C}} w = 0$$

2)  $h$  est un  $\mathfrak{C}$ -potentiel } si et seulement si  $h$  est un  $\mathfrak{C}'$ -potentiel  
 et  $F_\tau h = 0$   
 $(\tau = \lim_{n \rightarrow +\infty} \tau_n)$

Dans la partie V, on donne brièvement quelques applications de la  $\mathfrak{C}$ -théorie.

1) On considère la famille des premiers temps de sortie des compacts de  $D$  où  $D$  est une partie ouverte de  $E$ .

2) Soit  $\mathfrak{F}$  la famille des ensembles finement ouverts relativement compacts contenus dans un ensemble finement ouvert  $O$ . (10).

$O$  est une réunion d'une suite croissante d'ensembles  $(A_n)$  de  $\mathfrak{F}$  et d'un ensemble semi-polaire. On applique les résultats à la famille des premiers temps de sortie des ensembles  $A_n$ .

Dans ce cas, on utilise les résultats de la partie IV.

3) On introduit l'hypothèse de séparabilité sur la famille  $\mathfrak{C}$ , dans la théorie du potentiel fin en définissant des ensembles qui sont l'analogie des compacts dans l'exemple 1.

Soit  $O$  un ensemble finement ouvert, et soit  $\tau_0$  le premier temps de sortie de  $O$ . Pour tout entier  $k > 0$ , on pose :

$$O_k = \left\{ x \in O \mid E_x [e^{-\tau_0}] < 1 - \frac{1}{k} \right\}$$

On prend pour  $\mathfrak{C}$  la famille des premiers temps de sortie des ensembles  $O_k$ . Les résultats de la partie V sont repris dans (9) et d'autres applications  $y$  sont données. Les notations sont celles de (1) et (5).

### Notations et hypothèses.

On suivra [1].  $E$  est un espace métrique localement compact séparable,  $\mathcal{B}$  est la  $\sigma$ -algèbre de ses ensembles universellement mesurables et  $m$  une mesure sur  $\mathcal{B}$ . Soit  $X = (X_t, \zeta, \mathcal{F}_t, P_x)$  un processus de Markov ayant comme fonction de transition :

$$p(t, x, \Gamma) = \int_{\Gamma} p(t, x, y) m(dy)$$

et soit  $(\Omega, \mathcal{F})$  l'espace des évènements élémentaires.  $\mathcal{F}$  désigne la  $\sigma$ -algèbre sur  $\Omega$  engendrée par les ensembles

$$\{\omega \mid X_t(\omega) \in \Gamma\}, \quad t \geq 0 \quad \text{et} \quad \Gamma \in \mathcal{B}.$$

$\mathcal{F}_t$  est la  $\sigma$ -algèbre sur  $\Omega_t = (\zeta > t)$  engendrée par les ensembles  $[X \in \Gamma]$  où  $\Gamma \in \mathcal{B}$  et  $s \in [0, t]$ . Soient

$$g_\alpha(x, \Gamma) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} p(t, x, \Gamma) dt = \int g_\alpha(x, y) m(dy)$$

les noyaux de Green, où  $g_\alpha(x, y)$  sont des fonctions positives  $\mathcal{B}$ -mesurables.

Les opérateurs  $P_t$  et  $G_\alpha$  correspondent aux noyaux  $p(t, x, \Gamma)$  et  $g_\alpha(x, \Gamma)$ . Ils envoient l'ensemble  $V$  des fonctions  $\mathcal{B}$ -mesurables positives dans lui-même. Une fonction  $f$  de  $V$  est excessive si

$$\forall t > 0, P_t f \leq f \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow 0} P_t f = f.$$

Soit  $\gamma$  la mesure de référence [mesure standard [1]] sur la  $\sigma$ -algèbre  $\mathcal{B}$ .

En particulier  $\gamma$  possède la propriété : il existe des constantes  $C_\varphi < +\infty$  telles que pour toute fonction excessive  $h$ , on ait :  $(h, \varphi) \leq C_\varphi \gamma(h)$  pour  $\varphi \in W$  où  $W$  est un système support [2, p. 95] : les fonctions à support compact.

Toute fonction excessive  $h$  nulle  $\gamma$ -p.p. est nulle partout [2, lemme 1.1 p. 104].

Toutes les fonctions excessives considérées dans la suite sont intégrables par rapport à la mesure  $\gamma$ . Soit  $h$  une fonction excessive et soit

$$E_h = \{x \in E \mid 0 < h(x) < +\infty\}$$

On pose :

$$p^h(t, x, \Gamma) = \begin{cases} \frac{1}{h(x)} \int_{\Gamma} p(t, x, dy) h(y) & \text{si } x \in E_h \\ 1_{\Gamma}(x) & \text{si } x \in E - E_h \end{cases}$$

Soit  $X = (X_t^h, \zeta^h, \mathfrak{F}_t^h, P_x^h)$  le  $h$ -processus correspondant à la fonction de transition  $p^h(t, x, \Gamma)$ .

On peut choisir les processus  $X^h$ , correspondant à toutes les fonctions excessives  $h$  de façon à prendre le même espace d'évènements élémentaires et tel que  $(X_t^h, \zeta^h, \mathfrak{F}_t^h)$  ne dépende pas de  $h$ . On écrira :

$$X^h = (X_t, \zeta, \mathfrak{F}_t, P_x^h) \quad [\text{cf. 1}]$$

et on ne complètera pas les tribus  $\mathfrak{F}_t$  par rapport aux mesures  $P_x^h$ .

On omet  $h$  dans la notation  $X^h$  ou  $P_x^h$  lorsque  $h = 1$ .

On dira qu'une variable aléatoire  $\tau$  positive est un temps d'arrêt si :

$$\tau \leq \zeta \quad \text{et} \quad \forall t \geq 0 \quad ; \quad (\tau < t < \zeta) \in \mathfrak{F}_t.$$

On suppose que :

$$\forall t \geq 0 \quad , \quad (\tau < t < \zeta) \in \mathfrak{F}_t$$

si et seulement si

$$\forall t \geq 0 \quad , \quad (\tau \leq t < \zeta) \in \mathfrak{F}_t.$$

[13 lemme 3.3 p. 101]

Pour un temps d'arrêt  $\tau$ , on définit sur  $\Omega_{\tau} = (\tau < \zeta)$  la  $\sigma$ -algèbre  $\mathfrak{F}_{\tau}$  :

$$A \in \mathfrak{F}_{\tau} \quad \text{si} \quad A \in \mathfrak{F}, A \subset \Omega_{\tau} \quad \text{et} \quad \forall t \geq 0 \quad (A ; \tau < t < \zeta) \in \mathfrak{F}_t.$$

On suppose que le processus  $X$  est un  $M$ -processus spécial [1] et standard [13] (donc continu à droite). En particulier, la propriété suivante est vérifiée

Pour toute suite croissante de temps d'arrêt  $(\tau_n)$  qui tend vers un temps d'arrêt  $\tau$ , on a :

$$P_x - \text{p.s.} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} X_{\tau_n} = X_{\tau} \quad \text{sur} \quad (\tau < \zeta)$$

On supposera que pour toute fonction excessive  $h$ , p.s. l'application :  $t \rightarrow h(X_t(\omega))$  est continue à droite.



Soit  $\tau$  un temps d'arrêt. Si  $A \in \mathcal{G}_\tau$  et  $x \in \{0 < h < +\infty\}$ , on a : [5, lemme 1, chapitre I]

$$h(x) P_x^h(A) = E_x [1_A h(X_\tau)]$$

Soit  $h$  une fonction excessive, on pose :

$$P_\tau h(x) = E_x [1_{(\tau < \zeta)} h(X_\tau)]$$

On dira qu'un temps d'arrêt  $\tau$  vérifie la propriété (\*) si :

$$\forall t > 0 \quad \tau \circ \theta_t + t \geq \tau \quad \text{et} \quad \tau \circ \theta_t + t \uparrow \tau \quad \text{quand} \quad t \downarrow 0.$$

Soit  $h$  une fonction excessive, si le temps d'arrêt  $\tau$  satisfait (\*), la fonction  $P_\tau h$  est excessive.

On fera l'hypothèse que tous les temps d'arrêt considérés vérifient la propriété (\*). On définit sur la  $\sigma$ -algèbre  $\mathcal{G}$  [1, 3.7]. Les mesures :

$$P^h(A) = \int \gamma(dx) h(x) P_x^h(A)$$

Soit  $\mathcal{E}$  le compactifié de Martin construit dans [1] et soit  $i$  l'application de  $E$  dans  $\mathcal{E}$ . On pose :

$$Z_t = i(X_t).$$

Soit  $h$  une fonction excessive. Pour  $x \in E_n$ , la limite

$$Z_\zeta = \lim_{t \rightarrow \zeta} Z_t \text{ existe } P_x^h \text{ p.s.}$$

La mesure  $\mu^h$  définie par :

$$\mu^h(\Gamma) = P^h(Z_\zeta \in \Gamma)$$

est la mesure spectrale de  $h$ .

On a une représentation intégrale sur l'espace des sorties  $\mathcal{U}$  [1] :

$$h(x) = \int k_z(x) \mu^h(dz)$$

Pour tout  $x \in E_n$ ,  $\forall A \in \mathcal{G}_\tau$  où  $\tau$  est un temps d'arrêt, on a :

$$h(x) P_x^h(A) = \int k_z(x) P_x^{k_z}(A) \mu^h(dz)$$

$$P^h(A) = \int P^{k_z}(A) \mu^h(dz)$$

et si  $h_1$  et  $h_2$  sont deux fonctions excessives telles que  $h_1 \leq h_2$ , on a :

$$P^{h_1}(A) \leq P^{h_2}(A).$$

## PARTIE I

 $\mathfrak{C}$ -DECOMPOSITION DE RIESZ

DEFINITION 1. — Soit  $\mathfrak{C}$  une famille de temps d'arrêt. On dit que la fonction excessive  $h$  est  $\mathfrak{C}$ -harmonique si  $\forall \tau \in \mathfrak{C}$ , on a :  $P_\tau h = h$ .

Remarque. — Pour un temps d'arrêt  $\tau$ , et une fonction excessive  $h$ , la condition  $P_\tau h = h$  équivaut à  $P^h(\tau = \zeta) = 0$ . Voir [5, lemme 1, chapitre I].

Sur l'ensemble des fonctions excessives, on considère l'ordre fort.

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions excessives, on dit que  $f$  est une minorante forte de  $g$  s'il existe une fonction excessive  $h$  telle que  $g = f + h$ .

DEFINITION 2. — Soit  $\mathfrak{C}$  une famille de temps d'arrêt. On dit qu'une fonction excessive  $h$  est un  $\mathfrak{C}$ -potentiel si toute minorante forte  $\mathfrak{C}$ -harmonique de  $h$  est nulle.

On obtient la décomposition d'une fonction excessive  $h$  en la somme d'une fonction  $\mathfrak{C}$ -harmonique et d'un  $\mathfrak{C}$ -potentiel de la façon suivante :

Soit  $\mathfrak{S}_h$  l'ensemble des fonctions excessives  $\mathfrak{C}$ -harmoniques inférieure avec l'ordre fort à  $h$ .

LEMME 1. —  $v = \sup_{u \in \mathfrak{S}_h} u$  est la plus grande minorante forte,  $\mathfrak{C}$ -harmonique de  $h$ .

*Démonstration.*

$v$  est excessive [11]

$v$  est  $\mathfrak{C}$ -harmonique :  $\forall \tau \in \mathfrak{C}$  ;  $\forall x$  tel que  $v(x) < +\infty$ ,

$$E_x(v(X_\tau)) = E_x\left[\sup_{u \in \mathfrak{S}_h} u(X_\tau)\right] \geq \sup_{u \in \mathfrak{S}_h} E_x[u(X_\tau)] = v(x)$$

comme  $E_x[v(X_\tau)] \leq v(x)$  on a l'égalité.

LEMME 2. — Soit  $z \in \mathcal{U}$  ;  $k_z$  n'est pas  $\mathfrak{C}$ -harmonique équivaut à  $k_z$  est un  $\mathfrak{C}$ -potentiel.

*Démonstration.* — Soit  $k_z^1$  la plus grande minorante  $\mathfrak{C}$ -harmonique de  $k_z$  au sens fort. On a, pour la fonction  $k_z^1$ , les deux possibilités :

$$k_z^1 = 0 \quad \text{ou} \quad k_z^1 = k_z,$$

car  $k_z$  est excessive extrême.

Pour une famille  $\mathfrak{C}$  de temps d'arrêt, on a une partition de l'espace des sorties :

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_{\mathfrak{C}} \cup \mathcal{V}_{\mathfrak{C}}$$

où  $\mathcal{U}_{\mathfrak{C}} = \{z \in \mathcal{U} \mid k_z \text{ est } \mathfrak{C}\text{-harmonique}\}$

$$\mathcal{V}_{\mathfrak{C}} = \mathcal{U} - \mathcal{U}_{\mathfrak{C}} = \{z \in \mathcal{U} \mid k_z \text{ est un } \mathfrak{C}\text{-potentiel}\}$$

LEMME 3. — Soit  $w$  une fonction excessive.  $\mu^w$  est portée par  $\mathcal{U}_{\mathfrak{C}}$  entraîne  $w$  est  $\mathfrak{C}$ -harmonique.

COROLLAIRE. —  $w$  est un  $\mathfrak{C}$ -potentiel entraîne  $\mu^w$  est portée par  $\mathcal{V}_{\mathfrak{C}}$ .

Pour avoir une réciproque du lemme 3, on introduit une hypothèse de séparabilité sur la famille  $\mathfrak{C}$ .

DEFINITION 3. — Soit  $\mathfrak{C}$  une famille de temps d'arrêt. Une famille dénombrable  $(\tau_i)_{i \in I}$  de temps d'arrêt contenue dans  $\mathfrak{C}$  est dite "dominante" si  $\forall \tau \in \mathfrak{C}$ , il existe  $\tau_i$  tel que  $\tau \leq \tau_i$ .

LEMME 4. — Soit  $\mathfrak{C}$  une famille de temps d'arrêt dans laquelle il existe une famille dominante  $\mathfrak{C}' = (\tau_i)_{i \in I}$ . Pour une fonction excessive  $h$ , les deux conditions suivantes sont équivalentes :

- 1)  $h$  est  $\mathfrak{C}$ -harmonique,
- 2)  $h$  est  $\mathfrak{C}'$ -harmonique.

