ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

FRANÇOIS GALLISSOT

Les formes extérieures en mécanique

Annales de l'institut Fourier, tome 4 (1952), p. 145-297
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1952__4__145_0>

LES FORMES EXTÉRIEURES EN MÉCANIQUE

par F. GALLISSOT.

INTRODUCTION

La mécanique des systèmes paramétriques développée traditionnellement d'après les idées de Lagrange s'est toujours heurtée à des difficultés notables lorsqu'elle a désiré aborder les questions de frottement entre solides (impossibilité et indétermination) ou la notion générale de liaison (asservissement de M. Béghin), d'autre part la forme lagrangienne des équations du mouvement ne nous donne aucune indication sur la nature du problème de l'intégration.

Dans ces célèbres leçons sur les invariants intégraux Élie Cartan a montré que toutes les propriétés des équations différentielles de la dynamique des sytèmes holonomes résultaient de l'existence de l'invariant intégral $\int \omega$, $\omega = p_i dq^i - \mathrm{H}dt$. Ainsi à tout système holonome dont les forces dérivent d'une fonction de forces est associé une forme ω, les équations du mouvement étant les caractéristiques de la forme extérieure $d\omega$. Au cours de ces dix dernières années, sous l'influence des topologistes s'est édifiée sur des bases qui semblent définitives la théorie des formes extérieures sur les variétés différentiables. Il est alors naturel de se demander si la mécanique classique ne peut pas bénéficier largement de ce courant d'idées, si elle ne peut pas être construite en plaçant à sa base une forme extérieure de degré deux, si grâce à la notion de variétés, la notion de liaison ne peut pas être envisagée sous un angle plus intelligible, si les indéterminations et impossibilités qui paraissent paradoxales dans le cadre lagrangien n'ont pas une explication naturelle, enfin s'il n'est pas possible de considérer sous un jour nouveau le problème de l'intégration des équations du mouvement, ces dernières étant engendrées par une forme Ω de degré deux.

Pour atteindre ces divers objectifs il m'a semblé utile de reprendre dans le chapitre I l'étude des bases logiques sur lesquelles est édifiée la mécanique galiléenne. Je montre ainsi dans le § 1 que lorsqu'on se propose de trouver des formes génératrices des équations du mouvement d'un point matériel invariantes dans les transformations du groupe galiléen, la forme la plus intéressante est une forme extérieure de degré deux définie sur une variété $V_7 = E_3 \otimes E \otimes_3 T$ (E_3 espace euclidien, T droite numérique temporelle) (¹). Dans le § 11 on montre qu'à tout système paramétrique holonome à n degrés de liberté est associé une forme Ω de degré deux de rang $2n$ définie sur une variété différentiable dont les caractéristiques sont les équations du mouvement (²). Cette forme s'exprime si l'on veut au moyen de $2n$ formes de Pfaff et de dt, la forme hamiltonienne n'étant qu'un cas particulier simple. Dans le § 3 j'indique sommairement comment on peut s'affranchir de la servitude des coordonnées dans l'étude des systèmes dynamiques et le rôle important joué par l'opérateur $i(\ )$ antidérivation de M. H. Cartan (³), le champ caractéristique E de la forme Ω étant défini par la relation $i(E)\Omega = 0$.

Ces bases posées nous abordons dans le chapitre II la théorie générale d'une liaison imposée à un système matériel. Une liaison imposée à un système matériel se compose de deux éléments distincts :

1° une relation arbitraire $a(p_i, q^i, t) = 0$ liant les paramètres de position q^i, et de vitesse p_i, qui définit une sous-variété de V_{2n+1} ;

2° un jeu de forces qu'il faut appliquer au système pour réaliser cette liaison, jeu de forces qui, dans le langage des variétés, se traduit par un champ de liaison E_l défini dans l'espace tangent à V_{2n+1}.

Forme da et champ de liaison E_l ne sont pas indépendants puisqu'ils sont liés par la condition

$$\text{(II, 1)} \quad i(E + E_l)da = 0 \quad \text{ou} \quad i(E_l)da + i(E)da = 0.$$

Une classe importante de liaison est celle où le champ E est de la forme λe, λ fonction numérique sur V_{2n+1}, e champ de direction connu à priori (une convention permet toujours de se ramener à ce

(¹) M. KRAVTCHENKO a présenté cette conception au VIIIᵉ Congrès de Mécanique.

(²) Dès 1946 M. LICHNEROWICZ au *Bulletin des Sciences Mathématiques* tome LXX, p. 90 a déjà introduit les formes extérieures pour la formation des équations des systèmes holonomes et linéairement non holonomes.

(³) M. H. CARTAN, Colloque de Topologie, Bruxelles, 1950. Masson, Paris, 1951.

cas). Dans cette catégorie rentre en effet les contacts entre solides avec ou sans frottement (cf. § 6) les liaisons de puissance nulle dont nous donnons au § 5 une définition générale, liaison d'asservissement de M. Beghin. Pour ces liaisons (II, 1) montre que le facteur λ est le quotient de deux invariants scalaires $i(\mathrm{E})da$ et $i(e)da$. On voit ainsi qu'un des grands avantages de l'opérateur $i(\ )$ de M. H. Cartan est de permettre la détermination des réactions classiques indépendamment des coordonnées et de la solution des équations du mouvement. En outre pour $i(e)da = 0$, $i(\mathrm{E})da \neq 0$, le postulat de la rigidité des solides nous conduit à introduire la notion de compatibilité d'une liaison imposée à un système matériel se traduisant par $i(e)da \neq 0$. Enfin au § 7 nous étudions la détermination des équations du mouvement au moyen des caractéristiques d'une forme Ω_s de degré deux de rang $2(n-1)$ auxquelles on adjoint une forme de Pfaff, l'existence de cette forme étant une conséquence de la notion de compatibilité de la liaison.

Le chapitre III est consacré à l'étude des ensembles de p liaisons au sens donné précédemment à ce mot : Compatibilité de l'ensemble. Possibilité de déterminer les facteurs de liaisons au moyen d'opérateurs de M. H. Cartan indépendamment des équations du mouvement. Détermination des équations du mouvement comme caractéristiques d'une forme de degré deux de rang $2(n-p)$ jointes à p formes de Pfaff. On donne divers exemples concrets pour montrer la généralité de la méthode.

Les chapitres IV et V étudient pour une classe spéciale de liaisons qui comprend les liaisons unilatérales classiques, le problème : des signes étant imposés à priori aux facteurs de liaisons et aux formes da, des conditions initiales étant données quels sont les mouvements possibles du système. L'opérateur $i(\ )$ permet immédiatement de former p équations dont les seconds membres ne dépendent que des conditions initiales et des forces autres que les forces de liaisons. Une interprétation géométrique du système permet de transformer le problème en un problème d'Analysis-Situs pour une famille de 2^p p-èdres formée en prenant un vecteur dans chaque colonne du tableau

$$\begin{array}{llcl} \vec{a}^1, & \vec{a}^2, & \ldots\ldots\ldots & \vec{a}^p \\ \vec{\mathrm{A}}^1, & \vec{\mathrm{A}}^2, & \ldots\ldots\ldots & \vec{\mathrm{A}}^p \end{array}$$

On établit que la condition nécessaire et suffisante pour que 2^p p-èdres de même sommet n'aient pas de points internes communs est que les $(2^p - 1)$ déterminants mineurs diagonaux extraits de la matrice $\|r^{hk}\|(\vec{A}^k = \|-r^{hk}\|\vec{a}^h)$ soient tous positifs. Cette condition entraîne en particulier que pour les liaisons d'Appell qui comprennent comme cas particulier les liaisons holonomes et linéairement non holonomes classiques, les conditions initiales jointes au jeu de signes imposés à priori aux facteurs de liaisons et aux formes da, sont suffisantes pour déterminer le mouvement ultérieur. Pour les autres types de liaisons les conditions initiales peuvent ne pas être suffisantes. Le cas du frottement de glissement bien connu depuis les travaux de Painlevé n'a donc à ce point de vue rien d'exceptionnel. Il résulte de là que ce ne sont pas les lois du frottement de Coulomb qui doivent être mises en cause, tout autre loi donnerait lieu à des impossibilités et des indéterminations, tout ne dépendant que du signe de l'invariant $i(e)da$ au point M_0 de la variété image ($i(e)da < 0$).

Le chapitre VI est consacré à l'étude des systèmes différentiels de la dynamique considérés comme caractéristiques d'une forme Ω de degré deux définie sur une variété différentiable V_{2n+1}. Cette étude s'effectue au moyen d'endomorphismes de l'algèbre extérieure, endomorphismes qui conduisent aux opérateurs antidérivation $i(\ )$ et dérivation $\theta(\ )$ de M. H. Cartan. Je me suis permis à ce propos de reprendre le texte de sa célèbre conférence au Colloque de Topologie de Bruxelles 1950 pour faciliter au lecteur la compréhension de ce point de vue. Au lieu d'écrire les équations différentielles sous une forme analytique quelconque, ce qui a toujours l'inconvénient de faire jouer un rôle à un système de coordonnées plus ou moins bien adapté à la question, on raisonne uniquement sur la forme génératrice Ω. On sait depuis les travaux de Sophus Lie le rôle capital joué par les transformations infinitésimales dans l'intégration d'un système différentiel. Ce rôle se trouve merveilleusement mis en lumière par l'opérateur $\theta(X)$ puisque si le champ X est générateur d'une transformation infinitésimale pour Ω, $\theta(X)\Omega = 0$. Deux grands cas apparaissent immédiatement :

A) $d\Omega = 0$. A toute transformation infinitésimale correspond une intégrale première et réciproquement. On ne peut intégrer par quadratures que si l'on connaît un sous-anneau de n fonctions en involution. Il en résulte que pour $\Omega = dp_i \wedge dq^i - dH \wedge dt$, trouver des cas d'intégralité revient à étudier la construction de ce sous-anneau. Dans le cas de la mécanique H devant être quadratique, on indique la construction de H relative à l'existence de p éléments génériques algébriques de ce sous-anneau, ce qui permet de retrouver par une méthode générale les cas d'intégrabilité connus et d'en construire d'autres.

B) $d\Omega \neq 0$. On suppose connus r champs générateurs de transformations infinitésimales. L'intégration se décompose en deux phases :

1° L'intégration d'un système de Pfaff complètement intégrable de rang $(2n - r)$;

2° L'intégration d'un système de r formes de Pfaff invariantes résultats qui se trouvent déjà implicitement énoncés dans les leçons sur les invariants intégraux d'Élie Cartan.

Dans les applications mécaniques l'ordre du système complètement intégrable se trouve réduit de $(p+q)$ unités si d'une part on connaît p intégrales premières, d'autre part q liaisons au sens du chapitre II. On peut intégrer par quadratures si $2n - r = p + q$, et si les r formes invariantes sont fermées modulo les intégrales du système complètement intégrable.

Quelques exemples illustrent cette théorie.

CHAPITRE PREMIER

FORMES DIFFÉRENTIELLES ASSOCIÉES A UN SYTÈME MATÉRIEL

La mécanique ayant pour premier objectif la formation des équations du mouvement d'un système matériel, il est intéressant d'avoir une méthode permettant de les obtenir dans un système de coordonnées quelconques. C'est pour cette raison qu'il est utile d'étudier la possibilité d'associer à un système une ou plusieurs formes différentielles génératrices des équations, ces formes étant invariantes dans les transformations que l'on précisera.

§ 1. — Forme extérieure de Cartan associée à un point matériel.

Les formes invariantes que nous nous proposons de rechercher ont leur origine dans les quatre postulats de la mécanique newtonienne :

1) La masse d'un corps est un nombre positif invariable, la masse d'un ensemble matériel est une fonction complètement additive d'ensemble.

2) Le temps t est une grandeur absolue définie à une constante additive près.

3) Par rapport à tout trièdre galiléen un point M de masse m, animé d'une vitesse $\vec{v}$ soumis à une force $\vec{F}$ prend une accélération $\frac{d\vec{v}}{dt}$ telle que $m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$.

4) La force $\vec{F}$ est indépendante du trièdre galiléen de référence.

Deux repères galiléens orthonormés étant en mouvement rectiligne uniforme l'un par rapport à l'autre désignons par

x^j, t les cordonnées de M par rapport au premier j (1, 2, 3);
v^j les composantes de la vitesse v^j de M par rapport au premier;
X^j les composantes de la force $\vec{F}$ par rapport au premier;
a^j les composantes de la vitesse de translation $\vec{a}$ du 2^e^ repère par rapport au 1^er^;
ξ^σ, τ les cordonnées de M par rapport au 2^e^ σ (1, 2, 3);
α^σ les composantes de la vitesse $\vec{\alpha}$ de M par rapport au 2^e^;
Ξ^σ les composantes de la force $\vec{F}$ par rapport au 2^e^.

Considérons l'espace à sept dimensions produit tensoriel des espaces $E_3 \otimes E_3 \otimes T$ ($x^j \in E_3$ euclidien, $v^i \in E_3$ euclidien, $t \in T$ droite numérique). Les transformations ou changements de repère galiléen forment un groupe de Lie G de dimension 10 dont les équations en termes finis sont :

$$\left\{\begin{aligned} x^j &= a^j_\sigma \xi^\sigma + a^j \tau + b^j \\ t &= \tau + t_0 \\ u^i &= a^i_\sigma \alpha^\sigma + a^i \end{aligned}\right. \qquad i,\ j,\ \sigma \text{ égaux à } 1,\ 2,\ 3.$$

$\|a^j_\sigma\| = A$ désigne une matrice orthogonale de rang 3 dépendant des 3 paramètres de rotation que l'on peut expliciter en utilisant la représentation de Cayley (4) $A = (E - S) \times (E + S)^{-1}$ dans laquelle S désigne une matrice symétrique gauche de rang 3, E la matrice unité de même rang.

Pour le groupe G « prolongé holoédriquement » [au sens d'Élie Cartan (5)] au moyen d'une matrice orthogonale de rang 3, $L = \|L^\rho_j\|$ arbitraire il existe 10 formes de Pfaff invariantes (formes de Maurer-Cartan)

$$\begin{aligned} \omega^\rho &= L^\rho_j dv^j && = \Lambda^\rho_\sigma d\alpha^\sigma && \rho \text{ variant de 1 à 3} \\ \omega^{\rho'} &= L^\rho_j (dx^j - v^j\, dt) && = \Lambda^\rho_\sigma (d\xi^\sigma - \alpha^\sigma d\tau) && \rho' \text{ variant de 4 à 6} \\ \omega^7 &= dt && = d\tau. \end{aligned}$$

Le produit $\|dL\| . \|L^{-1}\| = \|d\Lambda\| . \|\Lambda\|^{-1}$ donne naissance à 3 formes en ayant posé $\Lambda = \|L\| . \|A\|$.

Parmi ces dix formes, les six premières sont indépendantes des différentielles des 3 paramètres de rotation. Il en résulte que pour un point matériel qui n'est soumis à aucune force les formes diffé-

(4) Cf. Hermann Weyl, *The Classical Groups Princeton*, 1946, pp. 56 à 62.
(5) Cf. Cartan Élie, *La théorie des groupes continus et finis*, Gauthier-Villars, 1937, pp. 121 et 124.

rentielles génératrices des équations différentielles [6] du mouvement que nous cherchons, invariantes dans les transformations du groupe G s'obtiendront en éliminant les 3 paramètres de rotation entre ces six formes.

Cette élimination peut s'effectuer en utilisant soit l'algèbre ordinaire, soit l'algèbre extérieure [7] et les propriétés classiques des matrices orthogonales

$$\sum_{\rho=1}^{3} l_j^\rho . l_i^\rho = 0 \quad \text{pour} \quad i \neq j \cdot \sum_{\rho=1}^{3} l_j^\rho l_i^\rho = 1 \quad \text{pour} \quad i = j.$$

a) En utilisant l'algèbre ordinaire on obtient :

$$\text{I} \qquad \begin{cases} (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 + (\omega^3)^2 = \sum_{j=1}^{3} (dx^j - v^j dt)^2 \\ (\omega^4)^2 + (\omega^5)^2 + (\omega^6)^2 = \sum_{j=1}^{3} (dv^j)^2 \end{cases}$$

$$\text{II} \qquad \omega^1\omega^4 + \omega^2\omega^5 + \omega^3\omega^6 = \sum_{j=1}^{3} (dx^j - v^j dt) . dv^i.$$

b) En utilisant l'algèbre extérieure

$$\text{III} \quad \omega^1 \wedge \omega^4 + \omega^2 \wedge \omega^5 + \omega^3 \wedge \omega^6 = \Sigma k_{ij} dv^i \wedge (dx^j - v^j dt)$$

$$k_{ij} = \sum_{\rho=1}^{3} \begin{vmatrix} l_i^\rho & 0 \\ 0 & l_j^\rho \end{vmatrix} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

$$\text{IV} \quad \omega^1 \wedge \omega^4 \wedge \omega^2 \wedge \omega^5 + \omega^2 \wedge \omega^5 \wedge \omega^3 \wedge \omega^6 + \omega^3 \wedge \omega^6 \wedge \omega^1 \wedge \omega^4.$$

$$\text{V} \qquad \begin{cases} \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^4 \\ \omega^4 \wedge \omega^5 \wedge \omega^6 \end{cases}$$

On remarquera qu'au sens de l'algèbre extérieure la IV^e forme est au facteur $\frac{1}{2\,!}$ près le carré de la III^e, que les deux formes V peuvent être remplacées par leur produit qui est au facteur $\frac{1}{3\,!}$ près est le cube de la III^e. Si bien qu'en algèbre extérieure on est conduit à une seule forme génératrice des équations différentielles du mouvement, tandis qu'en algèbre ordinaire on est conduit soit à deux formes du type I, soit à une forme du type II.

(6) En anticipant sur ce qui suit, il est possible d'associer à un système d'équations différentielles des formes, appartenant à des algèbres graduées, qui au moyen d'antidérivations engendrent le système.

(7) Cf. N. Bourbaki, Algèbre multilinéaire, *Actualités scientifiques*, n° 1044, Hermann et C^ie, Paris, 1948, pp. 53 à 76.

Dans le cas où le point matériel M de masse m est soumis à une force $\vec{F}$ le postulat (3) $\vec{F} = m \frac{\vec{dv}}{dt}$ conduit à remplacer dans ω^{ρ} $\rho(1, 2, 3)$ dv^i par $(mdv^i - X^i dt)$, X^i composantes de la force par rapport au premier repère.

De l'étude précédente résulte le théorème.

Théorème I. — *Il existe trois types de formes différentielles génératrices des équations du mouvement d'un point matériel invariantes dans les transformations du groupe galiléen*

$$\text{A} \quad \left\{ \begin{aligned} s &= \frac{1}{2m} \sum_1^3 (mdv^i - X^i dt)^2 \\ e &= \frac{m}{2} \sum_1^3 (dx^j - v^j dt)^2 \end{aligned} \right.$$

$$\text{B} \quad f = \sum_1^3 \delta_{ij}(dx^i - v^i dt)(mdv^j - X^j dt) \quad \delta_{ij} \text{ symboles de Krönecker,}$$

$$\text{C} \quad \omega = \sum_1^3 k_{ij}(mdv^i - X^i dt) \wedge (dx^j - v^j dt) \quad k_{ij} \text{symbole de Krönecker.}$$

Les équations différentielles du mouvement s'obtiennent en annulant les dérivées partielles du premier ordre des formes précédentes par rapport aux différentielles dx^i, dv^j des paramètres de position et de vitesse.

En ce qui concerne l'algèbre extérieure rappelons que si

$\Omega = A_{i_1 \cdots ir} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{ir}$, $i_1 \cdots ir$ étant r indices variant de 1 à n,

$$\frac{\partial \Omega}{\partial (dx^{ip})} = (-1)^{p+1} A^{i_1 \cdots ir} dx^{i_1} \wedge dx^{i} \cdots dx^{ip-1} \wedge dx^{ip+1} \cdots \wedge dx^{ir}.$$

Choix entre les trois types de formes différentielles invariantes dans les transformations du groupes galiléen. Forme extérieure de Cartan.

En principe les formes des trois types précédents sont génératrices des équations différentielles du mouvement. Lorsqu'on effectue un changement de variables T portant sur l'ensemble des paramètres de position et de vitesse $x^i = x^i(\rho^\alpha, t)$, $v^j = v^j(\rho^\alpha, t)$ (α variant de 1 à 6) les trois types ont respectivement pour expression

$$\text{A} \quad \left\{ \begin{aligned} s &= \frac{1}{2} s_{\alpha\beta} d\rho^\alpha d\rho^\beta - Q_{\alpha_0} d\rho^\alpha \, dt + \frac{1}{2} s_{00} \, dt^2, \\ e &= \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} d\rho^\alpha d\rho^\beta - \Gamma_{\alpha_0} d\rho^\alpha \, dt + \frac{1}{2} g_{00} \, dt^2, \end{aligned} \right.$$

en posant

$$\left\{\begin{aligned} s_{\alpha\beta} &= m\delta_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial \rho^\alpha}\cdot\frac{\partial v^j}{\partial \rho^\beta} \\ Q_{\alpha_0} &= \delta_{ij}\left(X^i\frac{\partial v^j}{\partial \rho^\alpha} - m\frac{\partial v^i}{\partial \rho^\alpha}\frac{\partial v^j}{\partial t}\right) \\ s_{00} &= \frac{1}{m}\delta_{ij}X^iX^j + m\delta_{ij}\frac{\partial v^i}{\partial t}\frac{\partial v^j}{\partial t} - \delta_{ij}X^i\frac{\partial v^j}{\partial t} \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} g_{\alpha\beta} &= m\delta_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial \rho\alpha}\cdot\frac{\partial x^j}{\partial \rho\beta} \\ \Gamma_{\alpha_0} &= m\delta_{ij}\left(v^i\frac{\partial x^j}{\partial \rho\alpha} - \frac{\partial x^i}{\partial \rho\alpha}\cdot\frac{\partial x^j}{\partial t}\right) \\ g_{00} &= m\delta_{ij}\left(v^iv^j + \frac{\partial x^i}{\partial t}\cdot\frac{\partial x^j}{\partial t} - \frac{\partial x^i}{\partial t}v^j\right) \end{aligned}\right.$$

expressions dans lesquelles δ_{ij} désigne le symbole de Krönecker

B $$f = f_{\alpha\beta}d\rho^\alpha d\rho^\beta - f_{\alpha_0}d\rho^\alpha\, dt + f_{00}\, dt^2.$$

Dans f, $(f_{\alpha\beta}, f_{\alpha_0}, f_{00})$ définissent un tenseur symétrique fonction de (ρ^α, t) ayant pour expression

$$\begin{aligned} f_{\alpha\beta} &= m\delta_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial \rho^\alpha}\cdot\frac{\partial v^j}{\partial \rho^\beta} \\ f_{\alpha_0} &= m\delta_{ij}v^i\frac{\partial v^j}{\partial \rho^\alpha} + \delta_{ij}X^i\frac{\partial x^j}{\partial \rho^\alpha} - m\delta_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial t^i}\cdot\frac{\partial v^j}{\partial \rho^\alpha} - m\delta_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial \rho^\alpha}\cdot\frac{\partial v^j}{\partial t} \\ f_{00} &= \delta_{ij}v^iX^j - m\delta_{ij}v^i\frac{\partial v^j}{\partial t} + m\delta_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial t}\frac{\partial v^j}{\partial t} - \delta_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial t}X^j \end{aligned}$$

C $$\omega = k_{\alpha\beta}(d\rho^\alpha \wedge d\rho^\beta) - k_{\alpha_0}d\rho^\alpha \wedge dt$$

où $(k_{\alpha\beta}, k_{\alpha_0})$ est un tenseur antisymétrique fonction de (ρ^α, t) ayant pour expression

$$(\mathrm{I},\ 1) \qquad k_{\alpha\beta} = mk_{ij}\begin{vmatrix} \frac{\partial v^i}{\partial \rho^\alpha} & \frac{\partial v^i}{\partial \rho^\beta} \\ \frac{\partial x^j}{\partial \rho^\alpha} & \frac{\partial x^j}{\partial \rho^\beta} \end{vmatrix}$$

$$k_{\alpha_0} = -mk_{ij}\begin{vmatrix} \frac{\partial v^i}{\partial \rho^\alpha} & \frac{\partial v^i}{\partial t} \\ \frac{\partial x^j}{\partial \rho^\alpha} & \frac{\partial x^j}{\partial t} \end{vmatrix} + mk_{ij}v^i\begin{vmatrix} \frac{\partial v^j}{\partial \rho^\alpha} & \frac{\partial v^j}{\partial t} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - k_{ij}X^i\begin{vmatrix} \frac{\partial x^j}{\partial \rho^\alpha} & \frac{\partial x^j}{\partial t} \\ 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Remarquons que les deux formes du type A ne s'expriment pas en général immédiatement en fonction des différentielles des intégrales premières du mouvement, tandis que la propriété est immédiate pour les deux formes B et C : B est une forme quadratique à discriminant nul d'après son origine donc s'exprime au moyen de 6 différentielles qui, pour un choix convenable des intégrales premières, peuvent être les différentielles de ces intégrales ; C est une forme extérieure réductible à une somme de 3 produits extérieurs de deux différentielles et par suite pour un choix convenable des intégrales premières C^α s'écrit

$$\omega = \bar{k}_{\alpha\beta} dC^\alpha \wedge dC^\beta$$

$\bar{k}_{\alpha\beta}$ tenseur antisymétrique fonction des C^α et de t.

Traditionnellement la mécanique est construite à partir du quotient par dt^2 de la forme particulière s du type A obtenue en envisageant les transformations particulières

$$x^i = x^i(q^h,\ t), \qquad v^j = \frac{\partial x^j}{\partial q^h}\dot{q}^h + \frac{\partial x^j}{\partial t}.$$

Elle conduit au principe de Gauss-Appell et aux équations de Lagrange : les équations du mouvement rendent minimum la forme quadratique en $\ddot{q}$ non homogène

$$\frac{s}{dt^2} = \frac{1}{2} s_{hk}\ddot{q}^h\ddot{q}^k + s_{hl}\ddot{q}^h\dot{q}^l - Q_h\ddot{q}^h.$$

Cette forme ne nous donne pas de renseignements immédiats sur la nature du problème de l'intégration du mouvement puisqu'elle dépend du pseudo-groupe ponctuel $x^i(q^h,\ t)$ (8). D'autre part cette forme de Gauss-Appell n'est pratique que pour des liaisons holonomes et linéairement non holonomes ; nous verrons au chapître II que la notion de liaison est susceptible d'une large extension et les calculs conduisent à envisager les transformations les plus générales portant sur l'ensemble des variables position et vitesse. Pour ces raisons les formes B et C se révèlent plus intéressantes.

Entre les formes B et C il y a une différence importante : C est bilinéaire tandis que B est quadratique, donc les calculs sont plus simples avec C qu'avec B ; de plus la forme C conduit immédiatement à l'invariant intégral cinétique de M. Élie Cartan.

Le fait que la forme C ne fait intervenir comme différentielles que

(8) Le pseudo-groupe qui intervient est celui de la variété V_{2n+1}.

les différentielles des intégrales premières peut encore s'établir comme suit : considérons un deuxième système de différentielles δ. On peut associer à la forme ω la forme bilinéaire $\omega(\delta, d)$

$$\omega(\delta, d) = \delta\rho^\alpha \wedge \frac{\partial\omega}{\partial(d\rho^\alpha)} + \delta\rho^\beta \wedge \frac{\partial\omega}{\partial(d\rho^\beta)} + \delta t \wedge \frac{\partial\omega}{\partial(dt)}$$
$$= k_{\alpha\beta}[\delta\rho^\alpha \wedge d\rho^\beta - \delta\rho^\beta \wedge d\rho^\alpha] - k_{\alpha_0}[\delta\rho^\alpha \wedge dt - \delta t \wedge d\rho^\alpha].$$

Les équations différentielles E du mouvement annulant $\frac{\partial\omega}{\partial d\rho^\alpha}$, $\frac{\partial\omega}{\partial d\rho^\beta}$ et $\frac{\partial\omega}{\partial(dt)}$ (conséquence des précédentes) si on considère dans l'espace à 7 dimensions une variété quelconque γ à une dimension le long de laquelle la différentielle est δ, sur la variété V_2 à deux dimensions engendrée par les lignes intégrales du système différentiel des équations du mouvement s'appuyant sur γ, $\omega(\delta, d) = 0$. La forme $\omega(\delta, d)$ linéaire par rapport au système de différentiel d étant nulle sur les lignes intégrales des équations du mouvement appartient au sous-module des différentielles des intégrales premières, en d'autres termes $\omega(\delta, d)$ s'exprime au moyen des différentielles des intégrales premières. Si maintenant on prend $\delta = d$, comme $\omega = \frac{1}{2}\omega(d, d)$ la forme ω de degré 2 s'exprime uniquement au moyen des intégrales premières C^α de E.

$$\omega = \bar{k}_{\alpha\beta} dc^\alpha \wedge dc^\beta \tag{I, 2}$$

$\bar{k}_{\alpha\beta}$ tenseur antisymétrique fonctions des C^α et de t.

Le résultat précédent peut encore s'exprimer ainsi : Quelle que soit la variété à une dimension pour la variété V_2 à deux dimensions engendrée par les lignes intégrales du système différentiel E s'appuyant sur γ l'intégrale $\int_{V_2} \omega(\delta, d)$ est nulle.

$$\int_{V_2} (\delta, d) = 0. \tag{I, 3}$$

Nous dirons avec M. Lichnerowicz (9) que ω engendre une relation intégrale d'invariance absolue pour le système des équations différentielles de la mécanique du point matériel.

Cas particulier. — Si $d\omega = 0$ ω ne s'exprime qu'au moyen des différentielles des intégrales premières de E et réciproquement.

(9) Cf. M. Lichnerowicz, *Bulletin des Sciences Mathématiques*, tome LXX, 2e série 1946, p. 90.

ω peut s'exprimer sous forme canonique en groupant deux à deux les intégrales premières

$$\omega = \sum_{\alpha=1}^{3} k_{\alpha\alpha^*} dc^\alpha \wedge dc^{\alpha^*} \qquad \text{avec} \qquad \alpha^* = \alpha + 3$$

$d\omega = 0$ entraîne le fait qu'un coefficient $k_{\alpha\alpha^*}$ n'est fonction que des deux intégrales C^α, C^{α^*}. En effet si u désigne une des variables intégrales premières ou temps $d\omega$ est somme de termes de la forme

$$\frac{\partial k_{\alpha\alpha^*}}{\partial u} du \wedge dc^\alpha \wedge dc^{\alpha^*}$$

$d\omega$ étant nul $\dfrac{\partial k_{\alpha\alpha^*}}{\partial u} = 0$ donc $k_{\alpha\alpha^*}$ n'est fonction que de C^α et de C^{α^*}. Par un changement d'intégrales premières de la forme

$$C^\alpha = C^\alpha(\bar{C}^{\alpha^*}, \bar{C}^\alpha), \qquad C^{\alpha^*} = C^\alpha(\bar{C}^{\alpha^*}, \bar{C}^\alpha)$$

ω devient

$$\text{(I, 4)} \qquad \omega = \sum_{\alpha=1}^{3} d\bar{c}^{\alpha^*} \wedge d\bar{c}^\alpha$$

et par suite s'exprime uniquement au moyen des différentielles des intégrales premières de E.

Invariant intégral cinétique de M. Elie Cartan. — $d\omega$ étant nulle, ω est une forme fermée, il existe dans l'espace homéomorphe à R^7 une forme de Pfaff ω^1 tel que $\omega = d\bar{\omega}^1$. D'après (I, 4) $\bar{\omega}^1 = \sum_{\alpha=1}^{3} \bar{c}^{\alpha^*} . d\bar{c}^\alpha$ admet pour différentielle ω et ne s'exprime qu'au moyen des intégrales premières du mouvement et de leurs différentielles; $\bar{\omega}^1$ engendre un invariant intégral absolu pour les équations différentielles E du mouvement. Si on considère la variété V_2 à deux dimensions engendrée par les lignes intégrales de E s'appuyant sur une variété à une dimension quelconque γ_0 l'intégrale (3) devient

$$0 = \int_{v_2} -\omega(\delta, d) = \int_{v_2} d[\bar{\omega}^1(\delta)] = \int_{Fv_2} \bar{\omega}^1(\delta)$$

Fv_2 désigne la frontière de V_2 constituée par un arc de courbe $\gamma_0 MM'$, par les arcs d'intégrales de E, M_0M, M'_0M', issues des points M_0 et M'_0 et par l'arc MM'. Le long des arcs MM_0 et M'_0M' $\bar{\omega}^1(\delta)$ étant une forme linéaire des différentielles des intégrales premières de E est nul. Il en résulte que $\int_{Fv_2} \bar{\omega}^1(\delta)$ se réduit aux deux intégrales prises le long de γ_0 et de γ, γ déduit de γ_0 au moyen des trajectoires solutions de E; d'où

$$\text{(I, 5)} \qquad \int_{M_0M'_0} \overline{\omega}^1(\delta) = \int_{MM'} \overline{\omega}^1(\delta).$$

L'égalité précédente exprime que $\overline{\omega}^1$ engendre un invariant intégral absolu.

Si l'on revient à l'expression de ω.

$$\omega = \sum_1^3 k_{ij}(m\,dv^i - x^i\,dt) \wedge (dx^j - v^j\,dt)$$
$$= mk_{ij}\,dv^i \wedge dx^j - mk_{ij}v^i\,dv^j \wedge dt + k_{ij}X^i\,dx^j \wedge dt$$

$d\omega = 0$ impose à la forme de Pfaff $k_{ij}X^i\,dx^j$ d'être fermée, par suite de se réduire à la différentielle d'une fonction U, d'où

$$\text{(I, 6)} \qquad \omega = mk_{ij}\,dv^i \wedge dx^j - d\mathrm{H} \wedge dt.$$

Avec $\mathrm{H} = \mathrm{T} - \mathrm{U}$, $\mathrm{T} = \frac{1}{2}\sum_1^3 m(v^i)^2$ demi-force vive, U fonction de force. (I, 6) montre que ω est la dérivée extérieure de

$$\omega^1 = \sum_{i=1}^3 mv^i\,dx^i - \mathrm{H}\,dt.$$

La forme ω^1 engendre l'invariant intégral d'Elie Cartan (10); elle diffère de la forme $\overline{\omega}^1$ (I, 4) d'une forme fermée.

Le fait que la forme ω de degré deux ne fait intervenir comme différentielles que les différentielles des intégrales premières et que dans le cas où $d\omega$ est nulle, ω est la dérivée extérieure de la forme engendrant l'invariant intégral cinétique de M. Elie Cartan conduit à la choisir comme forme génératrice des équations différentielles du mouvement d'un point matériel et à la placer à la base de la mécanique newtonienne.

Nous résumerons l'étude précente dans le théorème suivant :

Théorème II. — *A tout point matériel de masse m, de coordonnées x^j, animé d'une vitesse de composantes v^i, soumis à une force $\vec{F}$ de composants X^i par rapport à un trièdre galiléen orthonormé on peut associer une forme différentielle extérieure de Cartan du deuxième ordre possédant les propriétés suivantes :*

1. *ω est invariante dans les transformations du groupe galiléen, en d'autres termes a même expression par rapport à tout repère galiléen orthonormé.*

2. *les équations différentielles du mouvement du point sont les équations associées à* ω *au sens de Cartan.*

3. ω *est unique.*

4. ω *s'exprime uniquement en fonction des différentielles des intégrales premières des équations du mouvement, les coefficients étant un tenseur antisymétrique fonction des intégrales premières et d'une variable* t *par exemple; si* $d\omega = 0$, ω *ne s'exprime qu'au moyen des intégrales premières et de leurs différentielles.*

Rappelons que lorsqu'on utilise les variables usuelles (x^j, v^i, t) ω sous forme développée s'écrit :

$$(\mathrm{I},\ 7) \qquad \omega = mk_{ij}\, dv^i \wedge dx^j - mk_{ij} v^i\, dv^j \wedge dt + k_{ij} X^i\, dx^j \wedge dt$$

k_{ij} symbole de Krönecker.

Les équations associées à ω sont les équations classiques de Newton

$$\frac{\partial \omega}{\partial (dx^j)} = -m(dv^i - X^i\, dt) = 0$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial (dv^i)} = m\,(dx^j - v^j\, dt) = 0 \quad (i,\ j = 1,\ 2,\ 3)$$

qui interprétées géométriquement dans l'espace euclidien E_3 signifient

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \qquad \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \vec{V}.$$

L'existence de ω et les équations associées constituent la traduction analytique naturelle des quatre postulats de la mécanique newtonienne du point matériel.

Remarques. — 1. ω se compose en deux parties : l'une cinétique ω_c

$$\omega_c = mk_{ij}\, dv^i \wedge dx^j - mk_{ij} v^i\, dv^j \wedge dt$$

qui est une forme fermée

$\omega_c = d(k_{ij} m v^i\, dx^j - T\, dt)$ T désignant la demi-force vive $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} m(v^i)^2$
l'autre dynamique ω_d

$$\omega_d = k_{ij} X^i\, dx^j \wedge dt$$

(10) Cf. M. Elie Cartan. *Leçons sur les Invariants intégraux.*. Paris 1922, pp. 1 à 6.
(11) Cf. M. Gallissot. *Annales de la Faculté de Grenoble,* tome III, 1951, pp. 277 à 285.

produit extérieur du travail élémentaire de la force agissant sur le point par la différentielle du temps.

2. Il est essentiel de remarquer que ce sont les équations associées à ω qui lient les paramètres de vitesse aux paramètres de position, comme le montrent en particulier les équations

$$\frac{d\omega}{\partial(dv^i)} = dx^j - v^j\,dt = 0.$$

3. Signalons que la mécanique relativiste du point matériel peut être construite comme la mécanique newtonienne au moyen d'une forme extérieure ω_l invariante dans le groupe de Lorentz, et que la forme génératrice des équations de la mécanique newtonienne est la limite de la forme ω_l quand on fait tendre le rapport $\beta = \frac{V}{c}$ vers zéro, v désignant la vitesse du point matériel, c la vitesse de la lumière ([11]).

4. Il est également important de remarquer que la forme ω peut s'exprimer au moyen de six formes de Pfaff construites sur les différentielles des paramètres position vitesse temps, formes qui s'introduisent logiquement dans les problèmes d'intégration et dans l'étude de certaines liaisons,

$$\omega = K_{\alpha\beta}\omega^\alpha \wedge \omega^\beta \quad K_{\alpha\beta} \text{ tenseur antisymétrique } (\alpha,\ \beta = 1 \text{ à } 6).$$

Exemples. — 1. Point pesant lancé suivant la verticale ascendante et soumis à une résistance fonction de la vitesse $mf(v)$.

m étant la masse de ce point, V la vitesse, g l'intensité de la pesanteur, z la cote, ω s'écrit

$$\frac{\omega}{m} = dv \wedge dz - [vdv + gdz + f(v)dz] \wedge dt$$

ou encore

$$\frac{\omega}{m} = [g + f(v)]\left[\frac{dv}{g+f(v)} + dt\right] \wedge \left[dz + \frac{vdv}{g+f(v)}\right]$$

$\frac{\omega}{m}$ s'exprime donc au moyen des deux formes $\frac{dv}{g+f(v)} + dt$, $dz + \frac{vdv}{g+f(v)}$ qui annulées sont d'après la théorie précédente les équations du mouvement la dérivée extérieure de chacune d'elles étant nulle, en d'autres termes chacune d'elles étant fermée, le problème est ramené aux quadratures.

Sur cet exemple simple on saisit le procédé qui nous permettra l'étude de cas d'intégralité des équations du mouvement.

2. Point mobile sous l'action de forces données X, Y, Z, fonctions de x, y, z d'autre part soumis à une résistance de milieu $mf(v)$ opposée à la vitesse. En prenant pour paramètres de vitesse les coordonnées sphériques du vecteur vitesse v, ψ, θ, pour paramètres de position les coordonnées x, y, z du point par rapport à un trièdre fixe, m étant la masse du point $\frac{\omega}{m}$ s'écrit :

$$\begin{aligned}\frac{\omega}{m} = &(dv \sin\theta\cos\psi + v\cos\theta\cos\psi d\theta - v\sin\theta\sin\psi d\psi)\wedge dx\\ &+(dv\sin\theta\sin\psi + v\cos\theta\sin\psi d\theta + v\sin\theta\cos\psi d\psi)\wedge dy\\ &+(dv\cos\theta - v\sin\theta d\theta)\wedge dz - (vdv - \mathrm{X}dx - \mathrm{Y}dy - \mathrm{Z}dz)\wedge dt\\ &- f(v)(\sin\theta\cos\psi dx + \sin\theta\sin\psi dy + \cos\theta dz)\wedge dt.\end{aligned}$$

Cette forme d'apparence plus compliquée que les équations classiques met en évidence les intégrales premières du mouvement pour certains choix de X, Y, Z. Ainsi pour un point pesant $\mathrm{X} = 0$, $\mathrm{Y} = 0$, $\mathrm{Z} = -mg$

$$\begin{aligned}\frac{\omega}{m} = &[dv + f(v)\,dt + g\cos\theta\,dt]\wedge[\sin\theta\cos\psi dx + \sin\theta\sin\psi dy\\ &+\cos\theta dz - v\,dt] + [vd\theta - g\sin\theta\,dt]\wedge[\cos\theta\cos\psi dx\\ &+\cos\theta\sin\psi dy - \sin\theta dz] + vd\psi\wedge[-\sin\theta\sin\psi dx + \sin\theta\cos\psi dy].\end{aligned}$$

Les équations associées s'obtiennent en annulant les 6 formes placées entre crochets ; en particulier

$$d\psi = 0 \qquad dv + [f(v) + g\cos\theta]\,dt = 0 \qquad vd\theta - g\sin\theta\,dt = 0$$

dont l'interprétation géométrique est immédiate : projection des forces sur la tangente et la normale à la trajectoire.

3. Point pesant mobile avec frottement sur un plan incliné.

Soient i l'angle d'inclinaison du plan horizontal, f le coefficient de frottement, m la masse du point, Ox l'axe dirigé suivant la ligne de plus grande pente du plan, Oy directement perpendiculaire. Prenons pour paramètres de vitesse les coordonnées polaires v, α, de la vitesse V, pour paramètres de position x, y. $\omega = \omega_c + \omega_d$

$$\omega_c = d\left[mv\cos\alpha dx + mv\sin\alpha dy - m\frac{v^2}{2}dt\right]$$

d symbole de la dérivée extérieure

$$\omega_d = mg \sin i\, dx - fmg \cos i \cos \alpha dx - fmg \cos i \sin \alpha dy] \wedge dt$$

d'où

$$\frac{\omega}{m} = dv \wedge (\cos \alpha dx + \sin \alpha dy) + v d\alpha \wedge (-\sin \alpha\, dx + \cos \alpha\, dy)$$
$$- v dv \wedge dt + [g \sin i dx - fg \cos i (\cos \alpha dx + \sin \alpha dy)] \wedge dt$$

$$\frac{\omega}{m} = [d(v \sin \alpha) + fg \cos i \sin \alpha\, dt] \wedge [dy - v \sin \alpha\, dt]$$
$$+ [d(v \cos \alpha) + (fg \cos i \cos \alpha - g \sin i)\, dt] \wedge [dx - v \cos \alpha\, dt]$$

$\frac{\omega}{m}$ est exprimée au moyen de 4 formes indépendantes qui égalisées à zéro donnent les équations différentielles du mouvement, dont l'interprétation géométrique est immédiate. L'intégration de ces équations sera effectuée au chapitre VI comme application d'une méthode générale.

§ 2. Forme extérieure associée à un système matériel paramétrique

Nous considérerons avec M. Brelot ([12]) un système matériel S. comme porteur

1. d'une distribution de masses $\geqslant 0$ ou mesure $\geqslant 0$ notée $m(e)$ fonction finie $\geqslant 0$ d'ensemble borélien borné, complètement additive ;

2. d'une distribution de forces, champ de vecteurs de mesure $\vec{F}(e)$.

Fonctions et ensembles boréliens étant supposés bornés, nous allons montrer qu'on peut associer à un système paramétrique une forme extérieure $\Omega = \Omega_c + \Omega_d$.

a) Calcul de Ω_c. — Considérons dans un espace euclidien à 3 dimensions un ensemble borélien borné D, et l'ensemble variable borélien borné Δ qui, pour chaque valeur des $n+1$ paramètres réelles q^i (i variant de 0 à n, avec $q^0 = t$), est en correspondance biunivoque avec D au moyen de la fonction vectorielle borélienne en M

$$\overrightarrow{O\mu} = \vec{f}(M,\ q^i) \tag{II, 1}$$

Le domaine Δ est déterminé géométriquement par la donnée du

([12]) *Principes mathématiques de la mécanique classique*. Arthaud, Grenoble, p. 10 à 19.

point q de coordonnées locales q^i dans l'espace des paramètres. En supposant l'existence des dérivées premières de $\vec{f}$ par rapport aux q^i bornées pour M variable dans D et les q^i bornées, par différentiation de (II, 1)

$$d\overrightarrow{O\mu} = \frac{\partial \vec{f}}{\partial q^i} dq^i.$$

Nous avons vu au § 1 que la vitesse d'un point matériel pouvait être défini arbitrairement et que les équations associées à la forme ω indiquait la manière dont les paramètres de vitesse étaient liées aux paramètres de position du point. Il en résulte que nous définirons la vitesse de la manière suivante. Soit une autre fonction vectorielle borélienne en M

$$\overrightarrow{V_\mu} = \vec{V}(M,\ q^i,\ \rho^\alpha) \qquad \text{(II, 2)}$$

des $(n+1)$ paramètres q^i et de n autres paramètres ρ^α bornés, admettant pour M dans D quelconque des dérivées premières bornées par rapport aux q^i et aux ρ^α. $\overrightarrow{V\mu}$. sera appelé vitesse du point μ. Par différentiation de (II, 2)

$$d\vec{V}\mu = \frac{\partial \vec{v}}{\partial q^i} dq^i + \frac{\partial \vec{v}}{\partial \rho^\alpha} d\rho^\alpha.$$

Les projections de $\overrightarrow{dO\mu}$ et de $\overrightarrow{dV\mu}$ sur trois axes d'un repère galiléen orthonormé définissent dx^j et dv^i; au point M de D en correspondance avec le point μ de Δ est associée la forme ω_c

$$
\begin{aligned}
= k_{ij} dv^i \wedge dx^j - k_{ij} v^i dv^j \wedge dt = {} & k_{ij} \frac{\partial v^i}{\partial \rho^\alpha} \frac{\partial f^j}{\partial q^h} d\rho^\alpha \wedge dq^h \\
& + k_{ij} \frac{\partial v^i}{\partial q^l} \frac{\partial f^j}{\partial q^h} dq^l \wedge dq^h - k_{ij} v^i \left(\frac{\partial v^j}{\partial \rho^\alpha} d\rho^\alpha + \frac{\partial v^j}{\partial q^h} dq^h \right) \wedge dt
\end{aligned}
$$

ω_c est ainsi une forme de degré 2 définie sur la variété V_{2n+1} des $(2n+1)$ paramètres q^i, t, ρ^α, fibrée, la variété de base étant la variété espace temps de configuration V_{n+1}. A l'ensemble matériel Δ est associée la forme $\Omega_c = \int_D \omega_c \delta m$ définie sur la variété V_{2n+1}. le symbole $\int$ étant celui de l'intégrale de Radon.

$$\Omega_c = k_{\alpha i} d\rho^\alpha \wedge dq^i + k_{lh} dq^l \wedge dq^h - k_{\alpha_0} d\rho^\alpha \wedge dt - k_{hi_0} dq^h \wedge dt$$

avec

$$k_{\alpha i} = \int_D k_{ij} \frac{\partial v^i}{\partial \rho^\alpha} \cdot \frac{\partial f^j}{\partial q^h} \qquad k_{lh} = \int_D k_{ij} \left(\frac{\partial v^i}{\partial q^l} \frac{\partial f^j}{dq^h} - \frac{\partial v^i}{\partial q^h} \cdot \frac{\partial f^j}{\partial q^l} \right) \delta m$$

$$k_{\alpha_0} = \int_D k_{ij} v^i \frac{\partial v^j}{\partial \rho^\alpha} \delta m - \int_D k_{ij} \frac{\partial v^i}{\partial \rho^\alpha} \frac{\partial f^j}{\partial t} \delta m,$$

$$k_{h_0} = \int_D k_{ij} v \frac{\partial v^j}{\partial q^h} - \int_D k_{ij} \left(\frac{\partial v^i}{\partial t} \frac{\partial f^j}{\partial q^h} - \frac{\partial v^i}{\partial q^h} \cdot \frac{\partial f^j}{\partial t} \right) \delta m.$$

Remarquons qu'on peut également calculer Ω_c comme dérivée extérieure de

$$\int_D (\overrightarrow{V_\mu} . d\overrightarrow{O_\mu}) \delta m - \frac{1}{2} dt \int_D (\overrightarrow{V_\mu})^2 \delta m$$

et que ce calcul peut se faire en substituant aux différentielles des paramèrres de position dq^i, des formes de Pfaff construites au moyen de ces différentielles, les coefficients de ces formes étant des fonctions boréliennes en M et des paramètres q^i, On obtient ainsi pour la partie cinétique Ω_c de Ω

$$\Omega_c = k_{\sigma\pi}(\omega^\sigma \wedge \omega^\pi) - k_{\sigma_0}(\omega^\sigma \wedge dt)$$

ω^σ, ω^π désignant $2n$ formes de Pfaff construites sur les différentielles des paramètres de position q^i et de vitesse ρ^α, $(k_{\sigma\pi}, k_{\sigma_0})$ un tenseur antisymétrique fonction des q^i et ρ^α.

b) **Calcul de** Ωd. — Le calcul de la partie dynamique de Ω présente une difficulté jusqu'à ce jour non résolue, provenant du fait qu'il n'est pas possible de définir une mesure de forces intérieures à un système([13]) ([14]). Aussi procéderons-nous axiomatiquement.

Soit $\overrightarrow{F}_e$ une mesure vectorielle de force définie sur Δ que nous appellerons avec M. Brelot dyname. L'exposé qui suit est conforme à celui adopté par l'auteur précité.

Soit un champ de vecteurs $\overrightarrow{w}$, appelé champ de vitesses virtuelles, défini sur Δ. Posons

$$P_{\overrightarrow{w}} = \int_\Delta \overrightarrow{w} . \delta\overrightarrow{F}_e.$$

Par définition $P_{(\overrightarrow{w})}$ est la puissance du dyname $\overrightarrow{F}_e$ relativement au champ virtuel $\overrightarrow{w}$. Le travail élémentaire $\mathcal{T}_e$ de $\overrightarrow{F}_e$ relativement

([13]) Cf. M. Brelot, *Annales de l'Université de Grenoble*, T. XIX, 1943 ; T. XX, 1944.

à $\vec{w}$ pendant le temps dt sera

$$\mathcal{T}_e = \mathrm{P}_{\vec{w}} \cdot dt.$$

Si on prend $\vec{w} = \dfrac{d\overrightarrow{\mathrm{O}\mu}}{dt} = \dfrac{\partial \vec{f}}{\partial q^i}\dot{q}^i$ (i variant de 1 à n) la puissance $\mathrm{P}_{\vec{w}}$ a pour expression

$$\mathrm{P}(\vec{w}) = \left[\int \frac{\partial \vec{f}}{\partial q^i} \delta \vec{\mathrm{F}}_e\right] \dot{q}^i = \mathrm{Q}_i \dot{q}^i$$

en posant

$$\mathrm{Q}_i = \int \frac{\partial \vec{f}}{\partial q^i} \delta \vec{\mathrm{F}}_e.$$

Considérons alors la forme de Pfaff $\pi = \mathrm{Q}_i\, dq^i$.

