ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

MAKOTO OHTSUKA

Théorèmes étoilés de Gross et leurs applications

Annales de l'institut Fourier, tome 5 (1954), p. 1-28

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1954__5__1_0>

THÉORÈMES ÉTOILÉS DE GROSS ET LEURS APPLICATIONS

par Makoto OHTSUKA.

Introduction.

Dans [16] W. Gross a donné deux théorèmes sur une détermination de l'inverse d'une fonction méromorphe, dans un domaine étoilé. L'un de ces théorèmes est la généralisation du théorème dit « théorème étoilé de Gross » qu'il avait publié dans [15] (voir [25], p. 276); il a été l'objet de recherches récentes de Tsuji [34], Yûjôbô [37], Kaplan [18; 19] et Noshiro [26].

Nous étendrons d'abord ce premier théorème à une classe de représentations continues — plus générales que les représentations quasi-conformes classiques (1) — de domaines plans dans une surface de Riemann (§ 1) et ensuite, d'ensembles ouverts sur une surface de Riemann dans une autre surface de Riemann (§ 2). Cette extension du théorème de Gross est suivie aux §§ 3-7 de ses applications aux problèmes sur la correspondance des frontières dans la représentation d'un cercle-unité dans un plan. Nos résultats se rapportent aux travaux de Beurling [3], Dufresnoy [13; 14], Tsuji [35], (T) Yosida [36], Kaplan [18] et Kuroda [21]. En particulier aux §§ 4-5, certains théorèmes de Beurling et Dufresnoy sont généralisés pour notre classe de transformations. Les résultats

(1) Par représentation quasi-conforme classique, nous entendons une représentation intérieure au sens de Stoïlow, à dérivées partielles continues, de jacobien non nul et de quotient de dilatation uniformément borné, sauf au plus en des points isolés.

obtenus conduisent à poser un problème général sur la correspondance des frontières (§ 6). On se pose aussi la question plus particulière suivante : Étant donné une représentation conforme d'un domaine de Jordan sur le cercle-unité, à quelles conditions correspond à un ensemble de capacité logarithmique positive (en général, d'α-capacité positive $(0 < \alpha < 1)$; 0-capacité = capacité logarithmique) de la frontière du domaine, un ensemble de capacité logarithmique positive de la circonférence-unité ? Au § 7 on donne un exemple pour montrer que la rectifiabilité de la frontière ne garantit pas que les ensembles d'α-capacité $(0 \leq \alpha < 1/2)$ positive soient transformés en ensembles de capacité logarithmique positive.

Au § 8, on étend l'autre théorème de Gross. Ceci permet de généraliser au § 9 un résultat de Beurling et Dufresnoy sur l'existence de limites angulaires.

Partout dans nos applications des théorèmes de Gross, un rôle important est joué par le fait que sur une surface de Riemann $\mathfrak{R}$ de frontière positive la fonction de Green et sa conjuguée fournissent une représentation conforme d'un domaine étoilé borné dans $\mathfrak{R}$, représentation telle que les images de presque tous les rayons du domaine s'étendent jusqu'à la frontière idéale de $\mathfrak{R}$. Une idée semblable a été employée par Kaplan [18] pour démontrer un théorème de Beurling et Dufresnoy.

1. Nous donnerons d'abord la définition des points frontières d'une surface de Riemann ouverte $\mathfrak{R}$. Soit $\mathfrak{F}$ une classe de filtres telle que chaque filtre possède une base ordonnée, sans points adhérents, formée d'ensembles ouverts. On peut choisir une sous-base dénombrable. Nous dirons que chaque filtre définit *un point frontière* de $\mathfrak{R}$ et nous noterons $\mathfrak{F}_{\mathfrak{R}}$ l'ensemble de tous les points frontières relatifs à $\mathfrak{F}$. Une suite de points $\{P_n\}$ de $\mathfrak{R} + \mathfrak{F}_{\mathfrak{R}}$ converge vers un point $P_{\mathfrak{F}}$ de $\mathfrak{F}_{\mathfrak{R}}$ quand pour chaque élément F d'une base de $P_{\mathfrak{F}}$ tous les P_n, sauf un nombre fini au plus, sont contenus dans F (si $P_n \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{R}}$ on dira qu'il est contenu dans F s'il existe une base de P_n contenue dans F). Si on conserve la topologie originale de $\mathfrak{R}$, on obtient ainsi une topologie de $\mathfrak{R} + \mathfrak{F}_{\mathfrak{R}}$. $\mathfrak{E}_{\mathfrak{R}}$ étant un ensemble dans $\mathfrak{F}_{\mathfrak{R}}$, une suite ordonnée d'ensembles ouverts $\{D_n\}$ sera une *approximation* de $\mathfrak{E}_{\mathfrak{R}}$ si pour chaque D_n et pour

chaque point $P_{\mathfrak{J}}$ de $\mathcal{E}_{\mathfrak{R}}$ il existe une base de $P'_{\mathfrak{J}}$ contenue dans D_n et si $\bigcap_n \overline{D}_n = \mathcal{E}_{\mathfrak{R}}$, où $\overline{D}_n$ est l'adhérence dans $\mathfrak{R} + \mathfrak{F}_{\mathfrak{R}}$ de D_n. On dira que une approximation est *régulière* si les frontières relatives sont régulières et disjointes.

Maintenant soit $f(\tilde{P})$ une représentation continue, dans $\mathfrak{R}$, d'un sous-ensemble ouvert $\tilde{G}$ d'une autre surface de Riemann $\tilde{\mathfrak{R}}$, close ou ouverte. Soit $\tilde{E} \subset \tilde{G}$ un ensemble fermé dont l'image E par $f(\tilde{P})$ est de mesure linéaire nulle dans $\mathfrak{R}$. Nous supposons que $f(\tilde{P})$ admet des dérivées partielles continues par rapport aux paramètres locaux dans $\tilde{G} - \tilde{E}$ et que le jacobien ne s'y annule pas. En chaque point $\tilde{P}$ de $\tilde{G} - \tilde{E}$ le quotient de dilatation $q(\tilde{P}) \geq 1$ est défini par le rapport des deux axes de l'ellipse infinitésimale. Au point image P de $\tilde{P}$, le quotient de dilatation $q(P)$ est défini de la même façon et est égal à $q(\tilde{P})$ au point $\tilde{P}$. $\mathcal{E}_{\mathfrak{R}}$ étant un sous-ensemble de $\mathfrak{F}_{\mathfrak{R}}$, on dira que $f(\tilde{P})$ est *parabolique* ($\mathcal{E}_{\mathfrak{R}}$), si pour chaque compact K dans $\mathfrak{R}$ il existe une approximation régulière $\{D_n\}$ de $\mathcal{E}_{\mathfrak{R}}$ avec des frontières relatives $\{\gamma_n\}$ et des fonctions harmoniques $\{u_n(P)\}$ dans $D_1 - \overline{D}_n$ égales à 0 sur γ_1 et à 1 sur γ_n (2) telles que $D_1 \cap K = \emptyset$ et

$$(1) \qquad \int_0^1 \frac{du_n}{\int_{(u_n)} q\,dv_n} \to \infty \quad \text{avec} \quad n,$$

où $v_n(P)$ est la fonction harmonique conjuguée de $u_n(P)$ et $\int_{(u_n)} q\,dv_n$ est l'intégrale $\int q(\tilde{P})\,dv_n(P(\tilde{P}))$ définie sur l'image réciproque de la courbe de niveau de u_n; comme l'ensemble E est de mesure linéaire nulle, l'image réciproque d'une courbe de niveau est bien définie pour presque tous les u_n.

En particulier, soit $\mathfrak{F}_{\mathfrak{R}}$ la frontière au sens de Kérékjártó-Stoïlow (3). Supposons qu'un sous-ensemble $\mathcal{E}_{\mathfrak{R}} \subset \mathfrak{F}_{\mathfrak{R}}$ borne un

(2) Si $D_1 - \overline{D}_n$ est compact dans $\mathfrak{R}$, $u_n(P)$ est déterminé uniquement. S'il est non compact, ce n'est pas toujours vrai.

(3) Voir [27] par exemple.

ensemble ouvert sur $\mathfrak{R}$, à frontière relative compacte, tel que $\mathcal{E}_{\mathfrak{R}}$ soit de mesure harmonique nulle par rapport à cet ensemble ouvert. Si $f(\tilde{P})$ est une fonction p-valente, $p < \infty$, et quasi-conforme de quotient de dilatation borné : $q(\tilde{P}) \leqq q < \infty$, on voit facilement que $f(\tilde{P})$ est parabolique $(\mathcal{E}_{\mathfrak{R}})$.

De façon analogue au théorème 1 de [18], nous énoncerons la généralisation suivante du théorème étoilé de Gross :

THÉORÈME 1. — *Soit $\mathfrak{R}$ une surface de Riemann ouverte de frontière $\mathcal{F}_{\mathfrak{R}}$, et soit $f(z)$ une représentation parabolique $(\mathcal{E}_{\mathfrak{R}})$, $\mathcal{E}_{\mathfrak{R}} \subset \mathcal{F}_{\mathfrak{R}}$, dans $\mathfrak{R}$ d'un domaine* G *du plan z, de la forme : $0 < x < 1$, $0 < y < h(x) \leqq \infty$. Si pour chaque valeur x d'un sous-ensemble* X *de l'intervalle $0 < x < 1$, on a $h(x) < \infty$ et s'il existe une suite $y_n \to h(x)$ telle que $f(x + iy_n)$ tende vers $\mathcal{E}_{\mathfrak{R}}$ lorsque $n \to \infty$,* X *est de mesure linéaire nulle.*

Soient $\{k_p\}$ des nombres tels que $0 < k_1 < k_2 < \cdots \to \infty$; nous noterons X_p l'ensemble $\{x \epsilon X;\ h(x) < k_p\}$. Si tous les X_p sont de mesure linéaire nulle, il en est de même de la somme $\bigcup_p X_p \supset X$. Supposons qu'il existe p tel que la mesure linéaire extérieure de X_p soit positive. On note $f_p(z)$ la fonction obtenue de $f(z)$ et définie seulement dans la partie de G au-dessous de $y = k_p$. Soit σ : $(0 <) x_1 < x < x_2 (< 1)$, $y = \varepsilon\, (0 < \varepsilon < k_p)$ un segment dans G tel que le sous-ensemble X'_p de X_p dans $x_1 < x < x_2$ est de mesure linéaire extérieure positive : $\overline{m}(X'_p) > 0$. Soit $\{D_n\}$ une approximation régulière de $\mathcal{E}_{\mathfrak{R}}$ satisfaisant à (1), telle que D_1 est disjoint de l'image de σ par $f_p(z)$. Si $g_p(P)$ est la fonction réciproque de $f_p(z)$ définie localement en dehors de E et si $s_n(u_n)$ est la longueur totale de l'image réciproque de la courbe de niveau $u_n = c^{te}$, on a pour presque tout u_n

$$\{s_n(u_n)\}^2 = \left\{\int_{(u_n)} |dg_p(P(u_n + iv_n))|\right\}^2 \leqq \int_{(u_n)} \left|\frac{\partial g_p}{\partial v_n}\right|^2 \cdot \frac{dv_n}{q} \int_{(u_n)} q\, dv_n$$

à cause de l'inégalité de Schwarz; ainsi :

$$0 < \{\overline{m}(X'_p)\}^2 \int_0^1 \frac{du_n}{\int_{(u_n)} q\, dv_n} \leqq \int_0^1 \int_{(u_n)} \left|\frac{\partial g}{\partial v_n}\right|^2 \cdot \frac{dv_n du_n}{q} \leqq k_p < \infty.$$

La quantité à gauche tendant vers ∞ avec n d'après la condition (1), on trouve une contradiction ([4]).