*Démonstration.*

si  $(\tau \leq \tau_i)$  on a  $(\tau_i < \xi) \subset (\tau < \xi)$

LEMME 5. — Soit  $\mathfrak{C}$  une famille dénombrable de temps d'arrêt. Pour une fonction excessive  $h$ , les conditions :

- 1)  $h$  est  $\mathfrak{C}$ -harmonique,
- 2)  $\mu^h$  est concentrée sur  $\mathcal{U}_{\mathfrak{C}}$ .

sont équivalentes.

*Démonstration.* — Si  $h$  est  $\mathfrak{C}$ -harmonique, soit  $\tau \in \mathfrak{C}$  ;  $\gamma$  p.s. pour  $x \in E$ , on a :

$$E_x [H(\tau)] = h(x), \quad \text{or} \quad h(x) = \int k_z(x) \mu^h(dz)$$

donc :  $\int [k_z(x) - P_\tau k_z(x)] \mu^h(dz) = 0$  p.p.

On intègre par rapport à  $\gamma$ . Donc, pour  $z$  appartenant à un ensemble  $\mu^h$ -négligeable  $A_\tau$ , on a :

$$\int \gamma(dx) [k_z(x) - P_\tau k_z(x)] = 0 \quad \text{donc} \quad P_\tau k_z = k_z$$

Comme on a une famille dénombrable  $\mathfrak{C}$ .  $\mu^h$  est concentrée sur  $\mathcal{U}_{\mathfrak{C}}$ . La réciproque est évidente.

THEOREME — Soit  $\mathfrak{C}$  une famille de temps d'arrêt dans laquelle il existe une famille dominante  $\mathfrak{C}'$ .

- 1) Soit  $h$  une fonction excessive :

$h$  est  $\mathfrak{C}$ -harmonique si et seulement si  $\mu^h$  est portée par  $\mathcal{U}_{\mathfrak{C}}$ .

$h$  est un  $\mathfrak{C}$ -potentiel si et seulement si  $\mu^h$  est portée par  $\mathcal{V}_{\mathfrak{C}}$ .

- 2) Toute fonction excessive  $h$  se décompose en la somme d'une fonction  $h'$   $\mathfrak{C}$ -harmonique et d'un  $\mathfrak{C}$ -potentiel  $h''$  :

$$h' = \int_{\mathcal{U}_{\mathfrak{C}}} k_z \mu^h(dz) \quad \text{et} \quad h'' = \int_{\mathcal{V}_{\mathfrak{C}}} k_z \mu^h(dz)$$

Dans la suite, toute famille  $\mathfrak{C}$  de temps d'arrêt contiendra une suite croissante dominante de temps d'arrêt (on ne mentionnera pas à nouveau cette hypothèse).

De plus on ne considérera que des familles  $\mathfrak{C}$  de temps d'arrêt qui vérifient les propriétés :

1)  $\forall \tau' \in \mathfrak{C}$  et  $\forall s \geq 0$ , si on pose  $\tau' \circ \theta_s + s = \tau$ , on a

$$\forall t \geq 0 \quad \tau \circ \theta_t + t = \tau \quad \text{sur} \quad (\tau > t) \text{ p.s. (**)}$$

2) Soit  $\tau'_1$  et  $\tau'_2 \in \mathfrak{C}$

posons

$$\tau_1 = \tau'_1 \circ \theta_t + t$$

$$\tau_2 = \tau'_2 \circ \theta_t + t$$

si  $\tau_1 \leq \tau_2$ , on a  $\tau_2 \circ \theta_{\tau_1} + \tau_1 = \tau_2$  p.s. (\*\*\*)

## PARTIE II

1. Familles  $h$ -fondamentales de temps d'arrêt.

DEFINITION 1. — On dira que  $\mathfrak{C}$  est une famille  $h$ -fondamentale de temps d'arrêt si  $\mathfrak{C}$  vérifie la propriété suivante : il existe dans  $\mathfrak{C}$  une suite croissante dominante telle que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \tau_n = \zeta \text{ P}_x^h \text{ p.s. pour tout } x \in E_h = \{0 < h < +\infty\}$$

Remarque. — Soit  $(\tau_n)$  une suite de temps d'arrêt :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \tau_n = \zeta \text{ P}_x^h \text{ p.s. si et seulement si}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \tau_n = \zeta \text{ P}_x^h \text{ p.s. } \forall x \in E_h$$

On dira fondamentale pour 1-fondamentale. 1-fondamentale entraîne  $h$ -fondamentale.

LEMME 1. — Soit  $h$  une fonction excessive et soit  $\mathfrak{C}$  une famille  $h$ -fondamentale de temps d'arrêt. La plus grande minorante  $\mathfrak{C}$ -harmonique de  $h$  avec l'ordre fort est la régularisée excessive  $v$  de :

$$u(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P_{\tau_n} h(x)$$

De plus : on a  $v(x) = u(x)$  pour tout  $x$  tel que  $h(x) < +\infty$

Démonstration. — On utilise au cours de la démonstration le résultat : si  $\tau$  est un temps d'arrêt, alors :

$$P_\tau h(x) = E_x[h(X_\tau)] = h(x) E_x^h[\tau < \zeta] \quad ; \quad (x \text{ tel que } h(x) < +\infty)$$

Pour tout  $x$  tel que  $h(x) < +\infty$ ,

$$u(x) = h(x) E_x^h[\bigcap_n (\tau_n < \zeta)]$$

Montrons que  $u(x)$  est préexcessive :  $\forall x$  tel que  $h(x) < +\infty$  on a :

$$\lambda G_\lambda u(x) \leq u(x)$$

$$\begin{aligned} \lambda G_\lambda u(x) &= \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} E_x [h(X_t) E_{X_t}^h(\bigcap_n (\tau_n < \xi))] dt = \\ &= \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} h(x) E_x^h [1_{(t < \xi)} \lim_{n \rightarrow +\infty} 1_{(\tau_n \circ \theta_t + t < \xi)}] dt \end{aligned}$$

Or,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \tau_n = \xi$   $P_x^h$  p.s. entraîne :

$$1_{(t < \xi)} \lim_{n \rightarrow +\infty} 1_{(\tau_n \circ \theta_t + t < \xi)} = 1_{(t < \xi)} \lim_{n \rightarrow +\infty} 1_{(\tau_n < \xi)} \quad P_x^h \text{ p.s.}$$

à cause de la propriété (\*\*).

Donc :

$$\lambda G_\lambda u(x) = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} h(x) E_x^h [1_{(t < \xi)} \lim_{n \rightarrow +\infty} 1_{(\tau_n < \xi)}] dt \leq u(x)$$

$h(x) - u(x)$  est préexcessive :

$\forall x$  tel que  $h(x) < +\infty$ , on a :

$$E_x [h(X_t)] - E_x [u(X_t)] = h(x) E_x^h [1_{(t < \xi)} (1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} 1_{(\tau_n < \xi)})]$$

ceci est inférieur à

$$h(x) E_x^h [1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} 1_{(\tau_n < \xi)}] = h(x) - u(x)$$

Soit  $v$  la régularisée excessive de  $u$  [2] lemme 1.2.

$$v(x) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda G_\lambda u(x)$$

D'après ce qui précède, la fonction  $h - v$  est excessive. Montrons que  $v$  est  $\mathfrak{C}$ -harmonique. Il suffit de montrer  $\gamma$  p.p. pour  $x$  :

$$P_{\tau_k} v(x) = v(x) \quad \forall k \text{ entier (voir lemme 4, partie I)}$$

Or,  $v(x) = u(x)$  sauf sur l'ensemble polaire  $\{h = +\infty\}$

Il suffit donc de prouver :

$$P_{\tau_k} u(x) = u(x) \quad \gamma \text{ p.p. pour } x.$$

Pour tout  $x$  tel que  $h(x) < +\infty$ , on a :

$$\begin{aligned} E_x[u(X_{\tau_k})] &= E_x[h(X_{\tau_k}) E_{x_{\tau_k}}^h(\bigcap_n (\tau_n < \zeta))] \\ &= h(x) E_x^h[(\tau_k < \zeta) \theta_{\tau_k} : \bigcap_n (\tau_n < \zeta)] \\ &= h(x) E_x^h[\bigcap_n (\tau_n < \zeta)] \end{aligned}$$

(d'après la propriété (\*\*\*)

Montrons que  $v$  est la plus grande minorante  $\mathfrak{C}$ -harmonique de  $h$ .

Soit  $w$  une minorante  $\mathfrak{C}$ -harmonique de  $h$  :

$$\forall n, \quad \text{on a } w(x) = E_x[w(X_{\tau_n})] \quad \gamma \text{ p.p.}$$

Comme  $w \leq h$ , on a :

$$E_x[w(X_{\tau_n})] \leq E_x[h(X_{\tau_n})]$$

$w(x) \leq u(x)$  ;  $w(x) \leq v(x) \quad \gamma \text{ p.p.}$  entraîne  $w \leq v$  partout.

COROLLAIRE. — Soit  $\mathfrak{C}$  une famille de temps d'arrêt. On a :

$\left. \begin{array}{l} \mathfrak{C} \text{ est } h\text{-fondamentale} \\ \text{et } h \text{ est un } \mathfrak{C}\text{-potentiel} \end{array} \right\} \text{ si et seulement si } \lim_{n \rightarrow +\infty} P(h(X_{\tau_n})) = 0$

( $\tau_n$  étant une suite dominante de  $\mathfrak{C}$ )

*Démonstration.* — Supposons  $\mathfrak{C}$   $h$ -fondamentale.

En appliquant le lemme précédent,  $h$  est un  $\mathfrak{C}$ -potentiel si et seulement si

$$\gamma \text{ p.p. } \lim_{n \rightarrow +\infty} P_{\tau_n} h(x) = 0$$

Cela est équivalent à la condition :

$$P^h(\tau_n < \zeta) = \int \gamma(dx) h(x) E_x^h(\tau_n < \zeta) = P[h(X_{\tau_n})]$$

tend vers 0 quand  $n$  tend vers l'infini.

Réciproquement, si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P^h(\tau_n < \zeta) = 0$



$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \tau_n = \zeta \text{ p.s. et } \mathfrak{C} \text{ est } h\text{-fondamentale.}$$

On voit que cela ne dépend pas de la suite dominante de  $\mathfrak{C}$ .

## 2. Calcul de la plus grande minorante $\mathfrak{C}$ -harmonique dans le cas général.

A chaque suite croissante de temps d'arrêt  $\alpha = (\tau_n)$  on associe l'ensemble :

$$\Omega(\alpha) = \left\{ \lim_{n \rightarrow +\infty} \tau_n = \zeta ; \forall n \tau_n < \zeta \right\}$$

$\Omega(\alpha)$  s'écrit

$$\Omega(\alpha) = \Omega_1(\alpha) \cap \Omega_2(\alpha)$$

$$\text{avec } \Omega_1(\alpha) = \left\{ \lim_{n \rightarrow +\infty} \tau_n = \zeta \right\} \quad \text{et} \quad \Omega_2(\alpha) = \{ \forall n \tau_n < \zeta \}$$

LEMME 1. — Soit  $\mathfrak{C}$  une famille de temps d'arrêt dans laquelle il existe une suite dominante croissante  $\alpha = (\tau_n)$ . Alors les ensembles

$$\Omega_1(\alpha) = \left\{ \lim_{n \rightarrow +\infty} \tau_n = \zeta \right\} \quad \text{et} \quad \Omega_2(\alpha) = \{ \forall n \tau_n < \zeta \}$$

ne dépendent que de  $\mathfrak{C}$ . On les notera  $\Omega_1(\mathfrak{C})$  et  $\Omega_2(\mathfrak{C})$ .

Dans le cas où  $\mathfrak{C}$  est une famille fondamentale de temps d'arrêt, on a vu (§ 1, lemme 1) que la plus grande minorante  $\mathfrak{C}$ -harmonique  $w$  de  $h$  est la régularisée excessive de la fonction :

$$u(x) = h(x) E_x^h[\Omega_1(\mathfrak{C}) \cap \Omega_2(\mathfrak{C})]$$

Dans ce cas particulier, la plus grande minorante  $\mathfrak{C}$ -harmonique  $w$  de  $h$  avec l'ordre fort, l'est aussi avec l'ordre usuel, c'est-à-dire si  $w'$  est  $\mathfrak{C}$ -harmonique et si  $w \leq h$ , alors  $w' \leq w$ .

Lorsque  $\mathfrak{C}$  n'est pas une famille fondamentale de temps d'arrêt pour que la fonction :

$$u(x) = h(x) E_x^h(\Omega(\mathfrak{C})) \quad \text{où} \quad \Omega(\mathfrak{C}) = \Omega_1(\mathfrak{C}) \cap \Omega_2(\mathfrak{C})$$

soit préexcessive, il faudrait faire une hypothèse du genre

$$\forall t \geq 0 \quad \theta_t \Omega(\mathfrak{C}) \cap (t < \zeta) \subset \Omega(\mathfrak{C})$$

(voir § 1, démonstration du lemme 1).

Pour une famille  $\mathfrak{C}$  de temps d'arrêt, on définit l'ensemble des translatés de  $\Omega(\mathfrak{C})$

$$T\Omega(\mathfrak{C}) = \bigcup_{t \geq 0} [\theta_t \Omega(\mathfrak{C}) \cap (t < \zeta)]$$

THEOREME 1. — Soit  $\mathfrak{C}$  une famille de temps d'arrêt dans laquelle il existe une suite dominante  $\alpha = (\tau_n)$ . Soit  $h$  une fonction excessive. Alors, la régularisée  $K_{\mathfrak{C}} h$  de la fonction :

$$u(x) = h(x) E_x^h [T\Omega(\mathfrak{C})]$$

est une minorante  $\mathfrak{C}$ -harmonique de  $h$  avec l'ordre fort. De plus, on a  $u(x) = K_{\mathfrak{C}} h(x)$  pour tout  $x$  tel que  $h(x) < +\infty$ .

Remarque. — On démontrera que c'est la plus grande minorante  $\mathfrak{C}$ -harmonique de  $h$  avec l'ordre fort, c'est-à-dire :

si  $w$  est  $\mathfrak{C}$ -harmonique et si  $h - w$  est excessive, alors

$$w(x) \leq u(x) \text{ } \gamma \text{ p.p.,}$$

dans le cas où la famille  $\mathfrak{C}$  satisfait à une hypothèse supplémentaire (hypothèse H).