D'après la définition précédente π est égale au travail élémentaire de la mesure de forces $\vec{\mathrm{F}}_e$ dans le champ $\vec{w} = \dfrac{\partial \vec{f}}{\partial q^i}\dot{q}^i$

Dyname impuissant. Si la puissance $\mathrm{P}_{\vec{w}}$ est nulle, on dira que $\vec{\mathrm{F}}_e$ est impuissant pour $\vec{w}$. Ainsi si $\vec{w}$ se réduit à un champ de moments, ou à plusieurs champs de moments définis sur Δ, alors $\vec{\mathrm{F}}_e$ sera impuissant chaque fois que le système de forces $\vec{\mathrm{F}}_e$ sera un système de vecteurs équivalent à o.

Ces définitions étant posées, pour chaque partie σ de Δ, on considèrera le dyname $\vec{\mathrm{F}}_e$ comme la somme d'un dyname équivalent, dit dyname extérieur $\vec{\mathrm{F}}_{1e}$ et d'un dyname équivalent à o, dit dyname intérieur $\vec{\mathrm{F}}_{2e}$. Dans les applications que nous nous proposons de développer le système S sera constitué par un ensemble de solides. Nous admettrons le postulat suivant :

Pour tout champ de moments la puissance des forces intérieures est nulle. — Il résulte de ce postulat les conséquences suivantes :

1. La puissance des forces extérieures sera calculée pour chaque solide en prenant pour w un champ de moments propre à chacun d'eux.

D'où la partie dynamique Ω_d de Ω c'est-à-dire

$$\Omega_d = \mathrm{Q}_i\, dq^i \wedge dt.$$

(14) M. R. de Possel. *Sur les principes mathématiques de la mécanique classique Gazeta de Matematica*, n° 28, 1946, Lisbonne.

Q_i fonctions de (q^i, ρ^h, t), q^i paramètres de position, ρ^h paramètres de vitesse.

2. La partie cinétique Ω_c de Ω doit être calculée avec le même champ de moments puisque $d\overrightarrow{O\mu} = \dfrac{\partial \vec{f}}{\partial q^i} dq^i$ intervient dans Ω_c. Ω_c étant la dérivée extérieure de

$$\int_D (\vec{V}_\mu\, d\overrightarrow{O\mu})\delta m - \frac{dt}{2}\int_D (\vec{V}_\mu)^2 \delta m.$$

En prenant $d\overrightarrow{O\mu} = \dfrac{\partial \vec{f}}{\partial q^i} dq^i$, $V_\mu = \dfrac{\partial \vec{f}}{\partial q^h}\rho^h$ en est conduit à deux expressions classiques de Ω_c

$$\int_D (\vec{V}_\mu\, d\overrightarrow{O\mu})\delta m = \left[\int_D \frac{\partial \vec{f}}{\partial q^h}\cdot\frac{\partial \vec{f}}{\partial q^i}\delta m\right]\rho^h dq^i = g_{hi}\rho^h dq^i$$

en posant $g_{hi} = \displaystyle\int \frac{\partial \vec{f}}{\partial q^h}\cdot\frac{\partial \vec{f}}{\partial q^i}\delta m$ tenseur symétrique covariant d'ordre 2

$$T = \frac{1}{2}\int_D (\vec{V}_\mu)^2\delta m = \frac{1}{2}\left[\int \frac{\partial \vec{f}}{\partial q^i}\cdot\frac{\partial \vec{f}}{\partial q^h}\delta m\right]\rho^i\rho^h = \frac{1}{2} g_{hi}\rho^h\rho^i$$

d désignant le symbole de la dérivation extérieure

$$\Omega_c = d\left(g_{hi}\rho^h dq^i - \frac{1}{2} g_{hi}\rho^h\rho^i dt\right).$$

Forme Hamiltonienne de Ω_c. — Le choix des paramètres de vitesse ρ^h étant arbitraire on peut poser

$$p_i = g_{hi}\rho^h$$

opération toujours possible puisque $2T = g_{hi}\rho^h\rho^i$ est une forme définie positive de rang n ($det\ g_{hi} \neq 0$). Pour envisager simultanément le cas où les liaisons holonomes dépendent ou ne dépendent pas du temps nous ferons varier les indices i et h de 0 à n avec $dq^0 = dt$, $\rho_0 = 1$

$$p_0 = g_{h0}\rho^h$$
$$T = T_2 + T_1\rho^0 + T_0(\rho^0)^2$$
$$p_0 = \frac{\partial T}{\partial \rho_0} = T_1 + 2T_0$$

d'où

$$\begin{aligned}\Omega_c &= d\left[\sum_{i=1}^{n} p_i\, dq^i + p_0\, dt - (\mathrm{T}_2 + \mathrm{T}_1 + \mathrm{T}_0)\, dt\right] \\ &= d\left[\sum_{i=1}^{n} p_i\, dq^i - (\mathrm{T}_2 - \mathrm{T}_0)\, dt\right].\end{aligned}$$

Nous appellerons expression Hamiltonienne de Ω_c

$$\text{(II, 3)} \qquad \Omega_c = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq^i - d(\mathrm{T}_2 - \mathrm{T}_0) \wedge dt$$

dans T_2 partie quadratique de T exprimée au moyen des ρ^h, on doit donc substituer aux ρ^h leur valeur en fonction des p calculé au moyen des équations

$$p_i = g_{hi}\rho^h + g_{i0}.$$

Si les liaisons ne dépendent pas du temps t

$$\Omega_c = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq^i - d\mathrm{T} \wedge dt.$$

Forme Lagrangienne de Ω_c. — En remarquant que

$$g_{hi}\rho^h = \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \rho_i}$$

$$\begin{aligned}\text{(II, 4)} \quad \Omega_c = d\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \rho^i} dq^i - \mathrm{T}\, dt\right) &= \frac{\partial^2 \mathrm{T}}{\partial \rho^i \partial \rho^h}(d\rho^h \wedge dq^i) \\ &+ \left(\frac{\partial^2 \mathrm{T}}{\partial \rho^i \partial q^k} - \frac{\partial^2 \mathrm{T}}{\partial \rho^k \partial \rho^i}\right) dq^k \wedge dq^i - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \rho^h} d\rho^h \wedge dt - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q^i} dq^i \wedge dt.\end{aligned}$$

C'est cette forme de Ω_c qui conduit aux équations de Lagrange.

3. **Définition d'un système paramétrique holonome.** — Un système paramétrique holonome est un ensemble de solides et de points matériels dont la partie cinétique de Ω est susceptible de revêtir la forme Hamiltonienne ou Lagrangienne.

4. **Variété Riemannienne et repère naturel R.** — La variété Riemannienne V_{n+1} associée au système holonome est l'espace temps de configuration muni de la métrique

$$d\sigma^2 = g_{ih}\, dq^i\, dq^h + g_{oi}\, dq^i\, dt + g_{oo}\, dt^2 \quad (i,\ h,\ \text{variant de 1 à } n).$$

En un point $M(q^i, t)$ de cette variété le repère $\mathcal{R}$ est défini par les $(n+1)$ vecteurs $\vec{e}_0$, $\vec{e}_i$ tels que $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_k = g_{ik}$; $\vec{e}_0 e_i = g_{0i}$; $(\vec{e}_0)^2 = g_{00}$.

Nous appellerons repère naturel R en M le système des n vecteurs $\vec{e}_i$. R se déduit donc de $\mathcal{R}$ par suppression du vecteur $\vec{e}_0$. Le point image du système sur la variété V_{n+1} a pour vitesse $\vec{v}$ un vecteur ayant $(n+1)$ composantes contravariantes $(\dot{q}^i, 1)$ $\vec{v} = \vec{e} + \dot{q}^i \vec{e}_i$.

Pour les besoins de la mécanique lorsqu'on dit que le système dépend de n paramètres de vitesse q, on considère donc $\vec{v}$ dans le sous-espace R. $\vec{v} = \vec{e}_i \dot{q}^i$, les $\dot{q}^i$ sont les composantes contravariantes de $\vec{v}$ dans R. Rappelons également que par rapport à R un vecteur $\vec{X}$ de composantes contravariantes X^i a n composantes covariantes $X_i = g_{ih} X^h$ et qu'on passe des composantes covariantes aux composantes contravariantes par les formules

$$X^h = g^{hi} X_i \qquad \text{avec} \qquad g^{hi} = \frac{\text{mineur relatif à } g_{ih} \text{ dans } det|g_{ih}|}{det|g_{ih}|}.$$

5. **Force généralisée.** — Nous avons caractérisé une force appliquée à un système par la puissance $P = Q_i \dot{q}^i$ (i variant de 1 à n). Les Q_i sont donc les composantes covariantes de la force généralisée par rapport au repère. Remarquons que la puissance réelle est $\mathfrak{P} = Q_i \dot{q}^i + Q_0$. C'est donc la puissance par rapport au repère Riemannien $\mathcal{R}$. Lorsque nous caractérisons le système des forces extérieures par la partie dynamique de Ω, $\Omega_d = \pi \wedge dt$, $\pi = Q_i dq^i$ est une forme Pfaff définie sur une variété V_{n+1} ou V_n (système indépendant du temps).

6. **Équations du mouvement.** — Les équations du mouvement du système sont les équations caractéristiques de Ω.

Forme Hamiltonienne

$$\Omega = dp_i \wedge dq^i - [d(T_2 - T_0) - Q_i dq^i] \wedge dt.$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Omega}{\partial (dq^i)} = -dp_i - \dfrac{\partial (T_2 - T_0)}{\partial q^i} dt + Q_i dt = 0, \\ \dfrac{\partial \Omega}{\partial (dp_i)} = dq^i - \dfrac{\partial (T_2 - T_0)}{\partial p^i} dt = 0. \end{cases}$$

Forme Lagrangienne.

$$\Omega = \frac{\partial^2 T}{\partial \rho^i \partial \rho^h} d\rho^h \wedge dq^i + \left(\frac{\partial^2 T}{\partial \rho^i \partial q^k} - \frac{\partial^2 T}{\partial \rho^k \partial q^i}\right) dq^k \wedge dq^i$$
$$- \frac{\partial T}{\partial \rho^h} d\rho^h \wedge dt - \frac{\partial T}{\partial q^i} dq^i \wedge dt + Q_i dq^i \wedge dt,$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial (d\rho^h)} = \frac{\partial^2 T}{\partial \rho^i \partial \rho^h} dq^i - \frac{\partial T}{\partial \rho^h} dt = 0,$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial (dq^i)} = - \frac{\partial^2 T}{\partial \rho^i \partial \rho^h} d\rho^h - \frac{\partial^2 T}{\partial \rho^i \partial q^k} dq^k + \frac{\partial^2 T}{\partial \rho^k \partial q^i} dq^k - \frac{\partial T}{\partial q^i} dt + Q_i dt = 0,$$

or $\dfrac{\partial T}{\partial \rho^h} = g_{ki}\rho^h$, $\dfrac{\partial^2 T}{\partial \rho^h \partial \rho^i} = g_{hi}$, il en résulte que les n premières équations s'écrivent encore $\dfrac{\partial \Omega}{\partial (d\rho^h)} = g_{hi}(dq^i - \rho^j dt) = 0$ d'où $dq^i = \rho^i dt$.

Les n dernières compte tenu de $dq^i = \rho^i dt$ prennent la forme de Lagrange en remarquant que

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \rho^k \partial q^i} dq^k = \frac{\partial^2 T}{\partial \rho^k \partial q^i} \rho^k dt = 2 \frac{\partial T}{\partial q^i} dt,$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \rho^i}\right) - \frac{\partial T}{\partial \rho^i} dt - Q_i dt = 0.$$

Ces n équations conservant la même forme dans les transformations du « pseudo-groupe » ponctuel $q^i = q^i(r^h, t)$ portant uniquement sur les variables de position q^i sont traditionnellement placées à la base de la mécanique rationnelle. Elles ont l'inconvénient de se montrer peu maniables dans la recherche des cas d'intégrabilité, ou des propriétés topologiques des trajectoires. C'est pourquoi il est préférable de considérer les équations du mouvement comme les caractéristiques d'une forme de degré deux.

Forme générale. — Si on effectue sur les paramètres de position q^i et les paramètres de vitesse p_i un changement de variables quelconque

$$p_i = p_i(x^\alpha, t) \qquad q^i = q^i(x^\alpha, t)$$

α variant de 1 à $2n$ en désignant par ω^α deux n formes de Pfaff en dx^α, Ω s'écrit

$$\Omega = k_{\alpha\beta}\omega^\alpha \wedge \omega^\beta - k_{\alpha 0}\omega^\alpha \wedge dt$$

$(k_{\alpha\beta}, k_{\alpha o})$ tenseur antisymétrique d'ordre 2, fonctions des x^α, t. Les équations prennent la forme générale

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\omega^\alpha} = k_{\alpha\beta}\omega^\beta - k_{\alpha o}\,dt = 0.$$

7. Pour que la théorie ainsi construite ait un sens au point de vue physique il faut évidemment que dans les applications les forces appliquées soient bornées en grandeur, la rigidité des liaisons intérieures devant être respectée.

Exemple. — Calcul de Ω pour un solide mobile autour d'un de ses points O fixe.

$Oxyz$ désigne un trièdre invariablement lié au corps (trièdre mobile) $\Omega_c + \Omega_d = \Omega$

$$\Omega_c = \int_c (k_{ij}dv^i \wedge dx^j)\delta m - \left[\int_c k_{ij}v^i dv^j \delta m\right] \wedge dt \quad i, j(1, 2, 3)$$
$$\Omega_d = \left|\int_c \delta\vec{F} . d\overrightarrow{OM}\right| \wedge dt$$

par rapport à tout trièdre Galiléen. Pour utiliser les axes mobiles il faut donc calculer par rapport à ces axes les différentielles absolues des paramètres de position et de vitesse.

x, y, z désignant les coordonnées du point M fixe par rapport au trièdre mobile, $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ étant les vecteurs unités des axes mobiles :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$
$$d\overrightarrow{OM} = xd\vec{i} + yd\vec{j} + zd\vec{k}$$

ω^1, ω^2, ω^3 désignant trois formes différentielles de Pfaff construites sur les différentielles des paramètres caractérisant le déplacement du trièdre $Oxyz$ (angles d'Euler ou tout autre système)

$$\begin{cases} d\vec{i} = \omega^3\vec{j} - \omega^2\vec{k} \\ d\vec{j} = \omega^1\vec{k} - \omega^3\vec{i} \\ d\vec{k} = \omega^2\vec{i} - \omega^1\vec{j} \end{cases}$$

$$d\overrightarrow{OM} = \vec{i}(z\omega^2 - y\omega^3) + \vec{j}(x\omega^3 - z\omega^2) + \vec{k}(y\omega^1 - x\omega^2).$$

Prenons pour paramètres de vitesse les composantes p, q, r, par rapport aux axes mobiles du vecteur rotation instantanée

$$\vec{V} = (qz - ry)\vec{i} + (rx - pz)\vec{j} + (py - qx)\vec{k}.$$

La partie cinétique Ω_c de Ω se calcule comme dérivée extérieure de la forme scalaire

$$\int_c (\vec{V}_M \cdot d\overrightarrow{OM})\delta m - \frac{dt}{2}\int_c (\vec{V}_M)^2 \delta m$$

$$\begin{aligned}\int_c (\vec{V}_M \cdot d\overrightarrow{OM})\delta m &= \int_c [(qz - ry)(\omega^2 z - \omega^3 y) \\ &\quad + (rx - pz)(\omega^3 x - \omega^1 z) + (py - qx)(\omega^1 y - \omega^2 x)]\delta m \\ &= p\omega^1 \int (y^2 + z^2)\delta m + q\omega^2 \int (z^2 + x^2)\delta m + r\omega^3 \int (x^2 + y^2)\delta m \\ &- (r\omega^2 + q\omega^3)\int yz\delta m - (p\omega^3 + r\omega^1)\int zx\delta m - (q\omega^1 + p\omega^2)\int xy\delta m.\end{aligned}$$

En choisissant pour trièdre $Oxyz$ le trièdre principal d'inertie en O et utilisant les rotations classiques :

$$A = \int (y^2 + z^2)\delta m \qquad B = \int (z^2 + x^2)\delta m \qquad C = \int (x^2 + y^2)\delta m$$

$$\int_c (\vec{V}_M \cdot d\overrightarrow{OM})\delta m = Ap\omega^1 + Bq\omega^2 + Cr\omega^3$$

$$\frac{1}{2}\int_c (\vec{V}_M)^2 \delta m = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2)$$

d désignant le symbole de la dérivation extérieure

$$\begin{aligned}\Omega_c = {} & A dp \wedge \omega^1 + B dq \wedge \omega^2 + C dr \wedge \omega^3 \\ & + Ap d\omega^1 + Bq d\omega^2 + Cr d\omega^3 - (Ap dp + Bq dq + Cr dr \wedge dt.\end{aligned}$$

Le calcul de $d\omega^1$, $d\omega^2$, $d\omega^3$ résulte des différentiations extérieures des relations vectorielles

$$d\vec{i} = \omega^3 \vec{j} - \omega^2 \vec{k}, \qquad d\vec{j} = \cdots, \qquad d\vec{k} = \cdots$$

$$0 = d\omega^3 \vec{j} - d\omega^2 \vec{k} - \omega^3 \wedge (\omega^1 \vec{k} - \omega^3 \vec{i}) + \omega^2 \wedge (\omega^2 \vec{i} - \omega^1 \vec{j})$$

ou $\quad (d\omega^3 + \omega^1 \wedge \omega^2)\vec{j} - (d\omega^2 + \omega^3 \wedge \omega)\vec{k} = 0 \quad$ et les analogues

c'est-à-dire

$$d\omega^3 = -(\omega^1 \wedge \omega^2); \qquad d\omega^1 = -(\omega^2 \wedge \omega^3); \qquad d\omega^2 = -(\omega^3 \wedge \omega^1)$$

équations de structure du groupe des déplacements autour de O.

Il en résulte l'expression de Ω_c

$$\begin{aligned}\Omega_c = {} & A dp \wedge \omega^1 + B dq \wedge \omega^2 + C dr \wedge \omega^3 \\ & - Ap\omega^2 \wedge \omega^3 - Bq\omega^3 \wedge \omega^1 - Cr\omega^1 \wedge \omega^2 \\ & - (Ap dp + Bq dq + Cr dr) \wedge dt.\end{aligned}$$

Calcul de la partie dynamique Ω_d de Ω

Les forces extérieures sont définies par leur puissance

$$P = Lp + Mq + Nr$$

d'où la forme de Pfaff

$$\pi = L\omega^1 + M\omega^2 + N\omega^3 \qquad \text{et} \qquad \Omega_d = (L\omega^1 + M\omega^2 + N\omega) \wedge dt$$

en désignant par L, M, N les composantes du moment résultant par rapport à Ox, Oy, Oz des forces appliquées au corps d'où

$$\begin{aligned}\Omega = A(dp \wedge \omega^1) + B(dq \wedge \omega^2) + C(dr \wedge \omega^3)& \\ - Ap\omega^2 \wedge \omega^3 - Bq\omega^3 \wedge \omega^1 - Cr\omega^1 \wedge \omega^2& \\ - [Apdp + Bqdq + Crdr - (L\omega^1 + M\omega^2 + N\omega^3)] \wedge dt.&\end{aligned}$$

Équations différentielles du mouvement :

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\omega^1} = -Adp + Bq\omega^3 - Cr\omega^2 + L\,dt = 0$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\omega^2} = -Bdq + Cr\omega^1 - Ap\omega^3 + M\,dt = 0$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\omega^3} = -Cdr + Ap\omega^2 - Bq\omega^1 + N\,dt = 0$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial(dp)} = A(\omega^1 - p\,dt) = 0$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial(dq)} = B(\omega^2 - q\,dt) = 0$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial(dr)} = C(\omega^3 - r\,dt) = 0.$$

Les trois premières équations, compte tenu des trois dernières sont les équations du mouvement données par Euler.

Calcul de Ω_c trièdre de référence mobile dans le corps et dans l'espace. — Il est intéressant pour les applications de connaître l'expression de Ω_c pour un corps solide mobile autour d'un de ses points quelconques O lorsqu'on utilise pour trièdre de référence un trièdre mobile à la fois dans le corps et dans l'espace. Soient $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, les vecteurs unitaires du trièdre de référence, Ω^1, Ω^2, Ω^3 trois formes de Pfaff construites sur les paramètres caractérisant la position du trièdre mobile autour du point O fixe, x, y, z, les coordonnées d'un point M du solide par rapport au trièdre mobile, ω^1, ω^2, ω^3 étant trois formes de Pfaff construites sur les différentielles des paramètres caractérisant le déplacement absolu du solide, p, q, r, les composantes de la rotation absolue du corps par rapport au trièdre mobile.

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$
$$d\overrightarrow{OM} = (\omega^2 z - \omega^3 y)\vec{i} + (\omega^3 x - \omega^1 z)\vec{j} + (\omega^1 y - \omega^2 x)\vec{k}$$
$$\vec{V} = (qz - ry)\vec{i} + (rx - pz)\vec{j} + (py - qx)\vec{k}$$

Calculons la différentielle de $d\vec{V}$ compte tenu de l'expression des différentielles de $d\vec{i}$, $d\vec{j}$, $d\vec{k}$

$$d\vec{i} = \Omega^3\vec{j} - \Omega^2\vec{k}, \qquad d\vec{j} = \Omega^1\vec{k} - \Omega^3\vec{i}, \qquad d\vec{k} = \Omega^2\vec{i} - \Omega^1\vec{j}$$
$$\begin{aligned} d\vec{V} = {} & [zdq - ydr + qdz - rdy + (rx - pz)(-\Omega^3) + (py - qx)\Omega^2]\vec{i} \\ & + [xdr - zdp + rdx - pdz + (py - qx)(-\Omega^1) + (qy - ry)\Omega^3]\vec{j} \\ & + [ydp - xdq + pdy - qdx + (qz - ry)(-\Omega^2) + (rx - pz)\Omega^1]\vec{k} \end{aligned}$$

dx, dy, dz, différentielles des coordonnées de M par rapport aux axes mobiles ont pour valeur :

$$\begin{aligned} dx &= (\omega^2 - \Omega^2)z - (\omega^3 - \Omega^3)y \\ dy &= (\omega^3 - \Omega^3)x - (\omega^1 - \Omega^1)z \\ dz &= (\omega^1 - \Omega^1)y - (\omega^2 - \Omega^2)x \end{aligned}$$

d'où l'expression de $d\vec{V}$

$$\begin{aligned} d\vec{V} = {} & \{-x(q\omega^2 + r\omega^3) + y[p\Omega^2 + q(\omega^1 - \Omega^1) - dr] \\ & \qquad + z[p\Omega^3 + r(\omega^1 - \Omega^1) + dq]\}\vec{i} \\ & + \{x[q\Omega^1 + p(\omega^2 - \Omega^2) + dr] \\ & \qquad - y[r\omega^3 + p\omega^1] + z[q\Omega^3 + r(\omega^2 - \Omega^2) - dp]\}\vec{j} \\ & + \{x[r\Omega^1 + p(\omega^3 - \Omega^3) - dq] \\ & \qquad + y[r\Omega^2 + q(\omega^3 - \Omega^3) + dp] - z(p\omega^1 + q\omega^2)\}\vec{k}. \end{aligned}$$

Formons dans l'espace à 7 dimensions l'expression $k_{ij}dv^i \wedge dx^j$ k_{ij} symbole de Krönecker

$$\begin{aligned} k_{ij}dv^i \wedge dx^j = {} & x^2[dr \wedge \omega^3 + dq \wedge \omega^2 + 2p\omega^2 \wedge \omega^3 - p\Omega^2 \wedge \omega^3 \\ & \qquad + q\Omega^1 \wedge \omega^3 - r\Omega^1 \wedge \omega^2 + p\Omega^3 \wedge \omega^2] \\ & + y^2[dp \wedge \omega^1 + dr \wedge \omega^3 + 2q\omega^3 \wedge \omega^1 - q\Omega^3 \wedge \omega^1 \\ & \qquad + r\Omega^2 \wedge \omega^1 - p\Omega^2 \wedge \omega^1 + q\Omega^1 \wedge \omega^3] \\ & + z^2[dq \wedge \omega^2 + dp \wedge \omega^1 + 2r\omega^1 \wedge \omega^2 - r\Omega^1 \wedge \omega^2 \\ & \qquad + p\Omega^3 \wedge \omega^2 - q\Omega^3 \wedge \omega^1 + r\Omega^2 \wedge \omega^1] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+yz[-dr\wedge\omega^2-dq\wedge\omega^3+2q\omega^1\wedge\omega^2+2r\omega^3\wedge\omega^1\\
&\qquad+p(\Omega^2\wedge\omega^2-\Omega^3\wedge\omega^3)-q\Omega^1\wedge\omega^2+r\Omega^1\wedge\omega^3]\\
&+zx[-dp\wedge\omega^3-dr\wedge\omega^1+2r\omega^2\wedge\omega^3+2p\omega^1\wedge\omega^2\\
&\qquad+q(\Omega^3\wedge\omega^3-\Omega^1\wedge\omega^1)-r\Omega^2\wedge\omega^2+p\Omega^2\wedge\omega^1]\\
&+xy[-dq\wedge\omega^1-dp\wedge\omega^2+2p\omega^3\wedge\omega^1+2q\omega^2\wedge\omega^3\\
&\qquad+r(\Omega^1\wedge\omega^1-\Omega^2\wedge\omega^2)-p\Omega^3\wedge\omega^1+q\Omega^3\wedge\omega^2].
\end{aligned}$$

Calculons de même $k_{ij}v^idv^j$

$$\begin{aligned}
k_{ij}v^idv^j=&\,x^2[rdr+qdq+pr(\omega^2-\Omega^2)-pq(\omega^3-\Omega^3)]\\
&+y^2[pdp+rdr+qp(\omega^3-\Omega^3)-qr(\omega^1-\Omega^1)]\\
&+z^2[qdq+pdp+rq(\omega^1-\Omega^1)-rp(\omega^2-\Omega^2)]\\
&-yz[rdq+qdr+(q^2-r^2)(\omega^1-\Omega^1)-pq(\omega^2-\Omega^2)+rp(\omega^3-\Omega^3)]\\
&-zx[pdr+rdp+(r^2-p^2)(\omega^2-\Omega^2)-qr(\omega^3-\Omega^3)+pq(\omega^1-\Omega^1)]\\
&-xy[qdp+pdq+(p^2-q^2)(\omega^3-\Omega^3)-rp(\omega^1-\Omega^1)+qr(\omega^2-\Omega^2)].
\end{aligned}$$

Désignons par

$$\begin{aligned}
&a=\int x^2\delta m, && b=\int y^2\delta m, && c=\int z^2\delta m,\\
&\mathrm{D}=\int yz\delta m, && \mathrm{E}=\int zx\delta m, && \mathrm{F}=\int xy\delta m
\end{aligned}$$

et signalons que ces quantités sont en général variables avec le temps puisque les axes sont mobiles dans le corps et dans l'espace. On en déduit :

$$\Omega_c=\int\omega_c\delta m=\int(k_{ij}dv^i\wedge dx^j-k_{ij}v^idv^j\wedge dt)\delta m$$

$$\begin{aligned}
\Omega_c=&\,a[dq\wedge\omega^2+dr\wedge\omega^3+2p\omega^2\wedge\omega^3-p\Omega^2\wedge\omega^3\\
&\qquad+q\Omega^1\wedge\omega^3-r\Omega^1\wedge\omega^2+p\Omega^3\wedge\omega^2]\\
&+b[dr\wedge\omega^3+dp\wedge\omega^1+2q\omega^3\wedge\omega^1-q\Omega^3\wedge\omega^1\\
&\qquad+r\Omega^2\wedge\omega^1-p\Omega^2\wedge\omega^3+q\Omega^1\wedge\omega^3]\\
&+c[dp\wedge\omega^1+dq\wedge\omega^2+2r\omega^1\wedge\omega^2-r\Omega^1\wedge\omega^2\\
&\qquad+p\Omega^3\wedge\omega^2-q\Omega^3\wedge\omega^1+r\Omega^2\wedge\Omega^1]\\
&-\mathrm{D}[dq\wedge\omega^3+dr\wedge\omega^2-2q\omega^1\wedge\omega^2-2r\omega^3\wedge\omega^1\\
&\qquad-p(\Omega^2\wedge\omega^2-\Omega^3\wedge\omega^3)+q\Omega^1\wedge\omega^2-r\Omega^1\wedge\omega^3]\\
&-\mathrm{E}[dr\wedge\omega^1+dp\wedge\omega^3-2r\omega^2\wedge\omega^3-2p\omega^1\wedge\omega^2\\
&\qquad-q(\Omega^3\wedge\omega^3-\Omega^1\wedge\omega^1)+r\Omega^2\wedge\omega^3-p\Omega^2\wedge\omega^1]\\
&-\mathrm{F}[dp\wedge\omega^2+dq\wedge\omega^1-2p\omega^3\wedge\omega^1-2q\omega^2\wedge\omega^3\\
&\qquad-r(\Omega^1\wedge\omega^1-\Omega^2\wedge\omega^2)+p\Omega^3\wedge\omega^1-q\Omega^3\wedge\omega^2]\\
&-a[qdq+rdr+pr(\omega^2-\Omega^2)-pq(\omega^3-\Omega^3)]\wedge dt\\
&-b[rdr+pdp+qp(\omega^3-\Omega^3)-qr(\omega^1-\Omega^1)]\wedge dt\\
&-c[pdp+qdq+rq(\omega^1-\Omega^1)-rp(\omega^2-\Omega^2)]\wedge dt
\end{aligned}$$

$$+ D[rdq + qdr + (q^2 - r^2)(\omega^1 - \Omega^1)$$
$$- pq(\omega^2 - \Omega^2) + rp(\omega^3 - \Omega^3)] \wedge dt$$
$$+ E[pdr + rdp + (r^2 - p^2)(\omega^2 - \Omega^2)$$
$$- qr(\omega^3 - \Omega^3) + pq(\omega^1 - \Omega^1)] \wedge dt$$
$$+ F[qdp + pdq + (p^2 - q^2)(\omega^3 - \Omega^3)$$
$$- rp(\omega^1 - \Omega^1) + qr(\omega^2 - \Omega^2)] \wedge dt.$$

Cas particuliers. — 1. Axes fixes dans le corps

$$a + b = C, \quad b + c = A, \quad c + a = B, \quad \Omega^1 = \omega^1, \quad \Omega^2 = \omega^2, \quad \Omega^3 = \omega^3$$

$$\Omega_c = Adp \wedge \omega^1 + Bdq \wedge \omega^2 + Cdr \wedge \omega^3$$
$$- Ap\omega^2 \wedge \omega^3 - Bq\omega^3 \wedge \omega^1 - Cr\omega^1 \wedge \omega^2$$
$$- D[dq \wedge \omega^3 + dr \wedge \omega^2 - q\omega^1 \wedge \omega^2 - r\omega^3 \wedge \omega^1]$$
$$- E[dr \wedge \omega^1 + dp \wedge \omega^3 - r\omega^2 \wedge \omega^3 - p\omega^1 \wedge \omega^2]$$
$$- F[dp \wedge \omega^2 + dr \wedge \omega^1 - p\omega^3 \wedge \omega^1 - q\omega^2 \wedge \omega^3]$$
$$- [Apdp + Bqdq + Crdr - D(qdr + rdq)$$
$$- E(rdp + pdr) - F(pdq + qdp)] \wedge dt$$

A, B, C, D, E, F sont des constantes

On vérifie que

$$\Omega_c = d[Ap\omega^1 + Bq\omega^2 + Cr\omega^3 - D(q\omega^3 + r\omega^2) - E(r\omega^1 + p\omega^3)$$
$$- F(p\omega^2 + q\omega^1) - \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2Dqr - 2Erp - 2Fpq)dt].$$

2. Axes fixes dans l'espace

$$a + b = C, \quad b + c = A, \quad c + a = B, \quad \Omega^1 = \Omega^2 = \Omega^3 = 0$$

$$\Omega_c = Adp \wedge \omega^1 + Bdq \wedge \omega^2 + Cdr \wedge \omega^3 + (B + C - A)(\omega^2 \wedge \omega^3)$$
$$+ (C + B - A)\omega^3 \wedge \omega^1 + (A + B - C)\omega^1 \wedge \omega$$
$$- D[dq \wedge \omega^3 + dr \wedge \omega^2 - 2q(\omega^1 \wedge \omega^2) - 2r(\omega^3 \wedge \omega^1)]$$
$$- E[dr \wedge \omega^1 + dp \wedge \omega^3 - 2r(\omega^2 \wedge \omega^3) - 2p(\omega^1 \wedge \omega^2)]$$
$$- F[dp \wedge \omega^2 + dq \wedge \omega^1 - 2p(\omega^3 \wedge \omega^1) - 2q(\omega^2 \wedge \omega^3)]$$
$$- \{ Apdp + Bqdq + Crdr - D(qdr + rdq)$$
$$- E(rdp + pdr) - F(pdq + qdp)$$
$$+ (C - A)pr\omega^2 + (A - B)qp\omega^3 + (B - C)rp\omega^1$$
$$- D[(q^2 - r^2)\omega^1 - pq\omega^2 + rp\omega^3]$$
$$- E[(r^2 - p^2)\omega^2 - qr\omega^3 + pq\omega^1]$$
$$- F[(p^2 - q^2)\omega^3 - rp\omega^1 + qr\omega^2] \} \wedge dt.$$

3. Corps de révolution. L'axe Oz du trièdre étant l'axe de révo-

lution, Ox et Oy sont mobiles dans le corps et dans l'espace

$$a = \frac{C}{2}, \qquad c = A - \frac{C}{2}$$

$$\begin{aligned}\Omega_c = {} & A dp \wedge \omega^1 + A dq \wedge \omega^2 + C dr \wedge \omega^3 \\ & + Cp\omega^2 \wedge \omega^3 + Cq\omega^3 \wedge \omega^1 + (2A - C) r\omega^1 \wedge \omega^2 \\ & - Ar\Omega^1 \wedge \omega^2 - Cp\Omega^2 \wedge \omega^3 - Aq\Omega^3 \wedge \omega^1 \\ & + Cq\Omega^1 \wedge \omega^3 + Ar\Omega^2 \wedge \omega^1 + Ap\Omega^3 \wedge \omega^2 \\ & - [Ap dp + Aq dq + Cr dr \\ & + (C - A) pr(\omega^2 - \Omega^2) - (C - A) qr(\omega^1 - \Omega^1)] \wedge dt.\end{aligned}$$

§ III. — Principe de l'étude des systèmes mécaniques sans coordonnées.

L'exposé précédent par son développement pourrait accréditer l'idée qu'il est nécessaire d'utiliser des coordonnées pour étudier les propriétés des systèmes dynamiques. On se libère aisément de la servitude des coordonnées en envisageant la question sous l'angle suivant :

Un système holonome sera caractérisé par une forme Ω de degré 2 de rang $2n$ définie sur une variété (15) V_{2n+1} : la variété V_{n+1} espace temps étant fibrée et ayant pour fibre V_n, pour base la droite numérique t, V_{2n+1}, est l'espace des vecteurs tangents aux fibres de V_{n+1} (16). Soient T l'espace tangent à la variété V_{2n+1}, T′ l'espace dual de T, A(T′) l'algèbre extérieure construite sur T′, somme directe des sous-espaces vectoriels A^r des divers degrés $r \geqslant 0$ engendrés par les formes de degré r.

Opérateur $i(x)$ de M. Henri Cartan (17). — x étant un champ élément de T on appelle avec M. Henri Cartan antidérivation définie par l'opérateur $i(x)$ un endomorphisme de A(T′) de degré -1 qui

(15) Cf. M. Ch. Ehresmann, *Espaces fibrés associés à une variété différentiable*, C. R. Académie des Sciences, t 216, p. 628.

(16) Cette conception de V_{2n+1} se justifie car en un point M de V_{n+1} les n directions des fibres définissent un repère R, qui lorsqu'on munit d'une métrique V_{n+1}, coïncide avec le repère R défini au § II, 4.

(17) Cf. M. H. Cartan, *Colloque de Topologie*, Bruxelles 1950, Masson et Cie, Paris. 1950, p. 15-27.

d'une part applique un élément de A^r dans A^{r-1}, d'autre part pour

$$a \in A^p, \qquad b \in A^q, \qquad ab \in A^r (r = p + q)$$

satisfait à

$$i(x)a \,.\, b = (i(x)a)b + (-1)^p a \,.\, (i(x)b).$$

L'algèbre $A(T')$ étant engendrée au sens multiplicatif par ses éléments de degré 0 et 1 (A^0 est identifié à l'anneau des fonctions numériques) l'antidérivation $i(x)$ est déterminée quand elle est connue sur A^0 et $A^1 = T'$, elle est nulle sur A^0, elle se réduit sur A^1 au produit scalaire définissant la dualité entre T et T'.

Pour $\qquad x \in T, \qquad x' \in T' \qquad i(x) \,.\, x' = \langle x, x' \rangle.$

Il en résulte que l'opérateur $i(x)$ appliqué à un élément de degré r de $A(T')$ noté $(x'_1 \wedge x'_2 \wedge \cdots \wedge x'_r)$ s'écrit

$$i(x)(x_1 \wedge \cdots \wedge x_r) = \sum_{1 \leqslant k \leqslant r} (-1)^{k+1} \langle x, x'_k \rangle x'_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{x'_k} \wedge \cdots \wedge x'_r.$$

le signe $\frown$ signifiant que le terme situé au-dessous doit être supprimé.

Notons encore que l'opérateur $i(x)$ est de carré nul puisque son carré est nul sur A^0 et A^1.

Ces généralités essentielles extraites de la conférence de M. H. Cartan ([17 bis]) étant rappelées, l'opérateur $i(x)$ applique en particulier la forme Ω de degré 2 dans le sous-espace vectoriel T' des formes de Pfaff.

$$i(x)\Omega = \pi$$

symbole qui lorsque V_{2n+1} est rapportée à un système de coordonnées ρ^α, α (0 à $2n$) donne

$$i(x)\Omega = k_{\alpha\beta}(x^\alpha d\rho^\beta - x^\beta d\rho^\alpha)$$

puisque $\Omega = k_{\alpha\beta} d\rho^\alpha \wedge d\rho^\beta$, $k_{\alpha\beta}$ tenseur anti-symétrique fonction de l'anneau A^0, x a pour composantes x^α, et que nous supposons le produit scalaire défini par le symbole de Kronecker.

En particulier avec un système de coordonnées Hamiltoniennes

$$\Omega = dp_i \wedge dq^i - dH \wedge dt + Q_i dq^i \wedge dt$$

$$i(x)\Omega = x_i\left(dq^i - \frac{\partial H}{\partial p_i} dt\right) - x^i\left(dp_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} dt - Q_i dt\right) + x^0\left(dH - \frac{\partial H}{\partial t} dt - Q_i dq^i\right).$$

([17 bis]) Le point de vue adopté ici est plus restrictif que celui de M. H. Cartan auquel le lecteur est prié de se reporter ; toute cette application est rédigée en conservant les idées et les notations de M. H. Cartan.

Le système différentiel Σ des caractéristiques de Ω peut s'écrire d'une infinité de manières au moyen de $2n$ champs $(x^1, x^2, \ldots, x^{2n})$ indépendants c'est-à-dire tels que $(x^1 \wedge x^2 \cdots \wedge x^{2n} \neq 0)$. Lorsqu'on écrit les équations caractéristiques de Ω sous la forme $\frac{\partial \Omega}{\partial \rho^\alpha} = 0$, $\alpha(1 \text{ à } 2n)$ cela revient à prendre pour les x $2n$ champs particuliers $(0, 0, \ldots, 1, \ldots, 0)$.

Remarquons que pour un x quelconque $\in T$, la forme de Pfaff $i(x)\Omega$ n'est pas une forme quelconque de T' elle appartient au sous-module des formes caractéristiques de Ω.

Champ caractéristique E. — La forme Ω de degré 2 étant de rang $2n$, définie sur V_{2n+1}, il existe un élément $E \in T$ défini à un facteur (fonction numérique) près, qui applique Ω sur le zéro de l'espace des formes. E est appelé champ caractéristique et on a :

$$i(E)\Omega = 0.$$

Le but de notre étude étant de faire la théorie des liaisons de nature quelconque pour les systèmes paramétriques, les théorèmes suivants jouent un rôle important.

Théorème 1. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une forme de Pfaff π appartienne au sous-module des formes caractéristiques de Ω est $i(E)\pi = 0$.*

1° La condition est nécessaire car si π appartient au sous-module des formes caractéristiques, il existe $x \in T$ modulo E tel que $i(x)\Omega = \pi$.

$$i(E)\pi = i(E) \,.\, i(x)\Omega = -\, i(x) \,.\, i(E)\Omega$$
$$i(E)\Omega = 0 \quad \text{entraîne} \quad i(E)\pi = 0.$$

2° La condition est suffisante. En effet pour $a \in T$, $\pi \in T'$, il suffit de remarquer que la condition $i(a)\pi = 0$ signifie que π appartient à un sous-module de T'. Appliquer à $a = E$ la proposition indique que π appartient au sous-module des formes caractéristiques de Ω.

Théorème II. — *Soit f une fonction numérique sur V_{2n+1}, la valeur numérique de f sur une ligne caractéristique de Ω est une fonction du paramètre t dont la dérivée première par rapport à t est $i(E) \,.\, df$, la dérivée n^e $(i(E) \,.\, df)^{(n)}$.*

Avant de démontrer ce théorème nous remarquerons que f étant une fonction numérique sur V_{2n+1} l'opérateur $i(E)$ appliqué à la forme df lui fait correspondre une nouvelle fonction numérique $f_E^1 = i(E) . df$. Dans le cas particulier où E a relativement à une base $x^i 2n$ composantes nulles, la i^e égale à 1, $f_{x^i}^{(1)} = \frac{\partial f}{\partial x^i}$. Ceci justifie la définition suivante :

Définition. — *Fonction dérivée première d'une fonction numérique par rapport à un champ.* — f étant une fonction numérique sur V_{2n+1} nous appellerons dérivée première de la fonction f relativement au champ E la fonction $f_E^{(1)} = i(E) df$. La fonction $f_E^{(1)}$ étant elle-même une fonction numérique sur V_{2n+1} on peut appliquer l'opérateur $i(E)$ à la forme $df_E^{(1)}$ et appeler dérivée seconde de f par rapport à E $f_E^{(2)} = i(E) . df_E^{(1)}$ que nous écrirons symboliquement $(i(E) . df)^{(2)}$. D'une manière générale la dérivée n^e de la fonction f par rapport à E est la fonction $f_E^{(n)} = i(E) . df_E^{(n-1)} = (i(E) . df)^{(n)}$.

Remarques. — 1° Si f est un produit de deux fonctions $u . v$ on démontre d'une manière classique

$$(u . v)_E^{(n)} = u_E^{(n)} . v + \cdots + C_n^p u_E^{(n-p)} . v_E^{(p)} + \cdots + u . v_E^{(n)}.$$

2° Relativement à deux champs pris dans l'ordre E_1, E_2 on peut définir pour les fonctions numériques une dérivation $i(E_2) d(i(E_1) . df)$. Ces généralités étant posées démontrons le théorème II. Soient f et g deux fonctions numériques sur V_{2n+1} ; considérons les deux fonctions $i(E) . df$ et $i(E) . dg$. Si f est une fonction de g, df est proportionnelle à dg ; l'opérateur $i(E)$ étant linéaire et homogène

$$\frac{df}{dg} = \frac{i(E) . df}{i(E) . dg}.$$

En prenant $g = t$ et choisissant la fonction numérique arbitraire dont dépend le champ E défini comme solution de $i(E)\Omega = 0$ telle que $i(E) dt = 1$

$$\frac{df}{dt} = i(E) df = f_E^1.$$

Au second membre on doit considérer la fonction f_E^1 comme fonction de t sur la ligne caractéristique.

En répétant sur la fonction $f_E^{(1)}$ le raisonnement fait sur f nous écrirons le long d'une ligne caractéristique du champ E

$$f_i^{(2)} = (i(E) \,.\, df)_i^{(2)}.$$

Par récurrence $$f_i^{(n)} = (i(E) \,.\, df)_i^{(n)}.$$

Application. — Si on choisit $2n$ fonctions f_i indépendantes sans singularité dans le voisinage d'un point M, on a pour représenter les lignes caractéristiques du champ E le système de $2n$ équations différentielles qui s'écrit

$$\frac{df_i}{dt} = i(E) \,.\, df_i.$$

Ce système permet d'étudier l'aspect local du mouvement au voisinage d'un point M_0 de la variété, puisqu'on peut calculer toutes les dérivées successives en M_0 au moyen de l'opérateur $i(E)$.

CHAPITRE II

THÉORIE D'UNE LIAISON IMPOSÉE A UN SYSTÈME MATÉRIEL

§ I. — Généralités.

Soit un système matériel S formé de points et de solides dépendant de n paramètres q^i. Dans ce système il existe des liaisons holonomes dont on a tenu compte en disant que le système dépend de n paramètres. Il a pour image une variété V_{2n+1} précisée au chapitre I, § III.

Définition. — Nous dirons qu'on impose une nouvelle liaison au système holonome S.

1° si l'image de S est une sous-variété de $V_{2n+1} a(M) = 0$, $M \in V_{2n+1}$.

2° si on ajoute au champ caractéristique E un champ de liaison E_l, champ dû aux forces nécessaires à la réalisation de cette liaison.

Quand on emploie un système particulier de variables de position q^i de vitesse $\dot{q}^i$, et le temps t, cette définition se traduit par

1° une relation $a(q^i, \dot{q}^i, t) = 0$, i variant (1 à n), admettant des dérivées partielles $\dfrac{\partial a}{\partial \dot{q}^i} \neq 0$ pour un i au moins (si la relation est holonome nous conviendrons de la remplacer par sa dérivée par rapport à t).

2° une force généralisée $\vec{L}$ à ajouter aux forces appliquées à S, dont les composantes covariantes L_i par rapport au repère naturel R (chapitre I, § II, 4) sont définies par la puissance relative $P = \sum_1^n L_i \dot{q}^i$.

Quand on caractérise le système S par une forme Ω sur V_{2n+1}, astreindre S à une nouvelle liaison revient à remplacer Ω par $\Omega + \Omega_l$, $\Omega_l = L_i dq^i \wedge dt$ avec la condition forme $da = 0$.

Dans l'expression de P les L_i sont des fonctions des q^i, $\dot{q}^i$, t, l'indice i prenant toutes les valeurs possibles ; dans l'expression de P on ne tient pas compte de la relation $a = 0$.

Remarques. — 1° Il existe une relation liant la forme da et le champ E_l, qui lorsqu'on utilise des coordonnées se traduit par une relation liant des dérivées partielles de la fonction a et les L_i. L'étude de cette relation fait l'objet du § II de ce chapitre.

2° Au point de vue où nous nous plaçons si on considère un solide S astreint à rouler sans glisser sur une surface donnée cette condition se traduit par trois relations et le solide S sera considéré comme astreint à trois liaisons du type précité. Pour préciser prenons une sphère S homogène de rayon a astreinte à rouler sans glisser sur un plan fixe; par rapport à un repère fixe formé d'un trièdre trirectangle

$\xi, \eta, \zeta,$ désignent les coordonnées du centre de S,
$p, q, r,$ désignent les composantes du vecteur rotation instantané,
$u, v, w,$ désignent les composantes de la vitesse du point de contact.

Les liaisons se traduisent par

$$\begin{cases} u = \dot\xi - aq = 0 \\ P_1 = Xu \end{cases} \quad \begin{cases} v = \dot\eta + ap = 0 \\ P_2 = Yv \end{cases} \quad \begin{cases} w = \dot\zeta = 0 \\ P_3 = Zw \end{cases}$$

Au contraire une sphère qui glisse sur le plan n'est astreinte qu'à une liaison $\zeta - a = 0$ $P = N(\dot\zeta - f\sqrt{u^2 + v^2})$ (voir la théorie au § 6 de ce chapitre).

§ II. — Relation entre la forme *da* et le champ E_l.

La relation de liaison étant définie par une fonction numérique $a = 0$ sur V_{2n+1} la forme da doit être nulle sur les lignes intégrales des équations du mouvement, elle appartient donc au sous-module des formes caractéristiques de la forme $\Omega + \Omega_l$. D'après le théorème I du § III, chapitre I, la condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que

$$(\text{II}, 1) \qquad i(E + E_l) \,.\, da = 0$$

qui s'écrit encore

$$(\text{II}, 2) \qquad i(E_l) \,.\, da + i(E) \,.\, da = 0.$$

Explicitons la condition (II, I) en prenant comme variables les variables Hamiltonniennes. La forme Ω caractérisant mécaniquement le système S est

$$\Omega = dp_i \wedge dq^i - [d(T_2 - T_0) - Q_i\, dq^i] \wedge dt.$$

La liaison est définie par $a(p_i, q^i, t) = 0$, $\Omega_l = L_i dq^i \wedge dt$.
Les équations caractéristiques de la forme $\Omega + \Omega_l$ sont :

$$\frac{\partial(\Omega+\Omega_l)}{\partial(dp_i)} = dq^i - \frac{\partial(T_2 - T_0)}{\partial p_i} dt,$$
$$\frac{\partial(\Omega+\Omega_l)}{\partial(dq^i)} = -dp_i + \left[Q_i + L_i - \frac{\partial(T_2 - T_0)}{\partial q^i}\right] dt.$$

La forme $da = \frac{\partial a}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial a}{\partial q^i} dq^i + \frac{\partial a}{\partial t} dt$ devant appartenir au sous-module des formes caractéristiques de $\Omega + \Omega_l$ dont une base est

$$\frac{\partial(\Omega+\Omega_l)}{\partial(dp_i)}, \quad \frac{\partial(\Omega+\Omega_l)}{\partial(dq^i)}, \qquad da = -\frac{\partial a}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial(\Omega+\Omega_l)}{\partial(dq^i)} + \frac{\partial a}{\partial q^i} \cdot \frac{\partial(\Omega+\Omega_l)}{\partial(\partial p_i)}$$

d'où la condition

$$\frac{\partial a}{\partial p_i}\left[Q_i + L_i - \frac{\partial(T_2 - T_0)}{\partial q^i}\right] + \frac{\partial a}{\partial q^i} \cdot \frac{\partial(T_2 - T_0)}{\partial p_i} + \frac{\partial a}{\partial t} = 0.$$

Interprétation de la condition (II, 1). — La condition (II, 1) peut s'interpréter de deux manières différentes.

Premier point de vue. — Les champs E et E_l étant connus, la condition (II, 1) est une équation aux dérivées partielles du premier ordre définissant la fonction a. Elle exprime la condition nécessaire et suffisante pour que $a = \text{const.}$ soit une intégrale première du système des équations différentielles des caractéristiques de la forme $\Omega + \Omega_l$. Comme l'intégrale générale d'une équation aux dérivées partielles linéaire, du premier ordre dépend d'une fonction arbitraire, $\mathcal{F}(a) = \text{const.}$ est aussi intégrale première mais ne constitue pas une intégrale distincte.

Conséquence : La relation de liaison $a = 0$ ne peut être choisie arbitrairement c'est une intégrale particulière de l'équation aux dérivées partielles. Cette relation de liaison est aussi représentée analytiquement par $\mathcal{F}(a) = 0$ avec $\mathcal{F}(0) = 0$; c'est pourquoi nous dirons que par rapport à un système holonome S une relation de liaison n'est définie analytiquement qu'à une fonction arbitraire près.