Remarque 1. — On peut facilement énoncer ce théorème dans le cas d'un domaine étoilé.

Remarque 2. — Ce théorème donne une réponse affirmative à la question posée dans la remarque 2, § 4 de [19] par Kaplan.

Remarque 3. — Le théorème 10 montrera que dans l'énoncé du théorème 1, on ne peut pas remplacer la mesure linéaire par une mesure α, $\alpha < 1$.

Cependant il reste la question que nous a posée M. W. Hayman, à savoir : Étant donné un nombre α, $0 < \alpha < 1$, est-ce qu'il y a une fonction *entière* telle qu'il existe un élément régulier de la fonction inverse qu'on ne peut pas prolonger indéfiniment jusqu'à l'infini dans un ensemble de directions angulaires de mesure α positive ?

2. Dans ce paragraphe on considérera des représentations de surfaces de Riemann, ou de leurs parties ouvertes, dans d'autres surfaces de Riemann. Nous commencerons par quelques définitions de terminologie.

Étant donné une représentation analytique, non nécessairement univalente mais localement homéomorphe, d'un domaine G défini dans le théorème 1 dans une surface de Riemann $\tilde{\mathfrak{R}}$, on appelle l'image de G dans $\tilde{\mathfrak{R}}$ un *écoulement harmonique*. L'ensemble des images de quelques lignes $x = \mathrm{c}^{\mathrm{te}}$, $0 < y < h(x)$ est appelé un *sous-écoulement harmonique* et l'image de chaque

([4]) Prof. Pfluger m'a signalé oralement qu'on peut démontrer ce théorème, dans le cas où $w = f(z)$ est une fonction analytique univalente ordinaire définie dans G et tendant vers ∞ lorsque $y \to h(x)$, de la manière suivante : Soit $f(\mathrm{G})$ l'image de G. Soit $\{\gamma\}$ la famille des courbes consistant en les intersections des circonférences de centre à l'origine, $w = 0$, avec $f(\mathrm{G})$, et $\{\gamma'\}$ son image dans G. On peut facilement démontrer que la longueur extrémale (voir [2]) de $\{\gamma\}$, $\lambda_{(\gamma)} = 0$. Car la longueur extrémale ne change pas par les transformations conformes, $\lambda_{(\gamma)} = \lambda_{(\gamma')}$. Si on met $\rho = 1$, $\{\overline{m}(\mathrm{X})\}^2/k \leqq \{\mathrm{L}(\rho)\}^2/\mathrm{A}(\rho) = 0$. Donc $m(\mathrm{X}) = 0$. Si $f(z)$ est une représentation quasi-conforme de quotient de dilatation $\leqq q$, $1/q\lambda_{(\gamma)} \leqq \lambda_{(\gamma')} \leqq q\lambda_{(\gamma)}$, et la démonstration est analogue. Cependant la définition des représentations quasi-conformes a été généralisée récemment par Pfluger [29] et Ahlfors [1] aux représentations continues mais non nécessairement à dérivées partielles continues. Dans ce cas on ne sait pas si l'inégalité ci-dessus est vraie ou non.

ligne $x = \mathrm{c^{te}}$, est une *trajectoire* de cet écoulement. Si la représentation est univalente, l'écoulement est appelé *monofeuillet*. Si $h(x) < \infty$ pour tout x de l'intervalle $(0, 1)$ ou pour une partie de cet intervalle, l'écoulement ou le sous-écoulement correspondant est appelé *fini*. Selon qu'un sous-écoulement est l'image d'un ensemble de lignes $x = \mathrm{c^{te}}$, dont la trace sur l'axe des x est de mesure linéaire nulle ou positive, il est appelé respectivement *nul* ou *positif*. On dit qu'une représentation d'un écoulement harmonique sur une surface de Riemann $\tilde{\mathfrak{R}}$ dans une autre surface de Riemann ouverte $\mathfrak{R}$ est parabolique ($\mathcal{E}_{\mathfrak{R}}$) quand la représentation dans $\mathfrak{R}$ définie dans G par l'intermédiaire de $\tilde{\mathfrak{R}}$ est parabolique ($\mathcal{E}_{\mathfrak{R}}$), $\mathcal{E}_{\mathfrak{R}}$ étant un sous-ensemble de la frontière $\mathcal{F}_{\mathfrak{R}}$ de $\mathfrak{R}$.

Il découle alors immédiatement du théorème 1 et de ces définitions :

Théorème 2. — *Soit $\mathfrak{R}$ une surface de Riemann ouverte et $\tilde{\mathfrak{R}}$ une autre surface de Riemann quelconque; considérons une représentation parabolique ($\mathcal{E}_{\mathfrak{R}}$) d'un écoulement harmonique $\tilde{\mathrm{H}}$ sur $\tilde{\mathfrak{R}}$ dans $\mathfrak{R}$. Si chaque trajectoire d'un sous-écoulement fini $\tilde{\mathrm{H}}_1$ de $\tilde{\mathrm{H}}$ contient une suite des points dont les images tendent vers $\mathcal{E}_{\mathfrak{R}}$, $\tilde{\mathrm{H}}_1$ est nul.*

Comme application de ce théorème on obtient

Théorème 3. — *Soient $\mathfrak{R}$ et $\check{\mathfrak{R}}$ deux surfaces de Riemann ouvertes, et soient $\mathcal{E}_{\mathfrak{R}}$ et $\mathcal{E}_{\tilde{\mathfrak{R}}}$ les frontières idéales d'ensembles ouverts D et $\tilde{\mathrm{D}}$ à frontière relative compacte. Si $\tilde{\mathrm{D}}$ est transformé dans D par une représentation parabolique ($\mathcal{E}_{\mathfrak{R}}$) de $\tilde{\mathrm{D}} \to \mathfrak{R}$ telle que chaque courbe convergeant vers $\mathcal{E}_{\tilde{\mathfrak{R}}}$ contient une suite de points dont les images convergent vers $\mathcal{E}_{\mathfrak{R}}$ et telle qu'un voisinage de $\mathcal{E}_{\mathfrak{R}}$ est couvert complètement par l'image de $\tilde{\mathrm{D}}$, $\mathcal{E}_{\mathfrak{R}}$ et $\mathcal{E}_{\tilde{\mathfrak{R}}}$ sont de mesure harmonique nulle par rapport aux D et $\tilde{\mathrm{D}}$ respectivement.*

Supposons que $\mathcal{E}_{\tilde{\mathfrak{R}}}$ est de mesure harmonique positive. Les courbes de niveau de la fonction conjuguée de la mesure harmonique $\omega(\tilde{\mathrm{P}})$, sur lesquelles grad $\omega(\tilde{\mathrm{P}}) \neq 0$, forment un écoulement harmonique monofeuillet fini et leur sous-ensemble qui converge vers $\mathcal{E}_{\tilde{\mathfrak{R}}}$ forme un sous-écoulement positif (voir [5]).

Mais d'après le théorème 2 il doit être nul, et $\mathcal{E}_{\tilde{\mathfrak{R}}}$ doit donc être de mesure harmonique nulle. Pour une approximation $\{D_n\}$ quelconque de $\mathcal{E}_{\mathfrak{R}}$, la variation $\int_{u_n} dv_n$ de la fonction conjuguée v_n sur la courbe de niveau de la fonction de mesure harmonique u_n sur $D_1 - \overline{D}_n$ tend vers 0 lorsque $n \to \infty$, parce que $\displaystyle\int \frac{du_n}{\int_{(u_n)} dv_n} \leqq \frac{1}{\int_{u_n} dv_n} \to \infty$. Donc $\mathcal{E}_{\mathfrak{R}}$ est de mesure harmonique nulle.

L'invariance connue ([28]) du type des surfaces de Riemann par rapport aux représentations quasi-conformes classiques découle du théorème 3.

Supposons qu'un domaine $\tilde{D}$ sur une surface de Riemann $\tilde{\mathfrak{R}}$ est transformé dans une autre surface de Riemann $\mathfrak{R}$ par une représentation $f(\tilde{P})$. S'il existe un sous-écoulement harmonique monofeuillet positif fini dans $\tilde{D}$ convergeant vers une partie $\tilde{A}$ de la frontière de $\tilde{D}$ tel que sur chaque trajectoire il existe une suite de points dont l'image tend vers $\mathcal{E}_{\mathfrak{R}}$, $f(\tilde{P})$ ne peut pas être parabolique ($\mathcal{E}_{\mathfrak{R}}$) d'après le théorème 2. Autrement dit, si $f(\tilde{P})$ est parabolique ($\mathcal{E}_{\mathfrak{R}}$), $\tilde{A}$ *est petit dans un certain sens.* Signalons le cas important suivant, dans lequel on trouve un sous-écoulement harmonique monofeuillet positif fini : $\tilde{D}$ contient un sous-domaine $\tilde{D}_1$, borné par un nombre dénombrable de courbes de Jordan $\{\tilde{C}\}$ qui sont libres ([5]) entre elles et par un ensemble $\tilde{A}$, tel que le prolongement par symétrie de $\tilde{D}_1$ le long de $\{\tilde{C}\}$ donne une surface de Riemann $\widehat{D}_1$ de frontière harmonique positive (c'est-à-dire du type hyperbolique) ([6]). La somme des deux fonctions de Green sur $\widehat{D}_1$ ayant les pôles symétriques, ou la fonction de Green ayant son pôle à quelque point sur une de $\{\tilde{C}\}$, fournit un sous-écoulement harmonique monofeuillet positif fini dans $\tilde{D}_1 \subset \tilde{D}$ qui converge vers $\tilde{A}$ (voir [5]). En particulier, si $\tilde{D}$ est le cercle-

([5]) C'est-à-dire que chaque point de chaque courbe possède un voisinage disjoint des autres courbes.