On démontre le théorème 1 en deux lemmes.

LEMME 2. — La fonction  $u(x) = h(x) E_x^h [T\Omega(\mathfrak{C})]$  est préexcessive.

Démonstration. — Pour tout  $x$  tel que  $h(x) < +\infty$ , on a

$$E_x[u(X_s)] = h(x) E_x^h [(s < \zeta) \cap \theta_s T\Omega(\mathfrak{C})]$$

$$\text{Or, } (s < \zeta) \cap \theta_s T\Omega(\mathfrak{C}) = (s < \zeta) \bigcup_{t \geq 0} \theta_s [\theta_t \Omega(\mathfrak{C}) \cap (t < \zeta)]$$

$$\theta_s [\theta_t \Omega(\mathfrak{C}) \cap (t < \zeta)] \cap (s < \zeta) = \theta_{t+s} \Omega(\mathfrak{C}) \cap (t + s < \zeta)$$

On a donc :

$$\theta_s T\Omega(\mathfrak{C}) \cdot (s < \zeta) = \bigcup_{t \geq s} [\theta_t \Omega(\mathfrak{C}) \cdot (t < \zeta)]$$

et

$$E_x[u(X_s)] \leq u(x)$$

LEMME 3. — *La régularisée excessive de  $u(x)$  est une minorante  $\mathfrak{C}$ -harmonique de  $h$  avec l'ordre fort.*

*Démonstration.* — Soit  $v$  la régularisée excessive de  $u$ . Pour que  $h - v$  soit excessive, il suffit que  $h - u$  soit préexcessive. Montrons que pour tout  $x$  tel que  $h(x) < +\infty$ , on a :

$$E_x[u(X_s)] \geq h(x) E_x^h[(s < \zeta) ; T\Omega(\mathfrak{C})]$$

Soit  $(\tau_n)$  une suite dominante de  $\mathfrak{C}$ . On pose  $\tau = \lim_{n \rightarrow +\infty} \tau_n$

$$\begin{aligned} \theta_s[\theta_t \Omega(\mathfrak{C}) \cdot (t < \zeta)] (s < \zeta) &= \\ &= \theta_s[\tau \circ \theta_t + t = \zeta ; \forall n \tau_n \circ \theta_t + t < \zeta] (s < \zeta) \\ &= (s < \zeta) (\tau \circ \theta_t + t = \zeta) \theta_s[\forall n, \tau_n \circ \theta_t + t < \zeta] \end{aligned}$$

Comme :

$$\tau \circ \theta_t + t = \lim_{n \rightarrow +\infty} \tau_n \circ \theta_t + t$$

sur l'ensemble  $(s < \zeta) (\tau \circ \theta_t + t = \zeta)$ , pour  $n$  assez grand, on a :

$$\tau_n \circ \theta_t + t > s$$

Donc :

$$(\tau_n \circ \theta_t + t) (\omega_s) + s = \tau_n \circ \theta_t + t$$

sur l'ensemble  $(s < \zeta) (\tau \circ \theta_t + t = \zeta)$ , on a l'égalité

$$\bigcap_n \theta_s(\tau_n \circ \theta_t + t < \zeta) = \bigcap_n (\tau_n \circ \theta_t + t < \zeta)$$

On montre alors facilement comme dans le lemme 1, § 1 que  $h - u$  est préexcessive.

*Montrons que  $v$  est  $\mathfrak{C}$ -harmonique.*

Comme  $(\tau_n)$  est une suite dominante de  $\mathfrak{C}$ , il suffit de montrer (lemme 6, partie I) que  $\gamma$ -p.p. pour  $x$  et tout entier  $n$ . On a :

$\forall t \geq 0 E_x[u(X_{\tau_n})] \geq u(x)$  p.p. puisque  $v(x) = u(x)$ , sauf sur l'ensemble polaire  $\{h = +\infty\}$ .

Or,

$$\begin{aligned} E_x[u(X_{\tau_n})] &= E_x[h(X_{\tau_n}) E_{x_{\tau_n}}^h[T\Omega(\mathfrak{C})]] = \\ &= h(x) E_x^h[(\tau_n < \zeta) \theta_{\tau_n}(\bigcup_{t \geq 0} (t < \zeta) \theta_t \Omega(\mathfrak{C}))] \end{aligned}$$

L'ensemble :

$$(\tau_n < \zeta) \theta_{\tau_n} \left[ \bigcup_{t \geq 0} (t < \zeta) \theta_t \Omega(\mathfrak{C}) \right]$$

contient l'ensemble :

$$(\tau_n < \zeta) \bigcup_{t \geq 0} [\tau \circ \theta_t + t = \zeta \quad \text{et} \quad \forall k \theta_{\tau_n} (\tau_k \circ \theta_t + t < \zeta)]$$

Or, sur  $(\tau_n < \zeta) (\tau \circ \theta_t + t = \zeta)$  on a, pour  $k$  assez grand :

$$\theta_{\tau_n} (\tau_k \circ \theta_t + t) + \tau_n = \tau_k \circ \theta_t + t \quad (\text{hypothèse ***})$$

Donc :

$$\begin{aligned} & (\tau_n < \zeta) \bigcup_{t \geq 0} [\tau \circ \theta_t + t = \zeta \quad \text{et} \quad \forall k \theta_{\tau_n} (\tau_k \circ \theta_t + t < \zeta)] \\ & = (\tau_n < \zeta) \bigcup_{t \geq 0} [\tau \circ \theta + t = \zeta \quad \text{et} \quad \forall k \tau_k \circ \theta_t + t < \zeta] = T\Omega(\mathfrak{C}) \end{aligned}$$

(voir démonstration lemme 1, § 1).

Le théorème 1 est donc démontré.

DEFINITION 1. — Soit  $\tau$  un temps d'arrêt, on définit les ensembles :

$$R_\tau = \bigcap_{0 \leq t < \zeta} (\tau \circ \theta_t + t < \zeta) = \bigcap_{0 \leq t < \zeta} \theta_t (\tau < \zeta) \quad (3)$$

$$S_\tau = \bigcup_{t \geq 0} (t < \zeta) (\tau \circ \theta_t + t = \zeta) \quad (4)$$

$R_\tau$  et  $S_\tau$  définissent une partition de l'espace de probabilité ( $\zeta > 0$ ).

THEOREME 2. — Soit  $\tau$  un temps d'arrêt ; pour toute fonction excessive  $h$   $\gamma$ -intégrable, il existe une fonction excessive unique  $F_\tau h$  telle que : pour tout  $x$  vérifiant  $h(x) < +\infty$ , on a :

$$F_\tau h(x) = h(x) E_x^h[R_\tau]$$

Démonstration.

1) Posons  $v(x) = h(x) E_x^h[R_\tau]$ . La fonction  $v$  est préexcessive, car pour tout  $x$  tel que  $h(x) < +\infty$ , on a, pour  $s \geq 0$  :

$$\begin{aligned} E_x[v(X_s)] &= E_x \left[ h(X_s) E_{x_s}^h \left( \bigcap_{0 \leq t < \zeta} (\tau \circ \theta_t + t < \zeta) \right) \right] = \\ &= h(x) E_x^h \left[ (s < \zeta) \theta_s \bigcap_{0 \leq t < \zeta} (\tau \circ \theta_t + t < \zeta) \right] \\ &= h(x) E_x^h \left[ (s < \zeta) \bigcap_{0 \leq t < \zeta} (\tau \circ \theta_t + t < \zeta) \right] \end{aligned}$$

car :

$$(\tau \circ \theta_s + s < \zeta) = \bigcap_{t \leq s} (\tau \circ \theta_t + t < \zeta) \quad \text{sur } (s < \zeta)$$

De plus, pour tout  $x$  tel que  $h(x) < +\infty$ , on a

$$\tilde{v}(x) = \lim_{s \rightarrow 0} E_x[v(X_s)] = h(x) E_x^h[R_\tau] = v(x)$$

On voit immédiatement que  $h - v$  est préexcessive :

$$\begin{aligned} E_x[h(X_s)] - E_x[v(X_s)] &= \\ &= h(x) E_x^h \left[ 1_{(s < \zeta)} \left( 1 - \lim_{t \rightarrow \zeta} 1_{(\tau \circ \theta_t + t < \zeta)} \right) \right] \leq h(x) - v(x) \end{aligned}$$

**THEOREME 3.** — Soit  $h$  une fonction excessive  $\gamma$ -intégrable et soit  $\tau$  un temps d'arrêt.

$F_\tau h$  est une minorante de  $h$  avec l'ordre fort sur les fonctions excessives :

$$h - F_\tau h = G_\tau h \quad \text{où} \quad G_\tau h(x) = h(x) E_x^h[S]$$

pour tout  $x$  tel que  $h(x) < +\infty$ .

$F_\tau h$  est une minorante avec l'ordre fort de la fonction excessive  $P_\tau h$ .

*Démonstration.* — La première affirmation est évidente puisque  $R_\tau$  et  $S_\tau$  définissent une partition de  $\Omega_0 = (\zeta > 0)$

Montrons que  $F_\tau h$  est une minorante avec l'ordre fort de  $P_\tau h$ .

Pour tout  $x$  tel que  $h(x) < +\infty$ , on a :

$$\begin{aligned} P_\tau h(x) - F_\tau h(x) &= h(x) E_x^h \left[ (\tau < \zeta) - \bigcap_{0 \leq t < \zeta} (\tau \circ \theta_t + t < \zeta) \right] = \\ &= h(x) E_x^h \left[ (\tau < \zeta) \cup_{0 < t} (t < \zeta) (\tau \circ \theta_t + t = \zeta) \right] \end{aligned}$$

$$E_x[P_\tau h(X_s) - F_\tau h(X_s)] = \\ = h(x) E_x^h \left[ (s < \zeta) (\tau \circ \theta_s + s < \zeta) \cup_{s < t} (t < \zeta) (\tau \circ \theta_t + t = \zeta) \right]$$

Comme :

$$(s < \zeta) (\tau \circ \theta_s + s < \zeta) \cup_{s < t} (t < \zeta) (\tau \circ \theta_t + t = \zeta)$$

est contenu dans

$$(\tau < \zeta) \cup_{0 < t} (t < \zeta) (\tau \circ \theta_t + t = \zeta)$$

On a :

$$E_x[P_\tau h(X_s) - F_\tau h(X_s)] \leq P_\tau h(x) - F_\tau h(x)$$

Pour une famille  $\mathfrak{C}$  de temps d'arrêt dans laquelle il existe une suite dominante  $\alpha = (\tau_n)$ , on pose :

$$R(\mathfrak{C}) = R_\tau = \bigcap_{0 \leq t < \zeta} (\tau \circ \theta_t + t < \zeta)$$

où  $\tau = \lim_{n \rightarrow +\infty} \tau_n$

THEOREME 4. — Soit  $\mathfrak{C}$  une famille de temps d'arrêt dans laquelle il existe une suite dominante  $\alpha = (\tau_n)$  et soit  $\tau = \lim_{n \rightarrow +\infty} \tau_n$ , pour toute fonction excessive  $h$ , la fonction excessive  $F_\tau h$  est une minorante  $\mathfrak{C}$ -harmonique de  $h$  avec l'ordre fort.

Démonstration. — Montrons que  $\tilde{v} = F_\tau h$  est harmonique. Il suffit de voir que  $\gamma$ -p.p. pour  $x$

$$E_x[\tilde{v}(X_{\tau_n})] = \tilde{v}(x) \quad \text{pour tout entier } n.$$

Or,  $\tilde{v}(x) = v(x)$  sauf sur l'ensemble  $\{h = +\infty\}$  qui est polaire, donc :

$$E_x[\tilde{v}(X_{\tau_n})] = E_x[v(X_{\tau_n})]$$

Si  $h(x) < +\infty$ , on a :

$$E_x[v(X_{\tau_n})] = h(x) E_x^h \left[ (\tau_n < \zeta) \bigcap_{0 \leq t < \zeta} (\tau \circ \theta_t + t < \zeta) \right]$$

Or :

$$(\tau_n < \zeta) \supset (\tau < \zeta)$$

Donc :

$$h(x) E_x^h \left[ (\tau_n < \zeta) \cap_{0 \leq t < \zeta} (\tau \circ \theta + t < \zeta) \right] = v(x)$$

On a ainsi obtenu deux fonctions excessives  $F_\tau h$  et  $K_{\mathfrak{G}} h$  qui sont des minorante  $\mathfrak{G}$ -harmoniques de  $h$  avec l'ordre fort à l'aide des ensembles  $T\Omega(\mathfrak{G})$  et  $R(\mathfrak{G})$ .

**Etude des ensembles  $T\Omega(\mathfrak{G})$  et  $R(\mathfrak{G})$ .**

Soient  $\tau_1$  et  $\tau_2$  deux temps d'arrêt tels que  $\tau_2 \leq \tau_1$ . On note  $\Omega(\tau_1, \tau_2)$  l'ensemble  $\{\tau_1 = \zeta ; \tau_2 < \zeta\}$ . On appelle  $\mathfrak{S}$  la classe des ensembles de la forme  $\Omega(\tau_1, \tau_2)$  où  $\tau_1$  et  $\tau_2$  parcourent l'ensemble des temps d'arrêt ; et soit  $\tilde{\mathfrak{S}}$  la  $\sigma$ -algèbre engendrée par  $\mathfrak{S}$ .

*Remarque.* — On peut toujours supposer  $\tau_1 \geq \tau_2$  dans  $\Omega(\tau_1, \tau_2)$ .

LEMME 4. —  $\mathfrak{S}$  est une semi-algèbre de Boole dans  $\Omega_0 = (\zeta > 0)$  (6 p. 25).

*Démonstration.* —  $\phi \in \mathfrak{S}$  puisque  $\Omega(\tau, \tau) = \phi$  ;  $\Omega_0 \in \mathfrak{S}$  puisque

$$\Omega(\zeta, 0) = \Omega_0$$

$\mathfrak{S}$  est stable par intersection finie car

$$\Omega(\tau_1, \tau_2) \cap \Omega(\tau'_1, \tau'_2) = \{\inf(\tau_1, \tau'_1) = \zeta ; \sup(\tau_2, \tau'_2) < \zeta\}$$

Le complémentaire de  $\Omega(\tau_1, \tau_2) = \{\tau_1 < \zeta\} \cup \{\tau_2 = \zeta\}$  est réunion disjointe et finie d'éléments de  $\mathfrak{S}$ .