Deuxième point de vue. — La sous-variété $a = 0$ de V_{2n+1} étant donnée, la condition (II, 1) est linéaire par rapport au champ E_l comme le montre (II, 2). Il existe une infinité de champs E_l satisfaisant à (II, 2). On peut donner une interprétation géométrique à (II, 2) en utilisant le repère naturel R (chapitre 1, § II, 4). Au point M de la variété V_{n+1}, considérons le vecteur $\vec{L}$ (composantes covariantes L_i) et le vecteur $\vec{a}$ $\left(\text{composantes contravariantes } \frac{\partial a}{\partial p_i}\right)$. $i(E) . da = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a}{\partial p_i} L_i$ est le produit scalaire de ces deux vecteurs $i(E) . da$ fonction numérique, que nous désignons par α, ne dépend pas de la force de liaison. L'équation (II, 2) prend ainsi la forme géométrique $\vec{a} . \vec{L} + \alpha = 0$, et signifie que l'extrémité du vecteur $\vec{L}$ d'origine M situé dans un hyperplan défini par l'équation

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a}{\partial p_i} L_i + \alpha = 0.$$

Cette équation détermine si l'on veut une des composantes L_i en supposant les $(n - 1)$ autres connues.

§ III. — Distinction entre une intégrale première du mouvement de S et une liaison imposée à S.

Si $i(E) . da = 0$ en tout point de V_{2n+1} cela signifie d'après le théorème I (chapitre 1, § III) que da appartient au sous-module des formes caractéristiques de Ω, en d'autres termes $a = 0$ est une intégrale première particulière du système des caractéristiques de Ω. Cette liaison peut en particulier être réalisée sans adjonction de forces nouvelles au système mécanique S puisqu'on peut satisfaire à (II, 1) en prenant le champ E_l nul. Ceci nous permet de préciser la notion de liaison imposée à un système mécanique S.

Définition. — Une liaison est imposée à un système S, quand $a = 0$ n'est pas une intégrale première particulière des équations du mouvement de S. Cette définition se traduit par la condition $i(E) . da \neq 0$, qui lorsqu'on emploie des coordonnées p_i, q^i, t s'écrit :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a}{\partial p_i}\left(Q_i - \frac{\partial(T_2 - T_0)}{\partial q^i}\right) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a}{\partial q^i} \cdot \frac{\partial(T_2 - T_0)}{\partial p_i} + \frac{\partial a}{\partial t} \neq 0.$$

§ IV. — Liaison du type $a = 0$, λe. Compatibilité.

Dans un très grand nombre de liaisons usuelles le mécanisme de la liaison est tel qu'on connaît à priori la direction de la force de liaison généralisée $\vec{L}$, c'est-à-dire que le champ de liaison E_l est de la forme λe champ de direction connue, λ fonction numérique à déterminer. Exemples

1. Deux solides en contact sans frottement, la force de liaison est dirigée suivant la normale commune.
2. Deux solides glissent l'un sur l'autre avec frottement, la force de liaison obéit aux lois de Coulomb ou à des lois de Coulomb généralisées. On connaît donc la direction de la force de liaison puisqu'elle est située d'une part dans le demi-plan défini par la normale commune et le vecteur opposé à la vitesse de glissement $\vec{V}_g$, d'autre part fait dans ce demi-plan avec la normale commune l'angle φ tel que $\operatorname{tg}\varphi = f$ ($f =$ const. loi de Coulomb ordinaire, f fonction de la vitesse de glissement, de la composante normale N de la pression des deux solides, loi de Coulomb généralisée). Même résultat quand on tient compte du couple de résistance au roulement et de pivotement.
3. Liaison de puissance nulle. Voir ce qu'il faut entendre par là au § V.
4. Liaison par asservissement de M. H. Béghin dont la direction d'action est connue.

En mettant en évidence la direction e du champ de liaison $E_l = \lambda e$ l'équation (II, 2) s'écrit

$$\text{(II, 3)} \qquad \lambda i(e) \, . \, da + i(E) \, . \, da = 0.$$

Par hypothèse dans le cas d'une liaison imposée à S $i(E) \, . \, da \neq 0$, l'équation précédente détermine pour le facteur λ une valeur finie si $i(e) \, . \, da \neq 0$. Les hypothèses $i(E) \, . \, da \neq 0$, $i(e) \, . \, da = 0$, conduisent à attribuer une valeur infinie à λ. Sous l'action d'une force dont la grandeur devient infinie, les liaisons invariables dont on a nécessairement tenu compte dans la mise en équations du système paramétrique cessent de l'être. On doit donc envisager la déformation de ces liaisons. Au sens de la théorie des solides invariables on ne peut aborder l'étude du cas $i(e) \, . \, da = 0$ pour lequel le postulat du chapitre I § II (système des forces intérieures impuissant) n'est pas valable. Nous rencontrerons un exemple de cette circonstance dans le cas du frottement de glissement, de roulement, de pivotement à la fin de ce chapitre. Ce qui précède nous conduit à la notion de liaison compatible.

Définition. — *Compatibilité d'une liaison du type $a = 0$, λe.* — Une liaison imposée à un système mécanique S du type $a = 0$, λe, est dite compatible si $i(e) . da \neq 0$.

Remarque. — Si en un point M_0 de V_{2n+1} appartenant à la sous-variété $a = 0$ on a simultanément $(i(e).da)_0 = 0$, $(i(E).da)_0 = 0$, λ n'est pas déterminé par l'équation (II, 3). On peut alors le déterminer au moyen de la valeur de $a^{(2)}$ calculée en appliquant le théorème II du chapitre I § III.

$$a^{(2)} = (i(E + \lambda e) . da)^{(2)} = 0.$$

$$\lambda^2(i(e)da)^{(2)} + \lambda[(i(e)d\lambda) . (i(e)da) + (i(E)d\lambda) . (i(e)da) + i(e)d(i(E)da) + i(E)d(i(e)da)] + (i(E)da)^{(2)} = 0$$

relation qui en M_0 se réduit à

$$\lambda_0^2(i(e)da)_0^{(2)} + \lambda_0[i(e)d(i(E)da) + i(E)d(i(e)da)]_0 + (i(E)da)_0^{(2)} = 0.$$

Cette équation du 2e degré en λ_0 le détermine généralement, sinon on utiliserait la première expression de $(i(E + \lambda e) . da)_0^{(n)}$ non identiquement nulle.

V. — Liaison de puissance nulle.

Cette catégorie de liaisons se caractérise aisément quand on prend comme variables les variables lagrangiennes $(q^i, \dot{q}^i, t)$. La puissance d'une force définie par $L_i\dot{q}^i$ dépend comme la vitesse du repère choisi. Elle revêt donc deux aspects distincts suivant le repère (chap. I § II, 4) que l'on envisage

1. Par rapport au repère naturel R, $P = \sum_{i=1}^{n} L_i\dot{q}^i$.

2. Par rapport au repère $\mathcal{R}$ de l'espace de Riemann à $(n + 1)$ dimensions

$$\mathfrak{P} = \sum_{i=0}^{n} L_i\dot{q}^i \qquad \text{avec} \qquad \dot{q}_0 = 1$$

repère qu'on est obligé d'introduire si les liaisons implicites dont on a tenu compte pour aboutir à la notion de système paramétrique, dépendent du temps t. Remarquons que la première expression se déduit de la deuxième en introduisant la convention de langage habituelle : puissance à t constant et que les deux expressions coïncident si les liaisons implicites ne dépendent pas du temps.

Pour la généralité des raisonnements nous utiliserons dans ce paragraphe la puissance $\mathfrak{L} = \sum_{i=0}^{n} L_i \dot{q}^i$ par rapport au repère riemannien $\mathcal{R}$.

On s'affranchit du rôle des coordonnées de la manière suivante : à la puissance $\mathfrak{L}$ correspond la forme $\pi = \mathfrak{L} dt = \sum_{i=0}^{n} L_i dq^i$ définie sur V_{n+1}. Le long d'une ligne intégrale Σ des équations du mouvement relatif au champ $E + E_l$, la valeur de la forme π est $i(E + E_l)\pi$, la valeur de la forme dt est conventionnellement $i(E + E_l) . dt = 1$ (cf. théorème II chap. I § III) d'où

$$\mathfrak{L} = \frac{\pi}{dt} = i(E + E_l)\pi.$$

Si on considère maintenant l'ensemble des lignes intégrales Σ, $\mathfrak{L} = i(E + E_l)\pi$ est une fonction numérique sur V_{2n+1}.

Définition. — Nous dirons qu'une liaison est de puissance nulle si $i(E + E_l)\pi = \mathfrak{L}$ est nulle sur l'ensemble des lignes intégrales du mouvement de S astreint à la liaison.

Théorème. — *Une liaison de puissance nulle a pour expression analytique* $\sum_{i=0}^{n} l_i \dot{q}^i$ *les quantités* l_i *étant des fonctions de* q^i, $\dot{q}^i$, t.

Les deux équations $a = 0$, $\mathfrak{L} = 0$ ne devant pas constituer deux relations de liaison distinctes, sont deux formes analytiques équivalentes de la liaison imposée à S au sens donné à cette expression au § II. On peut donc prendre comme expression analytique de la liaison $\mathfrak{L} = i(E + E_l)\pi = 0$. Cette dernière équation montre que π n'est définie qu'à un facteur près fonction numérique sur V_{2n+1}. Quand on prend les variables lagrangiennes il en résulte qu'une liaison de puissance nulle est définie par

$$\sum_{i=0}^{n} l_i \dot{q}^i = 0 \qquad \mathfrak{L} = \lambda \sum_{i=0}^{n} l_i \dot{q}^i.$$

Cas particuliers. — 1. Les l_i sont des fonctions des q^i seulement. Ce sont les liaisons linéairement non holonomes classiques

$$\sum_{i=1}^{n} l_i \dot{q}^i + l_0 = 0.$$

2. Les l_i sont les dérivées partielles d'une fonction $a(q^i, t)$. Ce sont les liaisons holonomes.

3. Les l_i sont les dérivées partielles par rapport aux $\dot{q}^i$ d'une même fonction homogène de degré m par rapport aux $\dot{q}^i$ $a(q^i, \dot{q}^i, t)$

$$l_i = \frac{\partial a}{\partial \dot{q}^i} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i = ma.$$

Ce sont les liaisons découvertes par Appell [18].

Remarque. — Les liaisons d'Appell contiennent comme cas particulier les deux précédents : $m = 1$ liaisons linéairement non holonomes, $m = 1$, $l_i = \frac{\partial a}{\partial q^i}$ liaisons holonomes.

Valeur du facteur λ pour une liaison de puissance nulle. — L'équation (II, 3) avec $a = l_i \dot{q}^i$, devient

$$\lambda \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial a}{\partial p_i} l_i \right) + \alpha = 0, \qquad \alpha = i(\mathrm{E})\, da$$

or

$$\frac{\partial a}{\partial p_i} = \frac{\partial a}{\partial \dot{q}^j} \cdot \frac{\partial \dot{q}^j}{\partial p_i} = \frac{\partial a}{\partial \dot{q}^j} g^{ij}$$

(g^{ij} tenseur métrique de V_n ou V_{n+1}) $l_i g^{ij} = l^j$ sont les composantes contra-variantes de la direction d'action de la force de liaison par rapport au repère R. λ est donc déterminé par

$$\text{(II, 4)} \qquad \lambda \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial a}{\partial \dot{q}^j} l^j \right) + \alpha = 0.$$

Cas particulier. — Liaison d'Appell. $\frac{\partial a}{\partial \dot{q}^j} = l_j$ (II, 4) devient (II, 5)

$$\text{(II, 5)} \qquad \lambda \left(\sum_{j=1}^{n} l_j . l^j \right) + \alpha = 0.$$

Comme $\Sigma l_j l^j$ est le carré de la grandeur du vecteur $\vec{l}$ par rapport

[18] Cf. P. Appell, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 1911, tome 152, p. 1197-1199.

au repère R le coefficient de λ pour les liaisons d'Appell est toujours une quantité positive. Ce fait a une très grande importance pour l'unicité des mouvements d'un système S soumis à des liaisons de classe U (liaisons unilatérales) étudiées au chapitre IV et V.

§ VI. — Étude de la liaison constituée par le contact de deux solides glissant, roulant et pivotant l'un par rapport à l'autre.

Considérons un repère mobile formé par un trièdre trirectangle MXYZ ayant pour origine le point de contact des deux solides S_1 et S_2, pour axes la normale commune dirigée vers S_1, MX et MY étant situés dans le plan tangent commun liés à un système de deux lignes orthogonales tracées sur S_2.

Notations par rapport à ce trièdre soient :

$\vec{\Omega}(P^1, P^2, P^3)$ la rotation du trièdre de coordonnées
$\vec{\omega}_1(p^1, p^2, p^3)$ la rotation absolue du corps S_1
$\overrightarrow{\gamma_{AG_1}}(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$ la vitesse absolue de G_1 centre de gravité de S_1
$\overrightarrow{MG_1}(g^1, g^2, g^3)$ les coordonnées de G_1
$\vec{\omega}_2(p^4, p^5, p^6)$ la rotation absolue de S_2
$\overrightarrow{V_{AG_2}}(\alpha^4, \alpha^5, \alpha^6)$ la vitesse absolue de G_2
$\overrightarrow{MG_2}(g^4, g^5, g^6)$ les coordonnées de G_2
$\vec{R}$ la résultante des actions de S_2 sur S_1
$\vec{K}$ le moment résultant par rapport à M des actions de S_2 sur S_1
$\overrightarrow{V_{MS_1}}$ la vitesse du point de S_1 en contact avec S_2 en M
$\overrightarrow{V_{MS_2}}$ la vitesse du point de S_2 en contact avec S_1 en M.

Le vecteur $\vec{V} = \overrightarrow{V_{MS_1}} - \overrightarrow{V_{MS_2}}$ représente l'état cinématique de S_1 par rapport à S_2. Ce vecteur a pour composantes :

$$\begin{aligned} u^1 &= \alpha^1 - \alpha^4 + (g^2p^3 - g^3p^2) - (g^5p^6 - g^6p^5) \\ u^2 &= \alpha^2 - \alpha^5 + (g^3p^1 - g^1p^3) - (g^6p^4 - g^4p^6) \\ u^3 &= \alpha^3 - \alpha^6 + (g^1p^2 - g^2p^1) - (g^4p^6 - g^5p^4). \end{aligned}$$

La condition de contact de S_1 et de S_2 se traduit par $u^3 = 0$. Elle constitue la relation de liaison au sens du paragraphe I.

$$\text{(II, 11)} \quad a = \alpha^3 - \alpha^6 + (g^1p^2 - g^2p^1) - (g^4p^5 - g^5p^4) = 0.$$

Evaluons la puissance du système des forces de liaison.

Le vecteur caractérisant la rotation relative de S_1 par rapport à S_2 est $\vec{\omega}_1 - \vec{\omega}_2$ dont les composantes sont :

sur le plan tangent commun $\vec{\omega}_r \begin{cases} p^1 - p^4 \\ p^2 - p^5 \end{cases}$

sur la normale commune $\vec{\omega}_n \; p^3 - p^6$.

La puissance des forces de liaison est :

$$P = \vec{R}(\vec{V}_{MS_1} - \vec{V}_{MS_2}) + \vec{K}(\vec{\omega}_1 - \vec{\omega}_2).$$

Dans l'hypothèse $\vec{V}_{MS_1} \neq \vec{V}_{MS_2}$, $\vec{\omega}_1 \neq \vec{\omega}_2$, P non nulle n'est déterminée que si on précise direction et grandeur de $\vec{R}$ et de $\vec{K}$. C'est le but des lois de Coulomb que nous rappelons

1) Lois concernant $\vec{R}$. $\vec{V}_{MS_1} - \vec{V}_{MS_2} = \vec{V}$ dont la composante normale est nulle si S_1 et S_2 sont en contact a une composante tangentielle $\vec{V}_g$ vitesse de glissement de S_1 par rapport à S_2. $\vec{R}$ a une composante tangentielle $\vec{T}$ et une composante normale $\vec{N}$.

a) La composante tangentielle $\vec{T}$ est colinéaire à $\vec{V}_g$ mais dirigée en sens opposé.

b) $|\vec{T}|$ est lié à $|\vec{N}|$ par la relation $|\vec{T}| = f|\vec{N}|$, f coefficient de frottement d'où

$$\vec{R}(\vec{V}_{MS_1} - \vec{V}_{MS_2}) = Nu^3 - f|N\vec{V}_g|.$$

2) Lois concernant $\vec{K}$. $\vec{\omega}_1 - \vec{\omega}_2$ a une composante tangentielle $\vec{\omega}_r$ qui caractérise le roulement de S_1 par rapport à S_2, et une composante normale $\vec{\omega}_n$ qui caractérise le pivotement de S_1 par rapport à S_2. $\vec{K}$ a une composante tangentielle $\vec{K}_t$, une composante normale $\vec{K}_n$.

a) La composante tangentielle $\vec{K}_t$ est colinéaire à $\vec{\omega}_2$, mais dirigée en sens opposé.

b) $|\vec{K}_t|$ est lié à $|\vec{N}|$ par la relation $|\vec{K}_t| = \delta|\vec{N}|$, δ étant un coefficient appelé paramètre de résistance au roulement.

c) $\vec{K}_n$ colinéaire à $\vec{\omega}_n$ mais dirigé en sens opposé est lié à $\vec{N}$ par la relation $|\vec{K}_n| = \varpi|\vec{N}|$, ϖ étant un coefficient appelé paramètre de résistance au pivotement.

Il résulte de ces lois

$$\vec{K}(\vec{\omega}_1 - \vec{\omega}_2) = -|\vec{N}|\left[\delta|\vec{\omega}_r| + \varpi|\vec{\omega}_n|\right].$$

La puissance du système des forces de liaison au sens de la définition du paragraphe I est

$$\text{(II, 6)} \qquad P = N\left[u^3 - f|\vec{V}_g| - \delta|\vec{\omega}_r| - \varpi|\vec{\omega}_n|\right] \quad N > 0$$

ou (II, 7)

$$P = N\left[u^3 - f\sqrt{(u^1)^2 + (u^2)^2} - \delta\sqrt{(p^1 - p^4)^2 + (p^2 - p^5)^2} - \varpi\varepsilon(p^3 - p^6)\right],$$
$$\varepsilon = \pm 1, \qquad \varepsilon(p^3 - p^6) > 0.$$

L'expression entre crochets est une fonction des 12 paramètres q^i caractérisant la position des deux solides dans l'espace et de leurs dérivées premières $\dot{q}^i$. Remarquons que les quantités u^1, u^2, u^3, p^1, ..., p^6 sont des formes linéaires et homogènes des $\dot{q}^i$. Pour mettre P sous la forme classique $\sum_{i=1}^{n} L_i\dot{q}^i$, il suffit d'appliquer le théorème d'Euler à chacune des fonctions homogènes :

$$\sqrt{(u^1)^2 + (u^2)^2} = \frac{u^1}{\sqrt{(u^1)^2 + (u^2)^2}} \sum_{i=1}^{12} \frac{\partial u^1}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i + \frac{u^2}{\sqrt{(u^1)^2 + (u^2)^2}} \sum_{i=1}^{12} \frac{\partial u^2}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i$$

$$\sqrt{(p^1 - p^4)^2 + (p^2 - p^5)^2} = \frac{p^1 - p^4}{\sqrt{(p^1 - p^4)^2 + (p^2 - p^5)^2}} \sum_{i=1}^{12} \frac{\partial(p^1 - p^4)}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i$$
$$+ \frac{p^2 - p^5}{\sqrt{(p^1 - p^4)^2 + (p^2 - p^5)^2}} \sum_{i=1}^{12} \frac{\partial(p^2 - p^5)}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i.$$

L'expression des L_i résulte de là et également celui des l_i puisque N se met en facteur dans les L_i. Il est important de remarquer que ce calcul est valable dans l'hypothèse où les coefficients f, δ, ϖ, sont des fonctions de N pression des deux solides, de la vitesse de glissement, de la rotation $\vec{\omega}_r$ ou $\vec{\omega}_n$.

Cas particulier. — f, δ, ϖ, sont des constantes ou bien des fonctions de N, pression normale considérée comme un paramètre. Si on pose

$$\text{(II, 8)} \qquad \Psi = u^3 - f\sqrt{(u^1)^2 + (u^2)^2}$$
$$- \delta\sqrt{(p^1 - p^4)^2 + (p^2 - p^5)^2} - \varpi\varepsilon(p^3 - p^6)$$

l'expression (II, 7) montre que $P = N\Psi$; Ψ étant homogène et de degré 1 par rapport aux $\dot{q}^i$, la forme classique de P est alors (II, 9) ce qui permet d'énoncer le théorème

$$\text{(II, 9)} \qquad P = N\Sigma\frac{\partial\Psi}{\partial\dot{q}^i}\dot{q}^i.$$

THÉORÈME I. — *Dans le contact de deux solides frottant, glissant, pivotant l'un sur l'autre, si les coefficients f, δ, ϖ sont constants ou des fonctions du paramètre* N *(pression normale) les composantes covariantes de la force de liaison par rapport au repère naturel* R *sont proportionnelles aux dérivées partielles par rapport aux $\dot{q}^i$ d'une fonction $\Psi(q^i, \dot{q}^i)$.*

Calcul de N. — La liaison constituée par le contact de deux solides étant du type $a = 0$, λe le calcul de N s'effectue au moyen de l'équation (II, 3) qui s'écrit (II, 10)

$$\text{(II, 10)} \qquad N(i(e).da) + i(E).da = 0.$$

Cette équation si f, δ, ϖ sont indépendants de N est linéaire en N ; dans le cas contraire elle constitue une équation implicite définissant N.

La détermination effective de N demande le calcul de $i(E).da$ et de $i(e)da$. $i(E).da$ ne peut se calculer que si l'on se donne le système des forces extérieures aux deux solides ; comme ce dernier est arbitraire, $i(E).da$ est une fonction numérique arbitraire sur V_{2n+1}. Quant à $i(e).da$ il est déterminé puisqu'on connaît la relation de liaison et la puissance P.

THÉORÈME II. — *Dans le contact de deux solides glissant, roulant, pivotant l'un sur l'autre, l'invariant $i(e).da$ est donné par la formule :*

$$\text{(II, 12)} \quad i(e).da = A + f(B\sin s + C\cos s) + \delta(D\cos\sigma + F\sin\sigma) + \varepsilon\varpi G$$

dans laquelle f, δ, ω, désignent respectivement le coefficient de frottement les paramètres de résistance au roulement et au pivotement, s et σ sont respectivement l'angle du vecteur de glissement $\vec{V}_g$ et l'angle du vecteur de rotation de roulement $\vec{\omega}_r$ avec une direction choisie arbitrairement dans le plan tangent commun aux deux solides, A, B, C, D, F, G *des coefficients ne dépendant que de la distribution des masses dans les deux solides à l'instant t.*

Remarquons que relation de liaison et puissance s'expriment simplement au moyen des paramètres de vitesse $\alpha^1 \dots \alpha^6$, $p^1 \dots p^6$;

$$a = \alpha^3 - \alpha^6 + g^1 p^2 - g^2 p^1 - g^4 p^5 + g^5 p^4 = 0 \tag{II, 11}$$

(II, 13)

$$P = N\left[\frac{\partial u^3}{\partial \beta^\rho}\beta^\rho - f\frac{\partial\sqrt{(u^1)^2+(u^2)^2}}{\partial(\beta^\rho)}\beta^\rho - \delta\frac{\partial\sqrt{(p^1-p^4)^2+(p^2-p^5)^2}}{\partial(\beta^\rho)}\beta^\rho - \overline{\omega}\varepsilon(p^3-p^6)\right]$$

β^ρ désignant un des paramètres quelconques α^ρ ou p^ρ. L'expression (II, 13) de P fait intervenir les dérivées partielles par rapport à u^1, u^2 et $p^1 - p^4$, $p^2 - p^5$, qui ont une signification géométrique. Si s désigne l'angle que fait la vitesse de glissement $\vec{V}_g$ avec l'axe MX

$$\cos s = \frac{u^1}{\sqrt{(u^1)^2+(u^2)^2}} \qquad \sin s = \frac{u^2}{\sqrt{(u^1)^2+(u^2)^2}}$$

si σ désigne l'angle que fait le vecteur rotation de roulement $\vec{\omega}_r$ avec MX

$$\cos\sigma = \frac{p^1 - p^4}{\sqrt{(p^1-p^4)^2+(p^2-p^5)^2}} \qquad \sin\sigma = \frac{p^2 - p^5}{\sqrt{(p^1-p^4)^2+(p^2-p^5)^2}}$$

d'où la nouvelle expression de la puissance

$$P = N l_\rho \beta^\rho \tag{II, 14}$$

avec

$$\begin{cases} l_{\alpha_1} = -f\cos s \\ l_{\alpha_2} = -f\sin s \\ l_{\alpha_3} = 1 \\ l_{p_1} = -g^2 - f\sin s g^3 - \delta\cos\sigma \\ l_{p_2} = g^1 + f\cos s g^3 - \delta\sin\sigma \\ l_{p_3} = -f\cos s g^2 + f\sin s g^1 - \varepsilon\overline{\omega} \end{cases} \qquad \begin{cases} l_{\alpha_4} = f\cos s \\ l_{\alpha_5} = f\sin s \\ l_{\alpha_6} = -1 \\ l_{p_4} = g^5 + f\sin s g^6 + \delta\cos\sigma \\ l_{p_5} = -g^4 - f\cos s g^6 + \delta\sin\sigma \\ l_{p_6} = f\cos s g^5 - f\sin s g^4 + \varepsilon\overline{\omega} \end{cases}$$

Tout revient à établir la formule permettant de calculer l'invariant $i(e)da$ au moyen de ces paramètres β^ρ. Or quand on utilise des variables hamiltonniennes $i(e).da = \sum l_i \frac{\partial a}{\partial p_i}$; quand on utilise des variables lagrangiennes, g^{ij} étant le tenseur métrique fondamental

$$i(e).da = \sum_{ij} g^{ij} l_i \frac{\partial a}{\partial \dot{q}^j}.$$

Si l'on utilise des paramètres de vitesse quelconques liés aux paramètres $\dot{q}^i$ par des relations linéaires $\beta^\rho = \mu^\rho_i \dot{q}^i$

$$l_i = \mu^\rho_i l_\rho. \qquad \frac{\partial a}{\partial \dot{q}^j} = \frac{\partial a}{\partial \beta^\rho} \cdot \frac{\partial \beta^\rho}{\partial \dot{q}^j} = \frac{\partial a}{\partial \beta^\rho} \cdot \mu^\rho_j,$$

$$i(e) \, . \, da = g^{ij} \mu^\rho_i \mu^\sigma_j l_\rho \frac{\partial a}{\partial \beta_\sigma} = \gamma^{\rho\sigma} l_\rho \frac{\partial a}{\partial \beta^\sigma}$$

$\gamma^{\rho\sigma} = g^{ij} \mu^\rho_i \mu^\sigma_j$ étant l'expression contravariante du tenseur fondamental dans le nouveau système de paramètres. Le tenseur contravariant $\gamma^{\rho\sigma}$ se déduit du tenseur covariant $\gamma_{\rho\sigma}$ qui est connu puisqu'il est donné par les coefficients de la force vive absolue dans le système d'axes MXYZ. Soit

$$\begin{aligned}
2\mathrm{T} = m_1[(\alpha^1)^2 + (\alpha^2)^2 + (\alpha^3)^2] + \mathrm{A}_1(p^1)^2 + \mathrm{B}_1(p^2)^2 \\
+ \mathrm{C}_1(p^3)^2 - 2\mathrm{D}_1 p^2 p^2 - 2\mathrm{E}_1 p^3 p^1 - 2\mathrm{F}_1 p^1 p^2 \\
+ m_2[(\alpha^4)^2 + (\alpha^5)^2 + (\alpha^6)^2] + \mathrm{A}_2(p^4)^2 + \mathrm{B}_2(p^5)^2 \\
+ \mathrm{C}_2(p^6)^2 - 2\mathrm{D}_2 p^5 p^6 - 2\mathrm{E}_2 p^6 p^4 - 2\mathrm{F}_2 p^4 p^5
\end{aligned}$$

dans laquelle m_1, m_2 désignent les masses des deux solides. $\mathrm{A}_1, \ldots \mathrm{F}_1$, les coefficients de l'ellipsoïde d'inertie de S_1 par rapport à des axes parallèles à MXYZ issus de G, $\mathrm{A}_2, \ldots \mathrm{F}_2$ les analogues pour S_2. De là résulte

$$\gamma^{\alpha_1\alpha_1} = \gamma^{\alpha_2\alpha_2} = \gamma^{\alpha_3\alpha_3} = \frac{1}{m_1}; \qquad \gamma^{\alpha_4\alpha_4} = \gamma^{\alpha_5\alpha_5} = \gamma^{\alpha_6\alpha_6} = \frac{1}{m_2};$$

$$\gamma^{\alpha_i\alpha_j} = 0 \qquad \text{pour} \qquad i \neq j$$

$$\begin{aligned}
&\gamma^{p_1p_1} = a^1, \quad \gamma^{p_2p_2} = b^1, \quad \gamma^{p_3p_3} = c^1, \quad \gamma^{p_2p_3} = d^1, \quad \gamma^{p_3p_1} = e^1, \quad \gamma^{p_1p_2} = f^1 \\
&\gamma^{p_4p_4} = a^2, \quad \gamma^{p_5p_5} = b^2, \quad \gamma^{p_6p_6} = c^2, \quad \gamma^{p_5p_6} = d^2, \quad \gamma^{p_6p_4} = e^2, \quad \gamma^{p_4p_5} = f^2,
\end{aligned}$$

$i(e) \, . \, da = \gamma^{\rho\sigma} l_\rho \dfrac{\partial a}{\partial \beta^\sigma}$ donne la formule (II, 12) avec pour A, B, C, D. F, G des valeurs qui ne dépendent que de la distribution des masses à l'intérieur des deux solides à l'instant t.

$$\begin{aligned}
\mathrm{A} &= \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + a^1(g^2)^2 + b^1(g^1)^2 - 2f^1 g^1 g^2 + a^2(g^4)^2 + b^2(g^5)^2 - 2f^2 g^4 g^5 \\
\mathrm{B} &= a^1 g^2 g^3 + d^1(g^1)^2 - e^1 g^1 g^2 - f^1 g^1 g^3 + a^2 g^5 g^6 + d^2(g^4)^2 - e^2 g^4 g^5 - f^2 g^4 g^6 \\
\mathrm{C} &= b^1 g^1 g^3 - d^1 g^1 g^2 + e^1(g^2)^2 - f^1 g^2 g^3 + b^2 g^4 g^5 - d^2 g^4 g^5 + e^2(g^5)^2 - f^2 g^5 g^6 \\
\mathrm{D} &= a^1 g^2 - f^1 g^1 + a^2 g^5 - f^2 g^4 \\
\mathrm{F} &= -b^1 g^1 + f^1 g^2 - b^2 g^4 + f^2 g^5 \\
\mathrm{G} &= -d^1 g^1 + e^1 g^2 - d^2 g^4 + e^2 g^5
\end{aligned}$$

Dans le cas où on suppose f, δ, ϖ indépendants de N, N n'est fini pour $i(\mathrm{E}).da \neq 0$ que si $i(e).da \neq 0$.

Cette question présentant un certain intérêt pratique, nous allons montrer brièvement que la distribution de la matière dans les deux solides doit être assez particulière pour que $i(e).da = 0$ soit réalisé pour des valeurs de $f < 1$.

Pour simplifier prenons le cas d'un solide de révolution glissant avec frottement sur un plan, l'axe du solide restant dans un plan de symétrie vertical. Dans les calculs précédents on doit prendre :

$$g^2 = 0, \quad p^1 = 0, \quad p^3 = 0, \quad p^4 = p^5 = p^6 = 0,$$
$$g^4 = g^5 = g^6 = 0, \quad d^1 = 0, \quad f^1 = 0, \quad b^1 = \frac{1}{m_1 k^2},$$

d'où la condition

$$k^2 + (g^1)^2 + f g^1 g^3 = 0 \quad \text{si} \quad \cos s = 1.$$

Le glissement ayant lieu dans le sens positif de l'axe des X, g^3 étant positif il faut que g^1 soit négatif. Prenons pour système de référence des axes parallèles issus de G ; les coordonnées de M par rapport à O sont $\xi = -g^1$, $\zeta = -g^3$. k et f étant donnés on en déduit que le point de contact M du solide est par rapport à G sur la branche d'hyperbole

$$(\xi)^2 + f\xi\zeta = -k^2$$

la distance minimum de G à M est donnée par la longueur du demi-axe transverse $\dfrac{k\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{1+f^2}-1}}$; d'où l'inégalité $\dfrac{k}{\mathrm{GM}} \leqslant \dfrac{\sqrt{\sqrt{1+f^2}-1}}{\sqrt{2}}$.

Si le corps se réduit à une barre homogène $\dfrac{k}{\mathrm{GM}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, donc pour un corps homogène $\dfrac{k}{\mathrm{GM}} \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. La double inégalité n'est vérifiée que si $f > \dfrac{4}{3}$.

§ VII. — Méthode générale de formation des équations du mouvement d'un système mécanique astreint à une liaison.

Tout repose sur la forme extérieure de degré deux associée au système mécanique S, car cette forme est susceptible de s'exprimer au moyen de formes de Pfaff.

Nous supposerons la liaison l définie par $a(p_i, q^i, t) = 0$,

$\Omega_l = \Lambda l_i dq^i \wedge dt$; le cas où $\Omega_l = L_i dq^i \wedge dt$, tous les L_i étant connus sauf l'un d'eux pouvant être considéré comme un cas particulier puisqu'il suffit de grouper tous les L_i connus avec les Q_i qui correspondent aux forces extérieures pour être ramené au cas précédent, la fonction L_i inconnue jouant le rôle de Λ. La forme Ω associée au système astreint à la liaison l s'écrit

$$\Omega = dp_i \wedge dq^i - d(T_2 - T_0) \wedge dt + Q_i dq^i \wedge dt + \Lambda l_i dq^i \wedge dt.$$

La liaison imposée à S étant par hypothèse compatible (cf. chapitre II, § IV) $i(e)da = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a}{\partial p_i} l^i \neq 0$; il en résulte qu'on peut toujours substituer à deux différentielles associées dp_i, dq^i les deux formes de Pfaff π et σ définies par

$$\pi = l_i dq^i$$
$$\sigma = \frac{\partial a}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial a}{\partial q^i} dq^i + \frac{\partial a}{\partial t} dt$$

résolubles par rapport à deux différentielles associées, soient pour fixer les idées dp_1, dq_1

$$dp_1 = \frac{\sigma - \sum_{i=2}^{n} \frac{\partial a}{\partial p_i} dp_i - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a}{\partial q^i} dq^i - \frac{\partial a}{\partial t} dt}{\frac{\partial a}{\partial p_1}}$$

$$dq^1 = \frac{\pi - \sum_{2}^{n} l_i dq^i}{l_1}.$$

La forme extérieure associée au système exprimée un moyen d'un système de $2n$ formes de Pfaff σ, π, ω^α, α variant de 3 à $2n$ s'écrit :

$$\Omega = k_{12}(\sigma \wedge \pi) + k_{1\alpha}(\sigma \wedge \omega^\alpha) + k_{2\alpha}(\pi \wedge \omega^\alpha) + k_{\alpha\beta}\omega^\alpha \wedge \omega^\beta - (k_{\alpha_0}\omega^\alpha + k_{10}\pi + k_{20}\pi - \Lambda\pi) \wedge dt.$$

Les équations différentielles du mouvement sont les équations associées à Ω.

(1) $\frac{\partial \Omega}{\partial \omega^\alpha} = k_{\alpha\beta}\omega^\beta - k_{1\alpha}\sigma - k_{2\alpha}\pi - k_{\alpha 0} dt = 0$ en nombre égal à $2(n-1)$

(2) $\frac{\partial \Omega}{\partial \pi} = -k_{12}\sigma + k_{2\alpha}\omega^\alpha - (k_{20} - \Lambda) dt = 0$

(3) $\frac{\partial \Omega}{\partial \sigma} = k_{12}\pi + k_{1\alpha}\omega^\alpha - k_{10} dt = 0$

auxquelles on adjoint la liaison $a = 0$ et les relations de définition des formes.

Forme réduite Ω_r. — Remarquons que si dans Ω on tient compte de la liaison en annulant σ, on obtient une forme réduite Ω_r.

$$\Omega_r = k_{2\alpha}(\pi \wedge \omega^\alpha) + k_{\alpha\beta}(\omega^\alpha \wedge \omega^\beta) - (k_{\alpha 0}\omega^\alpha + k_{20}\pi - \Lambda\pi) \wedge dt.$$

Comparons les $(2n - 1)$ premières équations associées à Ω_r et à Ω dans lesquelles on fait $\sigma = 0$

$$(1') \quad \frac{\partial \Omega_r}{\partial \omega^\alpha} = k_{\alpha\beta}\omega^\beta - k_{2\alpha}\pi - k_{\alpha 0} . dt = 0 \quad \text{en nombre égal à } 2(n-1)$$

$$(2') \quad \frac{\partial \Omega_r}{\partial \pi} = k_{2\alpha}\omega^\alpha - (k_{20} - \Lambda)dt = 0.$$

On constate que ces $(2n - 1)$ premières équations sont les mêmes. La dernière équation du premier système qui manque quand on utilise Ω_r peut être remplacée par une équation indépendante des précédentes. En remarquant que

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \sigma} = \frac{\partial \Omega}{\partial (dp_1)} \cdot \frac{\partial (dp_1)}{\partial \sigma} = 0$$

$\dfrac{\partial \Omega}{\partial \sigma} = 0$ est équivalente à $\dfrac{\partial \Omega}{\partial (dp_1)} = 0$ est réciproquement. On en déduit qu'il suffit d'adjoindre aux équations $(1')$ et $(2')$ cette équation qui s'écrit

$$dq^1 - \frac{\partial T_2}{\partial p_1} dt = 0.$$

Dans l'ensemble des équations ainsi écrites on remplace p_1 par sa valeur calculée au moyen de l'équation $a = 0$, d'où le théorème :

Théorème I. — *Étant donné un système mécanique à n paramètres astreint à une liaison compatible $a(p_i, q^i, t) = 0$, $\Omega_l = \Lambda l_i dq^i \wedge dt$, on peut obtenir les équations du mouvement et le facteur de liaison Λ, en adjoignant aux équations associées à Ω_r, déduite de Ω en tenant compte de la liaison, d'une part $\pi = l_i dq^i$ d'autre part une des équations $dq^i - \dfrac{\partial T_2}{\partial p_i} dt = 0$, i étant tel que $\dfrac{\partial a}{\partial p^i} l_i \neq 0$ p_i étant dans les équations remplacé par sa valeur calculée au moyen de la relation $a = 0$.*

Remarque. — Dans la pratique si Ω est exprimée au moyen des variables lagrangiennes q^i, $\dot{q}^i$, t, et de leurs différentielles ce théorème se traduit par la règle suivante :

Règle. — Pour obtenir les équations différentielles du mouvement on substitue dans Ω à deux différentielles associées dq^1, $d\dot{q}^1$, par exemple les deux formes π et σ, Ω_r se réduit de Ω en faisant $\sigma = 0$ et en remplaçant $\dot{q}^1$ par sa valeur calculée au moyen de l'équation $a(q^i, \dot{q}^i, t) = 0$. Les équations associées à Ω_r auxquelles on adjoint d'une part $dq^1 - \dot{q}^1 dt = 0$, d'autre part $\pi = l_i dq^i$ déterminent les équations du mouvement et le facteur de liaison.

Forme réduite Ω_s donnant uniquement les équations différentielles du mouvement. — Ω_r formé comme on vient de l'indiquer dépend de $2(n-1)$ formes ω^α de dt et de π.

$$\Omega_r = k_{2\alpha}\pi \wedge \omega^\alpha + k_{\alpha\beta}\omega^\alpha \wedge \omega^\beta - (k_{\alpha 0}\omega^\alpha + k_{20}\pi - \lambda\pi) \wedge dt.$$

Comme $\pi = P_u dt$, (P étant la puissance des forces nécessaires à la réalisation de la liaison $P = \lambda P_u$, $P_u = l_i\dot{q}^i$), remplaçons π par $P_u dt$ dans Ω_r. On obtient ainsi une forme

$$\begin{aligned}\Omega_s &= k_{2\alpha}P_u\, dt \wedge \omega^\alpha + k_{\alpha\beta}\omega^\alpha \wedge \omega^\beta - k_{\alpha 0}\omega^\alpha \wedge dt \\ &= k_{\alpha\beta}\omega^\alpha \wedge \omega^\beta - (P_u k_{2\alpha} + k_{\alpha 0})\omega^\alpha \wedge dt\end{aligned}$$

dans laquelle ne figure plus λ. En comparant les équations associées à Ω_s et à Ω_r dans lesquelles on a remplacé π par $P_u\, dt$

$$\frac{\partial\Omega_s}{\partial\omega^\alpha} = k_{\alpha\beta}\omega^\beta - (P_u k_{2\alpha} + k_{\alpha 0})\, dt = 0 \qquad \text{en nombre égal à } 2(n-1)$$

$$\frac{\partial\Omega_r}{\partial\omega^\alpha} = k_{\alpha\beta}\omega^\beta - k_{2\alpha}P_u\, dt - k_{\alpha 0}\, dt = 0 \qquad \text{en nombre égal à } 2(n-1),$$

on constate que ce sont les mêmes. On peut donc obtenir les équations du mouvement indépendamment de λ au moyen de Ω_s dans laquelle ne figure plus que $2(n-1)$ différentielles dq^i, dp_i, et $(2n-1)$ variables p_i, q^i, p_1 par exemple étant remplacé par sa valeur au moyen de la liaison $a = 0$; l'équation à adjoindre aux équations caractérisques de Ω_s étant $dq^1 - \dfrac{\partial T_2}{\partial p_1} dt = 0$.

Formation de Ω_s. — Ω_s s'obtient en remplaçant dans Ω deux différentielles associées dp_1, dq^1 par les valeurs

$$dq^1 = \mathrm{P}_u dt - \sum_2^n l_i dq^i$$

$$dp_1 = -\frac{\sum_2^n \frac{\partial a}{\partial p_i} dp_i + \sum_1^n \frac{\partial a}{\partial q^i} dq^i + \frac{\partial a}{\partial t} dt}{\frac{\partial a}{\partial p_1}}.$$

Théorème II. — *Etant donné un système mécanique à n paramètres astreint à une liaison compatible $a(p_i, q^i, t) = 0$, $\Omega_l = \lambda l_i dq^i \wedge dt$, on peut obtenir les équations différentielles du mouvement comme caractéristiques d'une forme Ω_s de rang $2(n-1)$, déduite de Ω, en substituant à deux différentielles associées dp_i, dq^i, leur valeur étant calculée pour la première au moyen de la différentielle de l'équation de liaison, pour la deuxième au moyen de l'équation $\sum_{i=1}^n l_i dq^i - \mathrm{P}_u dt = 0$; si la variable p_i est remplacée par sa valeur extraite de $a = 0$ on adjoint au système des équations caractéristiques de Ω_s la forme $dq^i - \frac{\partial \mathrm{T}_2}{\partial p_i} dt = 0$.*

Remarques. — 1. Liaison de puissance nulle $\mathfrak{L} = 0$; comme $\mathfrak{L} = \mathrm{P}_u + l_0$ on remplace dans les formules précédentes P_u par $-l_0$.

2. Liaison de puissance nulle indépendante du temps $\mathrm{P} = 0$. dq^i est une fonction linéaire des $(n-1)$ autres différentielles.

3. Liaison holonome indépendante du temps. Dans Ω_s ne figure plus un couple de variables p_i, q^i, et leurs différentielles. Les équations différentielles du mouvement sont les caractéristiques d'une forme extérieure de degré deux de rang $2(n-1)$.

4. Si une variable q^i ne figure ni dans Ω ni dans la relation de liaison ni dans P_u, il y a un avantage évident à éliminer dq^i car Ω_s ne dépendra plus que de $2(n-1)$ variables et de leurs différentielles. Les équations différentielles du mouvement sont les caractéristiques d'une forme de degré deux de rang $2(n-1)$, la variable q^i étant déterminée par une quadrature.

CHAPITRE III

SYSTÈME MATÉRIEL ASTREINT A p LIAISONS

Définition. — Un système matériel holonome S caractérisé par une forme extérieure Ω de degré deux de rang $2n$ définie sur une variété différentiable est astreint à p liaisons.

1° si l'image de S est une sous-variété de V_{2n+1} définie par

$$a^1(M) = 0, \quad \ldots \quad a^p(M) = 0, \qquad M \in V_{2n+1}.$$

2° si on ajoute au champ caractéristique E défini par $i(E)\Omega = 0$, p champs de liaisons E^1, ... E^p, champs déterminés par les forces nécessaires à la réalisation de cette liaison.

Quand on emploie un système particulier de coordonnées les p liaisons sont définies

a) au point de vue théorique par :

1° p relations $a^h(p_i, q^i, t) = 0$ (h variant de 1 à p) ;

2° p formes $\Omega^h = L_i^h dq^i \wedge dt$ qu'on doit ajouter à Ω (i variant de 1 à p) ;

b) au point de vue pratique par :

1° p relations $a^h(q^i, \dot{q}^i, t) = 0$ $h(1$ à $p)$;

2° p puissances $P^h = L_i^h \dot{q}^i$ $i(1$ à $n)$.

Remarques — 1. L'ensemble des p relations de liaisons $a^1 = 0$, ... $a^p = 0$, peut être aussi défini par un ensemble quelconque de p fonctions de classe C^∞ $f_k(a^1, \ldots a^p) = 0$ (k de 1 à p) nulles au point O, dont le jacobien n'est pas nul. Un ensemble de p relations constitue donc un sous-anneau de fonction numériques sur l'anneau des fonctions numériques dont un choix $a^1 \ldots a^p$ indépendantes constituent les p éléments génériques. Dans la pratique il y a un intérêt évident à choisir ces p éléments aussi simples que possible, dans la théorie ce choix n'interviendra pas.

2. On peut toujours supposer que le champ E^h relatif à la h^e

liaison est de la forme $E^h = \lambda_h e^h$, e^h champ de direction connu, λ_h fonction numérique sur V_{2n+1}, car si dans les n composantes de E^h, $(n-1)$ sont connues la n^e inconnue, on peut écrire $E^h = E_c^h + \lambda_h e^h$, et considérer le nouveau champ $\bar{E} = E + E_c^h$ ce qui revient au point de vue mécanique à faire passer la partie des forces de liaisons qui est connue dans les forces extérieures appliquées à S. Il en résulte qu'on peut toujours sans restreindre la généralité des raisonnements considérer d'une part la puissance de l'ensemble des liaisons sous la forme $P = \lambda_h l_i^h \dot{q}^i$, d'autre part la forme Ω_l somme des Ω^h à ajouter à Ω écrite comme suit $\Omega_l = \lambda_h l_i^h dq^i \wedge dt$, les λ_h étant p fonctions numériques sur V_{2n+1} à déterminer, les l_i^h étant np fonctions numériques connues.

§ II. — Compatibilité des p liaisons.

Le champ caractéristique pour le système matériel astreint aux p liaisons est $E + \sum_{h=1}^{p} \lambda_h e^h$. Les formes $da^1, \ldots da^p$, devant être nulles sur les lignes intégrales des équations du mouvement, doivent appartenir au sous-module des formes caractéristiques de la forme $\Omega + \Omega_l$. D'après le théorème I du chapitre 1 § III les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il en soit ainsi sont

$$\text{(III, 1)} \qquad i\left(E + \sum_{h=1}^{p} \lambda_h e^h\right) da^k = 0 \qquad h,\ k(1 \text{ à } p)$$

conditions qui s'écrivent encore

$$\text{(III, 2)} \qquad \lambda_h i(e^h) da^k + i(E) da^k = 0.$$

Remarquons que si l'on change la représentation analytique des liaisons, les conditions que l'on obtiendrait ne sont que des combinaisons linéaires des p équations (III, 2) car $df_j = \frac{\partial f_j}{\partial a^k} da^k$, et

$$i(E + \lambda_h e^h) df_j = \lambda_h i(e^h) df_j + i(E) df_j = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial f_j}{\partial a^k} [\lambda_h i(e^h) da^k + i(E) da^k].$$

Les p conditions (III, 2) constituent un système linéaire aux p inconnues $\lambda_1, \ldots \lambda_p$. Les λ ne sont déterminés que si $\det|i(e^h) da^k| \neq 0$. Cette condition est évidemment indépendante des variables utilisées pour caractériser le système et ses p liaisons. Nous l'appellerons condition de compatibilité des p liaisons, car si elle est réalisée les facteurs de liaisons λ_h ne sont ni indéterminés ni infinis. Comme nous l'avons déjà indiqué dans le chapitre précédent le postulat « Système des forces intérieures impuissant » est valable. Pour cette raison nous poserons la définition :

p liaisons imposées à un système matériel sont compatibles si $\det |i(e^h)da^k| \neq 0$.

Remarque. — Cette notion de compatibilité des liaisons élimine une classe importante de mouvements dans lesquels les liaisons sont indéterminées au sens de la mécanique du solide rigide, mais cette notion est indispensable si l'on veut éviter des résultats paradoxaux.

Prenons par exemple une barre pesante dont les extrémités A et B glissent sans frottement sur un cercle vertical de rayon R. Pour $AB = 2R$, abstraction faite des liaisons un mouvement de rotation uniforme de la barre autour du centre O du cercle paraît possible ; si on considère les réactions en A et B, un semblable mouvement est impossible car ces réactions ne peuvent équilibrer l'action de la pesanteur. Montrons que deux telles liaisons sont d'après notre théorie incompatibles.

Soient M la masse de la barre, k son rayon de giration autour de son centre de gravité. En prenant pour axe polaire la verticale descendante issue du centre du cercle, pour coordonnées polaires du centre de gravité de la barre supposée homogène r, θ, pour angle de rotation de la barre φ, la forme Ω est

$$\frac{\Omega}{M} = d\dot{r} \wedge dr + r^2\, d\dot{\theta} \wedge d\theta + 2r\dot{\theta}\, dr \wedge d\theta + k^2\, d\dot{\varphi} \wedge d\varphi$$
$$- (\dot{r}\, d\dot{r} + r^2\dot{\theta}\, d\dot{\theta} + r\dot{\theta}^2\, dr + k^2\dot{\varphi}\, d\dot{\varphi}) \wedge dt + g(\cos\theta\, dr - r\sin\theta\, d\theta) \wedge dt.$$

Le champ caractéristique E a pour composantes :

$$r\dot{\theta}^2 + g\cos\theta, \quad \frac{-1}{r}(2\dot{r}\dot{\theta} + g\sin\theta), \quad 0, \quad \dot{r}; \quad \dot{\theta}, \quad \dot{\varphi}, \quad 1.$$

Supposons que la barre ait une longueur $2R\sin u$ avec $u \leqslant \frac{\pi}{2}$; classiquement les deux liaisons se traduisent par les deux relations $r = R\cos u$, $\varphi - \theta = \frac{\pi}{2}$ à notre point de vue par $\dot{r} = 0$, $\dot{\varphi} - \dot{\theta} = 0$, la barre glissant sans frottement elles sont de puissance nulle $P^1 = \lambda_1 \dot{r}$, $P^2 = \lambda_2(\dot{\varphi} - \dot{\theta})$. On en déduit :

1° les deux formes Ω^1 et Ω^2,

$$\Omega^1 = \lambda_1\, dr \wedge dt, \qquad \Omega^2 = \lambda_2\,(d\varphi - d\theta) \wedge dt$$

2° les composantes des deux champs de direction des liaisons e^1 et e^2

$$e^1(1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0) \qquad e^2\left(0,\ \frac{-1}{r^2},\ \frac{1}{k^2},\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\right).$$

Comme nous voulons examiner ce qui se produit lorsque $\dot{r} = \mathrm{R}\cos u$ pour $u = \frac{\pi}{2}$ les deux champs E et e^2 devenant infinis pour cette valeur, nous prendrons pour composantes des champs :

$$\mathrm{E}(r^2(r\dot{\theta}^2 + g\cos\theta),\quad -2r(\dot{r}\dot{\theta} + g\sin\theta),\quad 0,\quad r^2\dot{r},\quad r^2\dot{\theta},\quad r^2\dot{\varphi},\quad r^2).$$

$$e^1(r^2,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0) \qquad e^2\left(0,\ -1,\ \frac{r^2}{k^2},\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\right).$$

On obtient immédiatement :

$$i(e^1)\,d\dot{r} = r^2,\quad i(e^2)\,d\dot{r} = 0,\quad i(e^1)\,d(\dot{\varphi} - \dot{\theta}) = 0,\quad i(e^2)\,d(\dot{\varphi} - \dot{\theta}) = 1 + \frac{r^2}{k^2}\cdot$$

La condition de compatibilité s'écrit :

$$i(e^1)\,d\dot{r}\,.\,i(e^2)\,d(\dot{\varphi} - \dot{\theta}) = r^2\left(1 + \frac{r^2}{k^2}\right) = \mathrm{R}^2\cos^2 u\left(1 + \frac{\mathrm{R}^2\cos^2 u}{k^2}\right) \neq 0.$$

Pour $u = \frac{\pi}{2}$ les deux liaisons sont donc incompatibles.