([6]) Pour le problème du type des surfaces de Riemann symétriques, voir [21; 22] par exemple.

unité et $\hat{A}$ un ensemble fermé de capacité logarithmique positive sur la circonférence, la surface symétrique est égale au plan entier pointé en $\tilde{A}$ et elle est hyperbolique.

3. Limitons nous maintenant aux représentations des sous-domaines de $U_\zeta : |\zeta| < 1$ dans une surface de Riemann ouverte $\mathfrak{R}$. Donnons d'abord deux lemmes topologiques. Si D est un domaine dans U_ζ, on appelle un ensemble connexe maximal sur la frontière relative de D par rapport à U_ζ une *composante frontière relative* à U_ζ. On va démontrer

Lemme 1. — *Soit* ζ_0 *un point frontière d'un domaine* $D \subset U_\zeta$ *sur* $\Gamma_\zeta : |\zeta| = 1$. *Si les diamètres des composantes frontières relatives à* U_ζ *de* D *qui ont des points communs avec* $|\zeta - \zeta_0| < \varepsilon$, *tendent vers zéro avec* ε, ζ_0 *est accessible de* D.

Soit $\{\zeta_n\}$ une suite de points dans D tendant vers ζ_0. On partage le plan ζ à l'aide d'un réseau dont les mailles sont des carrés de côtés parallèles aux axes des coordonnées tel que ζ_1 et ζ_2 sont deux nœuds du réseau. On partage ensuite chaque carré en quatre carrés égaux, chacun de ceux-ci en quatre nouveaux carrés et ainsi de suite.

On note $\mathfrak{S}_p$ le p-ième réseau. Si p_0 est suffisamment grand, il existe une courbe l_1 simple joignant ζ_1 et ζ_2 située dans D et formée par certains côtés des carrés de $\mathfrak{S}_{p_0}$. Considérons le rectangle ayant comme sommets opposés ζ_1 et ζ_2 et dont les côtés sont parallèles aux coordonnées; soit L_1 les deux côtés voisins qui sont situés dans U_ζ. Soit $\varepsilon_1 > 0$ un nombre positif quelconque et soit d_1 le supremum des diamètres des composantes frontières relatives $\{C\}_1$ de D qui ont des points communs avec L_1. On va montrer qu'il existe une courbe L_1' joignant ζ_1 et ζ_2 dans D et située dans le $(\varepsilon_1 + d_1)$-voisinage de L_1. Soit G_1 le premier rectangle délimité par l_1 et L_1 et soient $l_1^{(1)}$ et $L_1^{(1)}$ leurs parties qui bornent G_1. Supprimons de G_1 les carrés fermés de $\mathfrak{S}_p$, $p \geqq p_0$, qui ont des points communs avec $G_1 - D$. Si p est suffisamment grand, il reste une composante connexe H dont $l_1^{(1)}$ est une partie de la frontière extérieure. Soit $L_1^{(1)\prime}$ la courbe qui forme la frontière extérieure de H avec $l_1^{(1)}$. Lorsque $p \to \infty$, $L_1^{(1)\prime}$ s'approche de $L_1^{(1)} \cup \{C\}_1$; donc, si p est suffisamment grand, $L_1^{(1)\prime}$ est situé dans le ε_1-voisinage de $L_1^{(1)} \cup \{C\}_1$. Donc $L_1^{(1)\prime}$ est situé dans le

(ε_1+d_1)-voisinage de L_1. On fait la même opération pour les autres domaines délimités par l_1 et L_1; ainsi on obtient une courbe L'_1 joignant ζ_1 et ζ_2 et située dans le (ε_1+d_1)-voisinage de L_1. Si pour ζ_2 et ζ_3, ζ_3 et ζ_4, ... on définit $L_2, L_3, \ldots$ comme L_1, $L_1+L_2+\cdots$ converge vers ζ_0. On remplace L_n par L'_n situé dans le (ε_n+d_n)-voisinage de L_n, où d_n est le supremum des composantes frontières relatives de D qui ont des points communs avec L_n. Par hypothèse d_n tend vers 0 lorsque $n\to\infty$. Si on prend $\varepsilon_n\to 0$, $L'_1+L'_2+\cdots$ dans D converge à ζ_0 et le lemme est démontré.

Lemme 2. — *Si* D *est un domaine dans* U_ζ *borné par des courbes* (*closes ou ouvertes*) *de Jordan libres entre elles* (7) *et par un ensemble discret fermé relativement à* U_ζ, *les points sur* Γ_ζ *inaccessibles de* D *sont formés d'arcs ouverts et de certaines de leurs extrémités.*

Soit Γ_1 l'ensemble des points sur Γ_ζ tel que pour chaque point $\zeta\in\Gamma_1$ il existe une suite de continus dans $U_\zeta - D$ qui s'accumulent sur un arc contenant ζ en son intérieur. Γ_1 est visiblement un sous-ensemble ouvert de Γ_ζ. Soit Γ_2 le sous-ensemble de $\Gamma_\zeta-\Gamma_1$ tel que pour chacun de ses points ζ il existe une suite de continus dans $U_\zeta - D$ s'accumulant sur un arc dont ζ est une extrémité. On va démontrer que, si ζ_0 de Γ_ζ n'appartient ni à Γ_1 ni à Γ_2, il est accessible de D. Soit $d_1(C)=\inf_{\zeta\in C} d(\zeta,\zeta_0)$ et soit $d_2(C)=\sup_{\zeta\in C} d(\zeta,\zeta_0)$, C étant une composante frontière de D relative à U_ζ et $d(\zeta,\zeta_0)$ étant la distance euclidienne de ζ et ζ_0. Si ζ_0 est un point extrémité de C sur Γ_ζ, ζ_0 est accessible de D. Car d'après l'hypothèse $\zeta_0\notin\Gamma_1+\Gamma_2$, C n'oscille pas en s'approchant de ζ_0, et on peut supposer que $d_1(C)>0$ pour tous les C. Si $d_1(C_n)\to 0$ lorsque $n\to\infty$, $d_2(C_n)\to 0$ car $\zeta_0\notin\Gamma_1+\Gamma_2$. Alors ζ_0 est accessible de D d'après le lemme 1. Soit B l'ensemble des points inaccessibles de D. Alors $B\subset\Gamma_1+\Gamma_2$ et le lemme est démontré.

Enfin on a le théorème suivant :

Théorème 4. — *Soit* $\mathfrak{R}$ *une surface de Riemann ouverte et soit* $\mathcal{E}_{\mathfrak{R}}$ *un sous-ensemble fermé de la frontière* $\mathcal{F}_{\mathfrak{R}}$. *Soit* $K\subset U_\zeta$ *un ensemble de mesure linéaire nulle fermé relativement à* $U_\zeta:|\zeta|<1$,

(7) Alors chaque courbe peut osciller près de Γ_ζ, mais n'oscille pas dans l'intérieur de U_ζ.

et soit $f(\zeta)$ une représentation parabolique $(\mathcal{E}_{\mathfrak{R}})$ de $U_\zeta - K$ dans $\mathfrak{R}$. Si, à chaque point ζ d'un sous-ensemble X de Γ_ζ : $|\zeta| = 1$, sur toute courbe dans $U_\zeta - K$ aboutissant à ζ, il existe une suite de points dont les images convergent vers $\mathcal{E}_{\mathfrak{R}}$, la capacité logarithmique de X est nulle [8].

Soit $\{D_\nu\}$ une approximation régulière de $\mathcal{E}_{\mathfrak{R}}$ à frontières relatives $\{\gamma_\nu\}$. Si γ_ν passe par quelque point de E, on considère une fonction harmonique $h_\nu(P)$ dans $D_\nu - \overline{D}_{\nu+1}$, égale à 0 sur γ_ν et à 1 sur $\gamma_{\nu+1}$, et note D'_ν le domaine $D_{\nu+1} + \{P \in \mathfrak{R}, \varepsilon < h_\nu(P) \leqq 1\}$, où ε est un nombre positif tel que $\{h_\nu(P) = \varepsilon\}$ soit régulier et disjoint de E; c'est possible parce que E est de mesure linéaire nulle. Ainsi on a une approximation régulière $\{D'_\nu\}$ à frontières relatives $\{\gamma'_\nu\}$ disjointes de E.

Maintenant les images réciproques de $\{\gamma'_\nu\}$ sont les courbes de Jordan qui sont libres entre elles dans $U_\zeta - K$. On peut supposer que le point $\zeta = 0$ est contenu dans une des composantes de l'image de $\mathfrak{R} - \overline{D}'_\nu$. Soit U_ν telle composante et soit X_ν l'ensemble des points de Γ_ζ inaccessible de U_ν. D'après le lemme 2, X_ν se compose d'un ensemble ouvert X^0_ν et en plus d'un nombre dénombrable des points de Γ_ζ : par suite il est capacitable. Or, supposons que l'ensemble X soit de capacité logarithmique extérieure positive, $c > 0$. Comme X est contenu dans l'intersection $X_0 = \bigcap_\nu X_\nu$, la capacité de chaque X_ν est $\geqq c$. Pour une constante positive $c' < c$ il existe un ensemble fermé $X'_\nu \subset X_\nu$ de la capacité logarithmique $\geqq c'$. Soit $x_\nu(\zeta)$ le potentiel d'équilibre $\int \log 1/r \, d\mu \leqq \log 1/c' < \infty$ de la masse-unité sur X'_ν. La fonction $\widehat{x}_\nu(\zeta) = x_\nu(\zeta) + x_\nu(1/\overline{\zeta})$ est symétrique par rapport à Γ_ζ et $\leqq 2 \log 1/c'$. On a, pour les points $r_0 < |\zeta| < 1$, $\widehat{x}_\nu(\zeta) \geqq 2 \log \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{r_0}}$; cette valeur sera notée c_0. Comme pour les lignes de Green (cf. [5]), dans U_ζ, le flux des trajectoires orthogonales aux courbes de $\widehat{x}_\nu$-niveau et aboutissant aux points de X'_ν est 2π. L'ensemble K étant de mesure linéaire nulle, le flux des trajectoires qui ne passent pas par les

[8] Quand la capacité extérieure est égale à la capacité intérieure, on dit que l'ensemble est capacitable et on appelle sa valeur simplement la capacité.

points de K est encore 2π. Si $\{D_n\}$ est une approximation régulière de $\mathcal{E}_{\mathfrak{R}}$ satisfaisant (1) telle que D_1 est disjoint de l'image de $|\zeta| \leqq r_0$, on a, comme dans la démonstration du théorème 1,

$$(2\pi)^2 \int_0^1 \frac{du_n}{\int_{(u_n)} q\, dv_n} \leqq 2\pi\left(2\log\frac{1}{c'} - c_0\right) < \infty$$

pour $D_n \supset D'_\nu$. Nous sommes ainsi conduits à une contradiction parce qu'on peut faire $n \to \infty$ avec ν et alors la quantité à gauche tend vers ∞.