LEMME 5. — Soient  $w$  et  $h$  deux fonctions excessives. Si  $w$  est inférieure ou égale à  $h$  avec l'ordre fort, alors  $\forall x$  tel que  $h(x) < +\infty$ , on a :

$$w(x) E_x^w[\Omega(\tau_1, \tau_2)] \leq h(x) E_x^h[\Omega(\tau_1, \tau_2)]$$

De plus, pour tout  $A \in \tilde{\mathfrak{S}}$  on a :

$$w(x) E_x^w[A] \leq h(x) E_x^h[A]$$

*Démonstration.*

$$w(x) E_x^w[\Omega(\tau_1, \tau_2)] = E_x[w(X_{\tau_2})] - E_x[w(X_{\tau_1})]$$

$$h(x) E_x^h[\Omega(\tau_1, \tau_2)] = E_x[h(X_{\tau_2})] - E_x[h(X_{\tau_1})]$$

Comme  $h - w$  est excessive et que  $\tau_2 \leq \tau_1$ , on a le premier résultat en appliquant le théorème d'arrêt de Doob.

La deuxième relation :

$$w(x) E_x^w(A) \leq h(x) E_x^h(A)$$

si  $A \in \tilde{\mathfrak{F}}$  résulte immédiatement du lemme 4 et de (6)-prop. 1.6.1 p. 25) puisque les fonctions d'ensembles  $h(x) E_x^h(\cdot)$  et  $w(x) E_x^w(\cdot)$  sont  $\sigma$ -additives sur  $\tilde{\mathfrak{F}}$ .

LEMME 6. — Soient  $h_1$  et  $h_2$  deux fonctions excessives. On pose :

$$h(x) = h_1(x) + h_2(x)$$

Pour tout ensemble  $A$  appartenant à la tribu  $\tilde{\mathfrak{F}}$ , on a  $\forall x$  tel que  $h(x) < +\infty$

$$h(x) E_x^h(A) = h_1(x) E_x^{h_1}[A] + h_2(x) E_x^{h_2}[A]$$

*Démonstration.* — En effet, pour tout  $x$  tel que  $h(x) < +\infty$ , on a

$$h(x) E_x^h[\Omega(\tau_1, \tau_2)] = E_x[h(X_{\tau_2})] - E_x[h(X_{\tau_1})]$$

en prenant  $\tau_1 \geq \tau_2$ .

Or :

$$E_x[h(X_{\tau_i})] = E_x[h_1(X_{\tau_i})] + E_x[h_2(X_{\tau_i})] ; i = 1, 2$$

donc, pour tout  $x$  tel que  $h(x) < +\infty$

$$h(x) E_x^h[\Omega(\tau_1, \tau_2)] = h_1(x) E_x^{h_1}[\Omega(\tau_1, \tau_2)] + h_2(x) E_x^{h_2}[\Omega(\tau_1, \tau_2)]$$

pour tout élément  $\Omega(\tau_1, \tau_2)$  appartenant à  $\mathfrak{F}$ .

Les deux fonctions d'ensembles :

$$h(x) E_x^h[\cdot] \quad \text{et} \quad h_1(x) E_x^{h_1}[\cdot] + h_2(x) E_x^{h_2}[\cdot]$$

coïncident sur  $\mathfrak{F}$ , donc sur  $\tilde{\mathfrak{F}}$ .



LEMME 7. — Soit  $h$  une fonction excessive et  $\lambda$  un réel positif, on a : pour tout ensemble  $A$  appartenant à la tribu  $\tilde{\mathfrak{S}}$  et pour tout  $x$  tel que  $h(x) < +\infty$ .

$$h(x) E_x^h(A) = h(x) E_x^{\lambda h}(A)$$

Démonstration. — Soit  $\tau$  un temps d'arrêt. Pour tout réel  $\lambda$  positif, on a

$$\lambda h(x) E_x^h[\tau < \xi] = \lambda E_x[h(X_\tau)] = E_x[\lambda h(X_\tau)] = \lambda h(x) E_x^{\lambda h}[\tau < \xi]$$

LEMME 8. — Soient  $(h_n)$  une suite croissante de fonctions excessives, et soit  $h = \lim_{n \rightarrow +\infty} h_n$ . Alors, pour tout ensemble  $A$ , appartenant à la tribu  $\tilde{\mathfrak{S}}$ , on a, pour tout  $x$  tel que  $h(x) < +\infty$

$$h(x) E_x^h[A] = \lim_{n \rightarrow +\infty} h_n(x) E_x^{h_n}[A]$$

Démonstration. — Pour tout  $x$  tel que  $h(x) < +\infty$ , et tout élément  $\Omega(\tau_1, \tau_2)$  de  $\mathfrak{S}$ , on a :

$$h(x) E_x^h[\Omega(\tau_1, \tau_2)] = \lim_{n \rightarrow +\infty} h_n(x) E_x^{h_n}[\Omega(\tau_1, \tau_2)]$$

en utilisant toujours :

$$h(x) E_x^h[\Omega(\tau_1, \tau_2)] = E_x[h(X_{\tau_2})] - E_x[h(X_{\tau_1})]$$

On prolonge à  $\tilde{\mathfrak{S}}$ .

Soit  $A \in \tilde{\mathfrak{S}}$  :

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} h_n(x) E_x^{h_n}(A) \leq h(x) E_x^h(A) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} h_n(x) E_x^{h_n}(A)$$

LEMME 9. — Soit  $B$  l'ensemble aléatoire :

$$B = \{(t, \omega) \mid \omega \in \theta_t \Omega(\mathfrak{C})\}$$

Alors, la projection de  $B$  sur  $\Omega$  est égale à  $T\Omega(\mathfrak{C})$ . Si on munit  $\mathbf{R}_+$  de la tribu borélienne  $\mathfrak{B}$ , l'ensemble aléatoire  $B$  est une partie mesurable de l'espace produit  $(\mathbf{R}_+ \times \Omega, \mathfrak{B} \oplus \tilde{\mathfrak{S}})$  [7].

*Démonstration.* — On définit le processus  $B_t(\omega) = 1_B(t, \omega)$ .

Soit  $(\tau_k)$  une suite dominante de  $\mathfrak{C}$  et soit  $\tau = \lim_{k \rightarrow +\infty} \tau_k$ .

Pour tout  $k$ , on définit le processus  $B^k$  par :

$$B_t^k(\omega) = 1 \text{ si } \omega \in \theta_t[\tau = \zeta ; \tau_k < \zeta]$$

$$B_t^k(\omega) = 0 \text{ sinon}$$

1) Pour tout  $k$ , le processus  $B_t^k$  est continu à droite.

Soit  $(t_n)$  une suite décroissante de réels qui tend vers  $t$ . Si

$$\forall n \quad \omega \in \theta_{t_n}[\tau = \zeta, \tau < \zeta] \text{ alors } \omega \in \theta_t[\tau = \zeta ; \tau_k < \zeta]$$

En appliquant la propriété (\*). On a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \tau \circ \theta_{t_n-t} + t_n - t = \tau, \text{ d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} \tau \circ \theta_{t_n} + t_n = \tau \circ \theta_t + t$$

Si  $\forall n \quad \omega \notin \theta_{t_n}[\tau = \zeta ; \tau_k < \zeta]$  alors  $\omega \notin \theta_t[\tau = \zeta ; \tau_k < \zeta]$

2) On approche  $(B_t^k)$  par des processus  $B^{k,n} = (B_t^{k,n})$  qui sont  $\mathcal{B} \otimes \tilde{\mathfrak{F}}$ -mesurables.

On pose, pour tout entier  $n$

$$B_t^{k,n}(\omega) = B_0^k(\omega) I_{\{t=0\}} + \sum_h \frac{B_{h+1}^n}{n} \cdot I_{\left\{ \frac{h}{n} \leq t < \frac{h+1}{n} \right\}}$$

On a  $B_t^k = \lim_{n \rightarrow +\infty} B_t^{k,n}$  puisque  $B_t^k$  est continu à droite.

$B_t^{k,n}$  est  $\tilde{\mathfrak{F}}$  mesurable puisque pour  $t$  fixé, l'ensemble  $\theta_t[\tau = \zeta, \tau_k < \zeta]$  est  $\tilde{\mathfrak{F}}$ -mesurable. Donc  $B$  est  $\mathcal{B} \otimes \tilde{\mathfrak{F}}$ -mesurable.

3) Pour tout  $t$ ,  $B_t = \inf_k B_t^k = \lim_{k \rightarrow +\infty} B_t^k$  est  $\mathcal{B} \otimes \tilde{\mathfrak{F}}$ -mesurable.

*COROLLAIRE.* — Soit  $P$  une mesure de probabilité sur  $\tilde{\mathfrak{F}}$ , alors  $T\Omega(\mathfrak{C})$  appartient à la tribu complétée de  $\tilde{\mathfrak{F}}$  par  $P$ . En particulier, soit  $h$  une fonction excessive, et soit la probabilité  $P_x^h$ , alors  $T\Omega(\mathfrak{C})$  appartient à la tribu  $\tilde{\mathfrak{F}}_h$  complétée de  $\tilde{\mathfrak{F}}$  pour  $P_x^h$ .

*Démonstration.* — Cela résulte immédiatement au théorème 20 chapitre I [7].

Pour une fonction excessive  $h$ , on a défini la fonction excessive  $K_{\mathfrak{G}} h$  par :

$$\forall x \text{ tel que } h(x) < +\infty, K_{\mathfrak{G}} h(x) = h(x) E_x^h [T\Omega(\mathfrak{G})]$$

THEOREME 5. — 1) Soient  $h_1$  et  $h_2$  deux fonctions excessives et soit  $h = h_1 + h_2$ , alors :

$$K_{\mathfrak{G}} h = K_{\mathfrak{G}} h_1 + K_{\mathfrak{G}} h_2$$

En particulier, si  $h$  et  $w$  sont deux fonctions excessives telles que  $h - w$  est excessive, alors :

$$K_{\mathfrak{G}} w \leq K_{\mathfrak{G}} h$$

2) Soit  $h$  une fonction excessive et soit  $\lambda$  un réel positif, on a :

$$K_{\mathfrak{G}} (\lambda h) = \lambda K_{\mathfrak{G}} h$$

3) Soit  $h_n$  une suite croissante de fonctions excessives et soit  $h = \lim_{n \rightarrow +\infty} h_n$ , on a :

$$K_{\mathfrak{G}} h = \lim_{n \rightarrow +\infty} K_{\mathfrak{G}} h_n$$

[la suite  $K_{\mathfrak{G}} h_n$  n'est pas croissante]

*Démonstration.*

1) Soit  $P$  une probabilité qui domine  $P_x^h$ ,  $P_x^{h_1}$  et  $P_x^{h_2}$ . D'après le corollaire du lemme 9 :

$$T\Omega(\mathfrak{G}) = L \cup N$$

où  $L$  appartient à la tribu  $\tilde{\mathfrak{S}}$  et  $N$  est  $P_x^h$  et  $P_x^w$ -négligeable. D'après le lemme 6 :

$$h(x) E_x^h [L] = h_1(x) E_x^{h_1} [L] + h_2(x) E_x^{h_2} [L]$$

2) Résulte immédiatement du lemme 7.

3) On prend une probabilité  $P$  qui domine  $P_x^h$  et  $P_x^{h_n}$ ,  $\forall n$  et on passe à la limite en utilisant le lemme 8 et le corollaire du lemme 9.

LEMME 9. — L'ensemble  $\mathcal{R}(\mathfrak{G})$  appartient à  $\tilde{\mathfrak{S}}$ .

*Démonstration*

$$\bigcap_{\xi > t \geq 0} (\tau \circ \theta_t + t < \xi) = \bigcap_{\substack{r \in \mathbb{Q}^+ \\ r < \xi}} (\tau \circ \theta_r + r < \xi)$$

(son complémentaire appartient à  $\tilde{\mathfrak{S}}$ ).

THEOREME 6. — Soit  $\tau$  un temps d'arrêt.

1) Soient  $h_1$  et  $h_2$  deux fonctions excessives et soit  $h = h_1 + h_2$ , alors :

$$F_\tau h = F_\tau h_1 + F_\tau h_2$$

En particulier, si  $h$  et  $w$  sont deux fonctions excessives telles que :  $w \ll h$ , alors :

$$F_\tau w \ll F_\tau h$$

2) Soit  $h$  une fonction excessive et  $\lambda$  un réel positif :

$$F_\tau (\lambda h) = \lambda F_\tau h$$

3) Soit  $h_n$  une suite croissante de fonctions excessives et soit  $h = \lim_{n \rightarrow +\infty} h_n$ , alors :

$$F_\tau h = \lim_{n \rightarrow +\infty} F_\tau h_n$$

(La suite  $F_\tau h_n$  n'est pas croissante)

*Démonstration.* — Il suffit de mettre  $R_\tau$  à la place de  $T\Omega(\mathfrak{S})$  et de prolonger comme dans le théorème 5.

*Remarque.* —  $h_1 \leq h_2$  n'entraîne pas  $F_\tau h_1 \leq F_\tau h_2$ .

Dans le cas de la translation uniforme sur  $\mathbf{R}$ , vers la droite, soit  $h_1$  la fonction excessive de mesure spectrale  $\epsilon_{\{0\}}$  [mesure de Dirac au point  $\{0\}$ ] et  $h_2$  la fonction excessive de mesure spectrale  $\epsilon_{\{2\}}$ . Soit

$$A = [-1, +1] \quad \text{et soit} \quad \tau = \inf \{t > 0 \mid X_t \in A\}$$

$$F_\tau h_1 = h_1 \quad \text{mais} \quad F_\tau h_2 = 0$$

Soit  $S$  le cône des fonctions excessives et  $\tau$  un temps d'arrêt. Pour tout élément de  $S - S$ , de la forme  $u = u_1 - u_2$  où  $u_1 \in S$  et

$u_2 \in S$ , on pose :  $F_\tau u = F_\tau u_1 - F_\tau u_2$ .  $F_\tau u$  est déterminé de manière unique [théorème 6, (1)]  $F_\tau$  définit une forme linéaire sur l'espace vectoriel  $S - S$ , non positive en général.

**Calcul de la plus grande minorante  $\mathfrak{G}$ -harmonique d'une fonction excessive  $h$ .**

THEOREME 7. — Soit  $\mathfrak{G}$  une famille de temps d'arrêt dans laquelle il existe une suite dominante  $\alpha = (\tau_n)$  et soit  $\tau = \lim_{n \rightarrow +\infty} \tau_n$ .