Interprétation géométrique de la fonction scalaire det $|i(e^h)\,da^k|$. — La fonction numérique $\det|i(e^h)\,da^k|$ peut s'interpréter géométriquement sur V_{2n+1} en considérant d'une part le champ d'ordre p $e^1 \wedge e^2 \ldots \wedge e^p$ construit sur les p champs e^1, e^2, ... e^p, de l'espace T tangent à V_{2n+1}, d'autre part la forme d'ordre p $da^1 \wedge da^2 \ldots \wedge da^p$, construite sur les p formes da^1, ..., da^p de l'espace T′ dual de T. En un point M de la variété, le champ d'ordre p et la forme d'ordre p donnent respectivement naissance à un p-vecteur et à une p-forme dont le produit intérieur est $\det|i(e^h)\,da^k|$ (19). La condition de compatibilité $\det|i(e^h)\,da^k| \neq 0$ entraîne donc la non nullité de ce p-vecteur et de cette p-forme dont les significations sont les suivantes ;

1° la non nullité du p-vecteur signifie que les directions des

(19) Cf. N. Bourbaki, Algèbre multilinéaire, *Actualités scientifiques* N° 1044, Hermann, Paris, 1948, p. 106.

forces de liaisons en un point M de la variété V_{2n+1} forment un p-èdre par conséquent sont indépendantes.

2° la non nullité de la p-forme entraîne que les p fonctions définissant les relations de liaisons sont indépendantes.

Au point de vue analytique la condition de compatibilité se traduit ainsi :

Si on désigne d'une part par A la matrice à p lignes dont les éléments d'une ligne sont les composantes d'une des p formes $da^1, \dots da^p$ par rapport à la base (dp_i, dq^i, dt), d'autre part par L la matrice à p colonnes dont les éléments d'une colonne sont les composantes d'un des p champs $e^1, \dots e^p$ le produit de A par L définit une matrice carrée d'ordre p dont le déterminant est le produit intérieur du p-vecteur et de la p-forme.

$$A = \left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial a^1}{\partial p^1} \cdots\cdots \dfrac{\partial a^1}{\partial p_n}, \dfrac{\partial a^1}{\partial q^1}, \cdots\cdots \dfrac{\partial a^1}{\partial q^n}, \dfrac{\partial a^1}{\partial t} \\ \dfrac{\partial a^p}{\partial p^1} \cdots\cdots \dfrac{\partial a^p}{\partial p^n}, \dfrac{\partial a^p}{\partial q^1}, \cdots\cdots \dfrac{\partial a^p}{\partial p^n}, \dfrac{\partial a^p}{\partial t} \end{matrix} \right\| \qquad L = \left\| \begin{matrix} l_1^1 & \cdots\cdots & l_1^p \\ l_n^1 & \cdots\cdots & l_n^p \\ 0 & \cdots\cdots & 0 \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ 0 & \cdots\cdots & 0 \end{matrix} \right\|$$

Les composantes $L_{i_1 \dots i_p}$ du p-vecteur sont formées au moyen des déterminants d'ordre p extraits de la matrice L. Les composantes $A^{i_1 \dots i_p}$ de la p-forme sont formées au moyen des déterminants d'ordre p extraits de la matrice A.

$$A^{i_1 \dots i_p} L_{i_1 \dots i_p} = \det |A \,.\, L|.$$

§ III. — Forme Ω_r réduite associée à S astreint à p liaisons donnant les équations du mouvement et les facteurs de liaisons.

Nous allons montrer que l'existence du p-vecteur $L_{i_1 \dots i_p}$ et de la p-forme $A^{i_1 \dots i_p}$ dont le produit intérieur n'est pas nul permet de construire une forme Ω_r réduite dont $(2n-p)$ équations associées jointes à p équations convenablement choisies donnent d'une part les équations du mouvement, d'autre part les p facteurs de liaisons.

Posons

$$l_i^h \, dq^i = \pi^h \quad h(1 \text{ à } p).$$

L'existence du p-vecteur $L_{i_1 \dots i_p}$ nous permet de calculer p différentielles dq^i en fonction des π^h.

Posons

$$\frac{\partial a^h}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial a^h}{\partial q^i} dq^i + \frac{\partial a^h}{\partial t} dt = \sigma^h \quad h\ (1 \text{ à } p).$$

L'existence de la p-forme $A^{i_1 \cdots i_p}$ nous permet de calculer p différentielles dp_i en fonction des σ^h.

Le produit intérieur du p-vecteur et de la p-forme n'étant pas nul, on peut choisir pour les deux systèmes de différentielles dq^i, dp_i, qu'on exprime en fonction des formes π^h, σ^h, la même partition d'indices, de 1 à p pour fixer les idées, ce qui est toujours possible avec un choix approprié de notations. Il en résulte que la forme Ω associée au système exprimée au moyen de $2n$ formes de Pfaff π^h, σ^h (h variant de 1 à p) ω^α (α variant de $2p+1$ à $2n$) s'écrit :

$$\Omega = k_{ih}(\sigma^i \wedge \pi^h) + k_{\alpha i}(\omega^\alpha \wedge \sigma^i) + k_{\alpha h}(\omega^\alpha \wedge \pi^h) + k_{\alpha\beta}(\omega^\alpha \wedge \omega^\beta) - (k_{\alpha o}\omega^\alpha + k_{io}\sigma^i + k_{ho}\pi^h - \lambda_h \pi^h) \wedge dt.$$

Les équations du mouvement et les facteurs de liaisons sont données par les caractéristiques de Ω.

(1) $$\frac{\partial \Omega}{\partial \omega^\alpha} = k_{\alpha i}\sigma^i + k_{\alpha h}\pi^h + k_{\alpha\beta}\omega^\beta - k_{\alpha o}\, dt = 0$$

en nombre égal à $2(n-p)$

(2) $$\frac{\partial \Omega}{\partial \pi^h} = -k_{ih}\sigma^i - k_{\alpha h}\omega^\alpha - k_{ho}\, dt + \lambda_h\, dt = 0$$

en nombre égal à p

(3) $$\frac{\partial \Omega}{\partial \sigma^i} = k_{ih}\pi^h - k_{\alpha i}\omega^\alpha - k_{io}\, dt = 0$$

en nombre égal à p

auxquelles on adjoint les relations de liaisons $a^h = 0$, les équations de définition des formes avec les p conditions $\sigma^h = 0$.

Réduction de Ω. — Soit Ω_r ce que devient Ω quand on annule les σ^h.

$$\Omega_r = k_{\alpha h}(\omega^\alpha \wedge \pi^h) + k_{\alpha\beta}(\omega^\alpha \wedge \omega^\beta) - (k_{\alpha o}\omega^\alpha + k_{ho}\pi^h - \lambda_h \pi^h) \wedge dt.$$

Les $(2n-p)$ premières équations associées à Ω_r sont :

(1′) $$\frac{\partial \Omega_r}{\partial \omega^\alpha} = k_{\alpha h}\pi^h + k_{\alpha\beta}\omega^\beta - k_{\alpha o}\, dt = 0$$

en nombre égal à $2(n-p)$

(2′) $$\frac{\partial \Omega_r}{\partial \pi^h} = -k_{\alpha h}\omega^\alpha - k_{ho}\, dt + \lambda_h\, dt = 0$$

en nombre égal à p.

On remarque que l'ensemble des $(2n-p)$ équations (1′) et (2′) ne sont autres que les équations (1) et (2) dans lesquelles on annule les σ^h. Pour compléter ce système il faut théoriquement adjoindre à (1′) et (2′) les p équations $\frac{\partial\Omega}{\partial\sigma^i}=0$ ou p équations équivalentes. Or si Ω est exprimée au moyen des variables p_i, q^i, on a pour les équations associées, n équations

$$\frac{\partial\Omega}{\partial(dp_i)}=dq^i-\frac{\partial T_2}{\partial p_i}dt=0.$$

Quand on effectue un changement de formes

$$dp_i=\alpha_{ik}\sigma^k, \qquad \text{avec} \qquad \det|\alpha_{ik}|\neq 0 \qquad \frac{\partial\Omega}{\partial(\sigma^k)}=\frac{\partial\Omega}{\partial(dp_i)}\cdot\alpha_{ik}.$$

de sorte que les p équations $\frac{\partial\Omega}{\partial(dp_i)}=0$ entraînent $\frac{\partial\Omega}{\partial\sigma^h}=0$ et réciproquement. Il suffit donc d'adjoindre à (1)′ et (2)′ les p équations $dq^i-\frac{\partial T_2}{\partial p_i}dt=0$ dans lesquelles on remplace p des quantités p_i par leur valeur calculée au moyen des p équations de liaisons $a^h(p_i, q^i, t)=0$. On peut donc énoncer le théorème :

Théorème I. — *Étant donné un système mécanique à n paramètres astreint à p liaisons compatibles du type* $a^h(p_i, q^i, t)=0$, $P^h=\lambda_h l_i^h\dot{q}^i dt$, *on peut obtenir les équations différentielles du mouvement et les p facteurs* λ_h *des liaisons en adjoignant aux* $(2n-p)$ *premières équations associées à la forme* Ω_r, *d'une part les p équations* $dq^i-\frac{\partial T_2}{\partial p^i}dt=0$, *d'autre part les p équations* $l_i^h dq^i=\pi^h$, *p des variables* p_i *étant calculées au moyen des p liaisons* $a^h=0$.

Remarque. — Dans la pratique si Ω est exprimée au moyen des variables lagrangiennes q^i, $\dot{q}^i$, t et de leurs différentielles, ce théorème se traduit par la règle suivante :

Règle. — Pour obtenir les équations différentielles du mouvement et les facteurs de liaisons, on substitue dans Ω à p couples de différentielles associées dq^i, $d\dot{q}^i$, les $2p$ formes π^h, σ^h, Ω_r se déduit de Ω en annulant les σ^h, et en remplaçant p des variables $\dot{q}^i$ par leur valeur calculée au moyen des p équations de liaisons. Les $(2n-p)$ premières équations associées à Ω_r auxquelles on adjoint d'une part les p équations $dq^i-\dot{q}^i dt=0$, d'autre part les p équations de définition des π^h, $\pi^h=l_i^h dq^i$, déterminent les équations du mouvement et les p facteurs de liaisons.

§ IV. — Forme réduite Ω_s donnant uniquement les équations différentielles du mouvement.

Ω_r formé comme nous l'avons indiqué dans le paragraphe précédent dépend de $2(n-p)$ formes ω^α, de p formes π^h et de dt.

$$\Omega_r = k_{\alpha h}(\omega^\alpha \wedge \pi^h) + k_{\alpha\beta}(\omega^\alpha \wedge \omega^\beta) - (k_{\alpha_0}\omega^\alpha + k_{h_0}\pi^h - \lambda_h \pi^h) \wedge dt.$$

Comme $\pi^h = P_u^h dt$ (P^h étant la puissance des forces nécessaires à la réalisation de la h^e liaison $P^h = \lambda_h P_u^h$), remplaçons chaque π^h par $P_u^h dt$ dans Ω_r, on obtient ainsi une forme

$$\Omega_s = k_{\alpha h}(\omega^\alpha \wedge P_u^h dt) + k_{\alpha\beta}(\omega^\alpha \wedge \omega^\beta) - k_{\alpha_0}\omega^\alpha \wedge dt$$

dans laquelle ne figure plus aucun des facteurs de liaisons λ_h. Cette forme Ω_s est de rang $2(n-p)$ car sa puissance $(n-p)^e$ est :

$$\Omega_s^{(n-p)} = K\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \cdots \wedge \omega^{2n-2p} \wedge dt \qquad \text{(K fonction numérique).}$$

En comparant les $2(n-p)$ équations caractéristiques de Ω_s et les $2(n-p)$ premières équations associées à Ω_r dans lesquelles on a remplacé chaque π^h par $P_u^h dt$

$$\frac{\partial \Omega_s}{\partial \omega^\alpha} = k_{\alpha h} P_u^h dt + k_{\alpha\beta}\omega^\beta - k_{\alpha_0} dt = 0$$
$$\frac{\partial \Omega_r}{\partial \omega^\alpha} = k_{\alpha h} P_u^h dt + k_{\alpha\beta}\omega^\beta - k_{\alpha_0} dt = 0$$

on constate que ce sont les mêmes. On peut donc obtenir les équations du mouvement indépendamment des facteurs de liaisons au moyen de Ω_s dans laquelle ne figure plus que $2(n-p)$ différentielles dq^i, dp_i, et $(2n-p)$ variables p_i, q^i, p des variables p_i étant remplacées par leur valeur calculée au moyen des p équations de liaisons. Il faut en outre adjoindre aux équations caractéristiques de Ω_s les p équations $dq^i - \frac{\partial T_2}{\partial p_i} dt$ correspondant aux différentielles dq ne figurant pas dans Ω_s.

Formation de Ω_s. — Ω_s se déduit de Ω en remplaçant p couples de différentielles associées dp_i, dq^i par les valeurs calculées au moyen des deux systèmes

$$\frac{\partial a^h}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial a^h}{\partial q^i} dq^i + \frac{\partial a^h}{\partial t} dt = 0\,; \qquad l_i^h dq^i - P_u^h dt = 0 \qquad h(1 \text{ à } p).$$

THÉORÈME II. — *Étant donné un système mécanique à n paramètres astreint à p liaisons compatibles* $a^h(p_i, q^i, t) = 0$, $\Omega_l = \lambda_h l_i^h dq^i \wedge dt$, *on peut obtenir les équations différentielles du mouvement comme caractéristiques d'une forme* Ω_s *de rang* $2(n-p)$ *déduite de* Ω, *en substituant à p couples de différentielles associées* dp_i, dq^i, *les valeurs calculées pour les* dp_i *au moyen des p différentielles des équations de liaisons, pour les* dq^i *au moyen des p relations* $l_i^h dq^i - P_u^h dt = 0$; *si les p variables* p_i *sont calculées au moyen des p équations de liaisons* $a^k = 0$, *on adjoint au système des caractéristiques de* Ω_s *les p formes* $dq^i - \frac{\partial T_i}{\partial p_i} dt = 0$.

REMARQUES. — 1. Liaisons de puissance nulle. $\mathfrak{L}^h = 0$, comme $\mathfrak{L}_u^h = P_u^h + l_0^h$, on remplace P_u^h par $-l_0^h$.

2. Liaisons de puissance nulle indépendantes du temps $P_u^h = 0$, p des différentielles dq^i s'expriment en fonction des $(n-p)$ autres.

3. Liaisons holonomes ou pseudo-holonomes indépendantes du temps. Dans Ω_s ne figure plus p couples de variables p_i, q^i, ainsi que leurs différentielles. Les équations du mouvement sont les caractéristiques d'une forme extérieure de degré deux de rang $2(n-p)$.

4. Si p variables q^i ne figurent ni dans Ω, ni dans les p relations de liaisons, ni dans les puissances P_u^h des liaisons, il y a un avantage évident à éliminer les p différentielles dq^i, car Ω_s ne dépendra plus que de $2(n-p)$ variables et de leurs différentielles. Les équations différentielles du mouvement sont les caractéristiques d'une forme de degré deux de rang $2(n-p)$, les p variables q^i étant déterminées par des quadratures puisque les p formes $dq^i - \frac{\partial T_2}{\partial p_1} dt$ sont fermées modulo les caractéristiques de Ω_s.

§ V. — Méthode générale pour l'étude d'un système mécanique à *n* paramètres. Applications.

De l'ensemble des quatre paragraphes précédents se dégagent naturellement une méthode générale pour l'étude des systèmes mécaniques dépendant de n paramètres. Ces systèmes sont toujours constitués par des ensembles de solides et de points matériels astreints à un certain ensemble de liaisons du type $a(p_i, q^i, t) = 0$, $P = \lambda l_i \dot{q}^i$, supposées compatibles.

1° Les facteurs de liaisons λ se déterminent toujours indépendamment des mouvements par l'utilisation combinée de la forme Ω et de l'opérateur $i(\ )$ de M. H. Cartan. Il suffit pour cela de déterminer pour le système libéré de ces liaisons :

a) le champ caractéristique E de la forme Ω correspondante, ce qui est immédiat si Ω est écrite sous forme canonique.

b) les champs $e^1, \ldots, e^p$, de direction des forces de liaisons.

Les p équations (III, 2) déterminent complètement le système des forces de liaisons.

Remarquons à ce sujet que si $e^1, \ldots, e^p$, ne dépendent pas des λ, ces équations sont linéaires en λ, mais si pour des raisons physiques $e^1, \ldots, e^p$ dépendent des λ, le système (III, 2) constitue un système d'équations implicites par rapport aux λ. C'est ce qui se produit en particulier dans le cas du frottement de glissement, de roulement, de pivotement, lorsqu'on considère coefficients de frottement, paramètres de résistance au roulement et au pivotement comme fonctions des pressions normales.

2° Les équations du mouvement peuvent toujours s'obtenir indépendamment des facteurs de liaisons au moyen des équations caractéristiques d'une forme Ω_s auxquelles on adjoint p formes différentielles convenables (cf. ; Th. II, § IV). Les propriétés de ce système différentiel seront étudiées dans le chapitre VI de ce travail. Au préalable nous donnerons quelques exemples simples d'applications des méthodes précédentes.

Exemple I. — Un disque homogène pesant, de masse M, de rayon R, de moment d'inertie Mk^2 par rapport à son centre roule et glisse sur la ligne de plus grande pente d'un plan incliné faisant l'angle i avec l'horizontal. On suppose que le coefficient de frottement est une fonction de la vitesse de glissement v et de la pression normale N soit $f(v, N)$.

En prenant pour axe des x, la ligne de plus grande pente du plan orienté vers le bas, pour axe Oy la perpendiculaire, ξ, η, étant les coordonnées du centre du cercle, θ son angle de rotation, la forme Ω pour le disque libre est :

$$\Omega = M d\dot{\xi} \wedge d\xi + M d\dot{\eta} \wedge d\eta + Mk^2\, d\dot{\theta} \wedge d\theta$$
$$- M(\dot{\xi}\, d\dot{\xi} + \dot{\eta}\, d\dot{\eta} + k^2\dot{\theta}\, d\dot{\theta}) \wedge dt + Mg(\sin i d\xi - \cos i d\eta) \wedge dt.$$

Le champ caractéristique E a pour composantes

$$E(g \sin i,\ -g \cos i,\ 0,\ \dot{\xi},\ \dot{\eta},\ \dot{\theta},\ 1).$$

La liaison se traduit par $\dot{\eta} = 0$, puissance $P = N[\varepsilon f(\dot{\xi} + R\dot{\theta}) + \dot{\eta}]$ avec $\varepsilon(\dot{\xi} + R\dot{\theta}) < 0$ d'où $\Omega_l = N[\varepsilon f(d\xi + R d\theta) + d\eta]$; notons que $V = \dot{\xi} + R\dot{\theta}$.

Le champ e de direction de la liaison a pour composantes

$$e\left(\frac{\varepsilon f}{M}, \frac{1}{M}, \frac{\varepsilon f R}{M k^2}, 0, 0, 0, 0\right).$$

La pression normale N est donné par $N i(e)\, d\dot{\eta} + i(E)\, d\dot{\eta} = 0$

$$i(e)\, d\dot{\eta} = \frac{1}{M} \qquad i(E)\, d\dot{\eta} = -g \cos i \qquad \text{d'où} \qquad N = Mg \cos i$$

Pour obtenir les équations différentielles formons Ω_s déduite de $\Omega + \Omega_l$ en remplaçant $d\dot{\eta}$ par o, $d\eta$ par

$$-\varepsilon f(d\xi + R\, d\theta) + [\dot{\eta} + \varepsilon f(\dot{\xi} + R\dot{\theta})]\, dt$$

$$\frac{\Omega_s}{M} = d\dot{\xi} \wedge d\xi + k^2\, d\dot{\theta} \wedge d\theta - (\dot{\xi}\, d\dot{\xi} + k^2\dot{\theta}\, d\dot{\theta}) \wedge dt$$
$$+ g \sin i\, d\xi \wedge dt + g \cos i\, \varepsilon f(d\xi + R\, d\theta) \wedge dt.$$

Les équations du mouvement sont les caractéristiques de Ω_s. Un choix intuitif de 4 opérateurs de M. H. Cartan permet de les mettre sous la forme

$$i(x^1)\Omega_s = \frac{dv}{\sin i + \varepsilon f(v) \cos i\left(1 + \frac{R^2}{k^2}\right)} - g\, dt = 0,$$

$$i(x^2)\Omega_s = d\theta - \frac{\dot{\theta}\, dv}{\sin i + \varepsilon f(v) \cos i\left(1 + \frac{R^2}{k^2}\right)} \cdot \frac{1}{g} = 0$$

$$i(x^3)\Omega_s = d\dot{\theta} \quad \frac{-\varepsilon R \cos i f(v)\, dv}{k^2 \sin i + \varepsilon f(v) \cos i(k^2 + R^2)} = 0\,;$$

$$i(x^4)\Omega_s = d\xi + R\, d\theta - \frac{1}{g} \frac{v\, dv}{\sin i + \varepsilon f(v) \cos i\left(1 + \frac{R^2}{k^2}\right)} = 0$$

L'existence des champs x^1, ... x^4 précédents tient aux transformations infinitésimales de la forme Ω_s comme nous le démontrerons au chapitre VI, § II. Ce système est intégrale par quadratures.

Roulement sans glissement. — Dans notre théorie ce sont deux liaisons de puissance nulle :

$$\dot\eta = 0, \qquad P^1 = N\dot\eta, \qquad \dot\xi + R\dot\theta = 0, \qquad P^2 = T(\dot\xi + R\dot\theta),$$
$$P^1_u = \dot\eta, \qquad P^2_u = \dot\xi + R\dot\theta.$$

Les composantes des champs de direction des liaisons sont :

$$e^1\left(0,\ \frac{1}{M},\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\right) \qquad e^2\left(\frac{1}{M},\ 0,\ \frac{R}{Mk^2},\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\right).$$

Déterminons d'abord les composantes de la réaction au moyen des opérateurs

$$i(e^1)\,d\dot\eta = \frac{1}{M}, \qquad i(e^2)\,d\dot\eta = 0, \qquad i(E)\,d\dot\eta = -g\cos i$$
$$i(e^1)\,d(\dot\xi + R\dot\theta) = 0, \qquad i(e^2)\,d(\dot\xi + R\dot\theta) = \frac{1}{M}\left(1 + \frac{R^2}{k^2}\right),$$
$$i(E)\,d(\dot\xi + R\dot\theta) = g\sin i$$

d'où

$$N = -\frac{i(E)\,d\dot\eta}{i(e^1)\,d\dot\eta} = Mg\cos i, \qquad T = \frac{-i(E)\,d(\dot\xi + R\dot\theta)}{i(e^2)\,d(\dot\xi + R\dot\theta)} = -\frac{Mg\sin i}{1 + \dfrac{R^2}{k^2}}.$$

Les équations différentielles du mouvement se déduisent de Ω_s obtenue à partir de

$$\frac{\Omega + \Omega_l}{M} = d\dot\xi \wedge d\xi + d\dot\eta \wedge d\eta + k^2 d\dot\theta \wedge d\theta - (\dot\xi\, d\dot\xi + \dot\eta\, d\dot\eta + k^2\dot\theta\, d\dot\theta) \wedge dt$$
$$+ g(\sin i\, d\xi - \cos i\, d\eta) \wedge dt + N\, d\eta \wedge dt + T(d\xi + R\, d\theta) \wedge dt$$

en remplaçant $d\dot\eta$ par 0, $d\eta$ par $+P^1_u\, dt = 0$ puisque $P^1 = 0$, $d\dot\theta$ par $-\frac{1}{R}\, d\dot\xi$, $d\theta$ par $\frac{1}{R}(-d\xi + P^2_u\, dt) = -\frac{d\xi}{R}$ puisque $P^2_u = 0$.

$$\frac{\Omega_s}{M} = \left(1 + \frac{k^2}{R^2}\right) d\dot\xi \wedge d\xi - \left(1 + \frac{k^2}{R^2}\right)\dot\xi\, d\dot\xi \wedge dt - g\sin i\, d\xi \wedge dt.$$

On en déduit immédiatement $d\dot\xi = \dfrac{g\sin i}{1 + \dfrac{k^2}{R^2}}\, dt$, $d\xi = \dot\xi\, dt$, résultats classiques.

Exemple II. — Disque homogène roulant et glissant sur une courbe plane fixe, le disque restant dans le plan de la courbe.

Soient Ox et Oy deux axes fixes, m la masse du disque, a son rayon, mk^2 son moment d'inertie autour de son centre de gravité G, ξ, η, les coordonnées de G, θ l'angle de rotation du disque autour de G, X, Y les composantes de la résultante des forces extérieures autres que celles de l'action de contact de la courbe sur le disque, Γ le moment résultant des forces extérieures dans les mêmes conditions.

Au disque entièrement libre est associée la forme extérieure :

$$\Omega = d(m\dot{\xi}\, d\xi + m\dot{\eta}\, d\eta + mk^2\dot{\theta}\, d\theta - \mathrm{T}\, dt) + (\mathrm{X}\, d\xi + \mathrm{Y}\, d\eta + \Gamma\, d\theta) \wedge dt$$

dans laquelle T désigne la demi-force vive du disque.

La courbe C sur laquelle roule et glisse le disque est supposée définie par x, y fonctions de l'arc s de la courbe. La demi-tangente orientée Pt à C fait en un point P quelconque un angle $\alpha = (\mathrm{O}x, \mathrm{P}t)$, le rayon de courbure en P est $\rho = \dfrac{ds}{d\alpha}\cdot$ Il est commode de prendre des axes mobiles Pt, Pn avec $(\mathrm{P}t, \mathrm{P}n) = \dfrac{\pi}{2}\cdot$ Les coordonnées de G dans ce système sont d'une part α, d'autre part $\mathrm{PG} = \mathrm{R}$ obtenues de la manière suivante : par un point G du plan on mène une normale GP à C d'où le point P(α) et $\mathrm{PG} = \mathrm{R}$ sur cette normale orientée.

Les différentielles $d\xi$, $d\eta$ s'expriment au moyen de $d\alpha$, $d\mathrm{R}$ par les formules

$$d\xi = \cos\alpha(\rho - \mathrm{R})\, d\alpha - d\mathrm{R}\sin\alpha \qquad d\eta = (\rho - \mathrm{R})\sin\alpha\, d\alpha + d\mathrm{R}\cos\alpha.$$

Soient u, v les composantes de la vitesse de G par rapport aux axes Pt, Pn

$$\dot{\xi} = u\cos\alpha - v\sin\alpha \qquad \dot{\eta} = u\sin\alpha + v\cos\alpha$$

d'où les expressions de T, $\dot{\xi}\, d\xi + \dot{\eta}\, d\eta$, et de Ω en fonction des variables choisies :

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2} m(u^2 + v^2 + k^2\dot{\theta}^2), \qquad \dot{\xi}\, d\xi + \dot{\eta}\, d\eta = (\rho - \mathrm{R})u\, d\alpha + v\, d\mathrm{R}$$

$$\begin{aligned}\Omega = m[(\rho - \mathrm{R})\, du \wedge d\alpha - u\, d\mathrm{R} \wedge d\alpha + dv \wedge d\mathrm{R} + k^2\, d\dot{\theta} \wedge d\theta] \\ - m(u\, du + v\, dv + k^2\dot{\theta}\, d\dot{\theta}) \wedge dt \\ + [(\mathrm{X}\cos\alpha + \mathrm{Y}\sin\alpha)(\rho - \mathrm{R})\, d\alpha + (\mathrm{Y}\cos\alpha - \mathrm{X}\sin\alpha)\, d\mathrm{R} + \Gamma\, d\theta] \wedge dt.\end{aligned}$$

Le champ caractéristique E a pour composantes dans l'hypothèse $\rho - \mathrm{R} \neq 0$

$$\mathrm{E}\left(\frac{\mathrm{X}\cos\alpha + \mathrm{Y}\sin\alpha}{m} + \frac{uv}{\rho - \mathrm{R}}, \quad \frac{\mathrm{Y}\cos\alpha - \mathrm{X}\sin\alpha}{m} - \frac{u^2}{\rho - \mathrm{R}}, \quad \frac{\Gamma}{mk^2}, \quad \frac{u}{\rho - \mathrm{R}}, \quad v, \quad \dot{\theta}, \quad 1\right).$$

La liaison se traduit par $v = 0$, puissance

$$P = N\{v + \varepsilon f[(\rho - R)\dot{\alpha} + a\,\dot{\theta}]\}$$

avec $\varepsilon = -1$ si $u + a\dot{\theta} > 0$, $\varepsilon = +1$ si $u + a\dot{\theta} < 0$. On en déduit

$$\Omega_l = N\{dR + \varepsilon f[(\rho - R)\,d\alpha + a\,d\theta]\}.$$

D'où les composantes de la direction du champ de liaison

$$e\left(\frac{\varepsilon f}{m},\ \frac{1}{m},\ \frac{\varepsilon f a}{mk^2},\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\right).$$

La valeur de la réaction normale N se déduit de $N i(e)\,dv + i(E)\,dv = 0$

$$N = -\frac{i(E)\,dv}{i(e)\,dv} = X\sin\alpha - Y\cos\alpha + m\frac{u^2}{\rho - a}\cdot$$

Pour obtenir les équations différentielles formons Ω_s qui s'obtient à partir de Ω en remplaçant dv par O, dR par

$$-\varepsilon f[(\rho - R)\,d\alpha + a\,d\theta] + \varepsilon f[(\rho - r)\dot{\alpha} + a\dot{\theta}]\,dt$$

puisque $v = 0$

$$\begin{aligned}\Omega_s = {} & m(\rho - R)\,du \wedge d\alpha + mua\varepsilon f\,d\theta \wedge d\alpha + mu\varepsilon f[(\rho - r)\dot{\alpha} + a\dot{\theta}]d\alpha \wedge dt \\ & + mk^2\,d\dot{\theta} \wedge d\theta - m(u\,du + k^2\dot{\theta}\,d\dot{\theta}) \wedge dt \\ & + (X\cos\alpha + Y\sin\alpha)(\rho - R)d\alpha \wedge dt \\ & - (Y\cos\alpha - X\sin\alpha)\varepsilon f[(\rho - R)\,d\alpha + a\,d\theta] \wedge dt + \Gamma\,d\theta \wedge dt.\end{aligned}$$

Les équations associées à Ω_s donnent

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Omega_s}{\partial(d\alpha)} = {} & -m(\rho - R)\,du - ma\varepsilon f\,d\theta + mu\varepsilon f[(\rho - R)\dot{\alpha} + a\dot{\theta}]\,dt \\ & + (X\cos\alpha + Y\sin\alpha)(\rho - R)\,dt - (Y\cos\alpha - X\sin\alpha)\varepsilon f(\rho - R)\,dt = 0\end{aligned}$$

$$\frac{\partial\Omega_s}{\partial(d\theta)} = -mk^2\,d\dot{\theta} + m\varepsilon fau\,d\alpha + \Gamma\,dt - \varepsilon fa(Y\cos\alpha - X\sin\alpha)\,dt = 0$$

$$\frac{\partial\Omega_s}{\partial(du)} = m(\rho - R)\,d\alpha - mu\,dt = 0$$

$$\frac{\partial\Omega_s}{\partial(a\dot{\theta})} = mk^2(d\theta - \dot{\theta}\,dt) = 0$$

auxquelles on adjoint $\dfrac{\partial\Omega}{\partial(dv)} = m(dR - v\,dt) = 0$. Cette dernière compte tenue de la liaison donne $R = a$. Le système s'écrit encore sous la forme :

$$\frac{1}{2}\frac{du^2}{d\alpha} - \varepsilon f u^2 = \frac{\rho - a}{m}[\mathrm{X}\cos\alpha + \mathrm{Y}\sin\alpha - \varepsilon f(\mathrm{Y}\cos\alpha - \mathrm{X}\sin\alpha)]$$

avec

$$\varepsilon = -1 \quad \text{si} \quad u + a\dot{\theta} > 0$$
$$\varepsilon = +1 \quad \text{si} \quad u + a\dot{\theta} < 0$$

$$mk^2\frac{d\dot{\theta}}{d\alpha} = \Gamma\frac{\rho - a}{u} + m\varepsilon fau - \varepsilon fa(\mathrm{Y}\cos\alpha - \mathrm{X}\sin\alpha)\frac{\rho - a}{u}$$

$$\frac{d\theta}{d\alpha} = \dot{\theta}\frac{\rho - a}{u} \qquad dt = \frac{\rho - a}{u}d\alpha.$$

Remarque. — Les points pour lesquels $\rho - a = 0$ sont des points singuliers, dont la signification géométrique est la suivante : le centre de gravité du disque décrit une courbe Γ parallèle à C, dont le rayon de courbure est $\rho - a$, aux points pour lesquels $\rho - a = 0$, la courbure de Γ est infinie, ces points sont les points de rebroussement de Γ en général ($\rho - a$ changeant de signe en s'annulant) ; en un pareil point le cercle devrait traverser la courbe C, ce qui matériellement est impossible. Notre théorie de la compatibilité des liaisons montre qu'en de semblables points la liaison doit être considérée comme incompatible. Il suffit pour cela de procéder comme nous l'avons fait dans l'exemple de la barre, certaines composantes du champ E devenant infinies, on commencera par multiplier toutes les composantes de E et de e par $(\rho - a)$; d'où la condition de compatibilité $(i(c)\,dv = \frac{\rho - a}{m} \neq 0.$

2. Si X, Y, sont fonctions uniquement de la position de G, donc ne dépendent que de α, lorsque la liaison est réalisée, le mouvement du centre G du cercle est le même que celui d'un point matériel glissant avec frottement sur la courbe parallèle à C à la distance a.

3. Si en plus des conditions précédentes Γ ne dépend que de α les équations différentielles du mouvement s'intègre par quadrature.

Roulement sans glissement du disque sur la courbe C. — Le disque est astreint à deux liaisons de puissance nulle :

1° $\quad v = 0 \qquad \mathrm{P}^1 = \mathrm{N}.v \qquad \Omega^1 = \mathrm{N}\,d\mathrm{R} \wedge dt$

2° $\quad u + a\dot{\theta} = 0 \qquad \mathrm{P}^2 = \mathrm{T}(u + a\dot{\theta}) \qquad \Omega^2 = \mathrm{T}[(\rho - \mathrm{R})d\alpha + a\,d\theta] \wedge dt.$

Les composantes des directions des champs de liaisons sont :

$$e^1\left(0,\ \frac{1}{m},\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\right) \qquad e^2\left(\frac{1}{m},\ 0,\ \frac{a}{mk^2},\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\right)$$

$$i(e^1)\,dv = \frac{1}{m}, \qquad i(e^2)\,dv = 0 \qquad i(\mathrm{E})\,dv = \frac{\mathrm{Y}\cos\alpha - \mathrm{X}\sin\alpha}{m} - \frac{u^2}{\rho - a}$$

$$i(e^1)\,d(u + a\dot\theta) = 0, \qquad i(e^2)\,d(u + a\dot\theta) = \frac{1}{m} + \frac{a^2}{mk^2},$$

$$i(\mathrm{E})\,d(u + a\dot\theta) = \frac{\mathrm{X}\cos\alpha + \mathrm{Y}\sin\alpha}{m} + \frac{uv}{\rho - a} + \frac{a\Gamma}{mk^2}$$

d où

$$\mathrm{N} = \mathrm{X}\sin\alpha - \mathrm{Y}\cos\alpha + m\frac{u^2}{\rho - a} \qquad \mathrm{T} = -\frac{(\mathrm{X}\cos\alpha + \mathrm{Y}\sin\alpha)k^2 + a\Gamma}{a^2 + k^2}$$

Les équations différentielles du mouvement sont les caractéristiques de Ω_s déduite de $\Omega + \Omega_l$ en remplaçant dv par o, $d\mathrm{R}$ par o car vdt est nul, R par a, $d\dot\theta$ par $-\frac{du}{a}$, $\dot\theta$ par $-\frac{u}{a}$, $d\theta$ par $-\frac{\rho - a}{a}d\alpha$.

$$\Omega_s = m(\rho - a)\left(1 + \frac{k^2}{a^2}\right)du \wedge d\alpha - m\left(1 + \frac{k^2}{a^2}\right)u\,du \wedge dt$$
$$+ \left[\mathrm{X}\cos\alpha + \mathrm{Y}\sin\alpha - \frac{\Gamma}{a}\right](\rho - a)\,d\alpha \wedge dt.$$

Si X, Y, Γ, ne dépendent que de la position du cercle dans le plan, lorsque la liaison est réalisée ces fonctions ne dépendent que de α. Dans ces conditions la forme Ω_s est la même que celle d'un point matériel qui se meut sans frottement sur la courbe parallèle à C à la distance a.

Exemple III. — Glissement et roulement d'une sphère sur un plan fixe. La sphère est supposée homogène, de masse M, de rayon a, de moment d'inertie $\mathrm{M}k^2$ par rapport à un de ses diamètres. Par rapport à 3 axes rectangulaires fixes, O pris dans le plan, Oz dirigé suivant la normale au plan soient :

ξ, η, ζ, les coordonnées de G centre de la sphère,

p, q, r, les composantes de la rotation absolue de la sphère,

ω^1, ω^2, ω^3, 3 formes de Pfaff construites sur les différentielles absolues des paramètres fixant la position d'un trièdre invariablement lié à la sphère.

X, Y, Z, les composantes de la résultante générale des forces extérieures appliquées à la sphère autres que la réaction du plan

La forme Ω associée à la sphère libre est :

$$\begin{aligned}\Omega = {} & \mathrm{M}(d\dot\xi\wedge d\xi + d\dot\eta\wedge d\eta + d\dot\zeta\wedge d\zeta)\\ & + \mathrm{M}k^2(dp\wedge\omega^1 + dq\wedge\omega^2 + dr\wedge\omega^3 + p\omega^2\wedge\omega^3 + q\omega^3\wedge\omega^1 + r\omega^1\wedge\omega^2)\\ & - \mathrm{M}[\dot\xi d\dot\xi + \dot\eta d\dot\eta + \dot\zeta d\dot\zeta + k^2(p\,dp + q\,dq + r\,dr)]\wedge dt\\ & + (\mathrm{X}\,d\xi + \mathrm{Y}\,d\eta + \mathrm{Z}\,d\zeta)\wedge dt\end{aligned}$$

(pour l'expression cinétique de Ω se reporter au chapitre I, § II solide mobile autour d'un point fixe).

La liaison dans l'hypothèse du glissement de la sphère se traduit par

$$\zeta = 0 \qquad \mathrm{P} = \mathrm{N}[\dot\zeta - f\sqrt{(\dot\xi - aq)^2 + (\dot\eta + ap)^2}]$$

f désignant le coefficient de frottement de la sphère sur le plan supposé constant.

Substituons aux paramètres de vitesse $\dot\xi$, $\dot\eta$ les coordonnées polaires ρ, α de la vitesse de glissement du point de contact P de la sphère sur le plan

$$\begin{array}{lll}\dot\xi - aq = \rho\cos\alpha & \dot\xi = \rho\cos\alpha + aq & d\dot\xi = d\rho\cos\alpha - \rho\sin\alpha\,d\alpha + a\,dq\\ \dot\eta + ap = \rho\sin\alpha & \dot\eta = \rho\sin\alpha - ap & d\dot\eta = d\rho\sin\alpha + \rho\cos\alpha\,d\alpha - a\,dp\end{array}$$

La liaison se traduit alors par $\zeta = 0$,

$$\mathrm{P} = \mathrm{N}[\dot\zeta - f\cos\alpha(\dot\xi - aq) - f\sin\alpha(\dot\eta + ap)]$$

d'où la forme

$$\Omega_l = \mathrm{N}[d\zeta - f\cos\alpha(d\xi - a\omega^2) - f\sin\alpha(d\eta + a\omega^1)]\wedge dt.$$

Formons Ω_r qui jointe à $d\zeta - \dot\zeta\,dt = 0$, donnera la composante normale de la réaction et les équations différentielles du mouvement. Pour cela remplaçons dans Ω $d\dot\zeta$ par 0 et $d\zeta$ par

$$d\zeta = \pi + f\cos\alpha\,(d\xi - a\omega^2) + f\sin\alpha\,(d\eta + a\omega^1)$$

$$\begin{aligned}\Omega_r = {} & \mathrm{M}[(d\rho\cos\alpha - \rho\sin\alpha\,d\alpha + a\,dq)\wedge d\xi\\ & \qquad + (d\rho\sin\alpha + \rho\cos\alpha\,d\alpha - a\,dp)\wedge d\eta]\\ & + \mathrm{M}k^2(dp\wedge\omega^1 + dq\wedge\omega^2 + dr\wedge\omega^3\\ & + \mathrm{M}k^2[p(\omega^2\wedge\omega^3) + q(\omega^3\wedge\omega^1) + r(\omega^1\wedge\omega^2)]\\ & + [\mathrm{X}\,d\xi + \mathrm{Y}\,d\eta + (\mathrm{Z}+\mathrm{N})\pi + \mathrm{Z}f\cos\alpha(d\xi - a\omega^2)\\ & \qquad + \mathrm{Z}f\sin\alpha\,(d\eta + a\omega^1)]\wedge dt\\ & - \mathrm{M}[(\rho + a\cos\alpha q - a\sin\alpha p)\,d\rho - a\rho(p\cos\alpha + q\sin\alpha)\,d\alpha\\ & \qquad + a\rho\,(\cos\alpha\,dq - \sin\alpha\,dp) + k^2r\,dr]\wedge dt\\ & - \mathrm{M}(k^2 + a^2)(p\,dp + q\,dq)\wedge dt.\end{aligned}$$

Les équations associées à Ω_r sont :

$$\frac{\partial\Omega_r}{\partial(d\xi)} = -\mathrm{M}(d\rho\cos\alpha - \rho\sin\alpha\, d\alpha + a\,dq) + \mathrm{X}\,dt + \mathrm{Z}f\cos\alpha\,dt = 0$$

$$\frac{\partial\Omega_r}{\partial(d\eta)} = -\mathrm{M}(d\rho\sin\alpha + \rho\cos\alpha\, d\alpha - a\,dp) + \mathrm{Y}\,dt + \mathrm{Z}f\sin\alpha\,dt = 0$$

$$\frac{\partial\Omega_r}{\partial(d\rho)} = \mathrm{M}(d\xi\cos\alpha + d\eta\sin\alpha) - \mathrm{M}(\rho + a\cos\alpha q - a\sin\alpha p)\,dt = 0$$

$$\frac{\partial\Omega_r}{\partial(d\alpha)} = \mathrm{M}\rho(-\sin\alpha\,d\xi + \cos\alpha\,d\eta) + \mathrm{M}(p\cos\alpha + q\sin\alpha)a\rho\,dt = 0$$

$$\frac{\partial\Omega_r}{\partial(dp)} = -\mathrm{M}a\,d\eta + \mathrm{M}k^2\omega^1 + \mathrm{M}a\rho\sin\alpha\,dt - \mathrm{M}(k^2 + a^2)p\,dt = 0$$

$$\frac{\partial\Omega_r}{\partial(dq)} = \mathrm{M}a\,d\xi + \mathrm{M}k^2\omega^2 - \mathrm{M}a\rho\cos\alpha\,dt - \mathrm{M}(k^2 + a^2)q\,dt = 0$$

$$\frac{\partial\Omega_r}{\partial(dr)} = \mathrm{M}k^2(\omega^3 - r\,dt) = 0$$

$$\frac{\partial\Omega_r}{\partial\omega^1} = -\mathrm{M}k^2(dp + q\omega^3 - r\omega^2) + \mathrm{Z}af\sin\alpha\,dt = 0$$

$$\frac{\partial\Omega_r}{\partial\omega^2} = -\mathrm{M}k^2(dq - p\omega^3 + r\omega^1) - \mathrm{Z}af\cos\alpha\,dt = 0$$

$$\frac{\partial\Omega_r}{\partial\omega^3} = -\mathrm{M}k^2(dr + p\omega^2 - q\omega^1) = 0$$

$$\frac{\partial\Omega_r}{\partial\pi} = (\mathrm{Z} + \mathrm{N})\,dt = 0.$$

On en déduit

$$\frac{d\xi - aq\,dt}{\cos\alpha} = \frac{d\eta + ap\,dt}{\sin\alpha} = \rho\,dt,$$

$$\omega^1 = p\,dt, \qquad \omega^2 = q\,dt, \qquad \omega^3 = r\,dt, \qquad \frac{dr}{dt} = 0$$

$$\mathrm{M}\frac{d\rho}{dt} = \mathrm{Z}f\frac{a^2 + k^2}{k^2} + \mathrm{X}\cos\alpha + \mathrm{Y}\sin\alpha, \quad \mathrm{M}\rho\frac{d\alpha}{dt} = -\mathrm{X}\sin\alpha + \mathrm{Y}\cos\alpha$$

$$\mathrm{M}\frac{dp}{dt} = \frac{\mathrm{Z}af}{k^2}\sin\alpha, \qquad \mathrm{M}\frac{dq}{dt} = -\frac{\mathrm{Z}af}{k^2}\cos\alpha.$$

Les équations donnant $\frac{d\rho}{dt}$, $\frac{d\alpha}{dt}$ définissent l'hodographe de la vitesse de glissement.

Cas particulier. — Sphère homogène pesante glissant sur un plan incliné, si i désigne l'angle d'inclinaison $\mathrm{X} = \mathrm{M}g\sin i$, $\mathrm{Y} = 0$.

$Z = -Mg\cos i$, on retrouve le résultat de Painlevé : les équations donnant le mouvement du centre s'intègre par quadrature.

Cas du roulement sans glissement. — Le champ caractéristique E de la forme Ω correspondant à la sphère complètement libre a pour composantes :

$$E\left(\frac{X}{M}, \frac{Y}{M}, \frac{Z}{M}, 0, 0, 0, \xi, \dot{\eta}, \dot{\zeta}, p, q, r, 1\right).$$

Le roulement sans glissement se traduit dans notre théorie par 3 liaisons de puissance nulle :

$$\dot{\xi} - aq = 0 \qquad \dot{\eta} + ap = 0 \qquad \dot{\zeta} = 0$$
$$P^1 = \lambda(\dot{\xi} - aq) \qquad P^2 = \mu(\dot{\eta} + ap) \qquad P^3 = \nu\dot{\zeta}$$
$$\Omega^1 = \lambda(d\xi - a\omega^2)\wedge dt \qquad \Omega^2 = \mu(d\eta + a\omega^1)\wedge dt \qquad \Omega^3 = \nu\, d\zeta\wedge dt.$$

Les champs de direction de liaisons ont pour composantes :

$$e^1\left(\frac{1}{M}, 0, 0, 0, \frac{-a}{Mk^2}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\right)$$
$$e^2\left(0, \frac{1}{M}, 0, \frac{a}{Mk^2}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\right)$$
$$e^3\left(0, 0, \frac{1}{M}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\right)$$

Le calcul de λ, μ, ν, composantes de la réaction du plan sur la sphère peut s'effectuer au moyen des opérateurs de M. H. Cartan :

$$i(e^1)\,d(\dot{\xi} - aq) = \frac{1}{M}\left(1 + \frac{a^2}{k^2}\right), \qquad i(e^2)\,d(\dot{\xi} - aq) = 0,$$

$$i(e^3)\,d(\dot{\xi} - aq) = 0, \qquad i(E)\,d(\dot{\xi} - aq) = \frac{X}{M}, \qquad i(e^1)\,d(\dot{\eta} + ap) = 0,$$

$$i(e^2)\,d(\dot{\eta} + ap) = \frac{1}{M}\left(1 + \frac{a^2}{k^2}\right), \qquad i(e^3)\,d(\dot{\eta} + ap) = 0$$

$$i(E)\,d(\dot{\eta} + ap) = \frac{Y}{M}, \qquad i(e^1)\,d\dot{\zeta} = 0, \qquad i(e^2)\,d\dot{\zeta} = 0,$$

$$i(e^3)\,d\dot{\zeta} = \frac{1}{M}, \qquad i(E)\,d\dot{\zeta} = \frac{Z}{M},$$

d'où

$$\lambda = -\frac{X}{1 + \frac{a^2}{k^2}}, \qquad \mu = -\frac{Y}{1 + \frac{a^2}{k^2}}, \qquad \nu = -z.$$

On désire connaître les équations différentielles définissant le mouvement du centre de la sphère, formons Ω_s déduite de $\Omega + \Omega_l$ en remplaçant $d\dot{\zeta}$ par o, $d\zeta$ par o, dp par $\frac{-d\dot{\eta}}{a}$, dq par $\frac{d\dot{\xi}}{a}$, ω^1 par $-\frac{d\eta}{a}$, ω^2 par $\frac{d\xi}{a}$

$$\begin{aligned}\Omega_s = \mathrm{M}\left(1+\frac{a^2}{k^2}\right)(d\dot{\xi}\wedge d\xi + d\dot{\eta}\wedge d\eta) + \mathrm{M}k^2\, dr\wedge\omega^3 \\ + \mathrm{M}\frac{k^2}{a^2}(-\dot{\eta}\, d\xi\wedge\omega^3 + \dot{\xi}\, d\eta\wedge\omega^3 - r d\eta\wedge d\xi) \\ - \mathrm{M}\left(1+\frac{a^2}{k^2}\right)(\dot{\xi}\, d\dot{\xi} + \dot{\eta}\, d\dot{\eta})\wedge dt - \mathrm{M}k^2 r\, dr\wedge dt \\ + (\mathrm{X}\, d\xi + \mathrm{Y}\, d\eta)\wedge dt.\end{aligned}$$

Les équations associées à Ω_s sont

$$\frac{\partial\Omega_s}{\partial(d\xi)} = -\mathrm{M}\frac{k^2+a^2}{a^2}d\dot{\xi} + \mathrm{M}\frac{k^2}{a^2}(-\dot{\eta}\omega^3 + r\, d\eta) + \mathrm{X}\, dt = 0$$

$$\frac{\partial\Omega_s}{\partial(d\dot{\xi})} = \mathrm{M}\frac{k^2+a^2}{a^2}(d\xi - \dot{\xi}\, dt) = 0$$

$$\frac{\partial\Omega_s}{\partial(d\eta)} = -\mathrm{M}\frac{k^2+a^2}{a^2}d\dot{\eta} + \mathrm{M}\frac{k^2}{a^2}(\dot{\xi}\omega^3 - r\, d\xi) + \mathrm{Y}\, dt = 0$$

$$\frac{\partial\Omega_s}{\partial(d\dot{\eta})} = \mathrm{M}\frac{k^2+a^2}{a^2}(d\eta - \dot{\eta}\, dt) = 0$$

$$\frac{\partial\Omega_s}{\partial\omega^3} = -\mathrm{M}k^2\, dr + \mathrm{M}\frac{k^2}{a^2}(\dot{\eta}\, d\xi - \dot{\xi}\, d\eta) = 0$$

$$\frac{\partial\Omega_s}{\partial(dr)}\mathrm{M}k^2(\omega^3 - r\, dt) = 0$$

Les deux premières se réduisent à

$$\mathrm{M}\frac{d\dot{\xi}}{dt} = \frac{a^2}{a^2+k^2}\mathrm{X} \qquad \mathrm{M}\frac{d\dot{\eta}}{dt} = \frac{a^2}{a^2+k^2}\mathrm{Y}.$$

Elles montrent que le centre de la sphère se meut dans le plan $\xi = a$, comme un point matériel soumis aux forces $\frac{a^2}{a^2+k^2}\mathrm{X}$, $\frac{a^2}{a^2+k^2}\mathrm{Y}$ cas particulier d'un théorème de Routh.