Remarque. — Si on utilise le résultat de Choquet [9; 10] selon lequel tous les ensembles de Borel sont capacitables, il suffit de démontrer que X_0 est de capacité logarithmique intérieure nulle. Ceci sera conclut facilement par l'existence du sous-écoulement harmonique monofeuillet positif fini dans U_ζ qui est démontrée à la fin du § 2. On remarque aussi que, en général, les points accessibles d'un domaine forment un ensemble analytique; donc l'ensemble X_ν ci-dessus est l'ensemble complémentaire d'un ensemble analytique. Cependant, cet ensemble n'est pas toujours capacitable (voir [9; 10]) et ceci est la raison pour laquelle on a besoin des lemmes pour démontrer le théorème 4.

4. On appliquera le théorème 4 à un problème discuté par Beurling [3] et Tsuji [35]. Soit $w = f(\zeta)$ une fonction non-constante méromorphe définie dans U_ζ et soit $S_w(\rho)$ l'aire sphérique de la surface de Riemann de la fonction inverse de $f(\zeta)$, au-dessus de la calotte du centre w et du rayon ρ. Lorsque $\overline{\lim\limits_{\rho\to 0}}\, S_w(\rho)/\rho^2 < \infty$, Beurling appelle w une *valeur ordinaire* et démontre que si l'aire totale de l'image de U_ζ par $f(\zeta)$ (9) est finie et si une valeur ordinaire w n'est prise au plus qu'un nombre fini de fois (il était démontré sans ces conditions, dans [35], que l'ensemble où la limite radiale de $f(\zeta)$ est égale à une valeur ordinaire est de capacité logarithmique intérieure nulle), $\lim\limits_{t\to 1} f(te^{i\chi}) = w (\zeta = te^{i\chi})$ seulement sur un ensemble de capacité logarithmique nulle sur Γ_ζ (10). Soit $f(\zeta)$ une fonc-

(9) Quand l'aire est mesurée, on prend toujours la multiplicité en considération.
(10) Voir [7; 8] pour les problèmes en liaison avec ce résultat.

tion non-constante analytique définie dans U_ζ qui prend des valeurs sur une surface de Riemann $\mathfrak{R}$. On appellera une valeur P de $\mathfrak{R}$ une *valeur faible* si $\lim_{t\to 1} f(te^{i\chi}) = P$ n'est vrai que sur un ensemble de capacité logarithmique nulle sur Γ_ζ. On démontrera :

THÉORÈME 5. — *Soit $f(\zeta)$ une fonction non-constante analytique définie dans $U_\zeta : |\zeta| < 1$ et prenant des valeurs sur une surface de Riemann $\mathfrak{R}$. On note $S_P(\rho)$ l'aire euclidienne de la partie de la surface de Riemann de la fonction inverse de $f(\zeta)$, se projetant dans le cercle $|\omega| < \rho$, où ω est un paramètre fixé du centre P de $\mathfrak{R}$. Si*

$$\varliminf_{\rho\to 0} S_P(\rho)/\rho^2 < \infty, \tag{2}$$

on a la même relation pour un autre paramètre quelconque qui s'annule en P et P est une valeur faible.

Soit W un autre paramètre qui s'annule à P. Si $\omega(W)$ représente la correspondance entre ω et W, on a $1/k < |\omega(W)|/|W|$ et $|\omega'(W)| < k < \infty$ pour des valeurs W près de $W=0$. Alors

$$\frac{S_\omega(\rho)}{\rho^2} = \frac{\displaystyle\iint_{|\omega|<\rho} n(\omega)\,d\sigma_\omega}{\rho^2} = \frac{\displaystyle\iint_{|\omega|<\rho} n(\omega)\frac{d\sigma_\omega}{d\sigma_W}\,d\sigma_W}{\rho^2}$$

$$\leqq \frac{k^2\displaystyle\iint_{|\omega|<\rho} n(W)\,d\sigma_W}{\rho^2} \leqq \frac{k^4\displaystyle\iint_{|W|<\rho k} n(W)\,d\sigma_W}{(\rho k)^2} = k^4\frac{S_W(\rho k)}{(\rho k)^2},$$

où S_ω et S_W sont les aires correspondant à ω et W, $n(\omega)$ et $n(W)$ indiquent combien de fois les points ω et W sont couverts, et $d\sigma_\omega$ et $d\sigma_W$ sont les éléments d'aire. On y voit l'indépendance de (2) par rapport au paramètre.

Nous allons démontrer que la fonction $f(\zeta)$ qui transforme U_ζ, diminué des images réciproques de P, dans $\mathfrak{R} - \{P\}$ est parabolique (P) (P est considéré comme un point frontière de $\mathfrak{R} - \{P\}$ avec la topologie ordinaire). Si on prend $0 < |\omega| < 1/(n+c)$ $(0 \leqq c = c^{te})$ comme D_n, la fonction $u_n(\omega)$ est égale à

$$\frac{\log(1+c)|\omega|}{\log\dfrac{1+c}{n+c}}.$$

Si on pose $\omega = \rho e^{i\varphi}$, la condition (1) s'écrit $\displaystyle\int_{\frac{1}{n+c}}^{\frac{1}{1+c}} \frac{d\rho}{\int \rho\, d\varphi} \to \infty$, où l'intégrale du dénominateur est égale à la longueur totale de la courbe située au-dessus de $|\omega| = \rho$ et sera notée par $\lambda(\rho)$. D'après (2) on peut choisir $\rho_\nu \to 0$ tel que $\int_0^{\rho_\nu} \lambda(\rho)\, d\rho < k'\rho_\nu^2$ ($k' = \mathrm{c^{te}} < \infty$). L'inégalité de Schwarz donne

$$\frac{\rho_\nu^2}{4} = \left(\int_{\frac{\rho_\nu}{2}}^{\rho_\nu} d\rho\right)^2 \leq \int_{\frac{\rho_\nu}{2}}^{\rho_\nu} \lambda\, d\rho \int_{\frac{\rho_\nu}{2}}^{\rho_\nu} \frac{d\rho}{\lambda} \leq k'\rho_\nu^2 \int_{\frac{\rho_\nu}{2}}^{\rho_\nu} \frac{d\rho}{\lambda}.$$

Ainsi $1/4k' \leq \int_{\frac{\rho_\nu}{2}}^{\rho_\nu} d\rho/\lambda(\rho)$ et par conséquent $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{\frac{1}{n+c}}^{\frac{1}{1+c}} d\rho/\lambda(\rho) = \infty$.

Enfin supposons qu'il existe une courbe l, aboutissant à $e^{i\alpha}$ dont $\lim\limits_{t\to 1} f(te^{i\alpha}) = P$, telle qu'il y a un voisinage V_P de P qui est disjoint de l'image de l. Il en résulte, d'après une généralisation du théorème de Lindelöf, que toutes les valeurs de V_P sont prises par $f(\zeta)$ dans un voisinage quelconque de $e^{i\alpha}$ sauf au plus deux valeurs. Alors $S_P(\rho) = \infty$ pour toute ρ, ce qui est en contradiction avec (2). Les conditions du théorème 4 sont satisfaites et on en conclut le théorème 5.

Remarque. — Même dans le cas où $w = f(\zeta)$ est une fonction méromorphe, le théorème 5 est une amélioration du résultat de Beurling et Tsuji. Mais comme Carleson [8] a démontré, pour α donné quelconque, $0 < \alpha < 1$, il existe une fonction analytique $f(\zeta)$ définie dans U_ζ telle que l'aire de l'image de U_ζ soit finie et telle que $\lim\limits_{t\to 1} f(te^{i\alpha}) = 0$ ($\zeta = te^{i\alpha}$) soit vrai sur un ensemble fermé d'α-capacité positive.

Nous pouvons généraliser la définition de valeur faible de la façon suivante : Soit $f(\zeta)$ une représentation analytique de U_ζ dans $\mathfrak{R}$, et soit $\mathcal{E}$ un ensemble dans $\mathfrak{R}$. Si M est un moyen de mesurer des ensembles sur Γ_ζ, nous dirons que l'ensemble $\mathcal{E}$ est M-faible si l'ensemble des points sur Γ_ζ, où l'ensemble d'accumulation radiale est compris dans $\mathcal{E}$, a une valeur nulle mesurée par M.

Le raisonnement de la démonstration du théorème 5 nous permet aussi d'énoncer :

THÉORÈME 6. — *Soit* $w = f(\tilde{P})$ *méromorphe sur une surface de Riemann* $\tilde{\mathfrak{R}}$ *dont la frontière est de mesure harmonique positive. Si* $f(\tilde{P})$ *tend vers zéro avec la fonction de Green* $G(\tilde{P})$ *sur les lignes de Green régulières issues du pôle* $\tilde{P}$ (*même suelement pour une suite de points sur chaque ligne*) *qui forment un ensemble de mesure de Green extérieure positive et si* (2) *pour* $S_0(\rho)$ *est satisfaite, il s'ensuit* $f(\tilde{P}) \equiv 0$.

Ce théorème correspond au théorème 27 dans [5].

5. Nous allons étudier la correspondance frontière quand un domaine de Jordan est représenté par une fonction univalente sur le cercle-unité.