Pour toute fonction excessive  $h$ , la plus grande minorante  $\mathfrak{G}$  harmonique de  $h$  est la régularisée excessive  $\tilde{w} = F_\tau h + K_{\mathfrak{G}} h$  de la fonction :

$$w(x) = h(x) E_x^h [T\Omega(\mathfrak{G}) \cup R_\tau]$$

et l'on a  $\tilde{w}(x) = w(x)$  pour tout  $x$  tel que  $h(x) < +\infty$ .

Dans la démonstration, on va utiliser le lemme suivant.

LEMME 11. — Si  $w$  est  $\mathfrak{G}$ -harmonique, pour tout  $x$  tel que  $w(x) < +\infty$ , on a :

$$w(x) E_x^w [T\Omega(\mathfrak{G})] = w(x) E_x^w \left[ \bigcup_{t \geq 0} (t < \zeta) \theta_t \Omega_1(\mathfrak{G}) \right]$$

Démonstration. —  $w$  est  $\mathfrak{G}$ -harmonique entraîne, pour tout  $x$  tel que  $0 < w(x) < +\infty$

$$E_x[w(X_t)] = w(x) E_x^w [\tau_n \circ \theta_t + t < \zeta] \quad \forall n$$

donc

$$w(x) E_n^w [1_{(t < \zeta)} - 1_{(\tau_n \circ \theta_t + t < \zeta)}] = 0 \quad \forall n$$

c'est-à-dire :

$$P_x^w \text{ p.s. } (t < \zeta) = (\tau_n \circ \theta_t + t < \zeta)$$

Or :

$$T\Omega(\mathfrak{G}) = \bigcup_{t \geq 0} [\tau \circ \theta_t + t = \zeta ; \forall n (\tau_n \circ \theta_t + t < \zeta) ; (t < \zeta)]$$

donc :

$$P_x^w [T\Omega(\mathfrak{G})] = P_x^w [S_\tau]$$

*Démonstration du théorème 7.* — Les deux ensembles  $T\Omega(\mathfrak{G})$  et  $R(\mathfrak{G})$  sont disjoints, donc la régularisée excessive  $\tilde{w}$  de :

$$w(x) = h(x) E_x^h [T\Omega(\mathfrak{G})] + h(x) E_x^h [R_\tau]$$

est une minorante  $\mathfrak{G}$ -harmonique de  $h$ .

C'est une minorante avec l'ordre fort puisque, pour tout  $x$  tel que  $h(x) < +\infty$ ,

$$E_x [w(X_s)] \geq h(x) E_x^h [(s < \zeta) R_\tau] + h(x) E_x^h [(s < \zeta) T\Omega(\mathfrak{G})]$$

(voir démonstration du lemme 3 et démonstration du théorème 2).

Donc :

$$E_x [h(X_s) - w(X_s)] \leq h(x) E_x^h [(s < \zeta) - (s < \zeta) \cap (R \cup T\Omega(\mathfrak{G}))]$$

*Montrons que  $\tilde{w}$  est la plus grande minorante  $\mathfrak{G}$ -harmonique de  $h$  avec l'ordre fort.*

Soit  $u$  une minorante  $\mathfrak{G}$ -harmonique de  $h$  avec l'ordre fort. Alors pour tout  $x$  tel que  $h(x) < +\infty$ , on a :

$$u(x) E_x^u [T\Omega(\mathfrak{G})] \leq h(x) E_x^h [T\Omega(\mathfrak{G})] \quad (\text{théorème 5}) \quad (6)$$

et

$$u(x) E_x^u [R(\mathfrak{G})] \leq h(x) E_x^h [R(\mathfrak{G})] \quad (\text{théorème 5}) \quad (7)$$

D'après le lemme 10 :

$$u(x) E_x^u [T\Omega(\mathfrak{G})] = u(x) E_x^u [S_\tau] \quad (8)$$

En ajoutant (6) et (7) et en utilisant (8) on obtient :

$$u(x) \leq h(x) E_x^h [T\Omega(\mathfrak{G}) \cup R(\mathfrak{G})]$$

puisque :

$$\Omega_0 = R(\mathfrak{G}) \cup S_\tau$$

et :

$$u(x) E_x^u [R(\mathfrak{G}) \cup S_\tau] = u(x)$$

### 3. Compléments — Problèmes sur les mesures spectrales.

On peut calculer la mesure spectrale de la réduite forte  $F_\tau h$  d'une fonction excessive  $h$  si  $\tau$  est un temps d'arrêt tel que :

$$\tau \circ \theta_\tau + \tau = \tau, \text{ p.s.}$$

LEMME 1. — Soit  $w$  une fonction excessive et  $\tau$  un temps d'arrêt tel que

$$\tau \circ \theta_\tau + \tau = \tau \text{ p.s.}$$

Soit  $h$  une fonction excessive inférieure à  $P_\tau w$  avec l'ordre fort, alors  $F_\tau h = h$ .

Démonstration. — Il suffit de montrer que  $G_\tau h = 0$ .

Or :

$$S_\tau = \bigcup_{t \geq 0} (t < \zeta) (\tau \circ \theta_t + t = \zeta) = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}^+} (r < \zeta) (\tau \circ \theta_r + r = \zeta)$$

Comme on a une réunion dénombrable, il suffit de montrer que  $\forall t \geq 0$ , on a :  $\forall x$  tel que  $h(x) < +\infty$

$$h(x) E_x^h [(t < \zeta) (\tau \circ \theta_t + t = \zeta)] = 0$$

Or :

$$h \leq P_\tau w$$

Donc :

$$\begin{aligned} h(x) E_x^h [(t < \zeta) (\tau \circ \theta_t + t = \zeta)] &\leq \\ &\leq P_\tau w(x) E_x^{P_\tau w} [(t < \zeta) (\tau \circ \theta_t + t = \zeta)] \\ P_\tau w(x) E_x^{P_\tau w} [(t < \zeta) (\tau \circ \theta_t + t = \zeta)] &= \\ &= E_x [P_\tau w(X_\tau)] - E_x [E_{X_t} (P_\tau w(X_\tau))] \end{aligned}$$

Or :

$$P_\tau w(X_\tau) = E_{X_\tau} [w(X_\tau)] = w(X_\tau)$$

car

$$\tau \circ \theta_\tau + \tau = \tau$$

Donc :

$$P_\tau w(x) E_x^{P_\tau w} [(t < \zeta) (\tau \circ \theta_t + t = \zeta)] = 0$$

COROLLAIRE (8). — Soit  $w$  une fonction excessive,  $\tau$  un temps d'arrêt tel que  $\tau \circ \theta_\tau + \tau = \tau$  p.s. Si  $h$  est une fonction excessive inférieure à  $P_\tau w$  avec l'ordre fort, alors  $P_\tau h = h$ .

Démonstration. —  $F_\tau h \leq P_\tau h \leq h$ .

THEOREME 1. — Soit  $\tau$  un temps d'arrêt tel que  $\tau \circ \theta_\tau + \tau = \tau$  p.s. et soit  $w$  une fonction excessive.  $F_\tau w$  est la plus grande fonction excessive qui est inférieure à  $w$  et à  $P_\tau w$  avec l'ordre fort, c'est-à-dire :

$$h \ll w \quad \text{et} \quad h \ll P_\tau w \quad \text{entraîne} \quad h \ll F_\tau w$$

En particulier :

$$\mu^{F_\tau w} = \inf (\mu^{P_\tau w}, \mu^w)$$

Démonstration. —  $h \ll P_\tau w$  entraîne d'après le lemme 1  $F_\tau h = h$ . Comme  $h \ll w$ , on a  $F_\tau h \ll F_\tau w$ , donc  $h \ll F_\tau w$ .

D'après le théorème 3, § 2,  $F_\tau h$  est une minorante avec l'ordre fort de  $h$  et de  $P_\tau h$ .

Remarques :

1) En général, pour une fonction excessive  $w$ , la mesure spectrale  $\mu^{F_\tau w}$  peut être strictement inférieure à  $\inf (\mu^{P_\tau w}; \mu^w)$ .

Par exemple, considérons le balayage fort des fonctions excessives dans le cas de la translation uniforme sur  $\mathbf{R}$  de vitesse 1.

$$\text{Le semi-groupe } P(t, x, S) = 1_S(x + t)$$

Les fonctions excessives sont les fonctions décroissantes et continues à droite. La mesure de Lebesgue est une mesure de référence, et la fonction de Green est  $g(x, u) = 1_{]x, +\infty[}(u)$ .

Soit  $h$  la fonction excessive de mesure spectrale  $\epsilon_{\{0\}} + \epsilon_{\{2\}}$

$$\begin{aligned} h &= 2 & \text{si} & \quad x < 0 \\ h &= 1 & \text{si} & \quad 0 \leq x < 2 \\ h &= 0 & \text{si} & \quad x \geq 2 \end{aligned}$$

Balayons  $h$  sur  $A = \{0\} \cup \{2\}$ . Soit  $T_A = \inf \{t > 0 \mid X_t \in A\}$

$$P_A h(x) = E_x [h(X_{T_A})] = 1 \quad \text{si} \quad x < 0$$

$$P_A h(x) = 0 \quad \text{si} \quad x \geq 0$$

la mesure spectrale de  $P_A h$  est  $\mu^{P_A h} = \epsilon_{\{0\}}$ .

$P_A h$  est donc inférieure à  $h$  avec l'ordre fort, mais  $F_A h \neq P_A h$ , en effet :

$$F_A h(x) = h(x) E_x^h [R_{T_A}] = 0$$



2) L'hypothèse :  $\tau \circ \theta_\tau + \tau = \tau$  n'est pas nécessaire pour que :

$$\mu^{F_\tau w} = \inf(\mu^w, \mu^{P_\tau w})$$

Dans le cas du semi-groupe de la translation uniforme sur  $\mathbb{R}$  de vitesse 1. Soit  $A$  la réunion de l'ensemble des points de la suite  $1 - \frac{1}{n}$  et du point  $\{1\}$ , et soit  $h$  la fonction excessive de mesure spectrale  $\epsilon_{\{1\}}$ .

On a :

$$F_A h = P_A h = h$$

LEMME 2. — Soit  $\mathcal{G}$  une famille fondamentale de temps d'arrêt et soit  $\tau$  un temps d'arrêt n'appartenant pas forcément à  $\mathcal{G}$ . Si  $h$  est une fonction excessive  $\mathcal{G}$ -harmonique, alors  $F_\tau h$  est la plus grande minorante  $\mathcal{G}$ -harmonique de  $P_\tau h$  avec l'ordre fort.

En particulier :

$$\mu^{F_\tau h} = \inf(\mu^h, \mu^{P_\tau h})$$

Démonstration. — Soit  $\mathcal{G}$  une famille fondamentale, et soit  $(\tau_n)$  une suite dominante de  $\mathcal{G}$ . La plus grande minorante  $\mathcal{G}$ -harmonique de  $P_\tau h$  pour l'ordre fort est, pour tout  $x$  tel que  $h(x) < +\infty$ ,

$$u(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} E_x [P_{\tau_n} h(X_{\tau_n})] = h(x) E_x^h [ \lim_{n \rightarrow +\infty} 1_{(\tau \circ \theta_{\tau_n} + \tau_n < \zeta)} ]$$

si  $(\tau_n < \zeta) P_x^h$  p.s. comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \tau_n = \zeta$  on a :

$$\bigcap_n (\tau \circ \theta_{\tau_n} + \tau_n < \zeta) = \bigcap_{0 \leq t < \zeta} (\tau \circ \theta_t + t < \zeta)$$

Donc :

$$u(x) = F_\tau h(x)$$

COROLLAIRE 1. — Si  $A$  est un ensemble fermé polaire, pour toute fonction excessive  $w$  telle que  $\mu^w$  est portée par  $A$ , on a, pour tout ensemble presque-borélien  $B$  :

$$\mu^{F_B w} = \inf(\mu^w, \mu^{P_B w})$$

où  $F_B w = F_{\tau_B} w$  avec  $\tau_B = \inf\{t > 0 \mid X_t \in B\}$

COROLLAIRE 2. — Soit  $\mathcal{G}$  une famille fondamentale de temps d'arrêt et, soit  $h$  une fonction excessive et  $\tau$  un temps d'arrêt n'appartenant pas forcément à  $\mathcal{G}$ . La plus grande minorante  $\mathcal{G}$ -harmonique de  $P_\tau h$  pour l'ordre fort est aussi une minorante de  $h$  pour l'ordre fort.

Démonstration. —  $h = h_1 + h_2$  où  $h_1$  est  $\mathcal{G}$ -harmonique et  $h_2$  est un  $\mathcal{G}$ -potentiel.  $P_\tau h = P_\tau h_1 + P_\tau h_2$ . Soit  $(\tau_n)$  une suite dominante de  $\mathcal{G}$ . La plus grande minorante  $\mathcal{G}$ -harmonique de  $h$  est

$$\begin{aligned} u(x) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} P_{\tau_n} P_\tau h(x) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} P_{\tau_n} P_\tau h(x) \end{aligned}$$

D'après le lemme 2,  $u(x) = F_\tau h_1(x)$ .

C'est aussi une minorante de  $h$  avec l'ordre fort.

Soit  $\mathcal{G}$  une famille de temps d'arrêt séparable. Soit  $B$  un ensemble presque-borélien. Peut-on "calculer" comme dans le lemme 2 la plus grande minorante  $\mathcal{G}$ -harmonique avec l'ordre fort, de  $P_B h$  et de  $h$  pour une fonction excessive  $h$  ?

$P_B h$  est la réduite :

$$P_B h(x) = E_x [h(X_{T_B})] \quad \forall x \quad \text{tel que} \quad h(x) < +\infty$$

où

$$T_B = \inf \{t > 0 \mid X_t \in B\}$$

## PARTIE III

PARTITION DE L'ESPACE DES SORTIES  
CARACTERISATION DES  $\mathfrak{G}$ -POTENTIELS – CAS PARTICULIERS

## 1. Décomposition de Riesz.

Soit  $\alpha = (\tau_n)$  une suite croissante de temps d'arrêt qui tend vers  $\tau$ . L'ensemble  $S_\tau$  (Définition 1, § 2, partie II) contient l'ensemble :

$$T\Omega(\alpha) = \bigcup_{t \geq 0} (t < \zeta) \theta_t \Omega(\alpha)$$

$\Omega(\alpha)$  étant l'ensemble :

$$\{\tau = \zeta ; \forall n \tau_n < \tau\}$$

En particulier, si  $h$  est une fonction excessive  $G_\tau h \geq K_\alpha h$ .