Exemple IV. — Glissement d'une sphère homogène de masse M, de rayon a sur deux plans rectangulaires fixes $x\mathrm{O}y$, $z\mathrm{O}x$. On suppose que les forces extérieures se réduisent à la résultante générale dont les composantes par rapport aux axes $\mathrm{O}xyz$ sont X, Y, Z.

Par rapport à des axes fixes soient :

ξ, η, ζ, les coordonnées du centre G de la sphère,

p, q, r, les composantes de la rotation instantanée de la sphère,

ω^1, ω^2, ω^3, 3 formes de Pfaff construites sur les différentielles des paramètres fixant la position d'un trièdre invariablement à la sphère.

La forme extérieure associée à la sphère libre est :

$$\begin{aligned}&M(d\dot\xi \wedge d\xi + d\dot\eta \wedge d\eta + d\dot\zeta \wedge d\zeta)\\ &\quad + Mk^2(dp \wedge \omega^1 + dq \wedge \omega^2 + dr \wedge \omega^3 + p\omega^2 \wedge \omega^3 + r\omega^1 \wedge \omega^2)\\ &\qquad + Mk^2 q\omega^3 \wedge \omega^1 - M[\dot\xi\, d\dot\xi + \dot\eta\, d\dot\eta + \dot\zeta\, d\dot\zeta + (p\, dp + q\, dq\\ &\qquad\qquad + r\, dr)] \wedge dt + (X\, d\xi + Y\, d\eta + Z\, d\zeta) \wedge dt.\end{aligned}$$

Le champ caractéristique correspondant E a pour composantes :

$$E\left(\frac{X}{M}, \frac{Y}{M}, \frac{Z}{M}, 0, 0, 0, \dot\xi, \dot\eta, \dot\zeta, p, q, r, 1\right).$$

La première liaison contact de la sphère avec le plan xOy se traduit par

$$\dot\zeta = 0 \qquad P^1 = N_A[\dot\zeta - f_A\sqrt{(\dot\xi - aq)^2 + (\dot\eta + ap)^2}],$$

f_A coefficient de frottement sur xOy ou en introduisant les coordonnées polaires ρ_A, α de la vitesse de glissement du point de contact A de la sphère avec le plan xOy

$$\begin{aligned}\dot\xi - aq &= \rho_A \cos\alpha\\ \dot\eta + ap &= \rho_A \sin\alpha\end{aligned} \qquad P^1 = N_A[\dot\zeta - f_A\cos\alpha(\dot\xi - aq) - f_A \sin\alpha(\dot\eta + ap)]$$

d'où

$$\Omega^1 = N_A[d\zeta - f_A\cos\alpha(d\xi - a\omega^2) - f_A\sin\alpha(d\eta + a\omega^1)] \wedge dt.$$

Les composantes du champ de direction de cette liaison sont :

$$e^1\left(\frac{-f_A\cos\alpha}{M}, \frac{-f_A\sin\alpha}{M}, \frac{1}{M}, \frac{-af_A\sin\alpha}{Mk^2}, \frac{af_A\cos\alpha}{Mk^2}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\right).$$

La deuxième liaison contact de la sphère avec le plan xOx se traduit par

$$\dot\eta = 0 \qquad P^2 = N_B[\dot\eta - f_B\sqrt{(\dot\zeta - ap)^2 + (\dot\xi + ar)^2}]$$

f_B coefficient de frottement sur zOx ou en introduisant les coordonnées polaires ρ_B, β de la vitesse de glissement du point de contact B de la sphère avec le plan zOx

$$\begin{aligned}\dot\zeta - ap &= \rho_B\cos\beta\\ \dot\xi + ar &= \rho_B\sin\beta\end{aligned} \qquad P^2 = N_B[\dot\eta - f_B\cos\beta(\dot\zeta - ap) - f_B\sin\beta(\dot\xi + ar)]$$

d'où

$$\Omega^2 = N_B[d\eta - f_B \cos\beta(d\zeta - a\omega^1) - f_B \sin\beta(d\xi + a\omega^3)] \wedge dt.$$

Les composantes de direction du champ de cette liaison sont :

$$e^2\left(\frac{-f_B \sin\beta}{M}, \frac{1}{M}, \frac{-f_B\cos\beta}{M}, \frac{af_B\cos\beta}{M}, 0, \frac{-af_B\sin\beta}{Mk^2}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\right).$$

Déterminons les composantes normales des réactions au moyen des opérateurs

$$i(e^1)d\dot\zeta = \frac{1}{M} \qquad i(e^2)d\dot\zeta = \frac{-f_B\cos\beta}{M} \qquad i(E)d\dot\zeta = \frac{Z}{M}$$

$$i(e^1)d\dot\eta = \frac{-f_A\sin\alpha}{M} \qquad i(e^2)d\dot\eta = \frac{1}{M} \qquad i(E)d\dot\eta = \frac{Y}{M}$$

La condition de compatibilité de ces deux liaisons est :

$$i(e^1)d\dot\zeta\, i(e^2)d\dot\eta - i(e^1)d\dot\eta\, i(e^2)d\dot\zeta = \frac{1}{M^2}(1 - f_A f_B \sin\alpha\cos\beta) \neq 0.$$

En la supposant satisfaite on en déduit

$$N_A = -\frac{Z + f_B\cos\beta Y}{1 - f_A f_B \sin\alpha\cos\beta} \qquad N_B = -\frac{Y + f_A\sin\alpha Z}{1 - f_A f_B\sin\alpha\cos\beta}.$$

Pour obtenir les équations différentielles du mouvement construisons Ω_s en remplaçant dans Ω, $d\dot\zeta$ par o, $d\dot\eta$ par o, $d\zeta$ et $d\eta$ différentielles associées par le système

$$\begin{aligned} d\zeta - f_A\sin\alpha\, d\eta &= f_A\cos\alpha(d\xi - a\omega^2) + af_A\sin\alpha\omega^1 + P_u^1 dt \\ -f_B\cos\beta\, d\zeta + d\eta &= f_B\sin\beta(d\xi + a\omega^3) - af_B\cos\beta\omega^1 + P_u^2 dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Omega_s = {} & M d\dot\xi \wedge d\xi + Mk^2(dp \wedge \omega^1 + dq \wedge \omega^2 + dr \wedge \omega^3 + p\omega^2 \wedge \omega^3 \\ & + q\omega^3 \wedge \omega^1 + r\omega^1 \wedge \omega^2) + M[\dot\xi\, d\dot\xi + k^2(p\,dp + q\,dq + r\,dr)] \wedge dt \\ & + \frac{Y}{1 - f_A f_B\sin\alpha\cos\beta}[f_B\sin\beta(d\xi + a\omega^3) \\ & + f_A f_B\cos\alpha\cos\beta(d\xi - a\omega^2) + af_B\cos\beta(1 - f_A\sin\alpha)\omega^1] \wedge dt \\ & + \frac{Z}{1 - f_A f_B\sin\alpha\cos\beta}[f_A\cos\alpha(d\xi - a\omega^2) \\ & + f_A f_B\sin\alpha\sin\beta(d\xi + a\omega^3) + af_A\sin\alpha(1 - \cos\beta f_B)\omega^1] \wedge dt \\ & + X d\xi \wedge dt \end{aligned}$$

d'où les équations associées à Ω_s

$$\frac{\partial\Omega_s}{\partial(d\xi)} = -M d\dot{\xi} + X dt + \frac{dt}{1 - f_A f_B \sin\alpha\cos\beta}\left[Y(f_B \sin\beta + f_A f_B \cos\alpha\cos\beta) + Z(f_A \cos\alpha + f_A f_B \sin\alpha \sin\beta)\right] = 0$$

$$\frac{\partial\Omega_s}{\partial\omega^1} = Mk^2(-dp - q\omega^3 + r\omega^2) + \frac{a\,dt}{1 - f_A f_B \sin\alpha\cos\beta}\left[Y f_B \cos\beta(1 - \sin\alpha f_A) + Z f_A \sin\alpha(1 - \cos\beta f_B)\right] = 0$$

$$\frac{\partial\Omega_s}{\partial\omega^2} = Mk^2(-dq - r\omega^1 + p\omega^3) \frac{-a\,dt}{1 - f_A f_B \sin\alpha\cos\beta}\left[Y f_A f_B \cos\alpha\cos\beta + Z f_A \cos\alpha\right] = 0$$

$$\frac{\partial\Omega_s}{\partial\omega^3} = Mk^2(-dr - p\omega^2 + q\omega^1) + \frac{a\,dt}{1 - f_A f_B \sin\alpha\cos\beta}\left[Y f_B \sin\beta + Z f_A f_B \sin\alpha\sin\beta\right] = 0$$

$$\frac{\partial\Omega_s}{\partial(d\dot{\xi})} = M(d\xi - \dot{\xi}\,dt) = 0, \qquad \frac{\partial\Omega_s}{\partial(dp)} = Mk^2(\omega^1 - p\,dt) = 0$$

$$\frac{d\Omega_s}{\partial(dq)} = Mk^2(\omega^2 - q\,dt) = 0, \qquad \frac{\partial\Omega_s}{\partial(dr)} = Mk^2(\omega^3 - r\,dt) = 0$$

auxquelles on doit adjoindre $d\zeta - \dot{\zeta}\,dt = 0$, $d\eta - \dot{\eta}\,dt = 0$ et les relations de définition de α et de β, qui compte tenus de $\zeta = a$, $\eta = a$, permettent de définir q et r en fonction de $\dot{\xi}$, p, α, β.

$$aq = \dot{\xi} - ap \operatorname{cotg}\alpha \qquad ar = -\dot{\xi} - ap \operatorname{tg}\beta.$$

Ce système se met encore sous la forme suivante

$$M\frac{d\dot{\xi}}{dt} = X + \frac{1}{1 - f_A f_B \sin\alpha\cos\beta}\left[Y(f_B \sin\beta + f_A f_B \cos\alpha\cos\beta) + Z(f_A\cos\alpha + f_A f_B \sin\alpha\sin\beta)\right]$$

$$Mk^2\frac{dp}{dt} = \frac{a}{1 - f_A f_B \sin\alpha\cos\beta}\left[Y(1 - \sin\alpha f_A) f_B \cos\beta + Z(1 - \cos\beta f_B) f_A \sin\alpha\right]$$

$$M\frac{k^2}{a^2}\left(\frac{d\dot{\xi}}{dt} - a\frac{d(p\operatorname{cotg}\alpha)}{dt}\right) = \frac{-f_A\cos\alpha}{1 - f_A f_B \sin\alpha\cos\beta}(Z + Y f_B \cos\beta)$$

$$M\frac{k^2}{a^2}\left(\frac{d\dot{\xi}}{dt} + a\frac{d(p\operatorname{tg}\beta)}{dt}\right) = \frac{-f_B\sin\beta}{1 - f_A f_B \sin\alpha\cos\beta}(Y + Z f_A \sin\alpha)$$

$$\frac{d\xi}{dt} = \dot{\xi}, \qquad \omega^1 = p\,dt, \qquad \omega^2 = q\,dt, \qquad \omega^3 = r\,dt$$

EXEMPLE V. — **Liaison par asservissement de M. H. Beghin.** — Un plan matériel P peut glisser sans frottement par translation sur un plan fixe xOy. Sur ce plan une sphère homogène pesante Σ de rayon a peut rouler sans glisser. Le mouvement du plan est réglé automatiquement de manière que le centre de la sphère tourne uniformément autour de la verticale fixe Oz à la vitesse angulaire ω donnée. Calculer les réactions et former les équations du mouvement du système.

Soient : u, v les coordonnées d'un point du plan

ξ, η, ζ, les coordonnées absolues du centre de la sphère

p, q, r, les composantes de la rotation absolue de la sphère

ω^1, ω^2, ω^3, 3 formes de Pfaff construites sur les différentielles absolues de trois paramètres caractérisant le déplacement d'un trièdre lié à la sphère.

μ la masse du plan

M la masse de la sphère, Mk^2 le moment d'inertie de la sphère par rapport à un de ses diamètres.

g l'intensité de la pesanteur dirigée suivant la verticale descendante.

La forme extérieure associée au système sans liaisons est

$$\begin{aligned}\Omega = {} & M(d\dot\xi \wedge d\xi + d\dot\eta \wedge d\eta + d\dot\zeta \wedge d\zeta) + Mk^2(dp \wedge \omega^1 + dq \wedge \omega^2 \\ & + dr \wedge \omega^3 + p\omega^2 \wedge \omega^3 + q\omega^3 \wedge \omega^1 + r\omega^1 \wedge \omega^2) + \mu(d\dot u \wedge du + d\dot v \wedge dv) \\ & - M[\dot\xi d\dot\xi + \dot\eta d\dot\eta + \dot\zeta d\dot\zeta + k^2(p\,dp + q\,dq + r\,dr) + g\,d\zeta] \wedge dt \\ & - \mu(\dot u\, d\dot u + \dot v\, d\dot v) \wedge dt.\end{aligned}$$

Liaisons. — A notre point de vue les liaisons se traduisant par :

1. contact de la sphère et du plan

$\dot\zeta = 0$ puissance $P^1 = N\dot\zeta$ forme $\Omega^1 = N d\zeta \wedge dt$

roulement sans glissement de la sphère sur le plan

2. $\dot\xi - aq - \dot u = 0$

puissance $P^2 = X(\dot\xi - aq - \dot u)$ forme $\Omega^2 = X(d\xi - a\omega^2 - du) \wedge dt$

3. $\dot\eta + ap - \dot v = 0$

puissance $P^3 = Y(\dot\eta + ap - \dot v)$ forme $\Omega^3 = Y(d\eta + a\omega^1 - dv) \wedge dt$

liaison par asservissement

4. $\dot\xi - \omega\eta = 0$ puissance $P^4 = P\dot u$ forme $\Omega^4 = P\,du \wedge dt$

5. $\dot\eta + \omega\xi = 0$ puissance $P^5 = Q\dot v$ forme $\Omega^5 = Q\,dv \wedge dt$

Calcul des réactions. — Utilisons les opérateurs $i(\ )$. Formons le tableau des composantes des champs :

$$
\begin{array}{c|ccccccccccccccccc}
 & d\dot\xi & d\dot\eta & d\dot\zeta & d\dot u & d\dot v & dp & dq & dr & d\xi & d\eta & d\zeta & du & dv & \omega^1 & \omega^2 & \omega^3 & dt \\
E & 0 & 0 & -g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dot\xi & \dot\eta & \dot\zeta & \dot u & \dot v & p & q & r & 1 \\
e^1 & 0 & 0 & \frac{1}{M} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
e^2 & \frac{1}{M} & 0 & 0 & \frac{-1}{\mu} & 0 & 0 & \frac{-a}{Mk^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
e^3 & 0 & \frac{1}{M} & 0 & 0 & \frac{-1}{\mu} & \frac{a}{Mk^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
e^4 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
e^5 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

On en déduit immédiatement les valeurs des $i(\ )d$ relatifs aux diverses liaisons qui ne sont pas nulles :

1. $i(e^1)d\dot\zeta = \frac{1}{M}, \qquad i(E)d\dot\zeta = -g$

2. $i(e^2)d(\dot\xi - aq - \dot u) = \frac{1}{M}\left(1 + \frac{a^2}{k^2}\right) + \frac{1}{\mu},$

$$i(e^4)d(\dot\xi - aq - \dot u) = -\frac{1}{\mu}, \qquad i(E)d(\dot\xi - aq - \dot u) = 0$$

3. $i(e^3)d(+ap - \dot v + \dot\eta) = \frac{1}{M}\left(1 + \frac{a^2}{k^2}\right) + \frac{1}{\mu},$

$$i(e^5)d(\dot\eta + ap - v) = -\frac{1}{\mu}, \qquad i(E)d(\dot\eta + ap - v) = 0$$

4. $i(e^2)d(\dot\xi - \omega\eta) = \frac{1}{M}, \qquad i(E)d(\dot\xi - \omega\eta) = -\omega\dot\eta$

5. $i(e^3)d(\dot\eta + \omega\xi) = \frac{1}{M}, \qquad i(E)d(\dot\eta + \omega\xi) = \omega\dot\xi.$

On vérifie que les liaisons sont compatibles, le déterminant étant égal à $\frac{1}{M^3\mu^2}$ d'où les valeurs des coefficients des liaisons que nous interprétons comme composantes des réactions :

du plan sur la sphère

$$X = M\omega\dot\eta = -M\omega^2\xi, \qquad Y = -M\omega\dot\xi = -M\omega^2\eta, \qquad N = Mg\,;$$

du plan fixe sur le plan mobile. en d'autres termes les composantes de la force qu'il faut appliquer au plan mobile pour réaliser l'asservissement :

$$P = -\left[M + \mu\left(1 + \frac{a^2}{k^2}\right)\right]\omega^2\xi \qquad Q = -\left[M + \mu\left(1 + \frac{a^2}{k^2}\right)\right]\omega^2\eta.$$

Équations du mouvement. — Formons Ω_s déduite de Ω en remplaçant $d\zeta$ par o, $d\dot{\zeta}$ par o puisque cette liaison est de puissance nulle, dp et dq par leur valeur extraite de la différentiation des conditions de roulement sans glissement, ω^1, ω^2, par leur valeur calculée en annulant les formes Ω^2, Ω^3 puisque ces liaisons sont de puissance nulle, $d\dot{\xi}$ et $d\dot{\eta}$ par leur valeur calculée en différentiant les liaisons d'asservissement, du et dv par leur valeur calculée au moyen de $du = P^1_u\, dt = \dot{u}\, dt$, $dv = P^2_u\, dt = \dot{v}\, dt$:

$$\dot{\xi} = \omega\eta, \qquad \dot{\eta} = -\omega\xi, \qquad ap = \dot{v} + \omega\xi$$

$$aq = \omega\eta - \dot{u}, \qquad du = \dot{u}\, dt, \qquad \omega^1 = \frac{1}{a}(\dot{v}\, dt - d\eta)$$

$$d\dot{\xi} = \omega\, d\eta, \qquad d\dot{\eta} = -\omega\, d\xi. \qquad a\, dp = d\dot{v} + \omega\, d\xi,$$

$$a\, dq = \omega\, d\eta - d\dot{u}, \qquad dv = \dot{v}\, dt, \qquad \omega^2 = \frac{1}{a}(d\xi - \dot{u}\, dt)$$

$$\begin{aligned}\Omega_s = {} & 2M\omega\, d\eta \wedge d\xi + M\frac{k^2}{a^2}\big[(d\eta + \omega\xi\, dt) \wedge (d\dot{v} + \omega\, d\xi) \\ & + (\omega\, d\eta - d\dot{u}) \wedge (d\xi - \omega\eta\, dt) + dr \wedge \omega^3 + r\, dr \wedge dt\big] \\ & + M\frac{k^2}{a^2}\big[(\dot{v} + \omega\xi)(d\xi - \dot{u}\, dt) \wedge \omega^3 + (\omega\eta - \dot{u})\omega^3 \wedge (\dot{v}\, dt - d\eta) \\ & + r(\dot{v}\, dt - d\eta) \wedge (d\xi - \dot{u}\, dt)\big] - M\omega^2(\eta\, d\eta + \xi\, d\xi) \wedge dt.\end{aligned}$$

Comme les coefficients de Ω. des relations de liaisons, des puissances des liaisons sont des constantes ou ne dépendent que de ξ, η, u, v, les équations différentielles du mouvement sont données par les caractéristiques de Ω_s.

$$\frac{\partial\Omega_s}{\partial(d\dot{u})} = -M\frac{k^2}{a^2}(d\xi - \omega\eta\, dt) = 0 \qquad \frac{\partial\Omega_s}{\partial(d\dot{v})} = -M\frac{k^2}{a^2}(d\eta + \omega\xi\, dt) = 0$$

$$\frac{\partial\Omega_s}{\partial(dr)} = -M\frac{k^2}{a^2}(\omega^3 - r\, dt) = 0$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Omega_s}{\partial(d\xi)} = {} & -2M\omega\, d\eta + M\frac{k^2}{a^2}\big[-\omega(d\eta + \omega\xi\, dt) - (\omega\, d\eta - d\dot{u}) \\ & + (\dot{v} + \omega\xi)\omega^3 - r(\dot{v}\, dt - d\eta)\big] - M\omega^2\xi\, dt = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Omega_s}{\partial(d\eta)} = {} & +2M\omega\, d\xi + M\frac{k^2}{a^2}\big[d\dot{v} + \omega\, d\xi) + \omega(d\xi - \omega\eta\, dt) \\ & + (\omega\eta - \dot{u})\omega^3 + r(\dot{v}\, dt - d\eta)\big] - M\omega^2\eta\, dt = 0\end{aligned}$$

$$\frac{\partial\Omega_s}{\partial\omega^3} = M\frac{k^2}{a^2}\big[-dr - (\dot{v} + \omega\xi)(d\xi - \dot{u}\, dt) + (\omega\eta - \dot{u})(\dot{v}\, dt - d\eta)\big] = 0$$

Les deux premières équations donnent

$$d\xi - \omega\eta\, dt = 0, \qquad d\eta + \omega\xi\, dt = 0$$

et en intégrant

$$\xi = A\cos\omega t + B\sin\omega t \qquad \eta = -A\sin\omega t + B\cos\omega t.$$

la dernière, compte tenu des deux premières $dr = 0$; les équations (4) et (5) définissent $\dot{u}$ et $\dot{v}$, c'est-à-dire la vitesse du mouvement du plan

$$M\frac{k^2}{a^2}\, d\dot{u} = -M\omega^2\left(1 + \frac{k^2}{a^2}\right)\xi\, dt \qquad M\frac{k^2}{a^2}\, d\dot{v} = -M\omega^2\left(1 + \frac{k^2}{a^2}\right)\eta\, dt.$$

Exemple VI. — **Liaison généralisée : Problème simplifié des engins radio-guidés.** — Un corps solide pesant est soumis à l'action d'un moteur qui exerce à chaque instant sur le solide une force $\vec{F}$ connue dirigée suivant la tangente à la trajectoire du centre de gravité G du solide. Le mouvement sera supposé plan et s'effectuant dans le plan de symétrie matérielle du solide dont nous postulons l'existence, soit xOz. On suppose qu'un mécanisme dirige la tangente à la trajectoire de G vers un mobile M dont les coordonnées sont des fonctions du temps t : $x(t)$. $z(t)$. Trouver le système de forces équivalent nécessaire à la réalisation de ce mouvement.

Soient : ξ, η, les coordonnées du centre de gravité G du corps
θ la rotation du solide autour de son centre de gravité
α l'angle de la tangente à la trajectoire de G avec l'axe horizontal
M la masse du corps, Mk^2 son moment d'inertie autour d'un axe perpendiculaire au plan de symétrie zOx.

La forme extérieure associée au corps solide libre est :

$$\begin{aligned}\Omega = {} & M\,(d\dot{\xi} \wedge d\xi + d\dot{\zeta} \wedge d\zeta + k^2\, d\dot{\theta} \wedge d\theta) \\ & - M(\dot{\xi}\, d\dot{\xi} + \dot{\zeta}\, d\dot{\zeta} + k^2\dot{\theta}\, d\dot{\theta}) \wedge dt + (F\cos\alpha\, d\xi + F\sin\alpha\, d\zeta - Mg\, d\zeta) \wedge dt.\end{aligned}$$

Liaisons : 1. La tangente à la trajectoire de G devant être dirigée suivant GM

$$a' = \dot{\xi}(\zeta - z) - \dot{\zeta}(\xi - x) = 0.$$

2. L'angle de rotation du corps sur lui-même devant être égal à α à une constante près

$$(\xi - x)\sin\theta - (\zeta - z)\cos\theta = 0$$

d'où

$$a^2 = (\dot\xi - \dot x)\sin\theta - (\dot\zeta - \dot z)\cos\theta + [(\xi - x)\cos\theta + (\zeta - z)\sin\theta]\dot\theta = 0.$$

Comme on ne connaît rien à priori sur les forces nécessaires à la réalisation d'une semblable liaison nous prendrons pour puissance de l'ensemble $P = \lambda\dot\xi + \mu\dot\zeta + \nu\dot\theta$ d'où la forme Ω_l. Les composantes du champ de la forme $\Omega + \Omega_l$ sont :

$$E\left(\frac{1}{M}(F\cos\alpha + \lambda), \quad \frac{1}{M}(F\sin\alpha + \mu - Mg), \quad \frac{\nu}{Mk^2}, \quad \dot\xi, \ \dot\zeta, \ \dot\theta, \ 1.\right)$$

Écrivons que les formes da^1 et da^2 appartiennent au sous-module des caractéristiques de $\Omega + \Omega_l$ c'est-à-dire que

$$i(E)\,da^1 = 0, \qquad i(E)\,da^2 = 0$$

En désignant par D la distance GM, par V la vitesse du corps on doit avoir

$$\lambda\sin\alpha - (\mu - Mg)\cos\alpha - M\frac{V}{D}(\cos\alpha\dot z - \sin\alpha\dot x) = 0$$

$$\lambda\sin\alpha - (\mu - Mg)\cos\alpha + D\frac{\nu}{k^2} + M(\ddot z\cos\alpha - \ddot x\sin\alpha)$$
$$+ 2M[(\dot\xi - \dot x)\cos\alpha + (\dot\zeta - \dot z)\sin\alpha]\dot\alpha$$

système qui montre que ν et $\lambda\sin\alpha - \mu\cos\alpha$ sont seuls déterminés.

Si on désigne par W la vitesse du mobile M et par φ l'angle de la tangente à sa trajectoire avec l'horizontal, on obtient :

$$\lambda\sin\alpha - \mu\cos\alpha = -Mg\cos\alpha + \frac{M}{D}VW\cos(\alpha - \varphi)$$

$$\frac{\nu}{k^2} = \frac{M}{D}g\cos\alpha - \frac{M}{D^2}VW\cos(\alpha - \varphi) - 2\frac{M}{D}\dot\alpha[V - W\cos(\alpha - \varphi)]$$
$$+ \frac{M}{D}(\ddot x\sin\alpha - \ddot z\cos\alpha).$$

CHAPITRE IV

THÉORIE DES LIAISONS UNILATÉRALES: CAS D'UNE LIAISON

§ I. — Considérations générales.

Pour un système mécanique S défini par le champ E caractéristique d'une forme Ω de degré 2 sur une variété différentiable V_{2n+1}, astreint à une liaison du type $a = 0$, λe (liaison dont on connaît la direction de la force de liaison définie par le champ e) des raisons physiques imposent à λ un signe connu à priori. On peut toujours en remplaçant e par $-e$, s'arranger pour que le signe imposé à λ soit positif. Dans tout ce qui suit λ et e sont supposés satisfaire à cette condition. Soit M un point de V_{2n+1} appartenant à la sous-variété $a = 0$.

Définition. — Nous dirons qu'une liaison du type $a = 0$, λe, est de classe U, si la fonction $a(t)$ définie par la valeur de a sur la ligne intégrale tangente au vecteur champ E en M_0 doit avoir un signe déterminé.

On peut toujours supposer que le signe imposé à $a(t)$ est le signe positif pour le voisinage à droite $t > t_0$ (t_0 valeur de t en M_0) car on peut toujours remplacer a par $-a$, hypothèse que nous supposerons réaliser dans ce qui suit.

Justification de ces considérations. — Les conventions précédentes peuvent paraître arbitraire. Montrons sur quelques exemples qu'elle en est l'origine.

1° Un solide S est en contact avec un autre S′ avec ou sans frottement.

Nous avons vu (chap. II § VI) qu'une semblable liaison est définie par

$$u^3 = 0 \qquad P = \lambda\left[u^3 - f|\vec{V}_g| - \delta|\vec{\omega}_2| - \omega|\vec{\omega}_n|\right].$$

La séparation des solides ne peut avoir lieu que si $a^2 > 0$; le contact que si $N > 0$.

Ce type de liaison est à l'origine de l'appellation liaison unilatérale donné aux liaisons de classe U.

2° Liaison par asservissement de M. H. Béghin.

Un disque B repéré par un angle β est coaxial avec un disque A repéré par un angle α. La liaison $a = \dot\beta - \dot\alpha = 0$ est réalisée en appliquant au disque B un couple de puissance $P = \lambda\dot\beta$, par un dispositif de commande électrique constitué par un index invariablement lié à B. Lorsque l'index lié à A vient toucher l'index lié à B un courant électrique s'établit et un moteur tournant dans le sens trigonométrique applique à B un couple de puissance $P = \lambda\dot\beta$; le sens unique de rotation du moteur impose $\lambda > 0$. La rupture de la liaison ne peut avoir lieu sans déteriorations des contacts que si $a = \dot\beta - \dot\alpha > 0$.

3° Plus généralement les liaisons de puisance nulle, les liaisons d'Appell dans lesquels le mécanisme de réalisation impose des conditions $a > 0$ pour la rupture, $\lambda > 0$ pour que la liaison soit acceptable.

Les questions qui se posent alors sont : connaissant les conditions initiales point M_0 de V_{2n+1} appartenant à la sous-variété $a = 0$, quel mouvement va se produire ? les conditions mécaniques posées à priori $a(t) > 0$, $\lambda > 0$ départagent-elles les mouvements possibles ?

§ II. — Mouvements possibles en M_0.

En M_0 deux mouvements sont possibles :

1° Le mouvement (M) sans liaison défini par la ligne intégrale Σ issue de M_0, tangente au vecteur champ E. a est une fonction numérique sur V_{2n+1} qui devient une fonction de t sur la ligne Σ. Ce mouvement est acceptable si cette fonction nulle à t_0 devient positive, hypothèse qui se traduit par $\left(\dfrac{da}{dt}\right)_0 > 0$ et si cette dérivée est nulle par $a_0^{(n+1)} > 0$ dérivée qui existe certainement car pour une liaison imposée $i(E) . da \neq 0$ (chap. II, § III).

D'après le théorème II du chapitre I, § III cette condition se traduit par $(i(E) . da)_0 > 0$ ou par $(i(E) . da)_0^{(n+1)} > 0$ si les n premières dérivées sont nulles.

2° Le mouvement (M_l) avec liaison défini par la ligne intégrale Σ_l

issue de M_0, tangente au vecteur champ $E + \lambda e$. Ce mouvement est acceptable si $\lambda > 0$.

Or λ est défini par l'équation $i(E).da + \lambda i(e), da = 0$. La liaison étant supposée compatible (chap. II, § IV) $i(e).da \neq 0$.

$$\lambda = -\frac{i(E)\,da}{i(e)\,da}$$

λ est ainsi défini comme une fonction numérique sur V_{2n+1}, cette fonction numérique devient une fonction de t sur la ligne intégrale Σ_t dont la dérivés n^e est

$$\lambda^{(n)} = [i(E + \lambda e)\,d\lambda]^{(n)}.$$

Théorème I. — *Si en* M_0 $(i(E).da)^{(r)}$ *est nulle pour* $r \leqslant n$, *différent de zéro pour* $r = n + 1$, λ *et ses* $(n - 1)$ *dérivées premières sont nulles en* M_0, *et*

$$-(i(e).da)_0 \lambda_0^{(n)} = (i(E).da)_0^{(n+1)}.$$

Par définition

$$\lambda^{(r)} = i(E + \lambda e)\,d\lambda^{(r-1)} = i(E)\,d\lambda^{(r-1)} + \lambda i(e)\,d\lambda^{(r-1)}$$

$(i(E).da)_0 = 0$ entraînant $\lambda_0 = 0$

$$\lambda_0^{(r)} = (i(E)\,d\lambda^{(r-1)})_0 = (i(E)\,d\lambda)_0^{(r-1)}$$

par récurrence λ se présentant sous la forme d'un produit $u.v$, avec $u = i(E).da$, $v = \frac{-1}{(ie)\,da}$, λ et ses $(n - 1)$ dérivées premières en M_0 sont nulles, la n^e est donnée par

$$\lambda_0^{(n)} = -\frac{(i(E)\,da)_0^{(n+1)}}{(i(e).da)_0}.$$

Conséquence. Si $(i(E).da)_0^{(r)} = 0$ pour $r \leqslant n$, $\neq 0$ pour $r = n + 1$

1° Pour un mouvement M la première dérivée non nulle de la fonction $a(t)$ est d'ordre $(n + 1)$ et a pour valeur $a_0^{(n+1)} = (i(E).da)_0^{(n+1)}$,

2° Pour un mouvement $(M_l)\lambda$ et ses $(n - 1)$ dérivées premières sont nulles en M_0, la dérivée n^e de λ se calcule au moyen de

$$-(i(e).da)_0 \lambda_0^{(n)} = (i(E).da)_0^{(n+1)}.$$

On peut résumer les résultats précédents dans la formule

$$\text{(II, 1)} \qquad a_0^{(n+1)} - (i(e).da)_0 \lambda_0^{(n)} = (i(E).da)_0^{(n+1)}$$

dans laquelle on fait $\lambda = 0$ pour un mouvement M, $a = 0$ pour un mouvement (M_t). Il est important de remarquer pour les applications mécaniques que $(i(E).da)_0^{(n+1)}$ ne dépend que des conditions initiales et des forces appliquées au système autres que celles nécessaires à la réalisation de la liaison. La formule (II, 1) peut encore s'établir au moyen du théorème suivant :

THÉORÈME II. — *f et λ étant deux fonctions numériques sur V_{2n+1}, régulières ainsi que leurs dérivées partielles dans le voisinage d'un point* M, E *et* e *deux champs donnés sans singularités dans le voisinage de* M, *la dérivée* $(n+1)^e$ *de la fonction* f *relativement au champ* $E+\lambda e$ *peut se calculer au moyen de la formule*

(II, 2)
$$f_{E+\lambda e}^{(n+1)}=(\lambda\varphi_1)^{(n)}+\cdots+(\lambda\varphi_p)^{(n-p+1)}+\cdots+\lambda\varphi_{n+1}+(i(E)df)^{(n+1)}$$

dans laquelle $\varphi_1=i(e).df$, $\varphi_p=i(e).d(i(E).df)^{(p-1)}$, $(\lambda\varphi_p)^{(n-p+1)}$ *désigne la dérivée* $(n-p+1)^e$ *du produit* $\lambda\varphi_p$ *prise par rapport au champ* $E+\lambda e$.

Par définition $\quad f_{E+\lambda e}^{(1)}=i(E).df+\lambda i(e).df.$

En posant $i(E).df=\Phi_1$, $i(e).df=\varphi_1$, la dérivée n^e de $f^{(1)}$ s'écrit :

(1) $$f^{(n+1)}=\Phi_1^{(n)}+(\lambda\varphi_1)^{(n)}.$$

On peut appliquer à la fonction Φ_1 le procédé employé pour la fonction f
$$\Phi_1^{(1)}=i(E)\,d\Phi_1+\lambda i(e)\,d\Phi_1.$$

En posant $i(E).d\Phi_1=\Phi_2$, $i(e).d\Phi_1=\varphi_2$, la dérivée $(n-1)^e$ de $\Phi_1^{(1)}$ s'écrit :

(2) $$\Phi_1^{(n)}=\Phi_2^{(n-1)}+(\lambda\varphi_2)^{(n-1)}.$$

Le raisonnement se poursuit et on obtient après $(n+1)$ opérations

$(n+1)$ $$\Phi_n^{(1)}=i(E)\,d\Phi_n+\lambda\varphi_{n+1}.$$

En ajoutant membre à membre les $(n+1)$ relations précédentes après avoir remarqué que $i(E).d\Phi_n=(i(E).df)^{(n+1)}$, on obtient (II, 2).

Application. — Si en M_0, λ et ses $(n-1)$ dérivées premières sont nulles, la formule (II, 2) donne

(II, 3) $$f_0^{(n+1)}-\lambda_0^{(n)}(i(e)\,df)_0=(i(E)\,df)_0^{(n+1)}.$$

Cette relation appliquée à $f=a$ donne (II, 1). La formule (II, 1) ainsi démontrée donne pour un mouvement (M) en faisant $\lambda = 0$, $a_0^{(n+1)} = (i(E).da)_0^{(n+1)}$ pour un mouvement (M_l) en faisant $a = 0$, $\lambda_0^{(n)}$, et elle montre de plus qu'en faisant varier n, λ et ses $(n-1)$ dérivées premières sont nulles en M_0, si $(i(E)\,da)_0^{n+1}$ est la première dérivée non nulle en M_0.

Discussion des éventualités.

Théorème. — 1° *Si* $(i(e).da)_0 > 0$ *les conditions initiales suffisent a déterminer le mouvement ultérieur.*

2° *Si* $(i(e).da)_0 < 0$ *les conditions initiales ne peuvent déterminer le mouvement ultérieur, il y a impossibilité si* $(i(E).da)_0 < 0$ *ou* $(i(E).da)_0^{(n+1)} < 0$ *indétermination pour*

$$(i(E).da)_0 > 0 \quad ou \quad (i(E).da)_0^{(n+1)} > 0.$$

En effet 1° Si $(i(e).da)_0 > 0$ et $(i(E).da)_0 \neq 0$ la relation (II, 1) avec $n = 0$ donne pour

$$(i(E)\,da)_0 > 0 \begin{cases} \lambda = 0, & \left(\dfrac{da}{dt}\right)_0 > 0 & \text{mouvement M acceptable} \\ a = 0, & \lambda_0 < 0 & \text{mouvement M inacceptable} \end{cases}$$

$$(i(E).da)_0 < 0 \begin{cases} \lambda = 0, & \left(\dfrac{da}{dt}\right)_0 < 0 & \text{mouvement (M) inacceptable} \\ a = 0, & \lambda_0 > 0 & \text{mouvement } (M_l) \text{ acceptable} \end{cases}$$

si $(i(E).da)_0 = 0$, $(i(E).da)_0^{(n+1)} \neq 0$ mêmes résultats en utilisant (II, 1).

2° Si $(i(e).da)_0 < 0$ et $i(E).da \neq 0$ la relation (II, 1) avec $n = 0$, donne pour $(i(E).da)_0 > 0$ (M) et (M_l) tous deux possibles

$$\begin{cases} \text{pour} & \lambda = 0, & \left(\dfrac{da}{dt}\right)_0 > 0 \\ \text{pour} & a = 0, & \lambda_0 > 0. \end{cases}$$

Il y a donc indétermination.

Si $(i(E).da)_0 < 0$ (M) et (M_l) sont tous deux impossibles

$$\begin{cases} \text{pour} & \lambda = 0, & \left(\dfrac{da}{dt}\right)_0 < 0 \\ \text{pour} & a = 0, & \lambda_0 < 0. \end{cases}$$

Si $(i(E).da)_0 = 0$, $(i(E).da)_0^{(n+1)} \neq 0$ mêmes résultats en utilisant (II, 1).

Image géométrique de cette discussion. — En M_0 de V_{2n+1} considérons les vecteurs $\vec{E}_0$ et $\vec{e}_0$ de l'espace tangent. La sous-variété $a=0$ partage au voisinage de M_0 V_{2n+1} en deux régions. A la forme da associons le vecteur $\vec{a}$ d'origine M_0 orientée dans le sens de la région positive. Aux deux composantes covariantes relativement à $\vec{a}$ de $\vec{E}_0$ et de $\vec{e}_0$ associons respectivement les vecteurs colinéaires à $\vec{a}$

$$\vec{\alpha}=(i(E).da)_0\vec{a}, \qquad \vec{A}=-(i(e).da)_0\vec{a}.$$

Si $(i(e).da)_0>0$, $\vec{a}$ et $\vec{A}$ sont de sens contraire, à $\vec{\alpha}$ correspond un mouvement (M) ou (M_l).

Si $(i(e).da)_0<0$, $\vec{a}$ et $\vec{A}$ sont de même sens ; à $\vec{\alpha}$ de sens contraire à $\vec{a}$ ne correspond aucun mouvement, à $\vec{\alpha}$ ayant le sens de $\vec{a}$ deux mouvements.

§ III. — Conséquences mécaniques.

L'étude précédente montre le rôle important jouer par le signe de l'invariant $i(e).da$ dont l'expression analytique est quand emploie des coordonnées hamiltonniennes

$$i(e).da=\sum_{n}^{i=1}\frac{\partial a}{\partial p_i}l_i.$$

Pour une liaison du type d'Appell qui comme nous l'avons vu au chapitre II, § V comprend comme cas particulier les liaisons holonomes et les liaisons linéairement non holonomes $i(e).da$ est égale à la norme de e, il est donc toujours positif. Pour de pareilles liaisons, les conditions initiales suffisent à déterminer le mouvement ultérieur. Pour les autres types de liaisons, en particulier pour les liaisons avec frottement, avec résistance au roulement et au pivotement sur lesquelles nous reviendrons au paragraphe suivant les conditions initiales jointes aux conditions mécaniques peuvent ne pas être suffisantes. Dans les cas d'indétermination, si l'on veut préciser le mouvement ultérieur il est nécessaire d'ajouter aux conditions initiales une condition sélective pour (M) et (M_l).

Raison analytique de l'indétermination. — En utilisant l'interprétation géométrique du système différentiel des équations du mouvement comme définissant les lignes tangentes à un champ F sur une variété V_{2n+1} avec $F = E$ pour un mouvement (M), $F = E + \lambda e$ pour un mouvement (M_l), le champ F ainsi défini est discontinu sur la sous-variété $a = 0$. Il y a donc deux intégrales possibles qui correspondent aux mouvements (M) et (M_l) quand on prend le point initial M_0 sur la sous-variété $a = 0$. Les considérations mécaniques $\lambda > 0$ si $a = 0$, $a > 0$ si $\lambda = 0$ ne permettent de séparer les deux mouvements que si $i(e) . da > 0$.

THÉORÈME. — *Apparition ou cessation d'une liaison entraîne nécessairement une discontinuité pour les dérivées des fonctions représentant le mouvement. Si sur V_{2n+1} on se donne $2n$ fonctions f_i indépendantes sans singularité dans le voisinage de M_0 pris sur la variété $a = 0$, les mouvements (M) et (M_l) sont définis par les systèmes différentiels*

$$(M) \quad \frac{df_i}{dt} = i(E) . df_i \qquad (M_l) \quad \frac{df_i}{dt} = i(E + \lambda e) . df_i$$

avec

$$\lambda i(e) . da + i(E) . da = 0.$$

En M_0 si $\lambda^0 \neq 0$, on en déduit : $(f^{(1)}_{i_{E+\lambda e}})_0 - (f^{(1)}_{i_E})_0 = \lambda_0(i(e)\, df_i)_0$ ce qui montre la discontinuité des dérivées du premier ordre des fonctions f_i.

Si en $M_0 \lambda$ et ses $(n - 1)$ premières dérivées sont nulles la formule (II, 3) donne

$$(f^{(n+1)}_{i_{E+\lambda e}})_0 - (f^{(n+1)}_{i_E})_0 = \lambda_0^{(n)}(i(e)\, df_i)_0$$

ce qui montre que les dérivées d'ordre $(n + 1)$ des fonctions f_i sont discontinues.

§ IV. — Exemples montrant l'existence d'indétermination due à une liaison.

1° Revenons à l'exemple d'asservissement décrit au début de ce chapitre.

Désignons par I_1 le moment d'inertie du disque A, par Γ le couple qui lui est appliqué, par I_2 le moment d'inertie du disque B, et supposons que le moteur asservi entraînant B ne peut tourner que dans le sens négatif.

La liaison se traduit par $\beta - \alpha = 0$, ou conformément au point de vue du chapitre II, § I par $a = \dot{\beta} - \dot{\alpha} = 0$, la puissance des forces nécessaires à sa réalisation étant $P = -\lambda\dot{\beta}$.

La forme Ω génératrice des équations du mouvement est

$$\Omega = I_1\, d\dot{\alpha} \wedge d\alpha + I_2\, d\dot{\beta} \wedge d\beta - I_1 \dot{\alpha}\, d\dot{\alpha} \wedge dt - I_2 \dot{\beta}\, d\dot{\beta} \wedge dt + \Gamma_1\, d\alpha \wedge dt - \lambda\, d\beta \wedge dt$$

d'où les équations

Mouvement $(M)\lambda = 0$.

$$\begin{cases} -I_1\, d\dot{\alpha} + \Gamma_1\, dt = 0 \\ d\alpha - \dot{\alpha}\, dt = 0 \\ I_2\, d\dot{\beta} = 0 \\ d\beta - \dot{\beta}\, dt = 0 \end{cases}$$

Mouvement $(M_l)a = 0$.

$$\begin{cases} -I_1\, d\dot{\alpha} + \Gamma_1\, dt = 0 \\ d\alpha - \dot{\alpha}\, dt = 0 \\ -I_2\, d\dot{\beta} - \lambda\, dt = 0 \\ d\beta - \dot{\beta}\, dt = 0 \end{cases}$$

Les composantes du champ E sont $\frac{\Gamma_1}{I_1}$, 0, $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$, 1 celles du champ e sont 0, $-\frac{1}{I_2}$, 0, 0, 0.

Il en résulte $i(e) . da = -\frac{1}{I_2}$, $i(E) . da = -\frac{\Gamma_1}{I_1}$. La relation (II, 1) permettant de discuter les éventualités s'écrit dans ce cas

$$\frac{da}{dt} + \frac{\lambda}{I_2} = -\frac{\Gamma_1}{I_1}.$$

Discussion.

si $\Gamma_1 > 0$:
- pour $\lambda = 0$, $\frac{da}{dt} = -\frac{\Gamma_1}{I_1} < 0$ donc (M) inacceptable puisque $\frac{da}{dt}$ doit être positif
- pour $a = 0$. $\lambda = -\frac{\Gamma_1}{I_1} < 0$ donc (M_l) inacceptable puisque λ doit être positif

si $\Gamma_1 < 0$:
- pour $\lambda = 0$, $\frac{da}{dt} = -\frac{\Gamma_1}{I_1} > 0$ donc (M) acceptable puisque $\frac{da}{dt}$ est positif
- pour $a = 0$, $\lambda = -\frac{\Gamma_1}{I_1} > 0$ donc (M_l) acceptable les deux disques tournant dans le sens des aiguilles d'une montre.

Dans le cas où Γ_1 est négatif il y a indétermination ; cette indétermination ne peut être levée que par un choix arbitraire $\frac{da}{dt} \neq 0$ mouvement (M), $\lambda \neq 0$ mouvement (M_l).

2° Il est clair qu'on peut multiplier les exemples du genre précédent en associant à un contact électrique créant un champ de forces une relation de liaison liée au contact.

3° Cas de deux solides en contact avec frottement de glissement. avec résistance au roulement et au pivotement.

Nous avons au chapitre II, § VI calculer $i(e).da$ pour deux solides en contact ponctuel. La relation permettant de discuter les éventualités est de la forme

$$\left(\frac{da}{dt}\right)_0 - (i(e).da)_0 N = (i(E).da)_0$$

avec

$$i(e).da = A + f(B \sin s + C \cos s) + \delta(D \cos \sigma + F \sin \sigma) + \varepsilon\varpi G.$$

Si $(i(e).da)_0 > 0$, pour $(i(E).da)_0 > 0$ la seule éventualité possible est $\left(\frac{da}{dt}\right)_0 = (i(E)\, da)_0$ c'est-à-dire séparation des deux solides pour $(i(E).da)_0 < 0$ $(i(e).da)_0 N = -(i(E).da)_0$, glissement des deux solides l'un sur l'autre.

Si $(i(e).da)_0 < 0$, pour $(i(E).da)_0 < 0$ deux éventualités possibles : $\left(\frac{da}{dt}\right)_0 > 0$ séparation des solides, $N > 0$ contact avec glissement des solides pour $(i(E).da)_0 < 0$ impossibilité de la séparation ou du contact.

Si on néglige les résistances au roulement et au pivotement le cas d'impossibilité a été signalé pour la première fois par Painlevé et est connu sous le nom de paradoxe de Painlevé (20) qui signale également qu'on peut rencontrer des indéterminations dans les problèmes avec frottement. Si on néglige le frottement de glissement et la résistance au pivotement M. L. Roy (21) a signalé que la résistance au roulement pouvait également donner naissance à des indéterminations et des impossibilités.

Remarquons que le frottement de pivotement ou l'ensemble frottement de glissement résistance au roulement et au pivotement peuvent donner naissance aux mêmes phénomènes.

Ces anomalies qui ne paraissent telles que par rapport aux liaisons classiques holonomes et linéairement non holonomes, ont

(20) Cf. Painlevé, *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, tome CXXI, 1895 et *Leçons sur le frottement*, Hermann, Paris, 1895.

(21) Cf. M. Louis Roy, Congrès de mécanique appliquée.

conduit certains à penser qu'elles étaient dues à l'imperfection des lois de Coulomb et que des lois plus précises les éviteraient. L'étude faite dans ce chapitre montre qu'il n'en est rien puisque l'origine des paradoxes et des indéterminations réside dans le concept même de liaison et tient à une disposition des vecteurs $\vec{e}$ (champ de liaison) et $\vec{a}$ (associé à la forme da) en un point M_0 de la sous-variété $a = 0$ de V_{2n+1} si $i(e) . da$ est négatif.

Le cas du frottement de glissement n'est donc historiquement que le premier cas où ces faits ont été constatés.

CHAPITRE V

THÉORIE DES LIAISONS UNILATÉRALES : CAS DE PLUSIEURS LIAISONS

§ I. — Aspect mécanique du problème.

Quand on considère un système mécanique S astreint à p liaisons de classe U (chap. IV, § I) les conditions initiales étant données, il est naturel de se demander quels sont les mouvements possibles et dans quels cas les conditions posées à priori pour la rupture des liaisons et pour les facteurs de liaisons sont suffisantes pour séparer les mouvements.

Le système mécanique S sera défini par le champ E caractéristique d'une forme Ω de degré deux sur une variété différentiable V_{2n+1}, chacune des p liaisons sera caractérisée par une sous-variété analytique $a^h = 0$ et par un champ de liaison $\lambda_h e^h$, λ_h fonction numérique à déterminer, e^h champ connu, l'indice h variant de 1 à p. Se donner les conditions initiales revient à se donner un point M_0 de V_{2n+1}. Toute la discussion repose sur le théorème suivant.

Théorème I. — *f, $\lambda_1 \dots \lambda_p$ étant $(p+1)$ fonctions numériques sur V_{2n+1} régulières ainsi que leurs dérivées partielles dans le voisinage d'un point* M, *E, e^1, $e^2 \dots e^p$ $(p+1)$ champs donnés sans singularités dans le voisinage de* M *la dérivée $(n+1)^e$ de la fonction f relativement au champ* $E + \sum_p^1 \lambda_h e^h$ *peut se calculer au moyen de la formule :*

(V, 1)

$$f^{(n+1)}_n = (\lambda_h \varphi_1^h)^{(n)} + \dots + (\lambda_h \varphi_p^h)^{(n-p+1)} + \dots + \lambda_h \varphi_{n+1}^h + (i(E)df)^{(n+1)}$$

avec $\varphi_1^h = i(e^h) . df$, $\varphi_p^h = i(e^h) . d(i(E) . df)^{(p)}$, avec sommation relativement à l'indice muet h dans chaque parenthèse $(\lambda_h \varphi_p^h)^{(n-p+1)}$, l'exposant $(n-p+1)$ indiquant une dérivation par rapport au champ $E + \sum_1^p \lambda_h e^h$.

La démonstration s'effectue comme celle du théorème II, chap. IV.

Par définition

$$f^{(1)} = i(\mathrm{E})\,df + \lambda_h i(e^h)\,.\,df.$$

En posant $i(\mathrm{E})\,.\,df = \Phi_1$, $i(e^h)\,.\,df = \varphi_1^h$, la dérivée n^e de $f^{(1)}$

(1) $$f^{(n+1)} = \Phi_1^{(n)} + (\lambda_h \varphi_1^h)^{(n)}.$$

On peut appliquer à la fonction Φ_1 le procédé employé pour la fonction f.