D'abord on démontrera

THÉORÈME 7. — *Soit* D *un domaine simplement connexe hyperbolique dans le plan* w. *Représentons le cercle-unité* U_ζ: $|\zeta| < 1$ *sur* D *par une fonction continue univalente* $w = f(\zeta)$. *Supposons que pour chaque point* w' *sur la frontière* C *de* D, $f(\zeta)$ *est une représentation parabolique* (w') *et que, pour chaque point* ζ' *de* Γ_ζ: $|\zeta| = 1$, *la fonction inverse* $\zeta = g(w)$ *est une représentation parabolique* (ζ'). *Alors il existe une correspondance biunivoque entre les bouts sur* C *au sens de Carathéodory et les points sur* Γ_ζ. *D'ailleurs si* $f(\zeta)$ *est une représentation parabolique* (F), F *étant un ensemble fermé sur* C, *l'ensemble des points sur* Γ_ζ *qui correspondent aux bouts contenant des points de* F *comme points principaux, est de capacité logarithmique nulle.*

La première partie du théorème résulte de l'extension des théorèmes de Kœbe et de Lindelöf qui sont bien connus dans le cas où $f(\zeta)$ est conforme. Si $f(\zeta)$ tend vers une valeur w_0 suivant une suite de courbes qui s'accumulent sur un arc ou un point α de Γ_ζ, α doit être de capacité logarithmique nulle d'après le théorème 4 et par conséquent α est un point. Ainsi le théorème de Kœbe est démontré. Ensuite supposons que $f(\zeta)$ ait deux limites w_1 et w_2 suivant deux courbes l_1 et l_2 dans U_ζ aboutissant à un point ζ_0 de Γ_ζ mais disjointes l'une de l'autre en dehors de ζ_0. Joignons l_1 à l_2 par des courbes qui tendent vers ζ_0. Quand on représente D conformément sur le cercle-unité $|\omega| < 1$, les images de ces courbes tendent vers un point sur $|\omega| = 1$ par suite du théorème 4. Donc $w_1 = w_2$ et

$f(\zeta)$ tend vers cette valeur uniformément lorsque ζ tend vers ζ_0 à l'intérieur du domaine compris entre l_1 et l_2. Le théorème de Lindelöf est ainsi établi. La seconde partie du théorème résulte immédiatement du théorème 4.

Les théorèmes de ce genre ont été discutés par Beurling [3], puis par Dufresnoy [13; 14,], Tsuji [35], Yosida [36], Kaplan [18] et Kuroda [21]. Comme nous avons déjà dit dans l'introduction c'est Kaplan qui avait appliqué pour la première fois le théorème étoilé de Gross à ce problème. Nos théorèmes 5 et 7 peuvent être considérés comme la réponse à la question posée à la fin de son travail [18] ([11]).

6. Le théorème 7 nous suggère le problème général suivant. Soit M_1 un moyen de mesurer des ensembles sur la frontière C d'un domaine de Jordan D, et soit M_2 un autre moyen de mesurer des ensembles sur $\Gamma_\zeta : |\zeta| = 1$. L'$h$-mesure et l'$\alpha$-capacité ($0 \leq \alpha < 1$; 0-capacité = capacité logarithmique) sont des exemples de M_1 et M_2. Les valeurs mesurées par M_1 (ou M_2) seront appelées M_1- (ou M_2-) valeurs. *Nous proposons de comparer les M_1-valeurs des ensembles sur* C *avec les M_2-valeurs de leurs images sur Γ_ζ par une représentation conforme* (*ou plus générale que conforme*) *de* D *sur* $U_\zeta : |\zeta| < 1$. Notamment nous nous intéressons aux conditions sous lesquelles la *nullité* des M_1-valeurs dérive de la *nullité* des M_2-valeurs et vice versa. Dans le théorème 7, M_1 et M_2 tous les deux sont la capacité logarithmique. Un autre exemple est donné par le théorème de F. et M. Riesz [30] qui dit que les ensembles de mesure linéaire nulle sur C et Γ_ζ se correspondent l'un à l'autre si C est rectifiable. Dans la suite on étudiera le cas où M_2 est la capacité logarithmique et M_1 l'α-capacité ($0 \leq \alpha < 1$).

D'après le théorème 2, on a :

Théorème 8. — *Soit* D *un domaine simplement connexe (non nécessairement de Jordan) hyperbolique dans le plan w; représentons conformément* D *sur* $U_\zeta : |\zeta| < 1$. *Soit* F *un ensemble fermé sur* $\Gamma_\zeta : |\zeta| = 1$ *et soit* F^* *l'ensemble des bouts premiers tels que chacun d'eux soit limite d'une suite de points dont les images dans* U_ζ *s'étendent vers* F. *Alors, pour que* F *soit de capacité logari-*

([11]) Son dernier énoncé et l'énoncé dans l'introduction (lignes 11 et 12 du bas) ne sont pas tout à fait corrects. Voir la remarque à notre théorème 5.

thmique positive, il faut et il suffit qu'il existe un sous-écoulement harmonique monofeuillet positif fini dans D *qui s'étend vers* F*.

En particulier, si D est un domaine de Jordan : Pour que l'image sur Γ_ζ d'un ensemble fermé F* sur la frontière de D soit de capacité logarithmique positive, il faut et il suffit qu'il existe un sous-écoulement harmonique monofeuillet positif fini dans D qui s'étend vers F*.

Si la courbe de Jordan est très régulière, la positivité de la capacité logarithmique des ensembles sur C se conserve par la représentation conforme de l'intérieur de C sur U_ζ; ceci est réalisé par exemple si C est suffisamment régulière pour qu'à w_1 et w_2 quelconques sur C correspondent ζ_1 et ζ_2 sur Γ_ζ tels que le rapport des distances $\dfrac{\overline{w_1 w_2}}{\overline{\zeta_1\zeta_2}} < c^{te} < \infty$ (voir [4]). Cependant, la rectifiabilité de C ne garantit pas la positivité de la capacité logarithmique de l'image sur Γ_ζ. Autrement dit, la propriété énoncée dans le théorème de F. et M. Riesz n'est plus vraie si on considère la capacité logarithmique au lieu de la mesure linéaire.

7. Pour construire un exemple, on va calculer les valeurs d'α-capacité $(0 \leq \alpha < 1)$ des ensembles de Cantor généraux ([12]).

Soient $k_1, k_2, \ldots$ des nombres entiers supérieurs à 1 et soient $p_1, p_2, \ldots$ des nombres tels que $p_n \geq p_0 > 1$. On pose $l_n = 1/k_n p_n$. Soit I un intervalle de longueur d. On enlève de I les $(k_n - 1)$ intervalles de même longueur tels qu'il reste les k_n intervalles de même longueur $l_n d$. On appellera cette opération l'n-opération appliquée à I. On commence par appliquer l'1-opération à $[0, 1]$, puis on applique la 2-opération à chacun des intervalles qui en restent et ainsi de suite. On appellera l'ensemble limite restant un *ensemble de Cantor général.* Le calcul de sa capacité se fera comme dans [25].

On note γ_0 la constante de Robin de l'intervalle $[0, 1]$ et $\gamma_{n\nu}$ la constante de Robin de l'ensemble, obtenu par la ν-opération faite à $[0, 1]$, la $(\nu + 1)$-opération faite sur les intervalles restants et ainsi jusqu'à la n-opération. Si on fait la ν-opération

([12]) La bibliographie correspondante et d'autres résultats plus généraux dans ce même ordre d'idées seront donnés dans un travail à paraître dont un résumé a été présenté à une réunion de l'Amer. Math. Soc. Voir *Bull. Amer. Math. Soc.*, 59, (1953), pp. 453-454.

à [0, 1], la constante de Robin de chaque intervalle restant est égale à $\gamma_0 - \log l_\nu$. Soient $\{\mu_q^{(\nu)}\}$ $(q = 1, 2, \ldots, k_\nu)$ les distributions équilibres sur ces intervalles et posons $\mu_\nu = \frac{1}{k_\nu}\sum_{q=1}^{k_\nu} \mu_q^{(\nu)}$. Si on calcule le potentiel $u_\nu(x)$ due à cette distribution, on y a

$$\frac{1}{k_\nu}\left(\gamma_0 + \log\frac{1}{l_\nu}\right) \leqq u_\nu(x) \leqq \frac{1}{k_\nu}\left(\gamma_0 + \log\frac{1}{l_\nu}\right) + \frac{2}{k_\nu}\sum_{q=1}^{\left[\frac{k_\nu}{2}\right]} \log\frac{1}{\left(\frac{1-l_\nu}{k_\nu - 1}\right)q - l_\nu}.$$

Donc γ_{nn} satisfait aux mêmes inégalités que u_n. De la même façon on a

$$\frac{1}{k_1}\left(\gamma_{n2} + \log\frac{1}{l_1}\right) \leqq \gamma_{n1} \leqq \frac{1}{k_1}\left(\gamma_{n2} + \log\frac{1}{l_1}\right) + \frac{2}{k_1}\sum_{q=1}^{\left[\frac{k_1}{2}\right]} \log\frac{1}{\left(\frac{1-l_1}{k_1 - 1}\right)q - l_1},$$

$$\frac{1}{k_2}\left(\gamma_{n3} + \log\frac{1}{l_2}\right) \leqq \gamma_{n2} \leqq \frac{1}{k_2}\left(\gamma_{n3} + \log\frac{1}{l_2}\right) + \frac{2}{k_2}\Sigma\log\frac{1}{\left(\frac{1-l_2}{k_2 - 1}\right)q - l_2},$$

. . . .

Donc

$$\gamma_0/k_1\ldots k_n + \left(\frac{1}{k_1}\log\frac{1}{l_1} + \cdots + \frac{1}{k_1\ldots k_n}\log\frac{1}{l_n}\right) \leqq \gamma_{n1}$$
$$\leqq \gamma_0/k_1\ldots k_n + \left(\frac{1}{k_1}\log\frac{1}{l_1} + \cdots + \frac{1}{k_1\ldots k_n}\log\frac{1}{l_n}\right)$$
$$+\frac{2}{k_1}\sum_{q=1}^{\left[\frac{k_1}{2}\right]} \log\frac{1}{\left(\frac{1-l_1}{k_1-1}\right)q - l_1} + \frac{2}{k_1k_2}\sum_{q=1}^{\left[\frac{k_2}{2}\right]} \log\frac{1}{\left(\frac{1-l_2}{k_2-1}\right)q - l_2}$$
$$+ \cdots + \frac{2}{k_1\ldots k_n}\sum_{q=1}^{\left[\frac{k_n}{2}\right]} \log\frac{1}{\left(\frac{1-l_n}{k_n-1}\right)q - l_n}.$$