Soit  $\mathfrak{G}$  une famille de temps d'arrêt dans laquelle il existe une suite dominante  $\alpha = (\tau_n)$ .

DEFINITION 1. – Une fonction excessive  $h$  est  $\mathfrak{G}_F$ -harmonique si  $F_\tau h = h$ . Une fonction excessive  $h$  est  $\mathfrak{G}_K$ -harmonique si  $K_\mathfrak{G} h = h$ .

LEMME 1. – Soit  $w$  une fonction excessive  $\mathfrak{G}$ -harmonique.

$w$  est  $\mathfrak{G}_K$ -harmonique si et seulement si  $G_\tau w = w$

Démonstration. – Si  $w$  est  $\mathfrak{G}$ -harmonique, pour tout  $x$  tel que  $w(x) < +\infty$ , on a  $P_x^w$  p.s. :  $T\Omega(\alpha) = S_\tau$  avec :

$$\tau = \lim_{n \rightarrow +\infty} \tau_n$$

(voir lemme 11, § 2, partie II).

LEMME 2. – Soit  $z \in \mathcal{U}$  et  $k_z$  la fonction excessive extrémale associée. Les seules possibilités sont :

$$\textcircled{1} \begin{cases} F_\tau k_z = k_z \\ \text{et } K_\mathfrak{G} k_z = 0 \end{cases} \quad \textcircled{2} \begin{cases} F_\tau k_z = 0 \\ \text{et } K_\mathfrak{G} k_z = k_z \end{cases} \quad \textcircled{3} \begin{cases} F_\tau k_z = 0 \\ \text{et } K_\mathfrak{G} k_z = 0 \end{cases}$$

*Démonstration.* — D'après le théorème 7, § 2, partie II, et le lemme 4, partie I, § 1,

$$F_\tau k_z + K_\alpha k_z = k_z \quad \text{ou} \quad F_\tau k_z + K_\alpha k_z = 0$$

Comme  $F_\tau k_z = 0$  ou  $k_z$  [lemme 1, chap. IV, § 1, [5], on a le résultat.

DEFINITION 2. — On pose

$$\mathfrak{U}_\mathfrak{G}^F = \{z \in \mathfrak{U} \mid F_\tau k_z = k_z\}$$

$$\mathfrak{U}_\mathfrak{G}^K = \{z \in \mathfrak{U} \mid K_\mathfrak{G} k_z = k_z\}$$

on a alors une partition de l'espace des sorties  $\mathfrak{U}$

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{U}_\mathfrak{G}^F \cup \mathfrak{U}_\mathfrak{G}^K \cup \mathfrak{V}_\mathfrak{G}$$

LEMME 3. — Soit  $h$  une fonction excessive.

$h$  est  $\mathfrak{G}_F$ -harmonique si et seulement si  $\mu^h$  est portée par  $\mathfrak{U}_\mathfrak{G}^F$ .

$h$  est  $\mathfrak{G}_K$ -harmonique si et seulement si  $\mu^h$  est portée par  $\mathfrak{U}_\mathfrak{G}^K$ .

*Démonstration.* — Cela résulte immédiatement des formules :

$$F_\tau h = \int F_\tau k_z \mu^h(dz)$$

et

$$K_\mathfrak{G} h = \int K_\mathfrak{G} k_z \mu^h(dz)$$

et du théorème 1, partie I.

## 2. Hypothèse (H).

DEFINITION 1. — Soit  $\mathfrak{G}$  une famille de temps d'arrêt dans laquelle il existe une suite dominante  $(\tau_n)$ . Soit

$$\tau = \lim_{n \rightarrow +\infty} \tau_n$$

On dit que  $\mathfrak{G}$  vérifie l'hypothèse (H) si toute fonction excessive  $w$  qui est  $\mathfrak{G}$ -harmonique, est  $\mathfrak{G}_K$ -harmonique.

THEOREME 1. — Soit  $\mathfrak{C}$  une famille de temps d'arrêt dans laquelle il existe une suite dominante  $\alpha = (\tau_n)$ . La famille  $\mathfrak{C}$  vérifie l'hypothèse (H) si et seulement si pour toute fonction excessive  $h$ , la plus grande minorante  $\mathfrak{C}$ -harmonique de  $h$  avec l'ordre fort est la fonction excessive  $K_{\mathfrak{C}} h$ .

*Démonstration.* — Supposons que  $\mathfrak{C}$  vérifie l'hypothèse (H). Soit  $h$  une fonction excessive. Il faut montrer : si  $w$  est  $\mathfrak{C}$ -harmonique et si  $h - w$  est excessive, alors

$$w(x) \leq u(x) \text{ } \gamma\text{-p.p.} \quad \text{où} \quad u(x) = K_{\mathfrak{C}} h(x)$$

D'après le théorème 5, partie II, § 2,  $h - w$  est excessive entraîne :

$$K_{\mathfrak{C}} w \leq K_{\mathfrak{C}} h$$

Comme  $w$  est  $\mathfrak{C}$ -harmonique, et puisque  $\mathfrak{C}$  vérifie l'hypothèse (H), on a :

$$w(x) \leq u(x)$$

Réciproquement, montrons que  $\mathfrak{C}$  vérifie l'hypothèse (H).

Soit  $w$  une fonction  $\mathfrak{C}$ -harmonique. D'après l'hypothèse,  $K_{\mathfrak{C}} w = w$  donc  $w$  est  $\mathfrak{C}_K$ -harmonique.

LEMME 1. — Soit  $\mathfrak{C}$  une famille de temps d'arrêt dans laquelle il existe une suite dominante  $\alpha = (\tau_n)$ . La famille  $\mathfrak{C}$  vérifie l'hypothèse (H) si et seulement si :  $\mathfrak{U}_{\mathfrak{C}}^F = \phi$ .

*Démonstration.* — Cela résulte immédiatement de la définition 1 et du lemme 3 § 1.

THEOREME 2. — Soit  $\mathfrak{C}$  une famille de temps d'arrêt dans laquelle il existe une suite dominante  $\alpha = (\tau_n)$ . Soit

$$\tau = \lim_{n \rightarrow +\infty} \tau_n$$

Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

- 1)  $\mathfrak{C}$  vérifie l'hypothèse (H).
- 2) Pour toute fonction excessive  $h$ , on a :  $F_{\tau} h = 0$ .

*Démonstration.*

2)  $\Rightarrow$  (1) d'après la définition 1, puisque  $R_\tau$  et  $S_\tau$  définissent une partition de l'espace de probabilité  $\Omega_0 = (\xi > 0)$ .

1)  $\Rightarrow$  (2)

Si  $h_1$  est  $\mathfrak{C}$ -harmonique,  $h_1(x) E_x^{h_1}(R_\tau) = 0$  d'après la définition 1.

Si  $h_2$  est un  $\mathfrak{C}$ -potentiel, d'après le théorème 2, § 2,

$$h_2(x) E_x^{h_2}(R_\tau) = 0$$

toute fonction excessive  $h$  étant égale à la somme d'une fonction  $\mathfrak{C}$ -harmonique  $h_1$ , et d'un  $\mathfrak{C}$ -potentiel  $h_2$ , on a :

$$h(x) E_x^h[R_\tau] = h_1(x) E_x^{h_1}[R_\tau] + h_2(x) E_x^{h_2}[R_\tau]$$

d'après le théorème 6, § 2, partie II).

**COROLLAIRE.** — Soit  $\mathfrak{C}$  une famille de temps d'arrêt dans laquelle il existe une suite dominante  $\alpha = (\tau_n)$ .

La famille satisfait à l'hypothèse (H) si et seulement si on a la caractérisation suivante des  $\mathfrak{C}$ -potentiels.  $h$  est un  $\mathfrak{C}$ -potentiel si et seulement si :  $K_{\mathfrak{C}}h = 0$ .

*Démonstration.* — Cela résulte immédiatement du lemme 1 et du théorème 2.

### 3. Hypothèse (R).

**DEFINITION 1.** — Soit  $\mathfrak{C}$  une famille de temps d'arrêt dans laquelle il existe une suite dominante  $(\tau_n)$ . Soit

$$\tau = \lim_{n \rightarrow +\infty} \tau_n$$

On dit que  $\mathfrak{C}$  vérifie l'hypothèse (R) si toute fonction excessive  $w$  qui est  $\mathfrak{C}$ -harmonique, est  $\mathfrak{C}_F$ -harmonique.

**LEMME 1.** — Soit  $\mathfrak{C}$  une famille de temps d'arrêt dans laquelle il existe une suite dominante  $\alpha = (\tau_n)$ .

La famille  $\mathfrak{C}$  vérifie l'hypothèse (R) si et seulement si  $\mathfrak{U}_{\mathfrak{C}}^K = \phi$ .

*Démonstration.* — Cela résulte immédiatement de la définition 1 et du lemme 3, § 1.

THEOREME 1. — Soit  $\mathfrak{C}$  une famille de temps d'arrêt dans laquelle il existe une suite dominante  $\alpha = (\tau_n)$ .

La famille  $\mathfrak{C}$  vérifie l'hypothèse (R) si et seulement si pour toute fonction excessive  $h$ , la plus grande minorante  $\mathfrak{C}$ -harmonique de  $h$  avec l'ordre fort est la fonction excessive  $F_\tau h$ .

*Démonstration.* — Elle est copiée sur celle du théorème 1.

Supposons que  $\mathfrak{C}$  vérifie l'hypothèse (R).

Soit  $h$  une fonction excessive. Il faut montrer : si  $w$  est  $\mathfrak{C}$ -harmonique et si  $h - w$  est excessive, alors  $w(x) \leq F_\tau h$   $\gamma$ -p.p. D'après le théorème 6, partie 2, § 2,  $h - w$  est excessive entraîne  $F_\tau w \leq F_\tau h$ .

Comme  $w$  est  $\mathfrak{C}$ -harmonique, d'après l'hypothèse (R), on a  $w(x) \leq F_\tau h(x)$ .

Réciproquement, montrons que  $\mathfrak{C}$  vérifie (R). Soit  $w$  une fonction excessive  $\mathfrak{C}$ -harmonique. D'après l'hypothèse, on a :  $F_\tau w = w$ .

COROLLAIRE. — Soit  $\mathfrak{C}$  une famille de temps d'arrêt dans laquelle il existe une suite dominante  $\alpha = (\tau_n)$  et soit

$$\tau = \lim_{n \rightarrow +\infty} \tau_n$$

$\mathfrak{C}$  satisfait à (R) si et seulement si les  $\mathfrak{C}$ -potentiels sont caractérisés par :  $F_\tau w = 0$ .

THEOREME 2. — Soit  $\mathfrak{C}$  une famille de temps d'arrêt dans laquelle il existe une suite dominante  $\alpha = (\tau_n)$ . Soit  $\tau = \lim_{n \rightarrow +\infty} \tau_n$ . Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

- 1)  $\mathfrak{C}$  vérifie l'hypothèse (R)
- 2) Pour toute fonction excessive  $h$ , on a :  $K_{\mathfrak{C}} h = 0$ .

*Démonstration.* — Pour toute fonction excessive  $h$ ,  $h = h_1 + h_2$  où  $h_1$  est  $\mathfrak{C}$ -harmonique et  $h_2$  un  $\mathfrak{C}$ -potentiel. On a :  $h_1 = F_\tau h_1$  car  $\mathfrak{C}$  vérifie l'hypothèse (R), donc  $K_{\mathfrak{C}} h_1 = 0$ .

Comme  $h_2$  est un  $\mathfrak{G}$ -potentiel (théorème 1, § 2, partie II), on a :

$$K_{\mathfrak{G}} h_2 = 0 \quad \text{donc} \quad K_{\mathfrak{G}} h = 0 \quad (\text{théorème 5, § 2, partie II}).$$

Réciproquement :

soit  $w$  une fonction excessive qui est  $\mathfrak{G}$ -harmonique.

On a  $w(x) E_x^w(T\Omega(\mathfrak{G})) = 0$  d'après 2.

D'après le théorème 7, § 2, partie II :  $F_{\tau} w = w$ .

#### 4. Familles semi-fondamentales de temps d'arrêt.

Remarquons que la condition  $h(x) E_x^h(\Omega(\mathfrak{G})) = 0$  n'entraîne pas en général  $h(x) E_x^h[T\Omega(\mathfrak{G})] = 0$ .

$h$  est un  $\mathfrak{G}$ -potentiel entraîne (théorème 1, § 2, partie II).

$h(x) E_x^h[T\Omega(\mathfrak{G})] = 0$ , donc  $h(x) E_x^h(\Omega(\mathfrak{G})) = 0$  pour tout  $x \in \{0 < h < +\infty\}$ .

Pour avoir une réciproque on est amené à poser la définition suivante :

DEFINITION 1. — Soit  $\mathfrak{G}$  une famille de temps d'arrêt dans laquelle il existe une suite dominante  $\alpha = (\tau_n)$ .

On dit que  $\mathfrak{G}$  est semi-fondamentale s'il existe une suite  $(T_k)$  de temps d'arrêt tels que :

$$T\Omega(\mathfrak{G}) = \bigcup_{k \geq 0} \theta_{T_k} \Omega(\mathfrak{G}) \cdot (T_k < \zeta)$$

THEOREME 1. — Soit  $\mathfrak{G}$  une famille semi-fondamentale de temps d'arrêt et soit :

$$\tau = \lim_{n \rightarrow +\infty} \tau_n$$

où  $(\tau_n)$  est une suite dominante de  $\mathfrak{G}$ .

Si  $\mathfrak{G}$  vérifie l'hypothèse (H), on a  $h$  est un  $\mathfrak{G}$ -potentiel si et seulement si

$$\forall x \quad \text{tel que} \quad h(x) < +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} E[h(X_{\tau_n})] = E_x[h(X_{\tau})]$$



*Démonstration.* — D'après le corollaire du théorème 2, § 2.  $h$  est un  $\mathfrak{C}$ -potentiel si et seulement si

pour tout  $x$  tel que  $h(x) < +\infty$ ,  $h(x) E_x^h [T\Omega(\mathfrak{C})] = 0$ .