Par définition

$$\Phi_1^{(1)} = i(\mathrm{E})\,.\,d\Phi_1 + \lambda_h i(e^h)\,d\Phi_1.$$

En posant $i(\mathrm{E})\,.\,d\Phi_1 = \Phi_2$, $i(e^h)\,.\,d\Phi_1 = \varphi_2^h$, la dérivée $(n-1)^e$ de $\Phi_1^{(1)}$ donne

(2) $$\Phi_1^{(n)} = \Phi_2^{(n-1)} + (\lambda_h \varphi_2^h)^{(n-1)}.$$

Le raisonnement se poursuit et on obtient après $(n+1)$ opérations analogues

$$(n+1) \qquad \Phi_n^{(1)} = i(\mathrm{E})\,d\Phi_n + \lambda_h \varphi_{n+1}^h.$$

En ajoutant membre à membre les $(n+1)$ relations précédentes et remarquant que $i(\mathrm{E})\,.\,d\Phi_n = (i(\mathrm{E})\,.\,df)^{(n+1)}$ on obtient (V, 1).

On peut appliquer (V, 1) aux p fonctions $a^1, \ldots, a^p$ en un point M_0 ce qui donne

(V, 2) $$(a^k)_0^{(n+1)} - (\lambda_h \varphi_1^{hk})_0^{(n)} \ldots - (\lambda_h \varphi_p^h)^{(n-p+1)} \ldots - (\lambda_h \varphi_{n+1}^{hk})_0 = (i(\mathrm{E})\,.\,da^k)_0^{(n+1)}.$$

En particulier si $(i(\mathrm{E})\,.\,da^k)_0 \neq 0$ pour tout k de 1 à p ce qui signifie que E n'appartient à aucun des espaces tangents aux sous-variétés $a^k = 0$

(V, 3) $$(a^k)_0^{(1)} - \lambda_h (i(e^h)\,.\,da^k)_0 = (i(\mathrm{E})\,da^k)_0 \qquad k(1 \text{ à } p).$$

Les relations (V, 3) dont les seconds membres ne dépendent pas des éventualités permettent de discuter la nature des mouvements possibles :

Hypothèse A. — Si le mouvement de S a lieu avec rupture des p liaisons, on doit faire dans le premier membre de (V, 3) $\lambda_1 = 0 \ldots \lambda_p = 0$ ce qui donne

$$(a^k)_0^{(1)} = (i(\mathrm{E})\,.\,da^k)_0 \qquad k(1 \text{ à } p)$$

L'hypothèse A est acceptable si $(i(\mathrm{E})\,.\,da^k)_0 > 0$.

Hypothèse B. — Si le mouvement de S a lieu en respectant les p liaisons on doit faire dans le premier membre de (V, 3)

$$(a^1)_0^{(1)} = 0, \quad \dots \quad (a^p)_0^{(1)} = 0$$

ce qui donne pour déterminer les λ_h le système des p équations linéaires

$$-\lambda_h(i(e_h) \,.\, da^k)_0 = (i(E) \,.\, da^k)_0.$$

Comme on doit supposer les liaisons compatibles (cf. chap. III, § II) ce système admet une solution.

L'hypothèse B est acceptable si $\lambda_1 > 0, \ \dots \ \lambda_p > 0$.

L'hypothèse C. — Si le mouvement de S a lieu en respectant k liaisons qu'on peut supposer être les k premières pour fixer les idées, et rupture de $(p-k)$ autres, on doit faire dans le premier membre de (V, 3)

$$(a^1)_0^{(1)} = 0, \quad \dots \quad (a^k)_0^{(1)} = 0, \qquad \lambda_{k+1} = 0, \quad \dots \quad \lambda_p = 0.$$

On est conduit à résoudre un système linéaire aux inconnues

$$\lambda_1 \ \dots \ \lambda_k, \ (a^{k+1})_0^{(1)} \ \dots \ (a^p)_0^{(1)}$$

$$\begin{array}{r}
-\lambda_1 i(e^1) \,.\, da^1 - \cdots\cdots\cdots - \lambda_k i(e)^k \,.\, da^1 = i(E) \,.\, da^1 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
-\lambda_1 i(e^1) \,.\, da^k - \cdots\cdots\cdots - \lambda_k i(e^k) \,.\, da^k = i(E) \,.\, da^k \\
(a^{k+1})_0^{(1)} - \lambda_1 i(e^1) \,.\, da^{k+1} - \cdots\cdots\cdots - \lambda_k i(e^k) \,.\, da^{k+1} = i(E) \,.\, da^{k+1} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
(a^p)_0^{(1)} - \lambda_1 i(e^1) \,.\, da^p - \cdots\cdots\cdots - \lambda_k i(e^k) \,.\, da^p = i(E) \,.\, da^p
\end{array}$$

dont le déterminant est différent de zéro puisque k liaisons prises parmi les p doivent être compatibles.

L'hypothèse C est acceptable si

$$\lambda_1 > 0, \ \dots\dots \ \lambda_k > 0, \qquad (a^{k+1})_0^{(1)} > 0 \ \dots\dots \ (a^p)_0^{(1)} > 0.$$

§ II. — Problème d'analysis-situs équivalent.

On peut donner à l'examen simultané de ces diverses hypothèses une forme géométrique qui simplifie la discussion.

Remarquons qu'une liaison du type $a = 0$, λe étant donnée, cela signifie qu'on connaît d'une part le champ e, élément de l'espace tangent T à V_{2n+1} d'autre part la forme da élément de T′ dual de T.

La réalisation physique de la liaison impose a et e. Les deux éléments e et da sont indépendants de tout système de coordonnées. A ces deux éléments est associé l'invariant $i(e).da$, c'est-à-dire qu'en un point M_0 de $V_{2n+1}(i(e).da)_0$ a une valeur indépendante du choix des coordonnées. Relativement aux p champs $e^1 \ldots e^p$ et aux p formes $da^1 \ldots da^p$, nous avons en M_0 les p^2 invariants

$$i(e^h).da^k = r^{hk}.$$

Les p^2 éléments r^{hk} sont les éléments d'une matrice $\|r^{hk}\|$.

Considérons maintenant un espace vectoriel E_p à p dimensions et dans cet espace d'une part p vecteurs arbitraires indépendants $\vec{a}^1, \vec{a}^2 \ldots \vec{a}^p$ ayant même origine, d'autre part p vecteurs $\vec{A}^1, \vec{A}^2 \ldots \vec{A}^p$ définie par

$$\left\| \begin{matrix} \vec{A}^1 \\ \vec{A}^2 \\ \vec{A}^p \end{matrix} \right\| = \left\| \; -r^{hk} \; \right\| \times \left\| \begin{matrix} \vec{a}^1 \\ \vec{a}^2 \\ \vec{a}^p \end{matrix} \right\|.$$

Les p équations (V, 3) sont équivalentes à la relation vectorielle

$$\text{(V, 4)} \qquad \vec{a} + \lambda_h \vec{A}^h = \vec{\alpha}$$

(le changement de signe provient de la définition donnée aux vecteurs $\vec{A}^h$). L'hypothèse A signifie qu'on peut décomposer dans E_p le vecteur $\vec{\alpha}$ suivant les p vecteurs $\vec{a}^1 \ldots \vec{a}^p$ et que ses composantes sont toutes positives par suite que $\vec{\alpha}$ est dans une région R^0 bien déterminée de E_p.

L'hypothèse B signifie qu'on peut décomposer dans E_p le vecteur $\vec{\alpha}$ suivant les p vecteurs $\vec{A}^1 \ldots \vec{A}^p$ et que ses composantes sont toutes positives, par suite que $\vec{\alpha}$ est dans une région R_p bien déterminée de E_p.

L'hypothèse C signifie qu'on peut décomposer $\vec{\alpha}$ suivant les k vecteurs $\vec{A}^1, \vec{A}^2, \ldots \vec{A}^k$ et les $(p-k)$ vecteurs $\vec{a}^{k+1} \ldots \vec{a}^p$ et que ses composantes sont toutes positives, par suite que $\vec{\alpha}$ est dans une région R_k^{p-k} bien déterminée de E_p.

Le problème d'analyse qui consiste à déterminer les mouvements possibles du système S astreint à p liaisons de classe U quand on connaît les conditions initiales est donc équivalent à un problème d'Analysis-Situs.

Dans un espace euclidien E_p on se donne une gerbe de $2p$ vecteurs de même origine

$$\begin{matrix} \vec{a}^1 & \vec{a}^k & \vec{a}^p \\ \vec{A}^1 & \vec{A}^k & \vec{A}^p \end{matrix}$$

Quand on prend p de ces vecteurs

$$\vec{A}^{i_1}, \ \ldots \ \vec{A}^{ik}, \ \vec{a}^{ik+1}, \ \ldots \ \vec{a}^{ip} \ (i_{i_1}, \ \ldots \ i_k, \ i_{k+1} \ \ldots \ i_p)$$

étant une permutation des p premiers entiers) choisis de telle sorte que deux vecteurs ne figurent pas dans la même colonne du tableau précédent on obtient un p-èdre. A chaque p-èdre on associe une région de $E_p R_{i_1 \ldots ik}^{ik+1 \ldots ip}$ que nous appellerons région interne au p-èdre telle que si $\vec{\alpha}$ est dans $R_{i_1 \ldots ik}^{ik+1 \ldots ip}$ les composantes de $\vec{\alpha}(X_{i_1}, \ldots X_{ik+1}, x_{ik+1} \ldots x_{ip})$ relativement à ce p-èdre sont des nombres tous positifs

$$\vec{\alpha} = X_{i_1}\vec{A}^{i_1} + \cdots + X_{ik}\vec{A}^{ik} + x_{ik+1}\vec{a}^{ik+1} + \cdots + x_{ip}\vec{a}^{ip}.$$

A la décomposition précédente de $\vec{\alpha}$ correspond un mouvement $M_{i_1 \ldots ik}^{ik+1 \ldots ip}$ du système dans lequel k liaisons prises parmi les p subsistent et $(p - k)$ autres sont rompues. $\vec{\alpha}$ étant donné le nombre de mouvements possibles correspond au nombre de régions $R_{i_1 \ldots ik}^{ik+1 \ldots ip}$ auxquelles $\vec{\alpha}$ peut appartenir simultanément.

Nombre total d'éventualités. — Il y a autant de régions $R_{i_1 \ldots ik}^{ik+1 \ldots ip}$ qu'on peut réaliser de combinaisons de k vecteurs $\vec{A}^{i_1} \ldots \vec{A}^{ik}$ pris parmi p d'entre eux soit C_p^k. Le nombre total de régions est donc égal à la somme des combinaisons

$$C_p^0 + C_p^1 \cdots + C_p^k + \cdots + C_p^p = 2^p.$$

Le nombre d'éventualités possibles dans un système mécanique astreint à p liaisons de classe U est donc 2^p.

Conditions nécessaires et suffisantes d'unicité des éventualités. — Pour qu'à un vecteur $\vec{\alpha}$ ne corresponde qu'un mouvement, il faut et il suffit que les 2^p régions $R_{i_1 \ldots ik}^{ik+1 \ldots ip}$ n'aient pas de domaine commun à p dimensions ou n'aient pas de point interne commun. Les vecteurs $\vec{A}^1 \ldots \vec{A}^p$ étant définis à partir des vecteurs $\vec{a}^1 \ldots \vec{a}^p$ au moyen de la matrice $\|-r^{hk}\|$, on est conduit à étudier les conditions auxquelles doivent satisfaire les éléments de cette matrice pour que les diverses régions $R_{i_1 \ldots ik}^{ik+1 \ldots ip}$ n'aient pas de domaine commun à p dimensions.

Théorème II. — *La condition nécessaire et suffisante pour que dans un espace euclidien à p dimensions, toutes les régions internes aux 2^p p-èdres obtenus en prenant p vecteurs dans des colonnes différentes du tableau*

$$\begin{array}{ccccc} \vec{a}^1, & \ldots, & \vec{a}^k, & \ldots, & \vec{a}^p \\ \vec{A}^1, & \ldots, & \vec{A}^k, & \ldots, & \vec{A}^p \end{array}$$

n'aient aucun domaine commun à p dimensions est que tous les déterminants mineurs diagonaux qu'on peut extraire de la matrice carrée $\|r^{hk}\|$ *soient positifs, les vecteurs* $\vec{A}^1, \ldots, \vec{A}^p$ *étant définis en fonction des vecteurs* $\vec{a}^1, \ldots, \vec{a}^p$, *au moyen de la matrice* $\|-r^{hk}\|$.

Lemmes préliminaires. — 1. Deux p-èdres formés au moyen de k vecteurs différents n'ont pas de domaine commun à p dimensions si au moins une des k inégalités

$$(\text{V}, 5) \qquad x_i X_i < 0, \quad \ldots, \quad x_{ik} X_{ik} < 0.$$

est satisfaite, $x_{i_1}, \ldots x_{ik}$, $X_{i_1}, \ldots X_{ik}$, désignant respectivement les composantes d'un vecteur de E_p par rapport aux k vecteurs différents.

Les deux p-èdres étant formés de k vecteurs différents, cela veut dire que si on a pris $\vec{a}^j$ dans la colonne j pour constituer le premier p-èdre on a pris $\vec{A}^j$ dans cette même colonne pour constituer le deuxième p-èdre.

Il en résulte qu'un même vecteur $\vec{\alpha}$ a pour expression dans les deux bases relatives à ces deux p-èdres

$$\vec{\alpha} = x_{i_1}\vec{a}^{i_1} + \cdots + x_{iq}\vec{a}^{iq} + X_{iq+1}\vec{A}^{iq+1} \cdots + X_{ik}\vec{A}^{ik} + x_{ik+1}\vec{a}^{ik+1} \cdots + x_{ip}\vec{a}_{ip}$$
$$\vec{\alpha} = X_{i_1}\vec{A}^{i_1} + \cdots + X_{iq}\vec{A}^{iq} + x_{iq+1}\vec{a}^{iq+1} \cdots + x_{ik}\vec{a}^{ik} + x'_{ik+1}\vec{a}^{ik+1} \cdots + x'_{ip}\vec{a}^{ip}.$$

Dire que les régions internes à ces deux p-èdres n'ont pas de domaine commun à p dimensions signifie qu'on ne peut avoir simultanément :

$$\begin{array}{ll} x_{i_1} > 0 \ \ldots \ x_{iq} > 0, & X_{iq+1} > 0, \ \ldots, \ X_{ik} > 0 \\ X_{i_1} > 0 \ \ldots \ X_{iq} > 0, & x_{iq+1} > 0, \ \ldots, \ x_{ik} > 0 \end{array}$$

en d'autres termes on doit avoir au moins une des k inégalités (V, 5)

2° Deux p-èdres n'ayant qu'un vecteur de base différent n'ont pas de domaine commun à p dimensions si le quotient de deux déterminants diagonaux formés avec les éléments de la matrice $\|-r^{hk}\|$ est négatif.

Les deux vecteurs non communs étant $\vec{a}^k$ et $\vec{A}^k$, $\vec{\alpha}$ a pour expression dans les deux bases relatives à ces deux p-èdres

$$\vec{\alpha} = X_1\vec{A}^1 + \cdots + X_{k-1}\vec{A}^{k-1} + x_k\vec{a}^k + x_{k+1}\vec{a}^{k+1} \cdots + x_p\vec{a}^p$$
$$\alpha = X'_1\vec{A}^1 + \cdots + X'_{k-1}\vec{A}^{k-1} + X_k\vec{A}^k + x'_{k+1}\vec{a}^{k+1} \cdots + x'_p\vec{a}^p.$$

D'après le lemme précédent les deux régions internes aux deux p-èdres sont distinctes si

$$x_kX_k < 0$$

Or si $\xi_1, \ldots \xi_k, \xi_{k+1} \ldots \xi_p$ sont les composantes de $\vec{a}^k$ dans la base $\vec{A}^1, \ldots \vec{A}^k, \vec{a}^{k+1}, \ldots \vec{a}^p$

$$\vec{a}^k = \xi_1\vec{A}_1 \cdots + \xi_k\vec{A}^k + \xi_{k+1}\vec{a}^{k+1} \cdots + \xi_p\vec{a}^p.$$

En remplaçant $\vec{a}^k$ par sa valeur dans la première expression de $\vec{\alpha}$ et identifiant les coefficients de $\vec{A}^k$ on obtient

$$X_k = \xi_k x_k$$

La condition équivalente à $x_kX_k < 0$ est donc $\xi_k < 0$. ξ_k s'exprime au moyen des déterminants mineurs extraits de la matrice $\|-r^{hk}\|$. Il suffit pour cela d'exprimer les vecteurs $\vec{a}^1, \ldots \vec{a}^k$ en fonction des vecteurs $\vec{A}^1, \ldots, \vec{A}^k, \vec{a}^{k+1}, \ldots \vec{a}^p$, c'est-à-dire de résoudre le système

$$-r^{11}\vec{a}^1 \cdots - r^{1k}\vec{a}^k = \vec{A}^1 + r^{1k+1}\vec{a}^{k+1} \cdots + r^{1p}\vec{a}^p$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$-r^{k1}\vec{a}^1 \cdots - r^{kk}\vec{a}^k = \vec{A}^1 + r^{kk+1}\vec{a}^{k+1} \cdots + r^{kp}\vec{a}^p$$

d'où $\xi_k = \dfrac{\Delta_{12\ldots k-1}}{\Delta_{12\ldots k}}$ avec

$$\Delta_{12\ldots k-1} = \begin{vmatrix} -r^{11} & \ldots\ldots & -r^{1k-1} \\ -r^{k-11} & & -r^{k-1k-1} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_{12\ldots k} = \begin{vmatrix} -r^{11} & -r^{1k} \\ -r^{k1} & -r^{kk} \end{vmatrix}$$

$\Delta_{12\ldots k-1}$ et $\Delta_{12\ldots k}$ sont deux déterminants mineurs diagonaux extraits de la matrice $\|-r^{hk}\|$. La condition nécessaire et suffisante pour que les régions internes aux deux p-èdres construits sur les deux séries de vecteurs

$$\vec{A}^1, \ldots \vec{A}^{k-1}, \vec{a}^k \quad \vec{a}^{k+1}, \ldots \vec{a}^p$$
$$\vec{A}^1, \ldots \vec{A}^{k-1}, \vec{A}^k, \vec{a}^{k+1}, \ldots \vec{a}^p$$

n'aient pas de domaine commun à p dimensions est $\frac{\Delta_{12\ldots k-1}}{\Delta_{12\ldots k}} < 0$.

3° Tous les couples possibles de deux p-èdres n'ayant qu'un vecteur de base différent, n'ont aucun domaine commun à p dimensions si tous les mineurs diagonaux de la matrice $\|r^{hk}\|$ sont positifs.

Appliquons le lemme 2 aux divers couples de p-èdres suivants :

1° Les régions internes aux deux p-èdres définis par les deux séries de vecteurs

$$\begin{matrix} \vec{a}^1, & \vec{a}^2, & \ldots & \vec{a}^h, & \ldots & \vec{a}^p \\ \vec{a}^1, & \vec{a}^2, & \ldots & \vec{A}^h, & \ldots & \vec{a}^p \end{matrix}$$

n'ont aucun domaine commun à p dimensions si $-r^{hh} < 0$ soit $r^{hh} > 0$.

Conséquence : Les éléments diagonaux de la matrice $\|r^{hk}\|$ doivent être tous positifs.

2° Les régions internes aux deux p-èdres définis par les deux systèmes de vecteurs

$$\begin{matrix} \vec{a}^1, & \vec{a}^2 & \ldots & \vec{a}^g, & \vec{A}^h, & \vec{a}^j, & \vec{a}^k, & \ldots & \vec{a}^p \\ \vec{a}^1, & \vec{a}^2 & \ldots & \vec{a}^g, & \vec{A}^h, & \vec{A}^j, & \vec{a}^k, & \ldots & \vec{a}^p \end{matrix}$$

n'ont aucun domaine commun à p dimensions si $\dfrac{-r^{hh}}{\begin{vmatrix} -r^{hh} & -r^{hj} \\ -r^{jh} & -r^{jj} \end{vmatrix}} < 0.$

En tenant compte de la condition précédente, on doit avoir

$$\begin{vmatrix} r^{hh} & r^{hj} \\ r^{jh} & r^{jj} \end{vmatrix} > 0.$$

Conséquence : Les mineurs diagonaux du deuxième ordre de la matrice $\|r^{hk}\|$ doivent être positifs.

3° Le raisonnement se poursuit par récurrence. Les régions internes aux deux p-èdres définis par les deux systèmes de vecteurs

$$\begin{matrix} \vec{a}^1, & \vec{a}^2, & \ldots, & \vec{a}^k, & \vec{A}^\lambda, & \ldots, & \vec{A}^\mu, & \vec{a}^\nu, & \vec{a}^{\nu+1}, & \ldots, & \vec{a}^p \\ \vec{a}^1, & \vec{a}^2, & \ldots, & \vec{a}^k, & \vec{A}^\lambda, & \ldots, & \vec{A}^\mu, & \vec{A}^\nu, & \vec{a}^{\nu+1}, & \ldots, & \vec{a}^p \end{matrix}$$

n'ont aucun domaine commun à p dimensions si

$$\frac{\begin{vmatrix} -r^{\lambda\lambda} & \ldots & -r^{\lambda\mu} \\ -r^{\mu\lambda} & \ldots & -r^{\mu\mu} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -r^{\nu\lambda} & \ldots & -r^{\lambda\nu} \\ -r^{\nu\lambda} & \ldots & -r^{\nu\nu} \end{vmatrix}} < 0 \quad \text{ou} \quad \frac{(-1)^{h+1}}{(-1)^h} \frac{\begin{vmatrix} r^{\lambda\lambda} & \ldots & r^{\lambda\mu} \\ r^{\mu\lambda} & \ldots & r^{\mu\mu} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} r^{\lambda\lambda} & \ldots & r^{\lambda\nu} \\ r^{\nu\lambda} & \ldots & r^{\nu\nu} \end{vmatrix}} < 0$$

Par hypothèse le déterminant placé au numérateur est positif, le déterminant placé au dénominateur étant de parité différente, on doit avoir

$$\begin{vmatrix} r^{\lambda\lambda} & \dots & r^{\lambda\nu} \\ r^{\nu\nu} & \dots & r^{\nu\nu} \end{vmatrix} > 0.$$

Démonstration du théorème II. — 1° Envisageons d'abord le cas de deux p-èdres définis par les deux suites de vecteurs

$$\vec{a}^1,\ \vec{a}^2,\ \dots,\ \vec{a}^k,\ \vec{a}^{k+1},\ \dots,\ \vec{a}^p$$
$$\vec{A}^1,\ \vec{A}^2,\ \dots,\ \vec{A}^k,\ \vec{a}^{k+1},\ \dots,\ \vec{a}^p$$

Un même vecteur $\vec{\alpha}$ a pour expression dans les deux bases relatives à ces deux p-èdres

$$\vec{\alpha} = x_1\vec{a}^1 + \dots + x_k\vec{a}^k + x_{k+1}\vec{a}^{k+1} + \dots + x_p\vec{a}^p$$
$$\vec{\alpha} = X_1\vec{A}^1 + \dots + X_k\vec{A}^k + x'_{k+1}\vec{a}^{k+1} + \dots + x'_p\vec{a}^p$$

Montrons qu'au moins une des k inégalités (V, 6) est satisfaite, si tous les mineurs diagonaux de la matrice $\|r^{hk}\|$ sont positifs

(V, 6) $$x_1X_1 < 0, \quad \dots, \quad x_kX_k < 0.$$

Les équations

$$\vec{A}^1 = -r^{11}\vec{a}^1 - \dots - r^{1k}\vec{a}^k - r^{1k+1}\vec{a}^{k+1} - \dots - r^{1p}\vec{a}^p$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\vec{A}^k = -r^{k1}\vec{a}^1 - \dots - r^{kk}\vec{a}^k - r^{kk+1}\vec{a}^{k+1} - \dots - r^{kp}\vec{a}^p$$

montrent qu'on passe des $X_1, \dots, X_k$ aux $x_1, \dots, x_k$, par la substitution

(V, 7) $$\begin{cases} -x_1 = r^{11}X_1 \dots + r^{k1}X_k \\ \dots\dots\dots\dots \\ -x_k = r^{1k}X_1 \dots + r^{kk}X_k \end{cases}$$

qui puisque $\Delta_k = \det\begin{vmatrix} r^{11} & \dots & r^{1k} \\ r^{k1} & & r^{kk} \end{vmatrix} \neq 0$ (> 0) admet une substitution inverse (V, 8)

(V, 8) $$\begin{cases} -X_1 = \dfrac{R_1^1}{\Delta_k}x_1 + \dots + \dfrac{R_1^k}{\Delta_k}x_k \\ \dots\dots\dots\dots \\ -X_k = \dfrac{R_k^1}{\Delta_k}x_1 + \dots + \dfrac{R_k^k}{\Delta_k}x_k. \end{cases}$$

Si une des inégalités $x_1 < 0, \dots x_k < 0$, est toujours satisfaite lorsque $\vec{\alpha}$ est dans le domaine $D(X_1 > 0, \ldots X_k > 0)$, une des inégalités (V, 6) ayant toujours lieu, la proposition n'est pas à démontrer.

Supposons donc qu'aucune des inégalités $x_1 < 0, \ldots x_k < 0$ ne soit toujours satisfaite quand $\vec{\alpha}$ est dans D. Les variables $x_1, \ldots x_k$ ne peuvent être toujours positives quand $\vec{\alpha}$ est dans D, car en particulier pour $X_1 = 0, \ldots X_j \neq 0, \ldots X_k = 0$, les équations (V, 7) donnent $x_j = -\dfrac{r^{jj}}{\Delta_k} X_j$; r^{jj} et Δ_k (mineur diagonal) étant positifs. x_j est négatif, Les variables $x_1 \ldots x_k$ s'annulent donc quand $\vec{\alpha}$ parcourt D. En particulier pour $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots x_j \neq 0, \ldots x_k = 0$ les équations (V, 8) donnent pour les variables $X_1, \ldots X_k$

$$-X_1 = \frac{R_1^j}{\Delta_k} x_j, \ \ldots - X_j = \frac{R_j^j}{\Delta_k} x_j, \ \ldots - X_k = \frac{R_k^j}{\Delta_k} x_j.$$

D'après le lemme 3 Δ_k et R_j^j mineurs diagonaux sont positifs. x_j est négatif car dans D X_j est positif, il en résulte que tous les coefficients $R_1^j \ldots R_k^j$ sont positifs. Le raisonnement se répétant pour toutes les valeurs de j (1 à k), les coefficients des équations (V, 8) sont donc tous positifs.

Lorsque $\vec{\alpha}$ est dans D les premiers des équations (V, 8) étant tous négatifs, il doit en être de même des seconds membres donc au moins une des variables $x_1 \ldots x_k$ est négative. Une au moins des inégalités (V, 6) est satisfaite.

2° Envisageons maintenant le cas général. Soient deux p-èdres quelconques formés au moyen de k vecteurs différents. Un même vecteur $\vec{\alpha}$ de E_p a pour expression dans les deux bases relatives à ces deux p-èdres

$$\vec{\alpha} = x_{i_1}\vec{a}^{i_1} + \cdots + x_{iq}\vec{a}^{iq} + X_{iq+1}\vec{A}^{iq+1} + \cdots + X_{ik}\vec{A}^{ik} + x_{ik+1}\vec{a}^{ik+1} + \cdots + x_{ip}\vec{a}^{ip}$$
$$\vec{\alpha} = X_{i_1}\vec{A}^{i_1} + \cdots + X_{iq}\vec{A}^{iq} + x_{iq+1}\vec{a}^{iq+1} + \cdots + x_{ik}\vec{a}^{ik} + x'_{ik+1}\vec{a}^{ik+1} + \cdots + x'_{ip}\vec{a}^{ip}.$$

Pour trouver la substitution qui permet de passer des

$$x_{i_1} \ldots x_{iq}, \ X_{iq+1} \ldots X_{ik} \quad \text{aux} \quad X_{i_1}, \ldots X_{iq}, \ x_{iq+1} \ldots x_{ik}$$

évaluons les vecteurs de la premières base en fonction de ceux de la deuxième. Des relations de définition des vecteurs

$$\vec{A}^1, \ \ldots \ \vec{A}^k \ \ldots \ \vec{A}^p,$$

on déduit le système aux inconnues

$$-\vec{a}^{i_1}, \ \ldots \ -\vec{a}^{iq}. \ -\vec{A}^{iq+1} \ \ldots \ -\vec{A}^{ik}$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
&-r^{i_1 i_1}\vec{a}^{i_1} - \dots - r^{i_1 i_q}\vec{a}^{i_q} = r^{i_1 i_{q+1}}\vec{a}^{i_{q+1}} + \dots + r^{i_1 i_p}\vec{a}^{i_p} + \vec{A}^{i_1} \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&-r^{i_q i_1}\vec{a}^{i_1} - \dots - r^{i_q i_q}\vec{a}^{i_q} = r^{i_q i_{q+1}}\vec{a}^{i_{q+1}} + \dots + r^{i_q i_p}\vec{a}^{i_p} + \vec{A}^{i_q} \\
&-r^{i_{q+1} i_1}\vec{a}^{i_1} - \dots - r^{i_{q+1} i_q}\vec{a}^{i_q} - \vec{A}^{i_{q+1}} = r^{i_{q+1} i_{q+1}}\vec{a}^{i_{q+1}} + \dots + r^{i_{q+1} i_p}\vec{a}^{i_p} \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&-r^{i_k i_1}\vec{a}^{i_1} - \dots - r^{i_k i_q}\vec{a}^{i_q} - \vec{A}^{i_k} = r^{i_k i_{q+1}}\vec{a}^{i_{q+1}} + \dots + r^{i_k i_p}\vec{a}^{i_p}
\end{aligned}
\right.
$$

Remarquons que le déterminant de ce système $\Delta_{i_1 \dots i_q}$ est un mineur diagonal de la matrice $\|r^{hk}\|$. Le calcul de $-\vec{a}^{i_1}, \dots, -\vec{a}^{i_q}$, $-\vec{A}^{i_{q+1}}, \dots, -\vec{A}^{i_k}$ montre que les coefficients $R^{i_1}_{i_1}, \dots, R^{i_q}_{i_q}$, $R^{i_{q+1}}_{i_{q+1}} \dots R^{i_k}_{i_k}$ sont des mineurs diagonaux de $\|r^{hk}\|$

$$
\begin{aligned}
&-\vec{a}^{i_1} = \frac{R^{i_1}_{i_1}}{\Delta_{i_1-i_q}}\vec{A}^{i_1} + \dots + \frac{R^{i_1}_{i_q}}{\Delta_{i_1-i_q}}\vec{A}^{i_q} + \frac{R^{i_1}_{i_{q+1}}}{\Delta_{i_1 i_q}}\vec{a}^{i_{q+1}} + \dots + \frac{R^{i_1}_{i_k}}{\Delta_{i_1 i_q}}\vec{a}^{i_k} + \dots + \frac{R^{i_1}_{i_p}}{\Delta_{i_1-i_q}}\vec{a}_{i_1} \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&-\vec{a}^{i_q} = \frac{R^{i_q}_{i_1}}{\Delta_{i_1-i_q}}\vec{A}^{i_1} + \dots + \frac{R^{i_q}_{i_q}}{\Delta_{i_1 i_q}}\vec{A}^{i_q} + \frac{R^{i_{q+1}}_{i_q}}{\Delta_{i_1 i_q}}\vec{a}^{i_{q+1}} + \dots + \frac{R^{i_q}_{i_k}}{\Delta_{i_1 i_q}}\vec{a}^{i_k} + \dots + \frac{R^{i_q}_{i_p}}{\Delta_{i_1-i_q}}\vec{a}^{i_p} \\
&\vec{A}^{i_{q+1}} = \frac{R^{i_{q+1}}_{i_1}}{\Delta_{i_1 i_q}}\vec{A}^{i_1} + \dots + \frac{R^{i_{q+1}}_{i_q}}{\Delta_{i_1 i_q}}\vec{A}^{i_q} + \frac{R^{i_{q+1}}_{i_{q+1}}}{\Delta_{i_1-i_q}}\vec{a}^{i_{q+1}} + \dots + \frac{R^{i_{q+1}}_{i_k}}{\Delta_{i_1-i_q}}\vec{a}^{i_k} + \dots + \frac{R^{i_{q+1}}_{i_p}}{\Delta_{i_1-i_q}}\vec{a}^{i_p} \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&\vec{A}^{i_k} = \frac{R^{i_k}_{i_1}}{\Delta_{i_1-i_q}}\vec{A}^{i_1} + \dots + \frac{R^{i_k}_{i_q}}{\Delta_{i_1-i_q}}\vec{A}^{i_q} + \frac{R^{i_k}_{i_{q+1}}}{\Delta_{i_1 i_q}}\vec{a}^{i_{q+1}} + \dots + \frac{R^{i_k}_{i_k}}{\Delta_{i_1 i_q}}\vec{a}^{i_k} + \dots + \frac{R^{i_k}_{i_p}}{\Delta_{i_1 i_q}}\vec{a}^{i_p}.
\end{aligned}
$$

On déduit de ces relations les formules de substitution (V, 9)

$$
\text{(V, 9)}\quad
\left\{
\begin{aligned}
&-X_{i_1} = \frac{R^{i_1}_{i_1}}{\Delta_{i_1 i_q}}x_{i_1} + \dots + \frac{R^{i_q}_{i_q}}{\Delta_{i_1 i_q}}x_{i_q} + \frac{R^{i_{q+1}}_{i_1}}{\Delta_{i_1 i_q}}X_{i_{q+1}} + \dots + \frac{R^{i_k}_{i_1}}{\Delta_{i_1 i_q}}X_{i_k} \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&-X_{i_q} = \frac{R^{i_1}_{i_q}}{\Delta_{i_1 i_q}}x_{i_1} + \dots + \frac{R^{i_q}_{i_q}}{\Delta_{i_1 i_q}}x_{i_q} + \frac{R^{i_{q+1}}_{i_q}}{\Delta_{i_1 i_q}}X_{i_{q+1}} + \dots + \frac{R^{i_k}_{i_q}}{\Delta_{i_1 i_q}}X_{i_k} \\
&-x_{i_{q+1}} = \frac{R^{i_q}_{i_1}}{\Delta_{i_1 i_q}}x_{i_1} + \dots + \frac{R^{i_q}_{i_{q+1}}}{\Delta_{i_1 i_q}}x_{i_q} + \frac{R^{i_{q+1}}_{i_{q+1}}}{\Delta_{i_1 i_q}}X_{i_{q+1}} + \dots + \frac{R^{i_k}_{i_{q+1}}}{\Delta_{i_1 i_q}}X_{i_k} \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&-x_{i_k} = \frac{R^{i_1}_{i_k}}{\Delta_{i_1 i_q}}x_{i_1} + \dots + \frac{R^{i_q}_{i_k}}{\Delta_{i_1 i_q}}x_{i_q} + \frac{R^{i_{q+1}}_{i_k}}{\Delta_{i_1 i_q}}X_{i_{q+1}} + \dots + \frac{R^{i_k}_{i_k}}{\Delta_{i_1 i_q}}X_{i_k}.
\end{aligned}
\right.
$$

Inversement évaluons les vecteurs de la deuxième base en fonction de ceux de la première. On en déduit par un calcul analogue les formules (V, 10)

$$
(\mathrm{V},\ 10)\quad\left\{\begin{aligned}
-x_{i_1} &= \frac{\rho_{i_1}^{i_1}}{\Delta}X_{i_1}+\cdots+\frac{\rho_{i_1}^{iq}}{\Delta}X_{iq}+\frac{\rho_{i_1}^{iq+1}}{\Delta}x_{iq+1}+\cdots+\frac{\rho_{i_1}^{ik}}{\Delta}x_{ik}\\
-x_{iq} &= \frac{\rho_{iq}^{i_1}}{\Delta}X_{i_1}+\cdots+\frac{\rho_{iq}^{iq}}{\Delta}X_{iq}+\frac{\rho_{i_1}^{iq+1}}{\Delta}x_{iq+1}+\cdots+\frac{\rho_{ik}^{ik}}{\Delta}x_{ik}; \quad \Delta=\Delta_{iq+1\ldots ik}\\
-X_{iq+1} &= \frac{\rho_{iq+1}^{i_1}}{\Delta}X_{i_1}+\cdots+\frac{\rho_{iq+1}^{iq}}{\Delta}X_{iq}+\frac{\rho_{iq+1}^{iq+1}}{\Delta}x_{iq+1}+\cdots+\frac{\rho_{iq+1}^{ik}}{\Delta}x_{ik}\\
-X_{ik} &= \frac{\rho_{ik}^{i_1}}{\Delta}X_{i_1}+\cdots+\frac{\rho_{ik}^{iq}}{\Delta}X_{iq}+\frac{\rho_{ik}^{iq+1}}{\Delta}x_{iq+1}+\cdots+\frac{\rho_{ik}^{ik}}{\Delta}x_{ik}
\end{aligned}\right.
$$

Ayant remarqué que dans les formules (V, 9) et (V, 10) les éléments diagonaux sont formés par des quotients de mineurs diagonaux de la matrice $\|r^{hk}\|$ donc sont tous positifs, il suffit de reprendre point par point le raisonnement fait dans le cas précédent pour montrer que dans le domaine D ($X_{i_1} > 0, \ldots X_{iq} > 0,\ x_{iq+1} > 0 \ldots x_{ik} > 0$) une des variables $x_{i_1} \ldots x_{iq}$, $X_{iq+1} \ldots X_{ik}$ est négative, ce qui entraîne que les régions internes aux deux p-èdres n'ont pas de domaine commun à p dimensions.

Théorème III. — *L'espace E_p à p dimensions est complètement couvert par les 2^p p-èdres n'ayant en commun aucun domaine à p dimensions.*

Soit $\vec{\alpha}$ un vecteur de E_p déterminé par ses composantes $\alpha^1, \ldots \alpha^p$ par rapport à la base formée par les vecteurs $\vec{a}^1, \vec{a}^2 \ldots \vec{a}^p$. $\vec{\alpha}$ étant quelconque dans E^p les composantes $\alpha^1, \ldots \alpha^p$ ont des signes arbitraires formant une suite de p signes — et $+$ bien déterminée quand on prend les vecteurs dans l'ordre $\vec{a}^1 \ldots \vec{a}^p$. Relativement à chaque p-èdre la décomposition de $\vec{\alpha}$ suivant les vecteurs de base correspondants

$$\vec{a}^{i_1} \ldots \vec{a}^{iq}, \qquad \vec{A}^{iq+1} \ldots \vec{A}^{ik}, \qquad \vec{a}^{ik+1} \ldots \vec{a}^{ip}$$

engendre un système de coordonnées dont la suite des signes est bien déterminée quand on range les indices des vecteurs dans l'ordre naturel (1, p), opération toujours possible puisqu'on prend un vecteur et un seul dans chaque colonne du tableau

$$\begin{array}{l}\vec{a}^1,\ \vec{a}^2,\ \ldots\ldots\ \vec{a}^{p-1},\ \vec{a}^p\\ \vec{A}^1,\ \vec{A}^2,\ \ldots\ldots\ \vec{A}^{p-1},\ \vec{A}^p.\end{array}$$

Les suites de signe relatives à deux p-èdres sont différentes si non leur région interne ne serait pas distincte. (Il suffirait de changer l'orientation des vecteurs pour lesquels les signes sont tous négatifs pour obtenir une contradiction). Or il y a 2^p suites de signes différents et 2^p régions : donc à toute suite de p signes correspond une région et inversement. En particulier il existe une suite de p signes tous positifs. Il en résulte que l'espace E_p est bien couvert par l'ensemble des régions internes aux 2^p p-èdres, et que $\vec{\alpha}$ est dans une région bien déterminée.

Nombre de conditions auxquelles satisfont les éléments de la matrice $\|r^{hk}\|$ *cas de réduction.* Lorsqu'on écrit que tous les mineurs diagonaux de la matrice $\|r^{hk}\|$ sont positifs on obtient $(2^p - 1)$ conditions car

$$C_p^1 + C_p^2 \cdots + C_p^k + \cdots + C_p^p = 2^p - 1.$$

Ces $(2^p - 1)$ conditions portent sur les p^2 éléments de la matrice. On peut mentionner deux cas simples où il y a réduction de ce nombre de conditions. Considérons pour cela un vecteur $\vec{\alpha}$ de E_p dont nous désignerons les coordonnées par x_i et par X_i respectivement par rapport aux deux bases

$$\vec{a}^1, \vec{a}^2, \ldots \vec{a}^p \qquad \text{et} \qquad \vec{A}^1, \vec{A}^2, \ldots \vec{A}^p$$

$$\vec{\alpha} = \sum_{i=1}^{p} x_i \vec{a}^i \qquad \vec{\alpha} = \sum_{i=1}^{p} X_i \vec{A}^i$$

le fait que les régions internes aux deux p-èdres formés par ces deux séries de vecteurs sont distinctes se traduit par une des inégalités

$$x_1 X_1 < 0, \ \ldots \ x_k X_k < 0 \ \ldots \ x_p X_p < 0.$$

Considérons alors la forme bilinéaire $\psi(x, X) = \sum_{i=1}^{p} x_i X^i$ qui engendre la forme quadratique $\psi(X) = \frac{1}{2}(r^{hk} + r^{kh}) X^h X^k$ puisque $\|x\| = \|-r^{hk}\|^* \|X\|$, $\|-r^{hk}\|^*$ désignant la transposée de $\|-r^{hk}\|$.

On a donc l'identité $\sum_{i=1}^{p} x_i X_i \equiv -\psi(X)$.

Il en résulte que si la forme $\psi(X)$ est toujours définie positive dans E_p une des inégalités $x_1 X_1 < 0, \ \ldots \ x_p X_p < 0$ est sûrement satisfaite. Le fait que la forme soit toujours définie positive dans E_p étant indépendant de la base choisie, on peut prendre pour bases deux systèmes de p-èdres quelconques ce qui montre que les régions internes à ces deux p-èdres n'ont pas de domaine commun à p dimensions. D'où les deux cas simples

1^er^ *cas :* La forme quadratique $\psi = \frac{1}{2}(r^{hk} + r^{hk}) X_h X_k$ est définie positive.

2° *cas* : La matrice $\|r^{hk}\|$ est symétrique et la forme ψ associée est définie positive.

Dans ces deux cas les $(2^p - 1)$ conditions se réduisent à p conditions qu'on obtient en exprimant qu'une chaîne de mineurs emboîtés de $\|r^{hk}\|$ sont tous positifs.

§ III. — Étude des cas $(i(\mathrm{E}).da^k) = 0$.

Dans toute l'étude précédente nous n'avons pas envisagé le cas où le vecteur $\vec{\alpha}$ se trouve dans le domaine intérieur d'un des 2^p p-èdres, puique nous avons supposé au paragraphe I $(i(\mathrm{E}).da^k)_0 \neq 0$ pour tout k de 1 à p. Il est aisé de voir ce qui arrive lorsque $\vec{\alpha}$ est plus généralement dans un domaine à k dimensions $(k < p)$ commun à 2^k p-èdres.

Envisageons d'abord le cas particulier où $\vec{\alpha} = 0$ dans E_p c'est-à-dire $(i(\mathrm{E})da^k)_0 = 0$ pour k variant de 1 à p. La formule (V, 2) montre que si les $(i(\mathrm{E}).da^k)_0^{(n+1)}$ sont les premières dérivées non nulles pour tout k de 1 à p, d'une part pour un ordre inférieur à n les λ_h ainsi que toutes leurs dérivées jusqu'à l'ordre $(n-1)$ inclus sont nuls en M_0, d'autre part que la première dérivée non nulle des a^k est d'ordre $(n+1)$. Il en résulte

$$(a^k)_0^{(n+1)} - (\lambda_h)^{(h)}(i(e^h).da^k)_0 = (i(\mathrm{E}).da^k)_0^{(n+1)}$$

ou
$$(a^k)_0^{(n+1} - r^{hk}(\lambda_h)_0^{(n)} = (i(\mathrm{E}).da^k)_0^{(n+1)}.$$

En interprétant cette relation dans l'espace vectoriel $\mathrm{E_P}$ on voit que la discussion des éventualités s'effectue au moyen du même jeu de vecteurs $\vec{a}^1, \ldots \vec{a}^p, \vec{\mathrm{A}}^1 \ldots \vec{\mathrm{A}}^p$ que précédemment. On détermine $(a^k)_0^{(n+1)}, (\lambda_h)_0^{(n)}$ au moyen du vecteur $\vec{\alpha}$ défini par ses composantes $(i(\mathrm{E}).da^k)_0^{(n+1)}$.

Cas général. — Si $\vec{\alpha}$ appartient au domaine commun à 2^k p-èdres $(k < p)$ ce qui signifie que $(i(\mathrm{E}).da^h)_0 = 0$ pour k valeurs de h, il suffit de décomposer $\vec{\alpha}$ en $\vec{\alpha}_k$ appartenant à E_k espace commun aux 2^k p-èdres, et en $\vec{\mathrm{C}}_{\alpha k}$ appartenant à l'espace complémentaire de E_k par rapport à $\mathrm{E_P}$.

$$\vec{\alpha}_k = \mathrm{X}_{i_1}\vec{\mathrm{A}}^{i_1} + \cdots + \mathrm{X}_{i_q}\vec{\mathrm{A}}^{i_q} + x_{i_{q+1}}\vec{a}^{i_{q+1}} \ldots + x_{i_k}\vec{a}^{i_k}$$
$$\vec{\mathrm{C}}_{\alpha k} = x_{i_{k+1}}\vec{a}^{i_{k+1}} \cdots + x_{i_p}\vec{a}^{i_p}.$$

Comme par hypothèse

$$X_{i_1}=0, \quad \ldots \quad X_{iq}=0, \quad x_{iq+1}=0, \quad \ldots \quad x_{ik}=0, \quad \vec{\alpha}_k=0$$

on est ramené au cas précédent. Il suffit de prendre pour composantes de α_k les premières dérivées non toutes nulles de $(i(E).da^h)^{(n+1)}$ pour $h(i_1$ à $i_k)$. Si dans E_k certaines d'ordre $(n+1)$ sont simultanément nulles on considérerait un sous-espace de E_k.

§ IV. — Interprétation mécanique des résultats précédents.

De toute l'étude précédente résulte le théorème suivant :

THÉORÈME IV. — *Quand un système mécanique* S *est astreint à* p *liaisons de classe* U, $a^h(p_i, q^i, t)=0$, $\Omega=\lambda_h l_i^h dq^i \wedge dt$, $a^h>0$, $\lambda_h>0$, *si les conditions initiales satisfont aux équations* $a^h(p_i^0, q_0^i, t^0)=0$, *il y a* 2^p *éventualités possibles. La condition nécessaire et suffisante d'unicité des mouvements est que tous les mineurs diagonaux qu'on puisse extraire de la matrice produit* A. L *soient positifs*

$$\left(A=\left\|\frac{\partial a^h}{\partial p_i}\right\|, \qquad L=\|l_i^h\|\right).$$

Application aux liaisons d'Appell. — Dans les liaisons d'Appell qui (cf. chapitre II, § V) sont de puissance nulle et comprennent comme cas particulier les liaisons holonomes et linéairement non holonomes classiques la matrice $\|r^{hk}\|$ est symétrique. En effet pour de pareilles liaisons $l_i^h=\dfrac{\partial a^h}{\partial \dot q^i}$. La matrice $\|r^{hk}\|$ étant le produit des deux matrices A et L avec $A=\left\|\dfrac{\partial a^h}{\partial p_i}\right\|$, $L=\|l_i^h\|$ il résulte de

$$\frac{\partial a^h}{\partial p_i}=\frac{\partial a^h}{\partial \dot q^j}\cdot\frac{\partial \dot q^j}{\partial p^i}=l_j^h g^{ji}$$

que dans le cas des liaisons d'Appell $A=L^*.G$, en désignant par L^* la matrice transposée de L et par G la matrice symétrique $\|g^{ji}\|$.

La relation $\|r^{hk}\|=A.L=L^*G.L$ montre que $\|r^{hk}\|$ est symétrique. Il résulte alors du théorème IV et du deuxième cas de réduction des conditions signalé à la fin du paragraphe III le théorème suivant :

THÉORÈME V. — *Pour un système mécanique* S *astreint à* p *liaisons* *d'une part de classe* U *et d'autre part du type d'Appell, les conditions initiales sont suffisantes pour déterminer le mouvement ultérieur.*

Autres types de liaisons. — Pour les autres types de liaisons les conditions initiales peuvent ne pas être suffisantes pour déterminer le mouvement ultérieur si les mineurs diagonaux de la matrice $\|r^{hk}\|$ ne sont pas tous positifs. C'est ce qui se produit en particulier dans les systèmes de solides en contact avec frottement quand les vitesses de glissement aux différents points de contact ne sont pas nuls. Dans les cas d'indétermination il est nécessaire d'adjoindre aux conditions initiales des conditions équivalentes à $\frac{da^h}{dt} \neq 0$, $\lambda_h \neq 0$ pour préciser le mouvement ultérieur.

§ V. — Liaisons dont l'expression de la puissance peut dépendre de l'existence ou de la rupture d'autres liaisons.

Dans ce qui précède nous nous sommes occupés de liaisons du type $a^h = 0$, $\lambda_h e^h$ le champ e^h étant connu à priori et par conséquent indépendant de l'existence ou de la rupture d'autres liaisons. La discussion des éventualités pouvant se présenter dans le cas de solides en contact avec frottement, les vitesses de glissement étant nulles à l'instant initial, conduit à envisager des liaisons dont l'expression de la puissance peut varier suivant l'existence ou la rupture d'autres liaisons et par conséquent dont le champ de liaison e^h dépend d'autres liaisons. Pour simplifier envisageons un corps solide à plan de symétrie permanent, en contact avec la droite d'intersection de ce plan de symétrie avec un plan fixe perpendiculaire. Si u et w sont les composantes de la vitesse du point de contact du solide avec le plan ;

a) le contact avec roulement sans glissement se traduit par deux liaisons de puissance nulle $w = 0$, $P_2 = \mu w$; $u = 0$. $P_1 = \lambda u$.

b) la cessation de contact se traduit par $\frac{dw}{dt} > 0$, $\mu = 0$, elle entraîne aussi $\lambda = 0$; la puissance de la liaison $u = 0$, dépend donc de la réalisation ou de la rupture de la liaison w.

c) le glissement naissant $\left(w_0 = 0,\ u_0 = 0,\ \frac{dw}{dt} = 0,\ \frac{du}{dt} \neq 0\right)$

modifie la puissance P_2 qui devient $P_2 = \mu(w + \varepsilon f u)$ avec $\varepsilon \frac{du}{dt} < 0$, $\varepsilon = \pm 1$; la puissance P_2 dépend donc du fait que $\frac{du}{dt}$ est positif, négatif ou nul, c'est-à-dire de la rupture ou de la réalisation de la liaison u.

Pour un ensemble de solides dépendant de $2n$ paramètres position, vitesse ayant p contacts entre eux, l'examen des éventualités possibles à l'instant t_0, dans le cas où les vitesses de glissement aux p contacts sont nulles à t_0, bien que non susceptible de revêtir une forme géométrique aussi simple que celle envisagée ci-dessus, peut s'effectuer de la manière suivante. Ayant choisi p trièdres mobiles tri-rectangles $P_h x^h y^h z^h$ de sommets respectifs P_h point du h^e contact, l'axe $P_h z^h$ étant orienté suivant la normale commune, il est avantageux de commencer par écrire le système d'équations permettant de déterminer les roulements sans glissement et les cessations de contact.