Comme $k_\nu \geqq 2$, $\gamma_0/k_1 \ldots k_n \leqq \gamma_0/2^n \to 0$ lorsque $n \to \infty$. On a

$$\sum_{q=1}^{\infty} \frac{\log p_q}{k_1 \ldots k_q} \leqq \Sigma \frac{1}{k_1 \ldots k_q} \log \frac{1}{l_q} = \Sigma \frac{1}{k_1 \ldots k_q} \log k_q p_q$$

$$\leqq \Sigma \frac{1}{k_1 \ldots k_{q-1}} + \Sigma \frac{\log p_q}{k_1 \ldots k_q} \leqq \Sigma \frac{1}{2^{q-1}} + \Sigma \frac{\log p_q}{k_1 \ldots k_q} = 2 + \Sigma \frac{\log p_q}{k_1 \ldots k_q}$$

et puis

$$\sum_{q=1}^{\left[\frac{k_\nu}{2}\right]} \log \frac{1}{\left(\frac{1-l_\nu}{k_\nu - 1}\right) q - l_\nu}$$

$$\leqq \log \frac{k_\nu - 1}{1 - k_\nu l_\nu} + \int_1^{k_\nu - 1} \log \frac{1}{\left(\frac{1-l_\nu}{k_\nu-1}\right) x - l_\nu} dx$$

$$= \log \frac{k_\nu - 1}{1 - k_\nu l_\nu} + \left[\frac{\frac{1-l_\nu}{k_\nu - 1} x - l_\nu}{(1-l_\nu)/(k_\nu - 1)} \cdot \log \frac{1}{\left(\frac{1-l_\nu}{k_\nu - 1}\right) x - l_\nu} + x \right]_1^{k_\nu - 1}$$

$$\leqq \log \frac{k_\nu - 1}{1 - k_\nu l_\nu} + \frac{(1-2l_\nu)(k_\nu - 1)}{1 - l_\nu} \log \frac{1}{1 - 2l_\nu} + (k_\nu - 1)$$

$$\leqq \log \frac{k_\nu}{1 - \frac{1}{p_\nu}} + k_\nu \log \frac{1}{1 - \frac{2}{k_\nu p_\nu}} + k_\nu \leqq \log \frac{k_\nu}{1 - \frac{1}{p_0}} + k_\nu \log \frac{1}{1 - \frac{1}{p_0}} + k_\nu.$$

Alors

$$\frac{2}{k_1} \sum_1^{\left[\frac{k_1}{2}\right]} \log \frac{1}{\left(\frac{1-l_1}{k_1 - 1}\right) q - l_1} + \frac{2}{k_1 k_2} \Sigma \log \frac{1}{\left(\frac{1-l_2}{k_2 - 1}\right) q - l_2} + \cdots$$

$$\leqq 2\left[\frac{1}{k_1} \log \frac{k_1}{1 - \frac{1}{p_0}} + \log \frac{1}{1 - \frac{1}{p_0}} + 1 \right] + \frac{2}{k_1} \left[\frac{1}{k_2} \log \frac{k_2}{1 - \frac{1}{p_0}} + \log \frac{1}{1 - \frac{1}{p_0}} + 1 \right] + \cdots$$

$$\leqq 8 \left(1 + \log \frac{1}{1 - \frac{1}{p_0}} \right) < \infty.$$

Donc, *pour qu'un ensemble de Cantor général soit de capacité logarithmique nulle, il faut et il suffit que*

$$\sum_{q=1}^{\infty} \frac{\log p_q}{k_1 \ldots k_q} = \infty \tag{3}$$

Si on tient compte de l'existence de la distribution d'équilibre sur un segment pour l'α-potentiel $\int \frac{1}{r^\alpha} d\mu (0 < \alpha < 1)$ (voir, par exemple [20]), on peut conclure de la même manière qu'*un ensemble de Cantor général est de α-capacité nulle si et seulement si*

$$\sum_{q=1}^{\infty} \frac{(p_1 \ldots p_q)^\alpha}{(k_1 \ldots k_q)^{1-\alpha}} = \infty. \tag{4}$$

Nous allons construire l'exemple suivant :

THÉORÈME 9. — *Il existe un domaine de Jordan* D *de frontière* C *rectifiable et un ensemble* X *d'α-capacité* $(0 \leqq \alpha < 1/2)$ *positive sur* C *tels que l'image de* X *sur* $\Gamma_\zeta : |\zeta| = 1$ *par la représentation conforme de* D *sur* $U_\zeta : |\zeta| < 1$ *est de capacité logarithmique nulle.*

Soit S un carré unité dans le plan $z : 0 < x < 1, 0 < y < 1$, et soit X un ensemble de Cantor général sur $0 < x < 1$ de mesure linéaire nulle mais de α-capacité positive $(0 \leqq \alpha < 1)$. On note G_n l'ensemble ouvert des intervalles qui sont enlevés jusqu'à la n-opération (quand on définit X). Soit $E_n = (0, 1) - G_n$. Enlevons de S les rectangles de base G_1 et de hauteur $h_1 < 1$, et désignons le domaine restant par S_1. Enlevons ensuite de S_1 les rectangles de base $G_2 - G_1$ et de hauteur $h_2 < h_1$, etc. On note D le domaine limite, $\widehat{D}$ la surface de Riemann obtenue à partir de D par symétrisation le long de la frontière de D dans $\{y > 0\}$, T_n (resp. $\widehat{T}_n$) le sous-ensemble ouvert de D (resp. $\widehat{D}$) situé entre $y = h_n$ et $y = h_{n+1}$, et β_n (resp. $\widehat{\beta}_n$) la partie de la ligne $y = h_n$ dans D (resp. $\widehat{D}$). On définit la fonction harmonique $\widehat{s}_n$ dans $\widehat{T}_n$ égale à 0 sur $\widehat{\beta}_n$ et à $\log \sigma_n$ sur $\widehat{\beta}_{n+1}$, $\sigma_n (> 1)$ étant choisi de façon que $\int_{\widehat{\beta}_n} \frac{\partial \widehat{s}_n}{\partial \nu} ds = 2\pi$. Soit

$$T_n = \Sigma K_\nu : K_\nu = \{a_\nu < x < a'_\nu,\ h_{n+1} < y < h_n\},$$

$a'_\nu - a_\nu = l_\nu$, et $\int \frac{\partial \widehat{s}_n}{\partial y} dx = \theta_\nu$ (intégration le long de la base de K_ν). Avec ces notations on a

$$(h_n - h_{n+1})^2\theta_\nu^2 = \left| \int_{h_{n+1}}^{h_n} \int_{a_\nu}^{a'} \frac{\partial \widehat{s}_n}{\partial y} dx\,dy \right|^2$$

$$\leq \int_{h_{n+1}}^{h_n} \int_{a_\nu}^{a'_\nu} |\operatorname{grad} \widehat{s}_n|^2 dx\,dy . \iint dx\,dy$$

$$= \log \sigma_n \int_{a_\nu}^{a'_\nu} \frac{\partial \widehat{s}_n}{\partial y} dx . (h_n - h_{n+1})\, l_\nu = (h_n - h_{n+1})\, \theta_\nu l_\nu \log \sigma_n.$$

Donc $\sum_\nu \theta_\nu (h_n - h_{n+1}) \leq \sum_\nu l_\nu . \log \sigma_n$. Comme $\sum_\nu \theta_\nu = \int_{\beta_n} \frac{\partial \widehat{s}_n}{\partial \nu} ds = \pi$ et $\sum_\nu l_\nu = m\mathrm{E}_n$, on a $\pi(h_n - h_{n+1})/m\mathrm{E}_n \leq \log \sigma_n$. Si on choisit S_n tel que $\Sigma(h_n - h_{n+1})/m\mathrm{E}_n = \infty$ (par exemple, tel que $m(\mathrm{E}_n)/(h_n - h_{n+1}) < \mathrm{c}^{\mathrm{te}} < \infty$), on a $\sum_n \log \sigma_n = \infty$. D'après le critère de Sario [32; 33], la frontière (idéale) de $\widehat{\mathrm{D}}$ est de mesure harmonique nulle. Si on représente $\widehat{\mathrm{D}}$ sur un domaine symétrique le long de l'axe réel, l'image de X est un ensemble de capacité logarithmique nulle sur l'axe. Ainsi on voit que X d'α-capacité $(0 \leq \alpha < 1)$ positive correspond à un ensemble de capacité logarithmique nulle sur Γ_ζ par la représentation conforme de D sur U_ζ.

On va choisir D de frontière rectifiable. En utilisant les notations du début de ce paragraphe, jusqu'à l'n-opération on enlève $k_1 \ldots k_n - 1$ intervalles au total et

$$m\mathrm{E}_n = k_1 \ldots k_n l_1 \ldots l_n = 1/p_1 \ldots p_n.$$

La longueur de la frontière de D est

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} (h_n - h_{n+1})(k_1 \ldots k_n - 1) + 4 = 2\Sigma(h_n - h_{n+1})k_1 \ldots k_n + 4 - 2h_1$$

et $$\Sigma(h_n - h_{n+1})/m\mathrm{E}_n = \Sigma(h_n - h_{n+1})p_1 \ldots p_n.$$

Si on peut choisir $\{k_n\}$, $\{p_n\}$ et $\{h_n\}$ tels que

$$\Sigma(h_n - h_{n+1})k_1 \ldots k_n < \infty, \qquad \Sigma(h_n - h_{n+1})p_1 \ldots p_n = \infty$$

(*) et $\Sigma \log p_n/k_1 \ldots k_n < \infty$ (si $\alpha = 0$)

ou $\Sigma(p_1 \ldots p_n)^\alpha/(k_1 \ldots k_n)^{1-\alpha} < \infty$ (si $0 < \alpha < 1$), on aura l'exemple cherché; par exemple, on peut faire le choix suivant : si $\alpha = 0$, $k_1 = k_2 = \ldots = 2$, $p_1 = p_2 = \ldots = 3$, $h_1 = 2/3$ et $h_n - h_{n+1} = (2/5)^n$ $(n \geqq 1)$, et, si $1/2 > \alpha > 0$, $k_1 = k_2 = \ldots = 2$, $p_1 = p_2 = \ldots = p_0$ quelconque tel que

$$2^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} > p_0 > 2 \quad \text{et} \quad (h_n - h_{n+1})^{\frac{1}{n}} = h_0$$

quelconque tel que $p_0 > 1/h_0 > 2$ (13).

Dans le cas où $1/2 \leqq \alpha$ les conditions (*) ne sont pas compatibles. Donc on peut poser la question : Est-ce que l'image d'un ensemble de α-capacité positive $(1/2 \leqq \alpha < 1)$ sur une frontière rectifiable est toujours de capacité logarithmique positive sur Γ_ζ ?

Cependant sans la condition de la rectifiabilité on a le

Théorème 10. — *Il existe, pour α quelconque, $0 \leqq \alpha < 1$, un domaine de Jordan* G *de la forme* : $0 < x < 1$, $0 < y < h(x) \leqq 1$ *tel que les points frontières de* G *sur* $y = 1$ *forment un ensemble* X *d'α-capacité positive et tel que* G *soit transformé conformément sur un domaine étoilé, le point à l'infini correspondant à* X.