Supposons que  $\forall x$  tel que  $h(x) < +\infty$ , on ait  $h(x) E_x^h [\Omega(\mathfrak{C})] = 0$  alors on a pour tout temps d'arrêt  $\tau$  :

$$\begin{aligned} h(x) E_x^h [(\tau < \zeta) \theta_\tau \Omega(\mathfrak{C})] &= \\ &= h(x) E_x^h [E_{x_\tau}^h (\Omega(\mathfrak{C}))] = E_x [h(X_\tau) E_{x_\tau}^h (\Omega(\mathfrak{C}))] \end{aligned}$$

Or, l'ensemble  $\{x \mid h(x) < +\infty\}$  est polaire donc

$$h(X_\tau) E_{x_\tau}^h [\Omega(\mathfrak{C})] = 0$$

## PARTIE IV

CAS D'UNE FAMILLE  $\mathfrak{C}$  DE TEMPS D'ARRÊT NON SEPARABLE

Dans les § II, III, précédents, on a toujours considéré une famille  $\mathfrak{C}$  de temps d'arrêt qui vérifiait l'hypothèse de séparabilité : il existe dans  $\mathfrak{C}$  une suite croissante dominante de temps d'arrêt.

On ne fait plus maintenant cette hypothèse sur  $\mathfrak{C}$  ; on va voir de quelle façon on peut tout de même obtenir des caractérisations des  $\mathfrak{C}$ -potentiels.

LEMME 1. — Soient  $\mathfrak{C}$  et  $\mathfrak{C}'$  deux familles de temps d'arrêt telles que  $\mathfrak{C}'$  est contenue dans  $\mathfrak{C}$ .  $h$  est un  $\mathfrak{C}'$ -potentiel entraîne  $h$  est un  $\mathfrak{C}$ -potentiel.

*Démonstration.* — Soit  $w$  une minorante  $\mathfrak{C}$ -harmonique de  $h$  avec l'ordre fort,  $w$  est  $\mathfrak{C}'$ -harmonique. Si  $h$  est un  $\mathfrak{C}'$ -potentiel,  $w = 0$  donc  $h$  est un  $\mathfrak{C}$ -potentiel.

Réciproquement, on suppose que  $\mathfrak{C}' \subset \mathfrak{C}$  et soit  $h$  un  $\mathfrak{C}$ -potentiel, on cherche à quelle condition  $h$  est un  $\mathfrak{C}'$ -potentiel.

DEFINITION 1. — Soit  $\mathfrak{C}$  une famille de temps d'arrêt et soit  $\tau$  un temps d'arrêt n'appartenant pas forcément à  $\mathfrak{C}$ .

On dit que  $\tau$  vérifie la condition  $(H_{\mathfrak{C}})$  si pour toute fonction excessive  $w$  qui est un  $\mathfrak{C}$ -potentiel, on a :  $F_{\tau} w = 0$ .

$F_{\tau} w$  est définie, Théorème 2, § 2, partie II, par :

$$\forall x \quad \text{tel que} \quad w(x) < +\infty$$

$$F_{\tau} w(x) = w(x) E_x^w \left[ \bigcap_{0 \leq t < \tau} (\tau \circ \theta_t + t < \tau) \right]$$

LEMME 2. —  $\tau$  vérifie  $(H_{\mathfrak{C}})$  si et seulement si  $\forall z \in \mathfrak{V}_{\mathfrak{C}}$ , on a  $F_{\tau} k_z = 0$ .

Soit  $\mathfrak{C}'$  une famille de temps d'arrêt dans laquelle il existe une suite dominante.  $\alpha = (\tau_n)$ . Alors  $\tau = \lim_{n \rightarrow +\infty} \tau_n$  ne dépend pas de la suite dominante  $(\alpha)$ .

DEFINITION 2. — Soit  $\mathfrak{C}'$  une famille de temps d'arrêt dans laquelle il existe une suite dominante  $\alpha = (\tau_n)$  et soit  $\tau = \lim_{n \rightarrow +\infty} \tau_n$ . On dit que  $\mathfrak{C}'$  vérifie  $(H_{\mathfrak{C}'})$  si  $\tau$  vérifie  $(H_{\mathfrak{C}'})$ .

Remarque. —  $\mathfrak{C}'$  vérifie toujours l'hypothèse  $(H_{\mathfrak{C}'})$ .

THEOREME 1. — Soit  $\mathfrak{C}'$  une famille de temps d'arrêt dans laquelle il existe une suite dominante. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

- 1)  $\mathfrak{C}'$  vérifie  $(H_{\mathfrak{C}'})$
- 2)  $h$  est un  $\mathfrak{C}'$ -potentiel entraîne  $h$  est un  $\mathfrak{C}$ -potentiel si et seulement si :

$$\forall x \text{ tel que } h(x) < +\infty, h(x) E_x^h [T\Omega(\mathfrak{C}')] = 0$$

$\mathfrak{C}'$  n'est pas forcément contenue dans  $\mathfrak{C}$ .

Démonstration. — Soit  $\alpha = (\tau_n)$  une suite dominante dans  $\mathfrak{C}'$  et soit  $\tau = \lim_{n \rightarrow +\infty} \tau_n$ . Supposons que  $\mathfrak{C}'$  vérifie  $(H_{\mathfrak{C}'})$ .

Soit  $h$  un  $\mathfrak{C}$ -potentiel, on a (définition 1)  $\forall x$  tel que  $h(x) < +\infty$ ,

$$F_{\tau} h(x) = h(x) E_x^h \left[ \bigcap_{0 \leq t < \zeta} (\tau \circ \theta_t + t < \zeta) \right] = 0$$

Comme la plus grande minorante  $\mathfrak{C}'$ -harmonique de  $h$  est (théorème 7, § 2, partie II) :

$$h(x) E_x^h [T\Omega(\mathfrak{C}')] + F_{\tau} h(x) \text{ pour tout } x \text{ tel que } h(x) < +\infty$$

$h$  est un  $\mathfrak{C}'$ -potentiel équivaut à :  $h(x) E_x^h [T\Omega(\mathfrak{C}')] = 0$  pour tout  $x$  tel que  $h(x) < +\infty$ .

Réciproquement, supposons que  $\mathfrak{C}'$  ne vérifie pas la condition  $(H_{\mathfrak{C}'})$  : alors il existe un  $\mathfrak{C}$ -potentiel  $w$  tel que  $F_{\tau} w > 0$

$$F_{\tau} w = \int F_{\tau} h_z \mu^w(dz)$$

$\mu^w$  est portée par  $\mathfrak{V}_{\mathfrak{C}'}$  (corollaire du lemme, 5, § 1, partie I) donc il existe un  $\mathfrak{C}$ -potentiel  $k_z$  tel que  $F_{\tau} k_z > 0$  soit  $F_{\tau} k_z = k_z$  donc  $k_z$  est  $\mathfrak{C}'$ -harmonique, partie II, § 2, théorème 3, et on a :

$$k_z(x) E_x^{k_z} [S_\tau] = 0 \quad \text{donc} \quad k_z(x) E_x^{k_z} [T\Omega(\mathfrak{C}')] = 0$$

2) n'est pas vérifiée.

COROLLAIRE. — Soit  $\mathfrak{C}$  une famille de temps d'arrêt et soit  $\mathfrak{C}' = (\tau_n)$  une suite de temps d'arrêt contenue dans  $\mathfrak{C}$ . Soit

$$\tau = \lim_{n \rightarrow +\infty} \tau_n$$

Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

1) Pour toute fonction excessive  $w$ ,  $w$  est un  $\mathfrak{C}$ -potentiel entraîne  $F_\tau w = 0$ .

2)  $h$  est un  $\mathfrak{C}$ -potentiel  $\left. \begin{array}{l} \text{et } h(x) E_x^h [T\Omega(\mathfrak{C}')] = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{si et seulement si} \\ h \text{ est un } \mathfrak{C}'\text{-potentiel.} \end{array}$

Démonstration. — Cela résulte immédiatement du lemme 1 et du théorème 1.

Remarque. —  $\mathfrak{C}'$  vérifie (H) entraîne  $\mathfrak{C}'$  vérifie  $(H_\mathfrak{C})$ .

DEFINITION 3. — Soit  $\mathfrak{C}$  une famille de temps d'arrêt et soit  $\mathfrak{C}' = (\tau_n)$  une suite croissante de temps d'arrêt n'appartenant pas forcément à  $\mathfrak{C}$ . On pose  $\tau = \lim_{n \rightarrow +\infty} \tau_n$ . On dit que  $(\tau_n)$  vérifie l'hypothèse  $(R_\mathfrak{C})$  si pour toute fonction excessive  $h$  qui est un  $\mathfrak{C}$ -potentiel, on a : pour tout  $x$  tel que  $h(x) < +\infty$ ,  $h(x) E_x^h [T\Omega(\mathfrak{C}')] = 0$ .

LEMME 3. — La suite  $\mathfrak{C}' = (\tau_n)$  vérifie  $(R_\mathfrak{C})$  : si et seulement si

$$\forall z \in \mathfrak{V}_\mathfrak{C}, \quad \text{on a : } k_z(x) E_x^{k_z} [T\Omega(\mathfrak{C}')] = 0$$

pour tout  $x$  tel que  $k_z(x) < +\infty$ .

Remarque. — Si on prend  $\mathfrak{C} = (\tau_n)$ ,  $\mathfrak{C}$  vérifie  $(R_\mathfrak{C})$ .

THEOREME 2. — Soit  $\mathfrak{C}$  une famille de temps d'arrêt et soit  $\mathfrak{C}' = (\tau_n)$  une suite de temps d'arrêt. On pose :

$$\tau = \lim_{n \rightarrow +\infty} \tau_n$$

*Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

- 1)  $\mathfrak{C}'$  vérifie  $(R_{\mathfrak{C}})$ .
- 2)  $h$  est un  $\mathfrak{C}$ -potentiel entraîne  $h$  est un  $\mathfrak{C}'$ -potentiel si et seulement si  $F_{\tau}h = 0$ .

$\mathfrak{C}'$  n'est pas forcément contenue dans  $\mathfrak{C}$ .

*Démonstration.* — Montrons que 1) entraîne 2).

Soit  $h$  un  $\mathfrak{C}$ -potentiel, 1) entraîne  $\forall x$  tel que  $h(x) < +\infty$ ,  $h(x) E_x^h [T\Omega(\mathfrak{C}')] = 0$ , la plus grande minorante au sens fort,  $\mathfrak{C}'$ -harmonique de  $h$  est égale à  $F_{\tau}h$ .

Théorème 7, § 2, partie II.

Donc  $h$  est un  $\mathfrak{C}'$ -potentiel si et seulement si  $F_{\tau}h = 0$ .

Réciproquement, 2) entraîne 1).

Si 1) n'est pas vérifié, il existe un  $\mathfrak{C}$ -potentiel  $k_z$  tel que

$$K_{\mathfrak{C}}, k_z(x) = k_z(x) E_x^{k_z} [T\Omega(\mathfrak{C}')] > 0$$

$K_{\mathfrak{C}}, k_z = ak_z$  avec  $a > 0$  donc  $k_z$  est  $\mathfrak{C}'$ -harmonique (théorème 1, § 2, partie II).

On a :  $F_{\tau}k \neq k_z$  donc  $F_{\tau}k_z = 0$ .

*Remarque.* —  $\mathfrak{C}'$  vérifie (R) entraîne  $\mathfrak{C}'$  vérifie  $(R_{\mathfrak{C}})$ .

**COROLLAIRE** — Soit  $\mathfrak{C}' = (\tau_n)$  une suite de temps d'arrêt contenue dans  $\mathfrak{C}$ . Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- 1)  $\mathfrak{C}'$  vérifie  $(R_{\mathfrak{C}})$ .
  - 2)  $h$  est un  $\mathfrak{C}$ -potentiel  
 et  $F_{\tau}h = 0$   
 $\left( \tau = \lim_{n \rightarrow +\infty} \tau_n \right)$
- } si et seulement si  
 }  $h$  est un  $\mathfrak{C}'$ -potentiel.

**THEOREME 3.** — Soit  $\mathfrak{C}$  une famille de temps d'arrêt et soit  $\mathfrak{C}' = (\tau_n)$  une suite croissante de temps d'arrêt contenue dans  $\mathfrak{C}$ . Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- 1)  $\mathfrak{C}'$  vérifie  $(H_{\mathfrak{C}})$  et  $(R_{\mathfrak{C}})$ .

2) Pour toute fonction excessive  $w$ , la plus grande minorante  $\mathfrak{C}$ -harmonique avec l'ordre fort de  $w$  est  $F_\tau w + K_{\mathfrak{C}'} w$ .

*Démonstration.* — Soit  $w$  une fonction excessive,  $w = w_1 + w_2$  où  $w_1$  est  $\mathfrak{C}$ -harmonique et  $w_2$  est un  $\mathfrak{C}$ -potentiel ( $\mathfrak{C}$ -décomposition de Riesz ; partie I).

Comme  $\mathfrak{C}' \subset \mathfrak{C}$ ,  $w_1$  est  $\mathfrak{C}'$ -harmonique ; donc :

$$F_\tau w_1 + K_{\mathfrak{C}'} w_1 = w_1 \quad (\text{théorème 7, partie II}).$$

Le Théorème 5 et le théorème 6 (partie II) entraînent :

$$F_\tau w + K_{\mathfrak{C}'} w = w_1 + F_\tau w_2 + K_{\mathfrak{C}'} w_2$$

Comme  $\mathfrak{C}'$  vérifie  $(H_{\mathfrak{C}'})$  et  $(R_{\mathfrak{C}'})$ , on a :

$$F_\tau w_2 + K_{\mathfrak{C}'} w_2 = 0 \quad \text{donc :} \quad w_1 = F_\tau w + K_{\mathfrak{C}'} w$$

Réciproquement, soit  $w$  un  $\mathfrak{C}$ -potentiel, sa plus grande minorante  $\mathfrak{C}$ -harmonique avec l'ordre fort est nulle, donc  $F_\tau w + K_{\mathfrak{C}'} w = 0$ .

*Remarque.* — Soit  $\mathfrak{C}$  une famille de temps d'arrêt et soit  $\mathfrak{C}' = (\tau_n)$  une suite croissante de temps d'arrêt contenue dans  $\mathfrak{C}$ . On a l'équivalence des deux conditions :

- 1)  $\mathfrak{C}'$  vérifie  $(H_{\mathfrak{C}'})$  et  $(R_{\mathfrak{C}'})$ .
- 2)  $h$  est un  $\mathfrak{C}$ -potentiel si et seulement si  $h$  est un  $\mathfrak{C}'$ -potentiel.