Les conditions de roulement sans glissement au h^e contact se traduisent par

$$\begin{array}{lll} u^h = 0 & v^h = 0 & w = 0 \\ P = X^h u^h & P = Y^h v^h & P = Z^h w^h \end{array}$$

Les roulements sans glissement aux p contact constituent $3p$ liaisons de puissance nulle. D'après notre théorie nous devons les supposer compatibles ce qui permet toujours de choisir pour paramètres les $3p$ quantités u^h, v^h, w^h. Les conclusions du § IV nous indiquent qu'il existe une forme quadratique des $3p$ composantes des réactions et que $3p$ des équations peuvent toujours se mettre sous la forme

$$\text{I}\ \begin{cases} \dfrac{du^h}{dt} - \dfrac{\partial\varphi}{\partial X^h} = \alpha^h \\ \dfrac{dv^h}{dt} - \dfrac{\partial\varphi}{\partial Y^h} = \beta^h \qquad h(1 \text{ à } p) \\ \dfrac{dw^h}{dt} - \dfrac{\partial\varphi}{\partial Z^h} = \gamma^h \end{cases}$$

dont les seconds membres sont indépendants des éventualités.

Ces équations indiquent immédiatement les contacts qui se rompent $\frac{dw^h}{dt} > 0$ et les roulements sans glissement acceptables en écrivant $\frac{du^h}{dt} = \frac{dv^h}{dt} = \frac{dw^h}{dt} = 0 \quad z^h > 0, \quad (X^h)^2 + (Y^h)^2 < (f_h Z^h)^2$ f_h coefficient de frottement au h^e contact.

Glissement naissant aux p contacts. — Pour envisager l'hypothèse de tous les glissements naissants il suffit de remplacer dans les équations précédentes $\frac{du^h}{dt}$ par $\frac{d\rho^h}{dt}\cos\sigma_h$, $\frac{dv^h}{dt}$ par $\frac{d\rho^h}{dt}\sin\sigma_h$, $\frac{dw^h}{dt}$ par o, X^h par $-f_h Z^h \cos\sigma_h$, Y^h par $-f_h Z^h \sin\sigma_h$, ρ^h et σ_h étant les coordonnées polaires de la vitesse de glissement au h^e contact par rapport aux axes $P_h x^h y^h$. On obtient ainsi le système

$$\mathrm{II}\left\{\begin{array}{ll} 1. & \dfrac{d\rho^h}{dt} - \dfrac{\partial\varphi}{\partial X^h}\cos\sigma_h - \dfrac{\partial\varphi}{\partial Y^h}\sin\sigma_h = \alpha^h\cos\sigma_h + \beta^h\sin\sigma_h \\ 2. & -\dfrac{\partial\varphi}{\partial X^h}\sin\sigma_h + \dfrac{\partial\varphi}{\partial Y^h}\cos\sigma_h = \alpha^h\sin\sigma_h - \beta^h\cos\sigma_h \\ 3. & -\dfrac{\partial\varphi}{\partial Z^h} = \gamma^h. \end{array}\right.$$

Les équations (II, 3) déterminent les Z^h en fonction des σ^h. Les équations (II, 2) déterminent les σ_h au moyen d'un système d'équations trigonométriques.

Les équations (II, 1) déterminent les $\frac{d\rho^h}{dt}$; les valeurs trouvées sont acceptables si $Z^h > 0$ $\frac{d\rho^h}{dt} > 0$.

Remarque. — On peut une fois la détermination des angles σ_h effectuée par le calcul discuter les signes des Z^h, $\frac{d\rho^h}{dt}$ en utilisant une représentation vectorielle analogue à celle utilisée au § II de ce chapitre, puisque dans ces conditions les directions des champs de liaisons sont connues.

Cas du glissement naissant en k contacts, roulement sans glissement aux $(p-k)$ autres contacts. — On peut supposer que le glissement naissant a lieu aux k premiers contacts. On déduit de I par une méthode semblable à la précédente le système III

$$\mathrm{III}\left\{\begin{array}{ll} \left.\begin{array}{ll} 1. & \dfrac{d\rho^h}{dt} - \dfrac{\partial\varphi}{\partial X^h}\cos\sigma_h - \dfrac{\partial\varphi}{\partial Y^h}\sin\sigma_h - \alpha^h\cos\sigma_h + \beta^h\sin\sigma_h \\ 2. & -\dfrac{\partial\varphi}{\partial X^h}\sin\sigma_h + \dfrac{\partial\varphi}{\partial Y^h}\cos\sigma_h = \alpha^h\sin\sigma_h - \beta^h\cos\sigma_h \\ 3. & -\dfrac{\partial\varphi}{\partial Z^h} = \gamma^h \end{array}\right\} h(1 \text{ à } k) \\ \begin{array}{ll} 4. & -\dfrac{\partial\varphi}{\partial X^h} = \alpha^h, \quad -\dfrac{\partial\varphi}{\partial Y^h} = \beta^h, \quad -\dfrac{\partial\varphi}{\partial Z^h} = \gamma^h \qquad h(k \text{ à } 3p-3k). \end{array} \end{array}\right.$$

Les réactions en nombre égal à $3p - 3k - k$ sont déterminées par les $3p - 3k - k$ dernières équations en fonction des σ_h. Les k équations (III, 2) déterminent les σ_h. Les $\frac{d\rho^h}{dt}$ sont déterminés par les k équations (III, 1). On peut envisager ensuite les $2p$ conditions de validité $\frac{d\rho^h}{dt} > 0$, $Z^h > 0$, $(X^h)^2 + (Y^h)^2 < (f_h Z^h)^2$ (dans ces dernières h varient de $k + 1$ à p).

Nous nous bornerons à ces généralités, notre but ayant été de montrer que notre méthode permettait d'ordonner une discussion assez délicate.

CHAPITRE VI

ÉTUDE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DE LA MÉCANIQUE CONSIDÉRÉES COMME CARACTÉRISTIQUES D'UNE FORME DE DEGRÉ 2 DÉFINIE SUR UNE VARIÉTÉ DIFFÉRENTIABLE V_{2n+1}.

Nous nous proposons de montrer dans ce chapitre, comment le point de vue qui consiste à envisager le système Σ des équations différentielles du mouvement d'un système mécanique comme caractéristiques d'une forme Ω de degré 2 définie sur une variété indéfiniment différentiable V_{2n+1}. permet de connaitre la structure du sous-module des fonctions solutions de Σ.

Les applications pratiques se déduisent aisément de là, cas d'intégrabilité en particulier.

Pour faire cette étude il est avantageux d'envisager les opérateurs, différentielle, transformation infinitésimale, anti-dérivation à un point de vue signalé par M. H. Cartan [22]. Le paragraphe suivant est extrait de son exposé.

§ I. — Définition et propriétés des opérateurs.

Algèbres graduées. — A étant une algèbre associative sur un anneau commutatif K ayant un élément unité, une structure graduée est définie par la donnée des sous-espaces vectoriels homogènes de degré p $A^p (p \geqslant 0)$ tels que l'espace vectoriel A soit somme directe des A^p, et que le produit d'un élément de A^p et d'un élément de A^q soit un élément de A^{p+q}.

Endomorphisme de degré r. — Un endomorphisme [23] de la struc-

[22] Cf. M. H. Cartan, *Colloque de topologie de Bruxelles 1950*, Masson, Paris.
[23] Cf. N. Bourbaki, *Algèbre*, chap. 1, § 4, p. 49, Paris, Hermann, 1942.

ture vectorielle de A est dit de degré r, s'il applique A^p dans A^{p+r} pour chaque p,

Produits et compositions d'endomorphismes. — λ et μ étant deux endomorphismes de degré respectifs r et r', on appelle produit de ces deux endomorphismes pris dans l'ordre λ, μ, l'endomorphisme $\mu\lambda$ de degré $r+r'$ (l'opération étant effectuée de droite à gauche).

Ce produit n'est généralement pas communicatif. La considéra- des deux endomorphismes $\mu\lambda$ et $\lambda\mu$ conduit à deux nouveaux endomorphismes

1° le composé symétrique $\lambda\mu+\mu\lambda$

2° le composé antisymétrique $\lambda\mu-\mu\lambda=[\lambda, \mu]$ appelé crochet des endomorphismes λ, μ.

Endomorphismes particuliers. — 1° *Dérivation*. On appelle dérivation tout endomorphisme θ de A de degré pair qui vis-à-vis de la multiplication dans A jouit de la propriété

$$\theta(a.b)=\theta(a).b+a.\theta(b)$$

si A possède un élément unité I, $\theta(I)=0$.

2° *Antidérivation*. On appelle antidérivation tout endomorphisme ∂ de A de degré impair qui vis-à-vis de la multiplication dans A, pour $a \in A^p$, $b \in A^q$ possède la propriété

$$\partial(a.b)=\partial(a).b+(-1)^p a.\partial b.$$

En outre $\partial(I)=0$.

Composition de dérivation et d'antidérivation. — On vérifie comme conséquence des deux définitions précédentes

1° que le crochet de deux dérivations $[\theta_1, \theta_2]$ est une dérivation.

2° que le crochet $[\theta, \partial]$ d'une dérivation et d'une antidérivation est une dérivation.

3° que le composé symétrique $\partial_1\partial_2+\partial_2\partial_1$ de deux antidérivations est une dérivation.

4° que le carré d'une antidérivation est une dérivation.

Différentielle et Algèbre extérieure. — Définition. On appelle différentielle d l'antidérivation de degré $+1$, qui possède de plus la propriété $d.d=0$.

Relativement à l'antidérivation d il existe une algèbre graduée, appelée Algèbre extérieure dont le module unitaire A^1 est formée par les différentielles des fonctions de l'anneau K, A^0 étant identifié à l'anneau d'opérateurs K, les fonctions étant envisagées comme des formes différentielles de degré o.

Opérateurs $i(x)$ et $\theta(x)$ de M. H. Cartan sur une variété différentiable. — Dans les applications que nous avons en vue aux variétés indéfiniment différentiables, les champs de vecteurs tangents constituent un module T sur l'anneau K des fonctions numériques indéfiniment différentiables. T′ dual de T est le module des formes différentielles de degré 1. A(T′) algèbre extérieure du module T′ est l'algèbre extérieure des formes différentielles de tous les degrés.

Opérateur $i(x)$. — L'algèbre A(T′) étant engendrée au sens multiplicatif par ses éléments de degré o et 1 une antidérivation est déterminée lorsqu'elle est connue sur les sous-espaces A^0 et A^1.

Tout $x \in T$ définit une antidérivation de degré -1 de l'algèbre A(T′) appelée produit intérieur par x. nulle sur A^0, qui sur A^1 se réduit au produit scalaire définissant la dualité entre T et T′.

Remarque. — L'opérateur $i(x)$ est de carré nul car $i(x) . i(x)$ est une dérivation nulle sur A^0 et sur A^1 donc nulle partout.

Opérateur $\theta(x)$. — Tout $x \in T$ définit une dérivation de degré o, composée symétrique des antidérivations d et $i(x)$.

$$\text{(VI. 1)} \qquad \theta(x) = i(x) . d + d . i(x).$$

Opérateur $\varepsilon(x)$. — Tout $x \in T$ définit un endomorphisme de degré o, crochet des antidérivations d et $i(x)$.

$$\text{(VI, 2)} \qquad \varepsilon(x) = [d,\ i(x)] = d . i(x) - i(x) . d.$$

Remarques. — 1° $\Omega \in A(T')$, $\theta(x)\Omega$ est la transformée infinitésimale de Ω par $\theta(x)$ d'où le nom de transformation infinitésimale donnée à l'opérateur $\theta(x)$.

2° Les opérateurs θ et d commutent.

3° Les opérateurs ε et d anticommutent.

4° n applications successives de $\theta(x)$ donne

$$\theta^{(n)}(x) = (i(x) . d)^{(n)} + (d . i(x))^{(n)}.$$

En particulier appliqué à une fonction f de l'anneau K la formule précédente donne

$$\theta^{(n)}(x) f = (i(x)\, df)^{(n)}$$

Endomorphismes relatifs à deux champs. — Relativement à deux champs de vecteurs tangents x, y correspondent des endomorphismes, dérivation et antidérivation parmi lesquels nous explicitons ceux qui nous serons utiles.

1° Le produit des endomorphismes $i(y)\ i(x)$ est un endomorphisme de degré — 2. Par suite de l'associativité du produit extérieur

$$i(y)i(x) = i(y \wedge x).$$

L'endomorphisme précédent applique une forme de degré 2 dans A^0. Si $\Omega = k_{ij}\, dx^i \wedge dx^j$ (k_{ij} tenseur antisymétrique)

$$i(y \wedge x)\Omega = k_{ij}(x^i y^j - x^j y^i) = \sum_{ij=0}^{2n} k_{ij} \begin{vmatrix} x^i & x^j \\ y^i & y^j \end{vmatrix}.$$

C'est le produit intérieur gauche de $y \wedge x$ et de Ω.

2° Le crochet d'une dérivation $\theta(x)$ de degré 0 et d'une antidérivation $i(y)$ de degré — 1 étant une antidérivation de degré — 1, on est conduit à considérer l'antidérivation relative à un champ composé avec x, y noté $[x, y]$ crochet de Lie. Cette notation se justifie car cette antidérivation est nulle sur A^0, et sur A^1 relativement à l'élément df se réduit à $i([x, y])\, df$ d'où la formule

$$\text{(VI, 3)} \quad [\theta(x),\ i(y)] = \theta(x)i(y) - i(y)\theta(x) = i([x,\ y]).$$

3° Considérons les deux endomorphismes $\theta(x) . i(y)$ et $i(x) . \theta(y)$. Leur différence donne un nouvel endomorphisme

$$\begin{aligned} \theta(x)i(y) &= i(x)\, di(y) + di(x) . i(y) \\ i(x)\theta(y) &= i(x)i(y)\, d + i(x) . d . i(y) \\ \theta(x)\, i(y) - i(x)\theta(y) &= di(x \wedge y) - i(x \wedge y)d \end{aligned}$$

Considérons l'endomorphisme $\varepsilon(x \wedge y)$ relatif à l'élément composé $x \wedge y$

$$\text{(VI, 4)} \quad \theta(x)i(y) - i(x)\theta(y) = \varepsilon(x \wedge y) = di(x \wedge y) - i(x \wedge y)d.$$

4° De (VI, 3) par permutation de x et y on obtient (VI, 3')

$$\text{(VI, 3')} \quad [\theta(y),\ i(x)] = \theta(y)i(x) - i(x)\theta(y) = i([y,\ x]).$$

En retranchant (VI, 3') de (VI, 4) on obtient compte tenu de $[y, x] = -[x, y]$

$$\text{(VI, 5)} \quad \theta(x)i(y) - \theta(y)i(x) = \varepsilon(x \wedge y) + i([x,\ y]).$$

5° Le crochet de deux dérivations $\theta(x)$, $\theta(y)$ de degré 0 étant une dérivation de degré o, la dérivation correspondante est la dérivation relative au crochet de Lie $[x, y]$.

Par application de (VI, 1)

$$\theta(x)\theta(y) = \theta(x)[i(y)d + di(y)]$$
$$\theta(y)\theta(x) = \theta(y)[i(x)d + di(x)].$$

En tenant compte de la permutabilité des opérateurs θ et d

$$\begin{aligned}[\theta(x), \theta(y)] &= \theta(x)\theta(y) - \theta(y)\theta(x) \\ &= [\theta(x)i(y) - \theta(y)i(x)] \cdot d + d \cdot [\theta(x)i(y) - \theta(y)i(x)].\end{aligned}$$

La formule (VI, 5) permet de transformer le second membre

$$[\theta(x), \theta(y)] = [\varepsilon(x \wedge y) + i([x, y])]d + d[\varepsilon(x \wedge y) + i([x, y])]$$

or $\varepsilon(x \wedge y)d + d\varepsilon(x \wedge y) = 0$ conséquence de (VI, 4) ou de l'anticommutativité des opérateurs ε et d. Le second membre se réduit donc à $i([x, y])d + di([x, y])$ qui d'après (VI, 1) n'est autre que $\theta([x, y])$ d'où

(VI, 6) $$[\theta(x), \theta(y)] = \theta([x, y]).$$

L'opérateur θ opère donc non seulement sur T′ et A(T′) mais aussi sur T, le champ transformé de y par $\theta(x)$ se notant $[x, y] = \theta(x) \cdot y$.

§ II. — Étude du système d'équations différentielles Σ caractéristiques de Ω.

Soit la forme $\Omega = k_{ij}\, dx^i \wedge dx^j$, i et j variant de o à $2n$, k_{ij} composantes d'un tenseur antisymétrique, fonctions de l'anneau K. Nous désignons par Σ le système des caractéristiques de Ω.

Définition. — On appelle champ caractéristique E associé à Ω l'élément de T tel que

$$i(E)\Omega = 0.$$

Par hypothèse la forme est de rang $2n (\Omega^n \neq 0)$. Le champ E n'est donc défini par l'équation précédente qu'à un facteur fonction numérique près, ses $(2n + 1)$ composantes étant proportionnelles aux $(2n + 1)$ déterminants mineurs d'ordre $2n$ extraits de la matrice

$$\left\| \begin{matrix} 0 & k_{12} & & k_{12n} & k_{10} \\ k_{21} & 0 & \ldots & k_{22n} & k_{20} \\ \vdots & & & & \\ k_{2n1} & & \ldots & 0 & k_{2n0} \end{matrix} \right\|$$

Il est avantageux de choisir le facteur de proportionnalité, comme nous l'avons vu au chapitre I, § III, tel que $i(\mathrm{E})\,dt = 1$.

Théorème I. — *A tout $x \in \mathrm{T}$ correspond une forme de Pfaff π nulle sur les lignes intégrales de Σ; réciproquement à toute forme de Pfaff nulle sur les lignes intégrales de Σ correspond un $x \in \mathrm{T}$ modulo* E.

$$i(x)\Omega = \pi$$

$$i(x)i(\mathrm{E})\Omega = - i(\mathrm{E})i(x)\Omega$$

comme $$i(\mathrm{E})\Omega = 0, \qquad i(\mathrm{E})\pi = 0$$

ce qui montre que π appartient au sous-module des formes caractéristiques de Ω, donc π est nulle sur les lignes intégrales de Σ.

Réciproquement si une forme de Pfaff est nulle sur les lignes intégrales de Σ, $i(\mathrm{E})\pi = 0$. La forme π appartient au sous-module des formes caractéristiques de Ω, il existe donc x modulo E tel que $i(x)\Omega = \pi$.

Intégrale première de Σ. — Nous appellerons dorénavant intégrale première de Σ toute forme de Pfaff fermée nulle sur les lignes intégrales de Σ.

Cette définition se justifie car une telle forme n'est pas toujours la différentielle d'une fonction de l'anneau K définie sur V_{2n+1}, mais l'est seulement d'une fonction définie seulement sur un voisinage de V_{2n+1}. En termes précis tout point de V_{2n+1} appartient à un voisinage U tel que la restriction de la forme à U est la différentielle d'une fonction définie sur U.

A toute forme fermée $\bar{\pi}$ de degré 1 nulle sur les lignes intégrales de Σ correspond $\bar{x} \in \mathrm{T}$, modulo E dont les $(2n+1)$ composantes sont $(2n+1)$ fonctions solutions d'un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre linéaire

$$(\mathrm{VI},\ 7) \qquad d\big(i(\bar{x})\Omega\big) = 0.$$

Transformations infinitésimales de Σ. — *Définition.* — Un élément quelconque ω^p de degré p de $\mathrm{A}(\mathrm{T}')$ est dit admettre une transformation infinitésimale engendrée par $\mathrm{X} \in \mathrm{T}$, si l'opérateur $\theta(\mathrm{X})$ appliqué à ω^p la transforme en le zéro de l'espace des formes

$$\theta(\mathrm{X})\omega^p = 0.$$

En particulier si Ω de degré 2 admet la transformation infinitésimale définie par $\theta(\mathrm{X})$ il en est de même du système différentiel Σ. Remarquons que les $(2n+1)$ composantes du champ X générateur de transformations infinitésimales pour Ω sont solutions d'un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre (VI, 8)

$$\text{(VI, 8)} \qquad \theta(X)\Omega = i(X)\,d\Omega + di(X)\Omega = 0.$$

V. — ÉTUDE DU CAS $d\Omega = 0$.

La comparaison de (VI, 7) et de (VI, 8) montre que si $d\Omega = 0$ les systèmes d'équations aux dérivées partielles définissant les transformations infinitésimales et les champs x générateurs d'intégrales premières sont les mêmes. D'où le théorème.

Théorème II. — *A tout* X *générateur d'une transformation infinitésimale correspond une intégrale première et réciproquement*

Exemple. — Soit $\Omega = dp_i \wedge dq^i - dH \wedge dt$. Cherchons à quelle condition Ω admet la transformation infinitésimale définie par l'opérateur $\theta(t)$

$$\theta(t)\Omega = d\left(dH - \frac{\partial H}{\partial t}\,dt\right) = 0, \qquad \text{donc} \qquad d\left(\frac{\partial H}{\partial t}\,dt\right) = 0,$$

ce qui montre que $\dfrac{\partial H}{\partial t}$ doit être une fonction de la seule variable t soit $V'(t)$. A cette transformation infinitésimale correspond une intégrale première

$$H - V(t) = h$$

C'est l'intégrale de Painlevé $T_2 - T_0 - U - V(t) = h$.

Dans le cas particulier $\dfrac{\partial H}{\partial t} \equiv 0$ c'est l'intégrale des forces vives classiques.

Conséquence du théorème précédent. — Le sous-module des champs de vecteurs tangents à la variété V_{2n+1} générateurs de transformations infinitésimales pour Σ correspond par dualité par rapport à Ω au sous-module des intégrales premières.

Soient deux champs X, Y générateurs de transformations infinitésimales pour Ω.

$$\theta(X)\Omega = 0 = di(X)\Omega \qquad i(X)\Omega = \pi$$
$$\theta(Y)\Omega = 0 = di(Y)\Omega \qquad i(Y)\Omega = \sigma$$

Si $[X, Y] \neq 0$ il correspond au crochet de Lie des deux champs une transformation infinitésimale $\theta([X, Y])$ par suite une nouvelle intégrale première

$$\theta([X, Y])\Omega = di([X, Y]) = 0.$$

On obtient son expression en remarquant que dans les hypothèses présente la formule (VI, 3) donne

$$\begin{aligned} i([X, Y])\Omega &= \theta(X)i(Y)\Omega - i(Y)\theta(X)\Omega \\ &= \theta(X)\sigma = i(X)\,d\sigma + di(X)\sigma = di(X \wedge Y)\Omega. \end{aligned}$$

La nouvelle intégrale première est effectivement la différentielle d'une fonction de l'anneau K dont l'expression est

$$\sum_{ji=0}^{2n} k_{ij} \begin{vmatrix} Y^i & Y^j \\ X^i & X^j \end{vmatrix}$$

c'est-à-dire le produit intérieur gauche de $i(X \wedge Y)$ et de Ω.

En particulier si $\Omega = dp_i \wedge dq^i - dH \wedge dt$, et si les formes π et σ sont les différentielles de fonctions f et g de l'anneau K, X solution de $i(X)\Omega = df$ définie modulo $E\left(-\frac{\partial H}{\partial q^i}, \frac{\partial H}{\partial p_i}, 1\right)$ est $X\left(\frac{\partial f}{\partial q^i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}, 0\right)$ d'où

$$i(X \wedge Y)\Omega = \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} \frac{\partial g}{\partial p_i} & \frac{\partial g}{\partial q_i} \\ \frac{\partial f}{\partial p_i} & \frac{\partial f}{\partial q^i} \end{vmatrix}$$

On reconnaît au second membre la parenthèse de Poisson (f, g).

Corollaire. — *Si au champ* X *et* Y *dont le crochet* $[X, Y]$ *est différent de zéro correspondent respectivement les intégrales premières* df *et* dg, *au champ* $[X, Y]$ *correspond une nouvelle intégrale première qui est la différentielle de la parenthèse de Poisson. Au crochet* $[[X, Y], Z]$ *correspond la parenthèse des parenthèses* $((f, g), h)$. *A l'identité des crochets correspond l'identité de Poisson.*

Champ en involution. — Si $[X, Y] = 0$ nous dirons que les deux champs X et Y sont en involution. Les deux intégrales premières correspondantes sont dites en involution.

Théorème III. — *Tout champ* X *générateur d'une transformation infinitésimale pour* Ω *est en involution avec le champ caractéristique* E.

Remarquons que $\theta(E)\Omega = 0$, comme conséquence de $d\Omega = 0$ et de la définition de E, $i(E)\Omega = 0$. Il en résulte que tout élément lié à Ω est appliqué par $\theta(E)$ sur le zéro de l'ensemble correspondant. En particulier le champ X générateur d'une transformation infinitésimale est appliqué sur le zéro de l'espace tangent

$$\theta(E)X = [E, X] = 0.$$

Cas de n champs en involution connus. — Supposons connus n champs en involution $X_1, X_2, \ldots X_n$, deux à deux, générateurs de transformations infinitésimales pour Ω. Il leur correspond n formes de Pfaff $\pi_1, \ldots \pi_n$ fermées, intégrales premières de Σ.

$$i(X_i)\Omega = \pi_i; \qquad i(X_j)\pi_i = 0.$$

Les n champs X_i étant supposés linéairement indépendants, les intégrales π_i sont indépendantes. La forme $\pi = \pi_i \wedge \ldots \wedge \pi_n$ de degré n est différente de 0.

1° Ω appartient au sous-module des n formes $\pi_i \ldots \pi_n$.

q étant un entier

$$i(X_i)\Omega^q = q\pi_i \,.\, \Omega^{q-1}$$

$$\begin{aligned} i(X_j \wedge X_i)\Omega^q &= qi(X_j)\pi_i \wedge \Omega^{q-1} + (-1)q(q-1)\pi_i \wedge \pi_j \wedge \Omega^{q-2} \\ &= (-1)q(q-1)\pi_i \wedge \pi_j \wedge \Omega^{q-2} \end{aligned}$$

pour $q > n$

$$\begin{aligned} i(X_i \ldots X_n)\Omega^q &= (-1)^{n-1}q \ldots (q-n-1)\pi_1 \wedge \ldots \pi_n \wedge \Omega^{q-n} \\ &= (-1)^{n-1}q \ldots (q-n+1)\pi \wedge \Omega^{q-n}. \end{aligned}$$

En prenant $q = n+1$, Ω étant de rang $2n$, $\Omega^{n+1} = 0$, d'où $\pi \wedge \Omega = 0$, équation qui montre que Ω appartient au sous-module des n formes π_i. On peut donc écrire

$$\Omega = \sum_{j=1}^{n} \pi_j \wedge \omega^j.$$

2° Les n formes ω^j sont fermées modulo les n intégrales π_j.

$d\Omega = \sum_{j=1}^{n} \pi_j \wedge d\omega^j$. car les $d\pi_j$ sont nuls. $d\Omega$ étant nulle

$$\sum_{j=1}^{n} \pi_j \wedge d\omega^j = 0.$$

En multipliant les deux membres par $\pi_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{\pi_j} \wedge \ldots \wedge \pi_n$, le signe $\wedge$ placé au-dessus de π_j signifiant que ce terme ne figure pas dans le produit,

$$\pi \wedge d\omega^j = 0$$

équation qui montre que $d\omega^j$ appartient au sous-module des n formes $\pi_1, \ldots \pi_n$ en d'autres termes les n formes ω^j sont fermées sur les sous-variétés définies par les n intégrales premières $\pi_i = 0, \ldots \pi_n = 0$.

THÉORÈME IV. — *Si on connaît n champs deux à deux en involution, générateurs de transformations infinitésimales pour* Ω, *le système* Σ *est intégrable par quadratures.*

Ce théorème n'est que la traduction dans le langage des variétés de celui de Liouville-Cartan.

REMARQUE. — Les formes π_1, π_n, ω^1, ω^n, ne sont des différentielles exactes que localement ou sur un voisinage de V_{2n+1}.

Pour un tel voisinage, on peut calculer les intégrales et les mettre localement sous la forme $r_j = r_j(p_i, q^i, t)$, $s^j = s^j(p_i, q^i, t)$. Sous cette réserve Ω ne s'exprime qu'au moyen des différentielles des intégrales premières

$$\Omega = dr_j \wedge ds^j$$

Ω peut se mettre d'une infinité de façon sous cette forme par une transformation du groupe symplectique infini jouant sur l'ensemble r_1, r_n, $s^1, \ldots s^n$. Les n fonctions $r_1, \ldots r_n$, en involution deux à deux constituent des éléments génériques d'un sous-anneau.

Application. Recherche des cas d'intégrabilité du système Σ caractéristique d'une forme Ω du type $\Omega = dp_i \wedge dq^i - dH \wedge dt$. — Si on sait intégrer Σ on connaît une représentation des intégrales premières $r_j = \text{const.}$, $s^j = \text{const.}$ Ω dont la dérivée extérieure est nulle peut donc se mettre sous la forme $\Omega = dr_j \wedge ds^j$.

Ω peut être considérée de 2^n manières comme la différentielle extérieure d'une forme de Pfaff

$$\text{(VI, 9)} \qquad \omega = \sum_{i=1}^{h} p_i\, dq^i - \sum_{i=1}^{h} q^{n-h+i}\, dp_{n-h+i} - H\, dt.$$

Considérons la forme $\Omega^* = d(\omega + s^j dr_j)$ définie sur une variété V_{4n+1}. Sur les sous-variétés $r^j(p_i, q^i, t) = r_j$, $s^j(p_i, q^i, t) = s^j$, la forme Ω^* est nulle par construction, $\omega + s^j dr_j$ est donc une forme fermée, en écrivant qu'elle est égale à la différentielle d'une fonction $f(q^i, p_{n+h-i}, r_j, t)$, les indices i et j variant respectivement de 1 à h et de 1 à n, on obtient

$$p_i = \frac{\partial f}{\partial q^i} \qquad q^{n-h+i} = -\frac{\partial f}{\partial p_{n-h+i}} \qquad H = -\frac{\partial f}{\partial t} \qquad s^j = \frac{\partial f}{\partial r_j}$$

V_{4n+1} est le produit topologique de V_{2n+1} et d'une variété symplectique Sp_{2n}.

Quand on se donne $f(q^i, p_{n-h+i}, r_j, t)$ telle que le déterminant $\left|\frac{\partial^2 f}{\partial q^i \partial r_j} \cdots \frac{\partial^2 f}{\partial p_{n-h+i}\partial r_j}\right|$ soit différent de zéro, H s'obtient par élimination des r_j entre les équations

$$p_i = \frac{\partial f}{\partial q_i} \qquad q^{n-h+i} = -\frac{\partial f}{\partial p_{n-h+i}} \qquad \mathrm{H} = -\frac{\partial f}{\partial t}$$

Les intégrales premières $r_j = \text{const.}$ sont définies par les n équations implicites

$$p_i = \frac{\partial f}{\partial q_i} \qquad q^{n-h+i} = -\frac{\partial f}{\partial p_{n-h+i}}$$

Les intégrales premières $s^j = \text{const.}$ sont définies modulo $r_j = \text{const.}$ par $s^j = \frac{\partial f}{\partial r_j}$.

Remarque. — 1) Les n fonctions $r_j(p_i, q^i, t)$ sont évidemment en involution puisque $\Omega = dr_j \wedge ds^j$.

2° Se donner la forme df sur les sous variétés

$$p_i = \frac{\partial f}{\partial q^i}, \qquad q^{n-h+i} = \frac{-\partial f}{\partial p_{n-h+i}} \qquad \mathrm{H} = -\frac{\partial f}{\partial t}, \qquad s^j = \frac{\partial f}{\partial r_j}$$

de V_{4n+1} est donc le moyen pratique pour obtenir un ensemble de n fonctions en involution.

3° Deux formes formées ω, ω' du type (VI, 9) n'engendrent des cas d'intégrabilité différents que si les sous-variétés locales $r_j(p_i, q^i, t) = \text{const.}$ correspondant à ces cas d'intégrabilité sont différentes. Ainsi si on écrit que la forme $\omega = p_i dq^i - \mathrm{H}\, dt + s^j\, dr_j$ est fermée sur les sous-variétés p_i fonction de (q^i, r_i) seulement, on obtient le même cas en écrivant que la forme

$$\omega' = -q^i\, dp_i - \mathrm{H}\, dt + s^j\, dr_j$$

est fermée sur les sous-variétés q^i fonction de (r_i, p_i) seulement.

4° Pour que Ω ne soit pas la somme de p formes il faut et il suffit que f ne soit pas la somme de p fonctions f_k dépendant chacune d'un ensemble différent de variables r_j.

Cas de la mécanique. — H doit être une forme quadratique définie positive en p_i.

$\mathrm{H} = \mathrm{A}^{ij} p_i p_j + \mathrm{A}^i p_i + \mathrm{B}$, les A^{ij}, A^i, B étant des fonctions des $(n+1)$ variables q^i, t.

Ce fait nous conduit à la question préliminaire quels sont les changements de variables canoniques qui conservent le degré des variables p_i. Si un changement de variables dans lequel l'homologue de l'ensemble des p est l'ensemble r, conserve le degré d'une relation en p, il est linéaire par rapport aux r et réciproquement. La forme $\Omega = dp_i \wedge dq^i - dH \wedge dt$ devient $\Omega = dr_j \wedge ds^j - dK \wedge dt$. La forme $dp_i \wedge dq^i - dH \wedge dt - dr_j \wedge ds^j + dK \wedge dt$ définie sur une variété V_{4n+1} étant nulle sur les sous-variétés $p_i = p_i(r_j, s^j, t)$, $q^i = q^i(r_j, s^j, t)$ la forme $q^i dp_i + r_j ds^j + H\, dt - K\, dt$ est la différentielle d'une fonction linéaire par rapport aux p_i soit $p_i \varphi^i(s^j, t) + \varphi^0(s^j, t)$ d'où

$$q^i = \varphi^i(s^j, t), \qquad r_j = p_i \frac{\partial \varphi^i}{\partial s^j}, \qquad H - K = p_i \frac{\partial \varphi^i}{\partial t} + \frac{\partial \varphi^0}{\partial t}.$$

Les équations $q^i = \varphi^i(s^j, t)$ montrent que les transformations canoniques cherchées ne sont autres que les transformations du pseudo-groupe ponctuel Q jouant sur les variables (q^i, t).

Il en résulte qu'au point de vue où nous plaçons deux fonctions H ne doivent être considérées comme distinctes que si elles ne se déduisent pas l'une à l'autre par une transformation ponctuelle Q.

Le pseudo-groupe Q transforme également toute intégrale algébrique par rapport aux p_i en une intégrale algébrique de même nature. Si les n fonctions r_j deux à deux en involution sont algébriques par rapport aux p_i, les r_j étant définies au moyen des équations implicites $p_i = \frac{\partial f}{\partial q^i}$, les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial q^i}$ doivent être des fonctions algébriques par rapport aux r_j. On obtient donc simplement certains cas d'intégrabilité en choisissant la forme df à coefficients algébriques par rapport aux r_j.

Remarque. — Il est bien certain que dans l'application pratique de cette méthode on sera limité par le fait que l'on ne sait pas résoudre les équations algébriques. On peut parfois tourner cette difficulté en utilisant une des 2^n formes (VI, 9) donné à l'invariant intégrale ω.

Exemple I. — *n intégrales linéaires en p_i.* — Tout intégrale en p_i de la forme $\alpha^i p_i + \alpha^0 =$ const. les α étant des fonctions de $q^1, \ldots q^n, t)$ peut par une transformation Q se ramener à la forme $\bar{p}_n + \bar{\alpha}^0 =$ const.

Par une transformation Q, $\alpha^i p_i + \alpha^0$ devient $\alpha^i \bar{p}_j \frac{\partial \bar{q}_j}{\partial q^i} + \alpha^0 =$ const.

On peut satisfaire à cette relation en choisissant les $\bar{q}^j$ fonctions de $q^1, \dots q^n, t,$ telles

$$\alpha^i \frac{\partial \bar{q}^j}{\partial q^i} = 0 \qquad \text{pour } j \text{ variant de } 1 \text{ à } n-1 \qquad \alpha^i \frac{\partial \bar{q}^h}{\partial q^i} = 1$$

$\bar{q}^1, \dots \bar{q}^{n-1}$ sont alors $(n-1)$ intégrales distinctes du système (t jouant le rôle d'un paramètre)

$$\frac{dq^1}{\alpha^1} = \dots = \frac{dq^n}{\alpha^n}$$

$\bar{q}^n$ est une solution du système

$$\frac{dq^1}{\alpha^1} = \dots = \frac{dq^n}{\alpha^n} = \frac{d\bar{q}^n}{1}$$

s'obtenant au moyen d'une quadrature en tenant compte des $(n-1)$ intégrales précédentes.

Par une transformation Q une intégrale linéaire par rapport aux p_i peut se mettre sous la forme

$$p_n + \alpha_0 = r_n$$

la fonction $f(q^i, r_j, t)$ est donc de la forme $f = r_n q^n + g_n + \varphi_n$ dans laquelle g_n est une fonction indépendante de r_n, φ_n une fonction indépendante de q^n. S'il y a n intégrales linéaires par rapport aux p_i, après des transformations Q successives, la fonction f peut donc se mettre sous la forme

$$f = \sum_{i=1}^{n} r_i q^i + g + \varphi$$

dans laquelle g est une fonction de $(q^1, \dots q^n, t)$ indépendante de $r_1, \dots r_n$, φ une fonction de $t, r_1, \dots r_n$.

$H = -\frac{\partial g}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial t}$ devant être quadratique par rapport aux p_i, puisqu'on passe des p_i aux r_i par la substitution linéaire

$$p_i = \frac{\partial g}{\partial q_i} + r_i,$$

$-\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ doit être une forme quadratique par rapport à $r_1, \dots r_n$.

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{1}{2}(A^{ij} r_i r_j + A^{i0} r_i + A^{00}) \qquad \varphi = -\frac{1}{2}\int (A^{ij} r_i r_j + A^{i} r_i + A^{00})\, dt$$

La forme réduite de H par Q est donc

$$2H = A^{ij}\left(p_i - \frac{\partial g}{\partial q^i}\right)\left(p_j - \frac{\partial g}{\partial q^j}\right) + A^{i0}\left(p_i - \frac{\partial g}{\partial q^i}\right) + A^{00} - 2\frac{\partial g}{\partial t}$$

les A^{ij}, A^i, A^{00} étant des fonctions de la seule variable t, g une fonction arbitraire de $q^1, \ldots q^n$, t. D'où le théorème

Théorème. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait n intégrales linéaires en involution est que par une transformation du pseudo-groupe ponctuel* Q H *soit réductible à la forme ci-dessus.*

II. $(n-1)$ intégrales linéaires en p_i, la n^e quadratique en p_i. — D'après le cas précédent la présence des $(n-1)$ intégrales linéaires conduit par des transformations Q successives à mettre f sous la forme

$$f = \sum_{j=1}^{n-1} r_j q^j + g + \varphi$$

dans laquelle g est une fonction des $q^1, \ldots q^n$, t indépendante des $r_1, \ldots r_n$, φ une fonction des $r_1, \ldots r_n$ indépendante des $q^1, \ldots q^{n-1}$. $\left(p_n - \frac{\partial g}{\partial q^n}\right) = \frac{\partial \varphi}{\partial q^n}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial q^n}$ est une fonction de r_n ; l'intégrale r_n devant être quadratique r_n est de la forme

$$r_n = A^{nn}\left(p_n - \frac{\partial g}{\partial q^n}\right)^2 + 2B\left(p_n - \frac{\partial g}{\partial q^n}\right) + C$$

expression dans laquelle B et C sont des fonctions respectivement linéaire et quadratique par rapport aux r_j (j variant de 1 à $n-1$). On en déduit

$$\frac{\partial \varphi}{\partial q^n} = \frac{-B + \sqrt{B^2 - A^{nn}(C - r_n)}}{A^{nn}}$$

H devant être quadratique, comme $H + \frac{\partial g}{\partial t} = -\frac{\partial \varphi}{\partial t}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ doit être une forme quadratique de rang n par rapport aux p_i, quand on remplace les $r_1 \ldots r_n$ par leur valeur. Cette forme quadratique peut toujours s'écrire sous la forme

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \lambda\left(p_n - \frac{\partial g}{\partial q^n}\right)^2 + 2\mu\left(p_n - \frac{\partial g}{\partial q^n}\right) + \nu,$$

expression dans laquelle μ et ν sont respectivement linéaire et quadratique par rapport aux p_j (j variant de 1 à $n-1$). Si on remplace les $p_1 - \frac{\partial g}{\partial q^1}, \dots p_n - \frac{\partial g}{\partial q^n}$, en fonction des $r_1, \dots r_n$. $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ dépend linéairement du radical $\sqrt{B^2 - A^{nn}(c - r_n)}$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = D - \frac{E}{A^{nn}} \sqrt{B^2 - A^{nn}(c - r_n)}$$

L'expression $\frac{\partial \varphi}{\partial q^n} dq^n + \frac{\partial \varphi}{\partial t} dt$ devant être une différentielle exacte quels que soient les r, l'expression $\sqrt{B^2 - A^{nn}(C - r)}\,(dq^n - E\,dt)\frac{1}{A^{nn}}$ doit être elle-même une différentielle exacte. A^{nn} et E ne dépendant que de q^n et de t ($r_1, \dots r_{n-1}$ ne figurant dans E que comme paramètres), si on considère un facteur intégrant Φ de $dq^n - E\,dt$, la transformation particulière $\bar{q}^n = \bar{q}^n(q^n, t)$ montre que

$$\frac{1}{\Phi A^{nn}} \sqrt{B^2 - A^{nn}(C - r_n)}\, d\bar{q}^n$$

ne peut-être une différentielle exacte que si les fonctions figurant sous le radical ne dépendent que de $\bar{q}^n$.

Conséquence. — Par une transformation du pseudo-groupe ponctuel Q on peut toujours se ramener au cas

$$\frac{\partial \varphi}{\partial q^n} = \frac{-\left(\sum\limits_{i=1}^{n-1} A^{ni} r_i + A^n\right) + \sqrt{\left(\sum\limits_{1}^{n-1} A^{ni} r_i + A^n\right)^2 - A^{nn}\left(\sum\limits_{1}^{n-1} A^{ij} r_i r_j + 2\sum\limits_{1}^{n-1} A^i r_i + A^{00} - r_n\right)}}{A^{nn}}$$

les A ne dépendant que de la variable q^n

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{1}{2}\left(\sum_{1}^{n-1} a^{ij} r_i r_j + \sum_{1}^{n-1} a^i r_i + a^{00} + a^n r_n\right)$$

les a ne dépendant que de t.

On en déduit H et l'intégrale quadratique

$$\begin{aligned} 2H = {} & \sum_{1}^{n-1} a^{ij}\left(p_i - \frac{\partial g}{\partial q^i}\right)\left(p_j - \frac{\partial g}{\partial q_j}\right) + \sum_{1}^{n-1} a^i\left(p_i - \frac{\partial g}{\partial q^i}\right) + a^{00} \\ & + a^n\left[\sum_{1}^{n} A^{ij}\left(p_i - \frac{\partial g}{\partial q^i}\right)\left(p_j - \frac{\partial g}{\partial q^i}\right) + 2A^i\left(p_i - \frac{\partial g}{\partial q^i}\right) + A^{00}\right] - 2\frac{\partial g}{\partial t} \end{aligned}$$

$$r_n = \sum_{1}^{n} A^{ij}\left(p_i - \frac{\partial g}{\partial q^i}\right)\left(p_j - \frac{\partial g}{\partial q^i}\right) + 2A^i\left(p_i - \frac{\partial g}{\partial q^i}\right) + A^{00}.$$

Cas particulier. — $g \equiv 0$, les $a \equiv 0$ sauf $a^n = 1$, les $A^i \equiv 0$ on obtient le cas d'intégralité de Delassus.

On peut résumer ce qui précède dans le théorème.

THÉORÈME. — *La condition nécessaire et suffisante pour que le système* Σ *ait une intégrale première quadratique et* $(n-1)$ *intégrales linéaires par rapport aux* p_i *est que* H *soit réductible par le pseudo-groupe ponctuel* Q *à la forme ci-dessus.*

III. h intégrales quadratiques en p_i et $(n-h)$ linéaire en p_i. — Par transformation Q les $(n-h)$ intégrales linéaires peuvent toujours être réduites à la forme $p_i - \frac{\partial g}{\partial q^i} = r_i$ (i, 1 à $n-h$) et df s'écrire

$$df = \sum_1^{n-h} r_i dq^i + dg(q^1, \dots q^n, t) + d\varphi$$

$r_{n-h+1}, \dots r_n$, désignant les h intégrales quadratiques, remarquons que si les α sont des constantes $\sum_{n+h+1}^{n} \alpha^k r_k$ est aussi une intégrale quadratique, φ ne peut donc être qu'une fonction de formes linéaires en $r_{n-h+1}, \dots r_n$ dont les coefficients sont des fonctions des variables $q^{n-h+1}, \dots q, t,$

Or la n^e intégrale quadratique peut toujours se mettre sous la forme

$$r_n = A^{nn} p_n^2 + 2Bp_n + C$$

B et C dépendant de $p_{n-1}, \dots, p_{n-h+1}$. Il en résulte que r_n doit figurer linéairement sous un radical du second degré. φ étant une fonction de formes linéaires des $r_{n+h+1}, \dots, r_n$, il doit en être de même des autres. Par une transformation du groupe ponctuel Q on se ramène au cas où ce radical ne dépend que d'une variable. On est ainsi conduit à l'expression suivante de df

$$df = \sum_1^{n-h} r_i dq^i + \sqrt{2} \sum_{n-h+1}^{n} \sqrt{\varphi_k^j r_j + \varphi_k} \cdot dq^k$$
$$+ \left(\sum_1^{n-h} \frac{a^{ij}}{2} r_i r_j + \sum_1^{n} a^i r_i + a^0 \right) dt + dg$$

dans laquelle les φ_k^j sont des fonctions de q^k seulement, les φ_k sont des formes quadratiques en r_j (j de 1 à $n-h$) à coefficients fonctions de q^k seulement, les a ne dépendant que de t. La fonction H correspondante est définie par :

$$0=\begin{vmatrix} a^{n-h+1} & \dots & a^n-\left[H+\frac{\partial g}{\partial t}+a^0+\sum_1^{n-h}\frac{a^{ij}}{2}\left(p_i-\frac{\partial g}{\partial q^i}\right)\left(p_j-\frac{\partial g}{\partial q^i}\right)+a^i\left(p_i-\frac{\partial g}{\partial q^j}\right)\right] \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi_k^{n-h+1} & \dots & \varphi_k^n \qquad \frac{1}{2}\left(p_k-\frac{\partial g}{\partial q^k}\right)^2-\varphi_k \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi_n^{n-h+1} & \dots & \varphi_n^n \qquad \frac{1}{2}\left(p_n-\frac{\partial g}{\partial q^n}\right)^2-\varphi_n \end{vmatrix}$$

Cas particuliers. — 1° n intégrales quadratiques on obtient le cas de Stackel généralisé en prenant les $a^{ij}\equiv 0$, pour φ_k une fonction de la variable q^k.

2° En prenant $g\equiv 0$, tous les a nuls sauf $a^n=1$, on obtient le cas de Stackel ordinaire.

3° Le cas d'intégrabilité de Liouville qu'il est plus simple d'établir directement en prenant :

$$df=\sqrt{2}\sum_1^{n-1}\sqrt{B_i(r_i-C_i+A_ir_n)}\,dq^i + \sqrt{2}\sqrt{B_n\sum_1^{n-1}(-r_i)-C_n+A_nr_n}\,dq^n-r_n\,dt.$$

On en déduit :

$$\frac{1}{2}p_i^2=B_i(r_i-C_i+A_ir_n)$$

$$\frac{1}{2}p_n^2=B_n\left(\sum_1^{n-1}(-r_i)-C_n+A_nr_n\right) \qquad H=r_n$$

d'où $2H=\dfrac{1}{\sum_1^n A_i}\left[\sum_{i=1}^n\left(\dfrac{p_i^2}{B_i}+C_i\right)\right]$ ou forme classique

$$2H=\sum_{i=1}^n A_i\sum_{i=1}^n B_i(\dot q^i)^2+\frac{\sum_{i=1}^n C_i(q^i)}{\sum_{i=1}^r A_i(q^i)}.$$

IV. **n intégrales linéaires par rapport aux q^i.** — S'il existe n intégrales linéaires par rapport aux q^i, la fonction f doit être de la forme $f = r_j\varphi^j(p_1, \ldots p_n, t) + \psi(p_1, \ldots p_n, t)$ car $q^i = r_j \dfrac{\partial\varphi^j}{\partial p_i}$. Le sous-anneau le plus simple de n fonctions en involution est constitué par les n fonctions $s^j = \dfrac{\partial f}{\partial r_j} = \varphi^j(p_1, \ldots p_n, t)$. Une transformation canonique conservant le degré des q^i nous conduit au cas où

$$f = r_i\varphi^i(p_i, t) + \psi(p_1 \ldots p_n\, t)$$

la fonction φ^i ne dépendant que de la variable p_i, étant une fonction indépendante des r_i. L'élimination des r_i entre les $(n - 1)$ équations

$$q^i = r_i \frac{\partial\varphi^i}{\partial p_i} + \frac{\partial\psi}{\partial p_i} \qquad \mathrm{H} = r_i \frac{\partial\varphi_i}{\partial t} + \frac{\partial\psi_i}{\partial t}$$

donne

$$\mathrm{H} = q^i \frac{\dfrac{\partial\varphi^i}{\partial t}}{\dfrac{\partial\varphi^i}{\partial p_i}} + \frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{\dfrac{\partial\varphi^i}{\partial t}}{\dfrac{\partial\varphi^i}{\partial p_i}} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial p_i}.$$

Cette fonction devant être quadratique :

1° $$\frac{\dfrac{\partial\varphi^i}{\partial t}}{\dfrac{\partial\varphi^i}{\partial p_i}} = a_i(t)p_i^2 + 2b_i(t)p_i + c_i(t)$$

ce qui montre que φ^i est une fonction de la solution R_i de l'équation de Riccati $\dfrac{dp_i}{dt} = a_i(t)p_i^2 + 2b_i(t)p_i + c_i(t)$.

2° $$\frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{\partial\psi}{\partial p_i}\left[a_i(t)p_i^2 + 2b_i(t) + c_i\right] = a^{ij}p_ip_j + 2a^ip_i + a^{00}$$

les a étant des fonctions de t, ψ est une fonction de $\mathrm{R}_1, \ldots \mathrm{R}_n$ et de t qu'on détermine par quadratures.

En résumé on constitue le sous-anneau de n fonctions en involution en se donnant les solutions de n équations de Riccati.

Une variante du procédé consiste à se donner le sous-anneau au moyen de n fonctions $s^1 \ldots s^n$.