On peut choisir, comme dans la démonstration du théorème 9, un domaine G de la forme demandée tel que dans la représentation conforme de G sur le demi-plan, X corresponde à un ensemble X′ de capacité logarithmique nulle sur l'axe. D'après le théorème de Mori [24] ce demi-plan peut être transformé sur un domaine étoilé tel que X′ corresponde au point à l'infini.

Ce thèorème justifie la remarque 3 du § 1.

8. Dans la dernière partie de ce travail, on discutera le théorème suivant analogue au deuxième théorème de Gross [16], et ses applications.

Théorème 11. — *Soit $f^*(z)$ une représentation à dérivées partielles continues d'un ensemble ouvert* G* *du plan* z $(z = x + iy)$ *dans une surface de Riemann* $\mathfrak{R}$, *et soit*

$$ds^2 = g_{11}\,du^2 + 2g_{12}\,du\,dv + g_{22}\,dv^2$$

(13) Ainsi les ensembles de Cantor obtenus par la tripartition suffisent pour les exemples et les conditions (3) et (4) sont alors bien connues (voir [31]). Mais nous avons considéré les ensembles de Cantor plus généraux pour montrer qu'ils ne suffisent pas à éclairer le cas $\alpha \geqq 1/2$.

une métrique riemannienne sur $\mathfrak{R}$ (14); $w = u + iv$ *est une paramètre locale sur* $\mathfrak{R}$. *Nous supposons que le jacobien ne s'annule pas dans* G^* *et nous définissons le quotient de dilatation* $q(z)$ *comme d'habitude et une quantité* $k(P)$ *correspondant à chaque point* P *de* $\mathfrak{R}$ *par* $\max\left|\frac{ds}{dw}\right| \Big/ \min\left|\frac{ds}{dw}\right|$. *Si l'image de* G^* *par* $f^*(z)$ *est d'aire finie* (*mesurée par rapport à la métrique riemannienne*) *et si l'intégrale* $\int q(x+iy)k(P(x+iy))\,dy$ *est finie pour chaque valeur* x *d'un ensemble* X, *la longueur riemannienne de l'image de la partie de la ligne* $x = c^{te}$ *située dans* G^* *est finie pour presque tout* x *de* X.

En effet, si $L(x)$ est la longueur de l'image de la ligne $x = c^{te}$ située dans G^*,

$$\{L(x)\}^2 = \left\{\int \left|\frac{ds}{dw}\right|\left|\frac{dw}{dy}\right| dy\right\}^2 \leqq \int \left|\frac{ds}{dw}\right|^2 \left|\frac{dw}{dy}\right|^2 \frac{1}{qk}\,dy \cdot \int qk\,dy.$$

Comme les ensembles $X_n = \left\{x ; \int qkdy < n\right\}$ et $\{x;\ L(x) = \infty\}$ sont linéairement mesurables pour chaque entier n, on peut énoncer le théorème 11 si $X'_n = \{x \in X_n;\ L(x) = \infty\}$ est de mesure linéaire nulle pour tout n. Supposons, au contraire, que $m(X'_{n_0}) > 0$. Alors

$$\begin{aligned}\infty = \int_{X'_{n_0}} \frac{\{L(x)\}^2}{n_0}\,dx &\leqq \iint \left|\frac{ds}{dw}\right|^2 \left|\frac{dw}{dy}\right|^2 \frac{1}{qk}\,dx\,dy \\ &\leqq \text{l'aire de l'image de } G^* < \infty.\end{aligned}$$

Ce qui est une contradiction et entraîne ainsi le théorème 11.

Corollaire. — *Soit* G *un domaine de la forme* : $0 < x < 1$, $0 < y < h(x) \leqq \infty$ *et soit* $f^*(z)$ *une représentation, à dérivées partielles continues et de jacobien non nul, de* G *dans une surface de Riemann* $\mathfrak{R}$ *munie d'une métrique riémannienne. Si* X *est un sous-ensemble de* $0 < x < 1$ *tel que pour chaque* $x \in X$ *on a* $\int q(x+iy)\,dy < \infty$ *et si pour tout compact* K *dans* $\mathfrak{R}$, *l'aire riémannienne de la partie, située au-dessus de* K, *de l'image de* G *par* $f^*(z)$ *est finie, l'image de* $0 < y < h(x)$ *s'étend vers un point de* $\mathfrak{R}$ *ou vers une composante frontière de Kérékjártó-Stoïlow de* $\mathfrak{R}$ (*si* $\mathfrak{R}$ *est ouverte*) *pour presque tout* $x \in X$.

(14) On suppose que g_{11}, g_{12} et g_{22} sont continus.

En effet, s'il existe un sous-ensemble X_1 de X de mesure linéaire positive telle que l'image de chaque ligne $x = c^{te}$, $x \in X_1$, oscille, nous pouvons trouver un domaine $\mathfrak{R}'$ compact dans $\mathfrak{R}$ et un sous-ensemble X_2 de X_1 de mesure linéaire positive tels que l'image dans $\mathfrak{R}'$ de chaque ligne $x = c^{te}$, $x \in X_2$, soit de longueur infinie. Prenons l'image inverse de $\mathfrak{R}'$ dans G comme ensemble ouvert G^* dans le théorème 11. Dans G^* on a $k(P) < k_0 < \infty$ et par suite $\int qk\,dy \leq k_0 \int q\,dy < \infty$ pour $x \in X_2$. Les conditions du théorème 11 sont satisfaites et X_2 est de mesure linéaire nulle. Il y a contradiction.

Si, de plus, la longueur de toute courbe qui tend vers la frontière de $\mathfrak{R}$ est infinie par rapport à la métrique riemannienne, l'image de la ligne $x = c^{te}$, $0 < y < h(x)$, aboutit à un point de $\mathfrak{R}$ pour presque tout $x \in X$. On peut trouver une telle métrique sur toute surface de Riemann ouverte à l'aide de la métrique non euclidienne.

9. Nous allons appliquer le théorème 11 à un problème traité par Beurling et Dufresnoy.

D'abord on a facilement

LEMME 3. — *Soit $f(\zeta)$ une fonction analytique dans $U_\zeta : |\zeta| < 1$ prenant des valeurs sur une surface de Riemann $\mathfrak{R}$. Si $f(\zeta)$ tend vers une valeur $P \in \mathfrak{R}$ suivant une courbe aboutissant à un point ζ_0 sur $\Gamma_\zeta : |\zeta| = 1$ et s'il existe un voisinage V de ζ_0 tel que la surface de revêtement universel de l'image dans $\mathfrak{R}$ de $V \cap U_\zeta$ est hyperbolique, $f(\zeta)$ tend vers P à l'intérieur du domaine angulaire de sommet ζ_0 dans U_ζ.*

Soit $\mathfrak{R}$ une surface de Riemann ouverte et soit $P_{\mathcal{C}}$ une composante frontière de $\mathfrak{R}$ au sens de Kérékjártó-Stoïlow. On dira que $P_{\mathcal{C}}$ est de mesure harmonique nulle si, pour tout ensemble compact F de capacité logarithmique positive et pour les courbes $\{\gamma_n\}$ régulières et compactes tendant vers $P_{\mathcal{C}}$, les fonctions harmoniques dans $\mathfrak{R} - F$ en dehors de γ_n (15) égales à 1 sur γ_n et 0 ailleurs sur la frontière du domaine, tendent vers 0 lorsque $n \to \infty$ (16).

(15) On dit que γ_n contient $P_{\mathcal{C}}$ en son intérieur.

(16) $P_{\mathcal{C}}$ est de mesure harmonique nulle si et seulement s'il est de mesure harmonique nulle dans le sens de [27].

LEMME 4. — *Soit* $\mathfrak{R}$ *une surface de Riemann ouverte, soit* $P_{\mathcal{C}}$ *une composante frontière au sens de Kérékjártó-Stoïlow de mesure harmonique nulle et soit* $f(\zeta)$ *une fonction analytique définie dans* U_ζ *et prenant des valeurs sur* $\mathfrak{R}$. *Si* $f(\zeta)$ *tend vers* $P_{\mathcal{C}}$ *suivant une courbe aboutissant à un point* ζ_0 *sur* Γ_ζ *et s'il existe un voisinage* V *de* ζ_0 *tel que* $f(\zeta)$ *n'y prend pas un ensemble de valeurs, sur* $\mathfrak{R}$, *de capacité logarithmique positive ou bien s'il existe une courbe* γ *renfermant* $P_{\mathcal{C}}$ *telle que la partie de la frontière idéale de* $\mathfrak{R}$ *en dehors de* γ *soit de mesure harmonique positive par rapport au domaine extérieur à* γ, *alors* $P_{\mathcal{C}}$ *est la limite angulaire de* $f(\zeta)$ *à* ζ_0.

Soient $\{\gamma_n\}$ les courbes mentionnées ci-dessus et soit $h_n(P)$ la mesure harmonique de γ_n, $0 < h_n(P) < 1$, définie en dehors de γ_n sur $\mathfrak{R}$ ou bien en dehors de γ_n sur $\mathfrak{R} - F$, où F est un ensemble discontinu de valeurs non prises par $f(\zeta)$ dans V de capacité logarithmique positive, compact dans $\mathfrak{R}$ à l'extérieur de γ_n. On prolonge $h_n(P)$ par 1 à l'intérieur de γ_n. On mène une courbe l' dans le voisinage de Γ_ζ aboutissant à ζ_0 telle que l et l' limitent un domaine A (intérieur à V le cas échéant), et on représente A sur la bande B : $0 < X < 1$, $0 < Y < \infty$ telle que l corresponde à $X = 0$ et l' à $X = 1$. La fonction composée

$$U_n(Z) = -h_n(f(\zeta(Z))), \qquad Z = X + iY,$$

est sousharmonique bornée dans B et on sait que

$$\varphi_n(X) = \overline{\lim_{Y \to \infty}}\, U_n(X + iY)$$

est une fonction convexe d'aprés le rèsultat de Hardy et Rogosinski [17]. Comme $\varphi_n(0) = -1$ et $\varphi_n(1) \leqq 0$, on a $\varphi_n(X) < -\varkappa$ $(\varkappa > 0)$ pour $0 \leqq X \leqq 1 - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, indépendant de n. S'il y a une suite de points $\{Z_\nu\}$, $Z_\nu = X_\nu + iY_\nu$, tels que $0 \leqq X_\nu \leqq 1 - \varepsilon$, $Y_\nu \to \infty$ et tels que leurs images sur $\mathfrak{R}$ tendent vers un point $P_0 \in \mathfrak{R}$ on a $U_n(Z_\nu) > -\varkappa$ pour tous $\{Z_\nu\}$, $\nu \geqq \nu_0$, et pour $n \geqq n_0$, puisque P_0 est de mesure harmonique nulle. Cependant on voit que $U_n(Z) < -\varkappa$ dans $0 \leqq X \leqq 1 - \varepsilon$, $Y \geqq Y_0$ si Y_0 est suffisamment grand. C'est une contradiction. On mène ensuite une autre courbe l'' dans le voisinage de Γ_ζ analogue à l' et on représente le domaine A' situé entre l et l'' sur B. Comme l'union des images de

$0 < X < 1 - \varepsilon$, $0 < Y < \infty$ dans A et A' contient un domaine angulaire de sommet ζ_0 quelconque si l' et l'' sont près de Γ_ζ et si ε est suffisamment petit, $f(\zeta) \rightarrow P_{\mathcal{C}}$ à l'intérieur d'un domaine angulaire quelconque de sommet ζ_0.