## PARTIE V

EXEMPLES DE  $\mathfrak{C}$ -FAMILLES DE TEMPS D'ARRÊT

## 1. Cas des fonctions harmoniques dans un ouvert de E.

– Soit D un ensemble ouvert de E. On dit que la fonction excessive  $h$  est harmonique dans D si  $E_x[h(X_{\tau_\Gamma})] = h(x)$  pour tout  $x \in \{0 < h < +\infty\}$  et tout compact  $\Gamma$  contenu dans D.

$\tau_\Gamma = \inf \{t > 0 \mid X_t \in \Gamma\}$  est le premier temps de sortie de  $\Gamma$ . Soit  $\mathfrak{C}_D$  la famille des premiers temps de sortie des compacts contenus dans D :

LEMME 1. – *La famille  $\mathfrak{C}_D$  est une famille séparable de temps d'arrêt.*

*Démonstration.* – D étant localement compact est réunion d'une suite croissante d'ouverts relativement compacts  $(U_n)$ . La suite  $(\tau_n)$  des premiers temps de sortie des ensembles  $U_n$  est une suite dominante dans  $\mathfrak{C}_D$ , et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \tau_n = \tau_D$  où  $\tau_D$  est le premier temps de sortie de D.

En effet,  $\forall n, \tau_n \leq \tau_D$  donc  $\tau \leq \tau_D$

Supposons  $\tau < \tau_D$  sur  $\tau < \zeta$  ;  $X_\tau = \lim_{n \rightarrow +\infty} X_{\tau_n}$  appartient au complémentaire de D, d'où une contradiction.

Soit A un ensemble presque borélien. A est  $h$ -polaire si

$$P^h(T_A < \zeta) = 0.$$

La famille  $\mathfrak{C}_D$  est  $h$ -fondamentale si et seulement si le complémentaire de D est  $h$ -polaire.

$$(T_A = \inf \{t > 0 \mid X \in A\})$$

On peut appliquer les résultats de la partie III.

On va étudier les caractérisations des  $\mathfrak{C}_D$ -potentiels suivant les propriétés de l'ensemble ouvert D.

THEOREME 1. — Soit  $D$  un ensemble ouvert de  $E$ , et soit  $h$  une fonction excessive;  $h$  est un  $\mathfrak{C}_D$ -potentiel entraîne :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E_x [h(X_{\tau_n})] = E_x [h(X_{\tau_D})] \quad \forall x \quad \text{tel que} \quad h(x) < +\infty$$

Démonstration. —  $\tau_D = \lim_{n \rightarrow +\infty} \tau_n$ . On applique le théorème 1, § 2, partie II

$$K_{\mathfrak{C}_D} h(x) = h(x) E_x^h [T\Omega(\mathfrak{C}_D)] = 0 \quad \text{donc} \quad h(x) E_x^h [\Omega(\mathfrak{C})] = 0$$

mais

$$h(x) E_x^h (\Omega(\mathfrak{C})) = \lim_{n \rightarrow +\infty} E_x [h(X_{\tau_n})] - E_x [h(X_{\tau_D})].$$

La réciproque du théorème 1 n'est pas vraie en général. Par exemple : considérons le mouvement brownien dans le disque  $\{|z| \leq 2\}$  et soit  $h$  une fonction excessive dont la mesure spectrale  $\mu^h$  est concentrée dans :

$$\left\{ |z| \leq \frac{1}{4} \right\}; \quad \text{et soit} \quad D = \left\{ 2 \geq |z| > \frac{1}{2} \right\}$$

On a :  $P_x^h$  p.s.  $\tau_D < \zeta$  ;  $\tau_n < \zeta$  puisque le mouvement brownien est continu.

On se demande pour quels ensembles ouverts  $D$ , on a une réciproque, c'est-à-dire la condition (9) caractérise les  $\mathfrak{C}_D$ -potentiels.

On va chercher les ensembles ouverts  $D$  pour lesquels la condition :

$$K_{\mathfrak{C}_D} h = 0 \quad \text{caractérise les } \mathfrak{C}_D\text{-potentiels.} \quad (10)$$

c'est-à-dire les ensembles pour lesquels  $\mathfrak{C}_D$  vérifie l'hypothèse (H) (corollaire du théorème 2, partie III).

DEFINITION 1. — Soit  $A$  un sous-ensemble presque-borélien de  $E$ . On dit que  $A$  est totalement transient si pour toute fonction excessive  $w$ , on a  $F_{\tau_A} w = 0$  où  $\tau_A$  est le premier temps d'entrée dans  $A$  :

$$\tau_A = \inf \{ t > 0 \mid X_t \in A \}.$$

THEOREME 2. — Le complémentaire de  $D$  est totalement transient si et seulement si la condition :



$K_{\mathfrak{C}_D} h = 0$  caractérise les  $\mathfrak{C}_D$ -potentiels.

Une étude plus complète de cette classe d'ensembles sera faite dans (9).

*Démonstration.* — Il suffit de démontrer que [corollaire du théorème 2, § 2. partie III]. Le complémentaire de  $D$  est totalement transient si et seulement si  $\mathfrak{C}_D$  satisfait l'hypothèse (H). Cela résulte immédiatement de la définition des ensembles totalement transients.

THEOREME 3. — Soit  $D$  un ensemble localement fermé de  $E$  ; une fonction excessive  $h$  est un  $\mathfrak{C}_D$ -potentiel entraîne :

$$F_{\tau_D} h = 0 \quad (11)$$

où

$$\tau_D = \inf \{t > 0 \mid X_t \notin D\}$$

Mais en général, la condition  $F_{\tau_D} h = 0$  n'entraîne pas  $h$  est un  $\mathfrak{C}_D$ -potentiel. Par exemple, si le complémentaire de  $D$  est un ensemble polaire, la condition (11) est satisfaite pour toute fonction excessive  $h$ .

On va chercher les ensembles pour lesquels (11) caractérise les  $\mathfrak{C}_D$ -potentiels : c'est-à-dire pour lesquels  $\mathfrak{C}_D$  vérifie l'hypothèse (R) (corollaire, théorème 3, partie III).

DEFINITION 2. — Soit  $D$  une partie ouverte de  $E$ . On dit que le complémentaire de  $D$  est un sous-ensemble de pénétration de  $E$ , si pour toute fonction excessive  $h$ , on a :  $K_{\mathfrak{C}_D} h = 0$ , où  $\mathfrak{C}_D$  est la famille de temps d'arrêt définie ci-dessus.

THEOREME 4. — Soit  $D$  une partie ouverte de  $E$ . Le complémentaire de  $D$  est un ensemble de pénétration si et seulement si, la condition  $F_{\tau_D} h = 0$  caractérise les  $\mathfrak{C}_D$ -potentiels.

Une étude plus complète des ensembles de pénétration est faite dans (9).

**2. Cas des fonctions harmoniques dans une partie presque-borélienne de E.**

Soit D un presque-borélien de E. On dit que la fonction excessive  $h$  est harmonique dans D si  $P_{\tau_S} h = h$ , pour tout compact S finement ouvert contenu dans D.

$[\tau_S = \inf \{t > 0 \mid X_t \notin S\}$  est le premier temps de sortie de S].

$\mathcal{C}_D$  la famille des premiers temps de sortie des compacts contenus dans D n'est pas séparable en général.

*Par exemple, soit le cas des fonctions finement harmoniques dans un ouvert fin.*

Soit O un ouvert fin de E ; on considère la famille  $\mathcal{F}$  des ensembles finement ouverts d'adhérence compacte contenue dans O.

Soit  $\mathcal{C}_O$  la famille des temps de sortie des ensembles de  $\mathcal{F}$ . On va chercher comme dans le § I des conditions suffisantes pour que  $h$  soit un  $\mathcal{F}_0$ -potentiel.

Ici la condition de séparabilité (A) n'est pas remplie en général pour la famille  $\mathcal{C}_O$ .

Supposons qu'il existe une sous-famille dénombrable  $\mathcal{F}_0 = (A_n)$  contenue dans  $\mathcal{F}$  telle que  $O = \bigcup_n A_n \cup N$  où N est un ensemble semi-polaire. (On suppose la suite  $A_n$  croissante). [Ceci est vérifié dans le cas d'un espace harmonique fort [10 p. 29] et [4].

On va utiliser les résultats de la partie IV.

Soit  $\mathcal{C}'_O$  la famille des temps de sortie des ensembles de  $\mathcal{F}_0$ .  $\mathcal{C}'_O$  est une famille séparable.

$\forall n, A_n$  est finement ouvert et  $\tau_n = \inf \{t > 0 \mid X_t \notin A_n\}$  donc  $X_{\tau_n}$  appartient au complémentaire de A et comme la suite  $A_n$  est croissante :

$$X_m \in A_n^c \quad \forall m \geq n.$$

Soit :

$$\tau = \lim_{n \rightarrow +\infty} \tau_n \quad X_\tau = \lim_{n \rightarrow +\infty} X_{\tau_n} \quad \text{sur } (\tau < \zeta)$$

Donc :

$$X_\tau \in \bar{A}_n^c, \quad \forall n$$

$X_\tau$  appartient au complémentaire de  $\bigcup_n \overset{\circ}{A}_n \subset O'$ .

*Si on fait l'hypothèse :*

$X_\tau = \lim_{n \rightarrow +\infty} X_{\tau_n}$  sur  $(\tau < \zeta)$  limite au sens de la topologie fine.

On a  $\tau \geq \tau_{0'}$  ;  $\tau_{0'}$  étant le premier temps de sortie de  $O'$ , on a donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \tau_n = \tau_{0'}$$

On peut utiliser les résultats de la partie III pour  $\mathfrak{C}_{0'}$  et ceux de la partie IV pour  $\mathfrak{C}$  et  $\mathfrak{C}_{0'}$ .

*On obtient :*

1)  $\mathfrak{C}_{0'}$  vérifie  $(H_{\mathfrak{C}_{0'}})$  et  $(R_{\mathfrak{C}_{0'}})$  si et seulement si pour toute fonction excessive  $h$ ,  $h$  est un  $\mathfrak{C}_{0'}$ -potentiel entraîne  $h$  est un  $\mathfrak{C}_{0'}$ -potentiel.

2) Le complémentaire de  $O'$  est totalement transient si et seulement si la condition :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E[h(X_{\tau_n})] = E[h(X_{\tau_{0'}})]$$

caractérise les  $\mathfrak{C}_{0'}$ -potentiels.

*Démonstration :*

1) Résulte de la remarque qui suit le théorème 3 partie IV.

2) Le complémentaire de  $O'$  est totalement transient si et seulement si  $\mathfrak{C}_{0'}$  vérifie l'hypothèse (H). On applique le corollaire du théorème 2 (§ 2 partie II).

### 3. Introduction d'une hypothèse de séparabilité dans la théorie du potentiel fin.

Soit  $O$  un ensemble finement ouvert et soit  $\tau_0$  le premier temps de sortie de  $O$ . Pour tout entier  $k \geq 0$ . On pose :

$$O_k = \left\{ x \in O \mid E_x(e^{-\tau_0}) < 1 - \frac{1}{k} \right\}$$

On a :  $O = \bigcup_k O_k$ . Soit  $\mathfrak{C} = (\tau_k)$  la suite des premiers temps de sortie des ensembles  $O_k$  et soit  $\tau = \lim_{k \rightarrow +\infty} \tau_k$ .

Montrons que :  $\tau = \tau_0$  avec l'hypothèse :  $X_\tau = \lim_{k \rightarrow +\infty} X_{\tau_k}$  sur  $(\tau < \zeta)$  au sens de la topologie fine, pour toute suite croissante  $(\tau_n)$  de temps d'arrêt telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \tau_n = \tau$ .

Les fonctions 1-excessives étant supposées continues à droite sur les trajectoires, on a :

$$E_{X_{\tau_k}}(e^{-\tau_0}) \geq 1 - \frac{1}{k}$$

$X_{\tau_k}$  appartient à l'ensemble finement fermé :

$$\left\{ x \mid E_x(e^{-\tau_0}) \geq 1 - \frac{1}{k} \right\}$$

donc :

$$X_\tau \in \{x \mid E_x(e^{-\tau_0}) = 1\}, \quad \text{soit } X_\tau \notin O$$

$$\tau \geq \tau_0, \quad \text{comme } \tau \leq \tau_0, \quad \text{on a } \lim_{k \rightarrow +\infty} \tau_k = \tau_0.$$

On a le résultat :

Le complémentaire de  $O$  est totalement transient si et seulement si la condition :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E[h(X_{\tau_n})] = E[h(X_{\tau_0})]$$

caractérise les  $\mathfrak{G}$ -potentiels.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] E.B. DYNKIN, Excessive functions and space of exits of a Markov process, *Theor. Probability Appl.*, 14 (1969), 37-54.
- [2] E.B. DYNKIN, The Space of exits of a Markov process, *Russian Math. Surveys*, (1969) (4) (24).
- [3] P.A. MEYER, Processus de Markov. La frontière de Martin, *Lectures notes in Mathematics*. Vol. 27, (1968) Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.
- [4] J.L. DOOB, Applications to analysis of a topological definition of smallness of a set, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 72, (1966), 579-600.

- [5] H. AIRAULT, Théorème de Fatou et Frontière de Martin, *Journal of Functional Analysis*, 12 (1973).
- [6] J. NEVEU, Calcul des probabilités (prop. 1.6.1. p. 25).
- [7] C. DELLACHERIE, Capacités et processus stochastique, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg (1972).
- [8] J. AZEMA, Noyau potentiel associé à une fonction excessive d'un processus de Markov, *Annales Inst. Fourier*, 1969 (19.2), 495-526.
- [9] H. AIRAULT, Retournement du temps et quelques ensembles exceptionnels en théorie du potentiel (à paraître).
- [10] B. FLUGEDE, Finely Harmonic Functions, *Lecture Notes in Mathematics*. 289.
- [11] P.A. MEYER, Processus de Markov (1967), *Lectures notes in Mathematics*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg. (p. 161, théorème 47).
- [12] J.L. DOOB, Conditional Brownian motion and the boundary limits of harmonic functions, *Bull. Soc. Math. France*, 85 (1957), 431-458.
- [13] E.B. DYNKIN, Markov, processes, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1965.

Manuscrit reçu le 25 juin 1973  
accepté par M. Brelot.

Hélène AIRAULT,  
Institut Henri Poincaré  
11, rue Pierre et Marie Curie  
75005 Paris.