Enfin on a

THÉORÈME 12. — *Soit $f(\zeta)$ une fonction analytique définie dans* U_ζ : $|\zeta| < 1$ *et prenant des valeurs dans une surface de Riemann* $\mathfrak{R}$ *munie d'une métrique riemannienne. Si, pour tout compact* K *dans* $\mathfrak{R}$, *l'aire riemannienne de la partie, située au-dessus de* K, *de l'image est finie et si chaque composante frontière au sens de Kérékjártó-Stoïlow est de mesure harmonique nulle, (si* $\mathfrak{R}$ *est ouverte),* (17) *la limite angulaire de* $f(\zeta)$ *existe dans l'espace* $\mathfrak{R} + \mathcal{F}_{\mathfrak{R}}$ *quasi-partout sur* Γ_ζ : $|\zeta| = 1$, *c'est-à-dire sauf sur un ensemble de capacité logarithmique nulle, où* $\mathcal{F}_{\mathfrak{R}}$ *se compose des composantes frontières de* $\mathfrak{R}$.

THÉORÈME 13. — *Soit $f(\zeta)$ la même fonction. Si, pour tout compact* K *dans* $\mathfrak{R}$, *l'aire riemannienne de la partie, située au-dessus de* K, *de l'image est finie et si la longueur de chaque courbe s'étendant vers la frontière de* $\mathfrak{R}$ *(si* $\mathfrak{R}$ *est ouverte) est infinie, la limite angulaire de* $f(\zeta)$ *existe dans* $\mathfrak{R}$ *quasi-partout sur* Γ_ζ.

D'après le résultat de Choquet [9; 10], il suffit de démontrer que l'ensemble exceptionnel est de capacité logarithmique intérieure nulle sur Γ_ζ, puisqu'il est un ensemble borélien. On suppose qu'il existe un ensemble fermé F de capacité logarithmique positive sur Γ_ζ tel que à chaque point de F il n'aboutisse aucune courbe suivant laquelle $f(\zeta)$ tende vers un point de $\mathfrak{R}$ ou une composante frontière. On trouve un sous-écoulement harmonique monofeuillet positif fini dans U_ζ aboutissant à F au moyen de la fonction de Green. L'application du corollaire du théorème 11 et les lemmes 3 et 4 terminent la démonstration, si on prend en considération le fait que $f(\zeta)$ ne prend infiniment souvent que des valeurs de mesure 2-dimensionnelle nulle.

Ces théorèmes sont les généralisations d'un théorème de

(17) C'est vrai si la frontière de $\mathfrak{R}$ est de mesure harmonique nulle ($\mathfrak{R}$ est parabolique), mais l'inverse n'est pas toujours vrai comme le domaine extérieur à un ensemble de Cantor de capacité logarithmique positive en donne un exemple.

Beurling [3] et Dufresnoy [13; 14], mais ne contiennent pas le résultat suivant de Tsuji [35] : Si $\mathfrak{R}$ est le plan w entier ordinaire ou le plan augmenté du point à l'infini, si la métrique est euclidienne ou sphérique respectivement et si l'image de U_ζ par $f(\zeta)$ est d'aire finie, $f(\zeta)$ transforme les segments aboutissant aux points de Γ_ζ en courbes rectifiables partout sur Γ_ζ sauf sur un ensemble de capacité logarithmique intérieure nulle. Il est connu aussi que si a_n et b_n sont les coefficients de Fourier d'une fonction harmonique $u(\zeta)$ définie dans U_ζ et si $\sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha(a_n^2 + b_n^2) < \infty$ pour α, $0 < \alpha < 1$, $u(\zeta)$ possède des limites radiales partout sur Γ_ζ sauf sur un ensemble de $(1\text{-}\alpha)$-capacité nulle ([18]). Deny et Lions [11; 12] ont obtenu des résultats précis dans le cas où les fonctions appartiennent à une classe qui est plus grande que celle des fonctions harmoniques dont l'intégrale du carré du module du gradient est finie dans l'espace de dimension $p \geq 2$ ([19]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. Ahlfors : On quasi conformal mappings, *Journ. D'Anal. Math.*, 3 (1953-54), pp. 1-58; Corrections, pp. 207-208.

[2] L. Ahlfors et A. Beurling : Conformal invariants and function-theoretic null sets, *Acta Math.*, 83 (1950), pp. 101-129.

[3] A. Beurling : Ensembles exceptionnels, *Acta Math.*, 72 (1940), pp. 1-14.

[4] M. Brelot : Points irréguliers et transformations continues en théorie du potentiel, *Journ. Math.*, 19 (1940), pp. 319-337.

[5] M. Brelot et G. Choquet : Espaces et lignes de Green, *Ann. Inst. Fourier*, 3 (1952), pp. 199-263.

[6] A. Broman : On two classes of trigonometrical series, *Thèse*, *Univ. d'Uppsala*, (1947), 51 pp.

[7] L. Carleson : On a class of meromorphic functions and associated exceptional sets, *Thèse*, *Univ. d'Uppsala*, (1950), 79 pp.

[8] L. Carleson : Sets of uniqueness for functions regular in the unit circle, *Acta Math.*, 87 (1952), pp. 325-345.

[9] G. Choquet : Capacitabilité. Théorèmes fondamentaux, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 234 (1952), pp. 784-786.

[10] G. Choquet : Theory of capacities, *Ann. Inst. Fourier*, 5 (1954), pp. 131-295.

([18]) Voir Beurling [3], Salem et Zygmund [31], Broman [6] et Carleson [7].

([19]) Voir aussi Lelong-Ferrand [23].

[11] J. DENY : Les potentiels d'énergie finie, *Acta Math.*, 82 (1950), pp. 107-183.

[12] J. DENY et J. L. LIONS : Les espaces du type de Beppo Levi, *Ann. Inst. Fourier*, 5 (1954).

[13] J. DUFRESNOY : Sur les fonctions méromorphes et univalentes dans le cercle-unité, *Bull. Sci. Math.*, 69 (1945), pp. 21-36.

[14] J. DUFRESNOY : Remarques complémentaires sur deux propriétés dans la représentation conforme, *Bull. Sci. Math.*, 69 (1945), pp. 117-121.

[15] W. GROSS : Über die Singularitäten analytischer Funktionen, *Monats. für Math. Phys.*, 29 (1918), pp. 3-47.

[16] W. GROSS : Zum Verhalten analytischer Funktionen in der Umgebung singulärer Stellen, *Math. Zeit.*, 2 (1918), pp. 242-294.

[17] G. HARDY et W. ROGOSINSKI : Theorems concerning functions subbarmonic in a strip, *Proc. Royal Soc.*, Ser. A, 185 (1946), pp. 1-14.

[18] W. KAPLAN : On Gross's star theorem, schlicht functions, logarithmic potentials and Fourier series, *Ann. Acad. Sci. Fenn.*, A. I, (1951), n° 86, 23 pp.

[19] W. KAPLAN : Extensions of the Gross star theorem, *Michigan Math. Journ.*, 2 (1953-1954), pp. 105-108.

[20] K. KUNUGUI : Étude sur la théorie du potentiel généralisé, *Osaka Math. Journ.*, 2 (1950), pp. 63-103.

[21] T. KURODA : A property of some open Riemann surfaces and its application, *Nagoya Math. Journ.*, 6 (1953), pp. 77-84.

[22] T. KURODA: On the classification of symmetric Fuchsian groups of genus zero, *Proc. Japan Acad.*, 29 (1953), pp. 431-434.

[23] J. LELONG-FERRAND : Utilisation de métriques non euclidiennes dans l'étude des transformations conformes, *Proc. Int. Congress Math., Amsterdam*, vol. 2 (1954), pp. 135-136.

[24] A. MORI : On a conformal mapping with certain boundary correspondences, *Journ. Math. Soc. Japan*, 2 (1950), pp. 129-132.

[25] R. NEVANLINNA : *Eindeutige analytische Funktionen*, Berlin (1936).

[26] K. NOSHIRO : Open Riemann surface with null boundary, *Nagoya Math. Journ.*, 3 (1951), pp. 73-79.

[27] M. OHTSUKA: Boundary components of Riemann surfaces, *Nagoya Math. Journ.*, 7 (1954), pp. 65-83.

[28] A. PFLUGER : Sur une propriété de l'application quasi-conforme d'une surface de Riemann ouverte, C. R. *Acad. Sci. Paris*, 227 (1948), pp. 25-26.

[29] A. PFLUGER : Quelques théorèmes sur une classe de fonctions pseudoanalytiques, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 231 (1950), pp. 1022-1023.

[30] F. et M. RIESZ : Über die Randwerte einer analytischen Funktion, 4e *Congrès Math. Scand. Stockholm*, (1916), pp. 27-44.

[31] R. SALEM et A. ZYGMUND : Capacity of sets and Fourier series, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 59 (1946), pp. 23-41.

[32] L. SARIO: Sur le problème du type des surfaces de Riemann, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 229 (1949), pp. 1109-1111.

[33] L. SARIO : Modular criteria on Riemann surfaces, *Duke Math. Journ.*, 20 (1953), pp. 279-286.

[34] M. TSUJI : Theory of meromorphic functions in a neighbourhood of a closed set of capacity zero, *Jap. Journ. Math.*, 19 (1944-1948), pp. 139-154.

[35] M. TSUJI : Beurling's theorem on exceptional sets, *Tohoku Math. Journ.*, 2nd series, 2 (1950), pp. 113-125.

[36] T. YOSIDA : On the behaviour of a pseudo-regular function in a neighbourhood of a closed set of capacity zero, *Proc. Japan Acad.*, 26 (1950), pp. 1-10 (du n° 10).

[37] Z. YÛJÔBÔ : On the Riemann surfaces, no Green function of which exists, *Math. Japonicae*, 2 (1951), pp. 61-68.

Université de Nagoya.