EXEMPLES :

1° $$s^n = \frac{t}{2} + \int \frac{dp_n}{p_n^2+\alpha}, \qquad s^i = \frac{(p_n^2+\alpha)^{\beta_i}}{p_i} + \gamma^i \int (p_n+\alpha)^{\beta_i-1}\, dp_n$$

$$f = 2r_n\left(\int \frac{dp_n}{p_n^2+\alpha} + \frac{t}{2}\right) + \sum_{i=1}^{n-1} r_i\left[\frac{(p_n^2+\alpha)^{\beta_i}}{p_i} + \gamma^i \int (p_n^2+\alpha)^{\beta_i-1}\, dp_n\right]$$

$$q^i = - r_i \frac{(p_n^2+\alpha)^{\beta_i}}{p_i^2},$$

$$q_n = + 2r_n \frac{1}{p_n^2+\alpha} + \sum_{i=1}^{n-1} r_i\left[\frac{2\beta_i p_n (p_n^2+\alpha)^{\beta_i-1}}{p_i} + \gamma^i (p_n^2+\alpha)^{\beta_i-1}\right], \mathrm{H} = r_n$$

d'où $$2\mathrm{H} = \sum_1^{n-1} \gamma^i p_i^2 q^i + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i p_i p_n q^i + (p_n^2+\alpha) q^n.$$

2° $$s^n = \frac{t}{2} + \int \frac{dp_n}{p_n^2+\alpha} \qquad s^i = p_i (p_n^2+\alpha)^{\beta_i}$$

$$f = 2r_n \int \frac{dp_n}{p_n^2+\alpha} + r_n t + \sum_{i=1}^{n-1} r_i p_i (p_n^2+\alpha)^{\beta_i} + \psi$$

$$q^i = r_i (p_n^2+\alpha)^{\beta_i} + \frac{\partial \psi}{\partial p_i},$$

$$q^n = 2r_n \frac{1}{p_n^2+\alpha} + \frac{\partial \psi}{\partial p_n} + 2 \sum_{i=1}^{n-1} r_i p_i \beta_i p_n (p_n^2+\alpha)^{\beta_i-1}.$$

On détermine ψ par la condition

$$-(p_n^2+\alpha)\frac{\partial \psi}{\partial p_n} + 2p_i\beta_i p_n \frac{\partial \psi}{\partial p_i} = \sum_{i=1}^{n-1} \gamma^i p_i^2$$

soit $$\sum_{i=1}^{n-1} \gamma^i p_i^2 (p_n^2+\alpha)^{2\beta} \int \frac{dp_n}{(p_n^2+\alpha)^{2\beta_i+1}} = \psi$$

d'où $$2\mathrm{H} = \sum_{i=1}^{n-1} \gamma^i p_i^2 - 2 \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i p_i p_n q^i + q^n (p_n^2+\alpha).$$

Cas particulier. — $n = 2$, $\alpha = 0$ on trouve les surfaces spirales dont les géodésiques sont déterminées par quadratures (cf. Darboux, tome III, p. 81).

B. — ÉTUDE DU CAS $d\Omega \neq 0$.

THÉORÈME V. — *Si à* $X \in T$ *et* $x \in T$, *correspondent respectivement une transformation infinitésimale et une intégrale première de* Σ, *au* *crochet de Lie* $[X, \bar{x}] \neq 0$ *correspond une nouvelle intégrale première de* Σ *dont l'expression est* $i(X \wedge \bar{x})\Omega$.

La formule (VI, 3) donne $i[X, \bar{x}]\Omega = \theta(X)i(\bar{x})\Omega - i(\bar{x})\theta(X)\Omega$.

Les hypothèses $\theta(X)\Omega = 0$, $i(\bar{x})\Omega = \pi$, $d\pi = 0$ entraînent

$$i[X, \bar{x}]\Omega = di(X \wedge \bar{x})\Omega.$$

Au crochet de Lie $[X, \bar{x}]$ élément de T non nul, l'opérateur $i[X, \bar{x}]$ appliqué à Ω fait donc correspondre la différentielle d'une fonction de l'anneau K, fonction ayant pour expression $i(X \wedge \bar{x})\Omega$; la différentielle de cette fonction étant nulle sur les lignes intégrales de Σ est une nouvelle intégrale première de Σ. Son calcul est immédiat

$$i(X \wedge \bar{x})\Omega = k_{ij}\begin{vmatrix} \bar{x}^i & \bar{x}^j \\ X^i & X^j \end{vmatrix}.$$

L'étude du système Σ se fait conformément aux idées de Lie au moyen de la connaissance de certaines de ses transformations infinitésimales.

Définition. — Nous dirons que r éléments $X^1, X^2, \ldots X^r \in T$, générateurs de transformations infinitésimales pour Ω forment un système complet si

$$[X^\rho, X^\sigma] = \gamma_\tau^{\rho\sigma} X^\tau \qquad \rho, \sigma, \tau \in (1 \text{ à } r)$$

les $\gamma_\tau^{\rho\sigma}$ étant des fonctions de l'anneau K.

Lemme. — *On peut choisir d'une infinité de manières* $2n$ *éléments* $x^1, \ldots x^{2n}$ *appartenant à* T *tels que* $i(X^i)i(x^j)\Omega = i(X^i \wedge x^j)\Omega$ *soit égale à* 1 *pour* $j = i$, *à* 0 *pour* $j \neq i$.

Les X^i étant connus, les composantes de x^j (j fixe) sont solutions des r équations linéaires ($r < 2n + 1$)

$$i(X^i \wedge x^j)\Omega = 0 \quad \text{pour} \quad j \neq i \qquad i(X^i \wedge x^j)\Omega = 1 \quad \text{pour} \quad j = i.$$

On profite des arbitraires pour choisir des solutions aussi simples que possibles pour les x^j.

Soient $\pi^i = i(x^i)\Omega$ l'indice i variant de 1 à $2n$, les $2n$ formes de Pfaff correspondantes qui, égalées à 0, constituent une des expressions du système d'équations différentielles Σ.

Théorème VI. — *Le système des* $(2n - r)$ *formes de Pfaff* $\pi^{r+1}, \ldots \pi^{2n}$ *est complètement intégrable, les* r *formes* $\pi^1, \ldots \pi^r$ *sont des formes invariantes.*

Appliquons à une forme π^i la formule (VI,5) en prenant pour x, y deux champs X^ρ, X^σ

$$\text{(VI, 10)}\quad \theta(X^\rho)i(X^\sigma)\pi^i - \theta(X^\sigma)i(X^\rho)\pi^i = \varepsilon(X^\rho \wedge X^\sigma)\pi^i + i[X^\rho, X^\sigma]\pi^i.$$

D'après le choix des formes π^i le premier membre est toujours nul.

1° *Pour* $i > r$

$$i(X^\sigma)\pi^i = 0, \qquad i(X^\rho)\pi^i = 0, \qquad i([X^\rho,\ X^\sigma])\pi^i = \gamma_\tau^{\rho\sigma} \,.\, i(X^\tau)\pi^i = 0$$
$$\varepsilon(X^\rho \wedge X^\sigma)\pi^i = - i(X^\rho \wedge X^\sigma)\, d\pi^i.$$

La nullité du premier membre de (VI, 10) entraîne

$$i(X^\rho \wedge X^\sigma)\, d\pi^i = 0.$$

Les $\pi^1, \ldots \pi^{2n}$, formant un système différentiel ordinaire donc complètement intégrable, $d\pi^i$ appartient au sous-module des π^i; c^i_{jk} étant des fonctions de l'anneau K, on peut donc écrire

$$d\pi^i = c^i_{jk}(\pi^j \wedge \pi^k).$$

Etudions ce qu'entraînent les hypothèses pour les c^i_{jk}

$$i(X^\rho \wedge X^\sigma)\, d\pi^i = c^i_{jk} i(X^\rho \wedge X^\sigma) \,.\, (\pi^j \wedge \pi^k)$$
$$0 = c^i_{jk} i(X^\rho) i(X^\sigma) \,.\, (i(x^j)\Omega) \wedge (i(x^k)\Omega).$$

$i(X^\sigma)i(x^j)\Omega$ n'est différent de zéro que pour $j = \sigma$; il en résulte que l'égalité précédente se réduit à

$$c^i_{\sigma k} i(X^\rho) i(x^k)\Omega = 0.$$

$i(X^\rho)i(x^k)\Omega$ n'étant différent de o que pour $k = \rho$, on doit avoir $c^i_{\sigma\rho} = 0$ c'est-à-dire $c^i_{jk} = 0$ pour $j \leqslant r$, $k \leqslant r$.

Ces conditions entraînent que $d\pi^{r+\alpha}$ appartient au sous-module des formes $\pi^{r+\alpha}$, en d'autres termes le système des $(2n - r)$ formes $\pi^{r+\alpha}$ est complètement intégrale.

2° *Pour* $i \leqslant r$.

$$i(X^\tau)\pi^i = 0 \quad \text{si} \quad i \neq \tau, \qquad i(X^\tau)\pi^i = 1 \quad \text{si} \quad i = \tau.$$

La nullité du premier membre de (VI, 10) donne

$$0 = - i(X^\rho \wedge X^\sigma)\, d\pi^\tau + \gamma_\tau^{\rho\sigma}$$

En tenant compte de $d\pi^\tau = c^\tau_{jk}\pi^j \wedge \pi^k$

$$i(X^\rho)i(X^\sigma)c^\tau_{jk}\pi^j \wedge \pi^k = c^\tau_{jk} i(X^\rho) i(X^\sigma) i(x^j)\Omega \wedge i(x^k)\Omega.$$

$i(X^\sigma)i(x^j)\Omega$ n'étant différent de zéro que pour $j=\sigma$, sa valeur étant alors 1.

$i(X^\rho)i(x^k)$ n'étant différent de zéro que pour $k=\rho$, sa valeur étant alors 1.

$$\gamma_\tau^{\rho\sigma} = c_{\sigma\rho}^\tau = - c_{\rho\sigma}^\tau.$$

En outre pour $\tau = i \leqslant r$, pour j et $k > r$ les c_{jk}^i sont des fonctions généralement non nulles.

Montrons que les r formes $\pi^1, \ldots \pi^r$ sont des formes invariantes

$$d\pi^i = c_{jk}^i \pi^j \wedge \pi^k \qquad \text{pour} \qquad i(1 \text{ à } r)\ j \text{ et } k\ (1 \text{ à } 2n).$$

Les $2n$ formes $\pi^1, \ldots \pi^{2n}$ s'expriment linéairement en fonction des $2n$ différentielles des intégrales premières de Σ, si on effectue cette substitution au second membre, en introduisant des fonctions convenablement choisies des intégrales premières

$$d\pi^i = \Sigma k_{\alpha\alpha^*}^i\, dc^\alpha \wedge dc^{\alpha^*} \qquad \text{avec} \qquad \alpha^* = \alpha + n$$

les $k_{\alpha\alpha^*}^i$ étant des fonctions des intégrales premières et d'une variable t par exemple, u désignant une intégrale première quelconque ou la variable t en prenant la différentielle extérieure des deux membres

$$d(d\pi^i) = 0 = \Sigma \frac{\partial k_{\alpha\alpha^*}^i}{\partial u}\, du \wedge dc^\alpha \wedge dc^{\alpha^*}$$

le terme $du \wedge dc^\alpha \wedge dc^{\alpha^*}$ étant unique $\dfrac{\partial k_{\alpha\alpha^*}^i}{\partial u} = 0$, $k_{\alpha\alpha^*}^i$ ne peut être qu'une fonction des deux intégrales c^α et c^{α^*}; par un changement d'intégrales premières $c^\alpha = c^\alpha(c^\alpha, \bar{c}^{\alpha^*})$ on réduit $d\pi^i$ à la forme

$$d\pi^i = \sum_{\alpha=1}^{n} dc^\alpha \wedge d\bar{c}^{\alpha^*}.$$

Il en résulte $\pi^i = \bar{c}^\alpha\, dc^{\alpha^*}$. π^i ne s'exprimant qu'au moyen des intégrales premières et de leurs différentielles est bien une forme invariante pour le système Σ.

Conséquences pratiques pour l'intégration de Σ. — Ayant choisi les $2n$ formes π^i conformément au lemme, on commencera par chercher la solution du système complètement intégrable $\pi^{r+1}, \ldots \pi^{2n}$. Une solution de ce système étant connue on est ramené à intégrer un système différentiel de r formes $\pi^1, \ldots \pi^r$ pour lequel on connaît r formes invariantes.

La recherche d'une solution du système complètement intégrale $\pi^{r+1}, \ldots \pi^{2n}$ est simplifié par les remarques suivantes :

1) Si on sait qu'il existe p intégrales premières, on profite des arbitraires existant dans le choix des x^i, pour que ces intégrales premières appartiennent au sous-module des $\pi^{r+1}, \ldots, \pi^{2n}$.

2) Si le système mécanique a été astreint à q liaisons

$$a^h = a^h(p_i, q^i, t) = 0, \qquad \Omega_d = L_i dq^i \wedge dt,$$

compatibles avec les transformations infinitésimales, on choisit certain des x^i pour que les da^h appartiennent au sous-module des $(2n-r)$ formes $\pi^{r+1}, \ldots, \pi^{2n}$.

On peut ainsi réduire l'ordre du système complètement intégrable $\pi^{r+1}, \ldots, \pi^{2n}$ de $(p+q)$ unités.

Plus particulièrement si $2n - r = p + q$ et si les r formes $\pi^1, \ldots, \pi^r$ sont fermées modulo les formes $\pi^{r+1}, \ldots, \pi^{2n}$ l'intégration s'achève par des quadratures.

§ III. — Application des méthodes précédentes.

I. Point pesant mobile avec frottement sur un plan incliné.

Reprenonns les notations du chapitre 1 § 1 et posons $\Omega = \dfrac{\omega}{m}$

$$\begin{aligned}\Omega = dv \wedge (\cos\alpha\, dx + \sin\alpha\, dy) + v d\alpha \wedge (-\sin\alpha\, dx + \cos\alpha\, dy)\\ - v\, dv \wedge dt + g \sin i\, dx \wedge dt - fg \cos i (\cos\alpha\, dx + \sin\alpha\, dy) \wedge dt.\end{aligned}$$

On connaît immédiatement 3 champs X, Y, T, générateurs de transformations infinitésimales pour Ω dont les composantes sont données dans le tableau

	v	α	x	y	t
X	0	0	1	0	0
Y	0	0	0	1	0
T	0	0	0	0	1

$$\begin{aligned}i(X)\Omega &= -dv\cos\alpha + v\sin\alpha\, d\alpha + g\sin i\, dt - fg\cos i\cos\alpha\, dt\\ i(Y)\Omega &= -dv\sin\alpha - v\cos\alpha\, d\alpha - fg\cos i\sin\alpha\, dt\\ i(T)\Omega &= v\, dv - g\sin i\, dx + fg\cos i\cos\alpha\, dx + fg\cos i\sin\alpha\, dy.\end{aligned}$$

Déterminons 4 formes π_x, π_y, π_t, π au moyen de 4 champs x, y, t, u, conformément au lemme. Les composantes du champ x

satisfont aux équations

$$i(x)i(X)\Omega = -1\,; \qquad i(x)i(Y) = 0\,; \qquad i(x)i(T) = 0.$$

On peut prendre pour composantes de x :

$$\cos\alpha, \quad -\frac{\sin\alpha}{v}, \quad 0, \quad -\frac{v \operatorname{cotg}\alpha}{fg\cos i}, \quad 0$$

d'où $\displaystyle i(x)\Omega = \pi_x = dx + \frac{1}{fg\cos i}\left(v\,dv\cos\alpha + \frac{v^2\cos^2\alpha}{\sin\alpha}\cdot d\alpha\right).$

En opérant de même pour y et t, on obtient

$$y \text{ composantes } \left(\sin\alpha, \ \frac{\cos\alpha}{v}, \ 0, \ -\frac{v}{fg\cos i}, \ 0\right)$$

$$i(y)\Omega = \pi_y = dy + \frac{1}{fg\cos i}(v\,dv \,.\, \sin\alpha + v^2\cos\alpha\, d\alpha)$$

$$t \text{ composantes } \left(0, \ 0, \ \frac{1}{g\sin i}, \ -\frac{\operatorname{cotg}\alpha}{g\sin i}, \ 0\right)$$

$$i(t)\Omega = \pi_t = dt + \frac{1}{g\sin i}\frac{v\,d\alpha}{\sin\alpha}.$$

Le champ u tel que $i(u)i(X) = 0$, $i(u)i(Y) = 0$, $i(u)i(T) = 0$ a pour composantes $\left(0, \ 0, \ 0 \ \dfrac{f\operatorname{cotg} i}{v\sin\alpha}, \ \dfrac{1}{v\sin\alpha} - \dfrac{f\operatorname{cotg} i\cos\alpha}{v\sin\alpha}\right)$

$$i(u)\Omega = \pi = \frac{\cos\alpha\, d\alpha}{\sin\alpha} + \frac{dv}{v} - f\operatorname{cotg} i\,\frac{d\alpha}{\sin\alpha}.$$

Le système complètement intégrable se réduit à la seule équation différentielle $\pi = 0$. C'est une forme fermée ; elle s'intègre par quadrature. $v = \dfrac{c}{\sin\alpha}\left(\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}\right)^{f\operatorname{cotg} i}$. Les 3 formes π_x, π_y, π_t sont fermées modulo π. L'intégration s'achève par des quadratures.

II. Mouvement d'une particule électrisée de charge e, de masse m pesante dans un champ électrique E et un champ magnétique H.

Nous supposerons que le champ électrique dérive d'une fonction de forces qui, ajoutée à la fonction de forces dont dérive la pesanteur, est désignée par f. Les conditions auxquelles satisfont le champ H seront précisées ultérieurement,

Si on rapporte l'espace Euclidien dans lequel se meut la particule à 3 axes de coordonnées x^1, x^2, x^3, $\dot{x}^1$, $\dot{x}^2$, $\dot{x}^3$, désignant les composantes de la vitesse de la particule, H^1, H^2, H^3, étant les composantes du champ H, la forme Ω associée à la particule est :

$$\Omega = \sum_{j=1}^{3} d\dot{x}^j \wedge dx^j - \sum_{j=1}^{3} \dot{x}^j dx^j \wedge dt + \frac{\partial f}{\partial x^j} dx^j \wedge dt$$

$$+ \frac{e}{m}\left[(\dot{x}^2 H^3 - \dot{x}^2 H^3)dx^1 + (\dot{x}^3 H^1 - \dot{x} H^3)dx^2 + (\dot{x} H^2 - \dot{x}^2 H^1)dx^3\right] \wedge dt.$$

La présence du champ magnétique entraîne $d\Omega \neq 0$. La force due au champ magnétique étant orthogonale au déplacement, les champs électriques et de pesanteur dérivant d'une fonction de forces, on a l'intégrale des forces vives ; il lui correspond un champ x de l'espace tangent à la variété V_7 dont les composantes sont :

$$-\frac{\partial f}{\partial x^1}, \quad -\frac{\partial f}{\partial x^2}, \quad -\frac{\partial f}{\partial x^3}, \quad -\dot{x}^1, \quad -\dot{x}^2, \quad -\dot{x}^3, \quad 0,$$

les variables étant supposées rangées dans l'ordre $\dot{x}^1, \dot{x}^2, \dot{x}^3, x^1, x^2, x^3, t$,

$$i(x)\Omega = \frac{1}{2} dv^2 - df.$$

Nous supposerons dans ce qui suit le champ magnétique de révolution autour de la verticale Oz, et que ses composantes en coordonnées cylindro-polaires sont $U = 0$, $V = V'(\rho)$, $W = 0$, ρ désignant la distance à l'axe Oz. En coordonnées cylindro-polaires ρ, α, z, l'expression de Ω sous forme canonique est :

$$\Omega = dp \wedge d\rho + dq \wedge d\alpha + dr \wedge dz$$
$$-\left(p\,dp + \frac{1}{\rho^2} q\,dq + r\,dr - \frac{q^2}{\rho^3} d\rho\right) \wedge dt + \left(\frac{\partial f}{\partial \rho} d\rho + \frac{df}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial f}{\partial z} dz\right) \wedge dt$$
$$+ \frac{e}{m}\left[\left(\frac{W}{\rho} q - V'r\right) d\rho + (U\rho r - W\rho p)\,d\alpha + \left(pV' - \frac{U}{\rho} q\right) dz\right] \wedge dt.$$

Précisons la forme de la fonction f par l'existence de certaines transformations infinitésimales :

$$Z(0, 0, 0, 0, 0, 1, 0) \qquad A(0, 0, 0, 0, 1, 0, 0) \qquad T(0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$$
$$\theta(Z)\Omega = 0 \qquad\qquad \theta(A)\Omega = 0 \qquad\qquad \theta(T)\Omega = 0$$

Appliquons la formule (VI, I) en remarquant que $d\Omega$ se met sous la forme

$$d\Omega = \frac{e}{m}\left[-V'\,dr \wedge d\rho \wedge dt + d(pV') \wedge dz \wedge dt\right]$$

$\theta(A)\Omega = d\left[-dq + \frac{\partial f}{\partial \alpha} dt\right] = 0$ condition satisfaite si $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$ est une fonction de t.

Nous supposerons $\frac{\partial f}{\partial \alpha} \equiv 0$.

$$\theta(Z)\Omega = 0 = i(Z)d\Omega + d(i(Z)\Omega) = -\frac{e}{m} d(pV') \wedge dt$$
$$+ d\left[-dr + \frac{\partial f}{\partial z} dt + \frac{e}{m}(pV')dt\right] = d\left(\frac{\partial f}{\partial z} dt\right)$$

condition satisfaite si $\frac{\partial f}{\partial z}$ est une fonction de t, donc réalisée en particulier si $\frac{\partial f}{\partial z} = -g$ (g intensité du champ de la pesanteur).

Les conditions précédentes étant supposée réalisées entraînent en outre l'existence de deux intégrales premières. Ω s'écrit

$$\Omega = dp \wedge d\rho + dq \wedge d\alpha + dr \wedge dz - \left(p\,dp + \frac{1}{\rho^2} q\,dq + r\,dr - \frac{q^2}{\rho^3} d\rho\right) \wedge dt$$
$$+ \left(\frac{\partial f}{\partial \rho} d\rho - g\,dz\right) \wedge dt + \frac{e}{m}[-V'r\,d\rho + pV'\,dz] \wedge dt$$
$$i(A)\Omega = dq$$

Si P désigne le champ de composantes $\left(-\frac{e}{m} V', 0, 0, 0, 0, -1, 0\right)$

$$i(P)\Omega = -\frac{e}{m} V'(\rho)d\rho + dr + g\,dt.$$

En appliquant la théorie générale on connait 3 formes invariantes π^1, π^2, π^3 et 3 formes formant un système complètement intégrable π^4, π^5, π^6. Puisqu'on connaît 3 intégrales premières on peut choisir 3 champs x pour que ce soient les 3 formes π^4, π^5, π^6. Un calcul facile donne

$$\pi^1 = d\alpha - \frac{q}{p\rho^2} d\rho \qquad \pi^4 = dq$$
$$\pi^2 = dz + \frac{r}{p} d\rho \qquad \pi^5 = dr - \frac{e}{m} V'(\rho)d\rho + g\,dt$$
$$\pi^3 = -dt + \frac{1}{p} d\rho \qquad \pi^6 = d\left(p^2 + \frac{q^2}{\rho^2} + r^2 - 2f(\rho) + 2gz\right)$$

Les 3 premières formes égalées à zéro constituent un système différentiel en général non intégrable par quadratures modulo les 3 dernières. Cas particulier : On supprime la pesanteur $g = 0$, π^1, π^2, π^3 sont fermées modulo π^4, π^5, π^6 le système est intégrable par quadratures.

III. Mouvement plan d'un solide sur un plan dans le cas d'un plan de symétrie permanent.

D'après la théorie développée nous devons considérer le solide comme libre. Sa position est définie par trois paramètres : ξ et η coordonnées de son centre de gravité G, α angle de Gy avec Gx_1, Gy étant la normale au plan, Gx_1 demi-droite invariablement au solide. Les trois paramètres de vitesse sont $\dot{\xi}$, $\dot{\eta}$, $\dot{\alpha}$. Les forces extérieures autres que la réaction du plan ont pour résultante générale X, Y, et pour moment résultant par rapport à G : Γ. Soit M la masse du solide, k son rayon de giration par rapport à G. La forme extérieure associée au solide libre est

$$\Omega_t = \mathrm{M}(d\dot{\xi}\wedge d\xi + d\dot{\eta}\wedge d\eta + k^2\, d\dot{\alpha}\wedge d\alpha)$$
$$- \mathrm{M}(\dot{\xi}\, d\dot{\xi} + \dot{\eta}\, d\dot{\eta} + k^2\dot{\alpha}\, d\dot{\alpha})\wedge dt + [\mathrm{X}\, d\xi + \mathrm{Y}\, d\eta + \Gamma\, d\alpha]\wedge dt.$$

Le champ E caractéristique a pour composantes :

$$\frac{\mathrm{X}}{\mathrm{M}},\quad \frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{M}},\quad \frac{\Gamma}{\mathrm{M}k^2},\quad \dot{\xi},\quad \dot{\eta},\quad \dot{\alpha},\quad 1,$$

Étude de la liaison : Soit P le point de contact du solide avec le plan dont les coordonnées par rapport à des axes Gx, Gy respectivement parallèles au plan et à la normale à ce dernier sont a et b, a et b sont des fonctions de α qu'on détermine en considérant le profil du corps défini comme enveloppe de ses tangentes. Par rapport aux axes Gx_1, Gy_1 liés au corps la tangente au profil a pour équation

$$x_1 \cos\varphi + y_1 \sin\varphi - p(\varphi) = 0$$

la normale a pour équation

$$-x_1 \sin\varphi + y_1 \cos\varphi - p'(\varphi) = 0$$

d'autre part $$\alpha + \varphi = \pi$$

Il en résulte que les expressions de a et b en fonction de α sont

$$a = p'(\pi - \alpha) \qquad b = -p(\pi - \alpha),$$

La vitesse du point P qui sera le point de contact du solide avec le plan a pour composantes par rapport aux axes fixes $\dot{\xi} - b\dot{\alpha}$, $\dot{\eta} + a\dot{\alpha}$;

L'équation de liaison exprimant la condition de contact avec le plan est

$$l = \dot{\eta} + a\dot{\alpha} = 0.$$

La puissance des forces nécessaires pour réaliser cette liaison dépend de certaines hypothèses :

A. Plan parfaitement poli. — C'est une liaison de puissance nulle

$$\mathrm{P} = \mathrm{N}(\dot{\eta} + a\dot{\alpha}) \qquad \mathrm{N} > 0.$$

La forme Ω_d à ajouter à Ω_l pour obtenir Ω est

$$\Omega_d = \mathrm{N}(d\eta + a\,d\alpha) \wedge dt.$$

Le champ de liaison e a pour composantes

$$\left(0,\ \frac{1}{\mathrm{M}},\ \frac{a}{\mathrm{M}k^2},\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\right).$$

B. **Plan rugueux coefficient de frottement f, paramètre de résistance au roulement δ, glissement et roulement du corps $\dot\xi - b\dot\alpha \neq 0$**

$$\mathrm{P} = \mathrm{N}[\dot\eta + a\dot\alpha + \varepsilon f(\dot\xi - b\dot\alpha) + \varepsilon_1\delta\dot\alpha] \qquad \mathrm{N} > 0$$

avec $\quad \varepsilon(\dot\xi - b\dot\alpha) < 0 \quad \varepsilon_1\dot\alpha < 0 \quad \varepsilon = \pm 1, \quad \varepsilon_1 = \pm 1$

La forme Ω_d à ajouter à Ω_l pour obtenir Ω est

$$\Omega_d = \mathrm{N}[d\eta + a\,d\alpha + \varepsilon f(d\xi - b\,d\alpha) + \varepsilon_1\delta\,d\alpha] \wedge dt.$$

Le champ de liaison e a pour composantes

$$\left(\frac{\varepsilon f}{\mathrm{M}},\ \frac{1}{\mathrm{M}},\ \frac{a - \varepsilon f b + \varepsilon_1\delta}{\mathrm{M}k^2},\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\right).$$

C. **Plan rugueux, roulement sans glissement du corps**

$$\mathrm{P} = \mathrm{T}(\dot\xi - b\dot\alpha) + \mathrm{N}(\dot\eta + a\dot\alpha + \varepsilon_1\delta\dot\alpha) \qquad \mathrm{N} > 0$$

avec deux équations de liaisons $m = \dot\xi - b\dot\alpha = 0$; $l = \dot\eta + a\dot\alpha = 0$ et les deux inégalités $\varepsilon_1\dot\alpha < 0$ $|\mathrm{T}| < f\mathrm{N}$.

La forme Ω_d à ajouter à Ω_l pour obtenir Ω est :

$$\Omega_d = [\mathrm{T}(d\xi - b\,d\alpha) + \mathrm{N}(d\eta + a\,d\alpha + \varepsilon_1\delta\,d\alpha)] \wedge dt.$$

Les deux champs de liaisons ont pour composantes :

$$e^2\left(\frac{1}{\mathrm{M}},\ 0,\ \frac{-b}{\mathrm{M}k^2},\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\right)$$

$$e^1\left(0,\ \frac{1}{\mathrm{M}},\ \frac{a + \varepsilon_1\delta}{\mathrm{M}k^2},\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\right).$$

Réaction du plan. — Un des principaux avantages de l'emploi des opérateurs $i(x)$ de M. H. Cartan est de pouvoir déterminer les réactions sans avoir au préalable résolu les équations du mouvement. Dans les deux cas A et B la composante N de la réaction est donnée par l'équation $\mathrm{N}i(e)\,dl + i(\mathrm{E})\,dl = 0$ en remplaçant dans chaque cas e par sa valeur.

$$dl = d\dot\eta + a\,d\dot\alpha + \dot\alpha\dot\alpha\,d\alpha$$

$$i(\mathrm{E})\,dl = \frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{M}} + \frac{a\Gamma}{\mathrm{M}k^2} + \dot\alpha\dot\alpha^2.$$

Cas A.

$$i(e)\,dl = \frac{1}{M} + \frac{a^2}{Mk^2} \qquad \text{d'où} \qquad N = -\frac{k^2(Y + M\dot{a}\dot{\alpha}^2) + a\Gamma}{k^2 + a^2}$$

valeur acceptable si $Y + M\dot{a}\dot{\alpha}^2 + \frac{a\Gamma}{k^2} < 0$.

Cas B. $i(e)\,dl = \frac{1}{M} + \frac{a(a - \varepsilon f b + \varepsilon_1 \delta)}{Mk^2}$. Cette quantité doit-être différente de zéro pour que la liaison soit compatible ; d'où la valeur de N acceptable lorsqu'elle est positive.

$$N = -\frac{k^2(Y + M\dot{a}\dot{\alpha}^2) + a\Gamma}{k^2 + a^2 - \varepsilon f b a + \varepsilon_1 a \delta}.$$

Si $k^2 + a^2 - \varepsilon f b a + \varepsilon_1 a \delta < 0$ et $k^2(Y + M\dot{a}\dot{\alpha}^2) + a\Gamma > 0$ il y a deux éventualités possibles : le glissement et la cessation de contact puisque $\frac{dl}{dt} = i(E)\,dl > 0$. Pour $k^2(Y + M\dot{a}\dot{\alpha}^2) + a\Gamma < 0$ il y a impossibilité qu'on peut interpréter comme un choc tangentiel [24].

Cas C. Les composantes T et N de la réaction du plan sont solutions du système (1) :

$$(1) \qquad \begin{cases} N i(e_1)\,dl + T i(e_2)\,dl = -\,i(E)\,dl \\ N i(e_1)\,dm + T i(e_2)\,dm = -\,i(E)\,dm \end{cases}$$

Ayant déterminé ci-dessus les champs de direction e_1 et e_2, comme $dl = d\eta + a\,d\dot{\alpha} + \dot{a}\dot{\alpha}\,d\alpha$, $dm = d\xi - b\,d\dot{\alpha} - \dot{b}\dot{\alpha}\,d\alpha$ on a

$$i(e^1)\,dl = \frac{1}{M} + \frac{a(a + \varepsilon_1 \delta)}{Mk^2}\,; \qquad i(e^2)\,dl = \frac{-ab}{Mk^2}\,;$$

$$i(E)\,dl = \frac{Y}{M} + \frac{a\Gamma}{Mk^2} + \dot{a}\dot{\alpha}^2$$

$$i(e^1)\,dm = \frac{-b(a + \varepsilon_1 \delta)}{Mk^2} \qquad i(e^2)\,dm = \frac{1}{M} + \frac{b^2}{Mk^2}$$

$$i(E)\,dm = \frac{X}{M} - \frac{b\Gamma}{Mk^2} - b\dot{\alpha}^2.$$

Les liaisons ne sont compatibles que si $k^2 + a^2 + b^2 - \varepsilon_1 a \delta \neq 0$, d'où

$$T = -\frac{(k^2 + a^2 + a\varepsilon_1 \delta)(X - M\dot{b}\dot{\alpha}^2) + b(a + \varepsilon_1 \delta)(Y + M\dot{a}\dot{\alpha}^2) - b\Gamma}{k^2 + a^2 + b^2 - \varepsilon_1 a \delta},$$

$$N = -\frac{ab(X - M\dot{b}\dot{\alpha}^2) + (Y + M\dot{a}\dot{\alpha}^2)(k^2 + b^2) + a\Gamma}{k^2 + a^2 + b^2 - \varepsilon_1 a \delta}.$$

(24) Cf. E. Delassus et J. Pérès, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 5e Série, tome II, 1923, p. 383-391.

L'hypothèse C n'est acceptable que si $N > 0$ et $|T| < fN$.

La détermination des diverses éventualités échappement, roulement sans glissement, glissement peut se faire en interprétant géométriquement le système (1). Traçons dans un plan deux axes rectangulaires $O\dot{l}$, $O\dot{m}$, et considérons les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{t}$ de cordonnées respectives $(-i(e^1)\,dl,\ -i(e^1)\,dm)$ $(-i(e^2)\,dl,\ -i(e^2)\,dm)$. Traçons également les demi-droites D et D' $T = \pm fN$, $N > 0$. Les seconds membres du système (1) étant indépendants des éventualités interprétons $i(E)\,dl$, $i(E)\,dm$ comme les coordonnées d'un point A du plan. Par A menons d'un part la parallèle à $\vec{t}$ qui coupe le support de $\vec{n}$ en N, D et D' en α et α', d'autre part la parallèle à $O\dot{m}$ qui coupe $O\dot{l}$ en $\dot{l}$. Des signes de N et de $\dot{l}$, de la position de A par rapport à $\alpha\alpha'$ et du signe du produit $\frac{T\,dm}{dt}$ on déduit les éventualités susceptibles de se produire :

rappelons que $\frac{dl}{dt} = i(E)\,dl$ et que $\frac{dm}{dt} = i(E)\,dm$ (cf. chap. I § III)

échappement $i(E)\,dl > 0$

roulement sans glissement $N > 0$, A à l'intérieur de $\alpha\alpha'$

glissement naissant $N > 0$, $T\frac{dm}{dt} < 0$, A l'extérieur de $\alpha\alpha'$.

Notons que la présence du paramètre de résistance au roulement permet de mettre en évidence des cas d'indétermination et d'impossibilité. Ainsi pour $a > 0$, $b > 0$, $\varepsilon_1 = -1$, $\delta > \frac{k^2 + a^2}{a}$ les vecteurs $\vec{t}$ et $\vec{n}$ ont la disposition de la figure ci-jointe ; il en résulte ces circonstances pour des valeurs convenables de $i(E)\,dl$ et $i(E)\,dm$.

Étude des équations différentielles du mouvement. — L'étude des équations différentielles du mouvement s'effectue au moyen de la connaissance des transformations infinitésimales qu'admet la forme génératrice Ω. Les composantes de la réaction se déterminant en fonction des forces extérieures et des vitesses, il suffit d'exprimer que Ω_l (correspondant au solide libre) admet les dites transformations ainsi que la forme différentielle de l'équation de liaison qui est $dl = d\eta_1 + a\,d\dot{\alpha} + \dot{a}\dot{\alpha}\,d\alpha$.

Ainsi imposons au système les transformations infinitésimales engendrées par les champs :

$$\begin{array}{l} T(0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1) \\ \Xi(0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0) \\ H(0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0) \end{array}$$

On vérifie immédiatement que la forme dl les admet. Exprimons que Ω_l les admet, en supposant que le système des forces extérieures X, Y, Γ, ne dépend que des variables ξ, η, α, t,

$$d\Omega_l = \left(\frac{\partial X}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial X}{\partial \eta} \partial\eta\right) \wedge d\xi \wedge dt + \left(\frac{\partial Y}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial Y}{\partial \alpha} d\alpha\right) \wedge d\eta \wedge dt$$
$$+ \left(\frac{\partial \Gamma}{d\xi} \partial\xi + \frac{\partial \Gamma}{d\eta} \partial\eta\right) \wedge d\alpha \wedge dt.$$

1° $\theta(T)\,\Omega_l = i(T)\,d\Omega_l + d(i(T)\,\Omega_l)$

$$= \left(\frac{\partial X}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial X}{\partial \eta} d\eta\right) \wedge d\xi + \left(\frac{\partial Y}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial Y}{\partial \alpha} d\alpha\right) \wedge d\eta$$
$$+ \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial \Gamma}{\partial \eta} d\eta\right) \wedge d\alpha - d(X\,d\xi + Y\,d\eta + \Gamma\,d\alpha) = 0$$

d'où
$$-\frac{\partial X}{\partial t} d\xi \wedge dt - \frac{\partial Y}{\partial t} d\eta \wedge dt - \frac{\partial \Gamma}{\partial t} d\alpha \wedge dt = 0$$

ce qui entraîne

$$\frac{\partial X}{\partial t} \equiv 0, \qquad \frac{\partial Y}{\partial t} \equiv 0, \qquad \frac{\partial \Gamma}{\partial t} \equiv 0.$$

2° $\theta(\Xi)\,\Omega_l = i(\Xi)\,d\Omega_l + d(i(\Xi)\,\Omega_l)$

$$= -\left(\frac{\partial X}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial X}{\partial \eta} d\eta - \frac{\partial Y}{\partial \xi} d\eta - \frac{\partial \Gamma}{\partial \xi} d\alpha\right) \wedge dt + d(X\,dt)$$
$$= \frac{\partial X}{\partial \xi} d\xi \wedge dt + \frac{\partial Y}{\partial \xi} d\eta \wedge dt + \frac{\partial \Gamma}{\partial \xi} d\alpha \wedge dt = 0$$

ce qui entraîne

$$\frac{\partial X}{\partial \xi} \equiv 0, \qquad \frac{\partial Y}{\partial \xi} \equiv 0, \qquad \frac{\partial \Gamma}{\partial \xi} \equiv 0.$$

3° $\theta(H)\,\Omega_l = 0$ donne par un calcul semblable

$$\frac{\partial X}{\partial \eta} \equiv 0, \qquad \frac{\partial Y}{\partial \eta} \equiv 0, \qquad \frac{\partial \Gamma}{\partial \eta} \equiv 0.$$

Conséquence X, Y, Γ, sont des fonctions de la seule variable α, conditions que nous supposerons réaliser dans tout ce qui suit.

Etude du cas A mouvement sur le plan parfaitement poli. — La liaison étant holonome et indépendante du temps on peut constituer une forme Ω_s réduite (cf. chap. II, § VII, remarque 3) obtenue en tenant compte de la liaison.

$$\Omega_s = M d\dot{\xi} \wedge d\xi + M(k^2 + a^2) d\dot{\alpha} \wedge d\alpha$$
$$- M[\dot{\xi}\, d\dot{\xi} + (k^2 + a^2)\dot{\alpha}\, d\dot{\alpha} + a\dot{\alpha}\dot{\alpha}^2\, d\alpha] \wedge dt$$
$$+ [X d\xi + (\Gamma - aY) d\alpha] \wedge dt.$$

Conformément au lemme du cas $d\Omega \neq 0$, nous déterminons 4 champs ξ, t, u, v, dont les composantes sont données par le tableau suivant :

	$d\dot{\xi}$	$d\dot{\alpha}$	$d\xi$	$d\alpha$	dt
ξ	$\frac{1}{M}$	$-\frac{\dot{\xi}}{M(k^2+a^2)\dot{\alpha}}$	0	0	0
t	0	$-\frac{1}{M(k^2+a^2)\dot{\alpha}}$	0	0	0
u	0	$\frac{Ma\dot{a}\alpha^2 - \Gamma + aY}{M^2(k^2+a^2)}$	0	$-\frac{\dot{\alpha}}{M}$	0
v	0	$-\frac{X}{M(k^2+a^2)\dot{\alpha}}$	$-\frac{1}{M}$	0	0

On en déduit les formes invariantes

$$\pi^1 = i(\xi)\Omega_1 = d\xi - \frac{\dot{\xi}}{\dot{\alpha}}\, d\alpha, \qquad i(t)\Omega_s = dt - \frac{d\alpha}{\dot{\alpha}}$$

le système des formes complètement intégrables

$$\pi^3 = i(u)\Omega_s = (k^2+a^2)\dot{\alpha}\, d\dot{\alpha} + a\dot{a}\dot{\alpha}^2\, d\alpha - \frac{\Gamma - aY}{M}\, d\alpha,$$

$$\pi^4 = i(v)\Omega_s = d\dot{\xi} - \frac{X}{M\dot{\alpha}}\, d\alpha$$

π^3 est une différentielle exacte. en intégrant on obtient

$$\dot{\alpha}^2(k^2+a^2) - \frac{2}{M}\int(\Gamma - aY)\, d\alpha = \text{const.}$$

π^4 est fermée modulo π^3, π^1 et π^2 sont des formes fermées modulo π^3, π^4. Le système est donc intégrable par quadratures.

Étude du cas B : glissement du solide sur le plan rugueux. — Il n'y a pas un avantage appréciable à utiliser une forme réduite, un choix convenable de champs ξ, t, u, v, permettant de former aisément des formes différentielles ne dépendant pas de la composante normale de la réaction du plan. Nous prendrons donc

$$\begin{aligned}\Omega = {} & M\, d\dot{\xi} \wedge d\xi + M\, d\dot{\eta} \wedge d\eta + Mk^2\, d\dot{\alpha} \wedge d\alpha \\ & - M(\dot{\xi}\, d\dot{\xi} + \dot{\eta}\, d\dot{\eta} + k^2\dot{\alpha}\, d\dot{\alpha}) \wedge dt + (X\, d\xi + Y\, d\eta + \Gamma\, d\alpha) \wedge dt \\ & N[d\eta + a\, d\alpha + \varepsilon f(d\xi - b\, d\alpha) + \varepsilon_1 \delta\, d\alpha] \wedge dt.\end{aligned}$$

En appliquant toujours le lemme du cas $d\Omega \neq 0$, nous déterminons

6 champs ξ, η, t, u, v, w, dont les composantes sont données dans le tableau suivant :

	$d\dot\xi$	$d\dot\eta$	$d\dot\alpha$	$d\xi$	$d\eta$	$d\alpha$	dt
ξ	$\frac{1}{M}$	0	$-\frac{\dot\xi}{Mk^2\dot\alpha}$	0	0	0	0
η	0	$\frac{1}{M}$	$-\frac{\dot\eta}{Mk^2\dot\alpha}$	0	0	0	0
t	0	0	$-\frac{1}{Mk^2\dot\alpha}$	0	0	0	0
u	0	0	$\frac{(a-\varepsilon fb+\varepsilon_1\delta)Y-\Gamma}{Mk^2}$	0	$(a-\varepsilon fb+\varepsilon_1\delta)\dot\alpha$	$-\dot\alpha$	0
v	-1	εf	$-\frac{X-\varepsilon fY}{Mk^2\dot\alpha}$	0	0	0	0
w	0	0	$\frac{a\dot\alpha}{Mk^2}$	0	$-\frac{1}{M}$	$-\frac{a}{Mk^2}$	0

On en déduit les formes invariantes

$$\pi^1 = i(\xi)\,\Omega = d\xi - \frac{\dot\xi}{\dot\alpha}\,d\alpha\,; \qquad \pi^2 = i(\eta)\,\Omega = d\eta - \frac{\dot\eta}{\dot\alpha}\,d\alpha\,;$$

$$\pi^3 = i(t)\,\Omega = dt - \frac{1}{\dot\alpha}\,d\alpha$$

le système de formes complètement intégrale

$$\pi^4 = i(u)\,\Omega = [(a-\varepsilon fb+\varepsilon_1\delta)\,Y-\Gamma]\,d\alpha - M(a-\varepsilon fb+\varepsilon_1\delta)\dot\alpha\,d\eta + Mk^2\dot\alpha\,d\dot\alpha$$

$$\pi^5 = i(v)\,\Omega = Md(\dot\xi-\varepsilon f\dot\eta)-(X-\varepsilon fY)\frac{d\alpha}{\dot\alpha}$$

$$\pi^6 = i(w)\,\Omega = d\dot\eta + a\,d\dot\alpha + \dot a\dot\alpha\,d\alpha.$$

Pour le calcul de $i(w)\,\Omega$ on tient compte de la valeur de N calculée précédemment. La forme π^6 n'est autre que la différentielle de la liaison. La forme π^4 compte tenu de la liaison est une équation différentielle linéaire en $\dot\alpha^2$ qu'on intégrerait par quadratures.

$$\frac{M}{2}[k^2+a^2-\varepsilon fba+\varepsilon_1\delta a]\,d\dot\alpha^2 + M\dot a(a-\varepsilon fb+\varepsilon_1\delta)\,\dot\alpha^2 d\alpha + [(a-\varepsilon fb+\varepsilon_1\delta)\,Y-\Gamma]\,d\alpha = 0.$$

La forme π^5 est fermée module π^4. Les formes π^1 et π^3 sont fermées modul oπ^4 et π^5. Le système s'intègre donc par des quadratures.

Étude du cas C: roulement sans glissement. — Nous distinguerons deux cas suivant qu'on néglige ou non le couple de résistance au roulement.

a) $\delta = 0$: Les deux liaisons sont alors de puissance nulle et indépendantes du temps; on peut donc former comme nous l'avons démontré au chapitre III § IV, une forme réduite en tenant compte des deux liaisons $\dot{\xi} - b\dot{\alpha} = 0$, $\dot{\eta} + a\dot{\alpha} = 0$

$$\begin{aligned}\Omega_r = \mathrm{M}(b^2 + a^2 + k^2)\, d\dot{\alpha} \wedge d\alpha \\ - \mathrm{M}[(b^2 + a^2 + k^2)\, \dot{\alpha} d\dot{\alpha} + (a\dot{a} + b\dot{b})\, \dot{\alpha}^2 d\alpha] \wedge dt \\ + (\mathrm{X}b - \mathrm{Y}a + \Gamma)\, d\alpha \wedge dt.\end{aligned}$$

Comme $d\Omega_r = 0$ à la transformation infinitésimale définie par l'opérateur $\theta(\mathrm{T})$, correspond l'intégrale première

$$\frac{\mathrm{M}}{2}(b^2 + a^2 + k^2)\, \dot{\alpha}^2 - \int (\mathrm{X}b - \mathrm{Y}a + \Gamma)\, d\alpha = \text{const.}$$

Le temps t étant défini en fonction de α au moyen de la forme fermée modulo la précédente

$$i(t)\, \Omega_r = dt - \frac{1}{\dot{\alpha}}\, d\alpha.$$

b) $\delta \neq 0$. La liaison $\dot{\xi} - b\dot{\alpha} = 0$ est de puissance nulle et indépendante du temps, l'autre $\dot{\eta} + a\dot{\alpha} = 0$ ne l'est pas. En conséquence nous ne ferons que la réduction partielle correspondant à la première.

$$\begin{aligned}\Omega_r = \mathrm{M}(b^2 + k^2)\, d\dot{\alpha} \wedge d\alpha + \mathrm{M} d\dot{\eta} \wedge d\eta \\ - \mathrm{M}[(b^2 + k^2)\, \dot{\alpha} d\dot{\alpha} + b\dot{b}\dot{\alpha}^2 d\alpha + \dot{\eta} d\dot{\eta}] \wedge dt \\ + (\mathrm{X}b + \Gamma)\, d\alpha \wedge dt + \mathrm{Y} d\eta \wedge dt \\ \mathrm{N}(d\eta + a\, d\alpha + \varepsilon_1 \delta\, d\alpha) \wedge dt,\end{aligned}$$

Employant toujours le même principe on détermine les champs η, t, u, w, qui au moyen de l'opérateur $i(\ )$ engendrent :

1° les formes invariantes π^1, π^2

$$\pi^1 = i(\eta)\, \Omega_r = d\eta - \frac{\dot{\eta}}{\dot{\alpha}}\, d\alpha\,; \qquad \pi^2 = i(t)\, \Omega_r = dt - \frac{1}{\dot{\alpha}}\, d\alpha.$$

2° les formes π^3, π^4, constituant un système complètement intégrable

$$\begin{aligned}\pi^3 = i(u)\, \Omega_r = \mathrm{M}(b^2 + k^2)\, \dot{\alpha} d\dot{\alpha} + \mathrm{M} b\dot{b}\dot{\alpha}^2 d\alpha - \mathrm{M}(a + \varepsilon_1 \delta)\, \dot{\alpha} d\dot{\eta} \\ - [\mathrm{X}b + \Gamma - (a + \varepsilon_1 \delta)\, \mathrm{Y}]\, d\alpha\end{aligned}$$

$$\pi^4 = i(w)\, \Omega_r = d(\dot{\eta} + a\dot{\alpha})$$

π^3 compte tenu de la dernière qui est la différentielle de la relation de liaison est une équation différentielle linéaire en $\dot{\alpha}^2$ qui s'intègre par quadratures

$$\frac{\mathrm{M}}{2}(b^2+k^2+a^2+a\varepsilon_1\delta)\,d\dot{\alpha}^2+\mathrm{M}(b\dot{b}+a\dot{a}+\dot{a}\varepsilon_1\delta)\,\dot{\alpha}^2\,d\alpha \\ -[\mathrm{X}b+\Gamma-(a+\varepsilon_1\delta)\,\mathrm{Y}]\,d\alpha=0,$$

π^2 fermée modulo π^3 définit le temps t en fonction de α, au moyen d'une quadrature.

IV. Un solide de révolution homogène, pesant, de masse M, de centre de gravité G, est prolongé par une tige dirigée suivant son axe de révolution Gz. Ce solide est en contact avec un plan horizontal fixe Ox_1y_1, la tige Gz glisse sans frottement dans une rainure orientable dont l'axe est la normale fixe Oz_1 au plan Ox_1y_1. Étudier le roulement sans glissement du solide sur le plan puis son glissement, le coefficient de frottement f du solide sur le plan étant constant.

La méridienne de la surface de révolution limitant le solide est définie comme enveloppe des plans tangents à la surface. Par rapport à un système d'axes liés au corps, λ étant l'angle polaire de Gz avec la normale GH au plan tangent, on a :

$$z\cos\lambda-v\sin\lambda-b(\lambda)=0,$$
$$z\sin\lambda+v\sin\lambda+b'(\lambda)=0.$$

θ étant l'angle (Gz_1, Gz) $\theta+\lambda=\pi$, P étant le point de contact du corps et du plan, les composantes de GP par rapport aux axes Gv_1 (horizontale du plan Oz_1G) et Gz_1 (verticale ascendante) sont respectivement $b'(\pi-\theta)$, $-b(\pi-\theta)$.

Soient respectivement $\mathrm{M}c^2$, $\mathrm{M}a^2$ les moments d'inertie du solide par rapport à Gz et un axe perpendiculaire, ρ, α, ζ, les coordonnées cylindro-polaires de G, ψ, θ, φ, les angles classiques d'Euler, paramètres de la rotation du corps autour de G.

La forme extérieure associée au solide libre, en utilisant le trièdre $Guvz$ (Gu horizontal) mobile dans le corps et dans l'espace s'obtient soit en appliquant pour le mouvement autour de G la formule établie au chapitre I § II c avec $\Omega^1=\omega^1=d\theta$, $\Omega^2=\omega^2=\sin\theta\,d\psi$, $\Omega^3=\omega^3\cot\theta=\cos\theta\,d\psi$ soit directement comme dérivée extérieure de la forme de Pfaff génératrice de l'invariant intégral

$$\dot{\rho}\,d\rho+u\,d\alpha+\dot{\zeta}\,d\zeta+a^2p\omega^1+a^2q\omega^2+c^2r\omega^3-\mathrm{H}\,dt$$

avec

$\omega^1=d\theta$, $\quad\omega^2=\sin\theta\,d\psi$, $\quad\omega^3=d\varphi=\cos\theta\,d\psi$, $\quad u=\rho^2\dot{\alpha}$, p, q, r, composantes de la vitesse de rotation absolue du corps, sur les axes mobiles $Guvz$

$$2H = \dot{\rho}^2 + \frac{u^2}{\rho^2} + \dot{\zeta}^2 + a^2(p^2 + q^2) + c^2 r^2 + g\zeta$$

On obtient ainsi

$$\frac{\Omega}{M} = d\dot{\rho} \wedge d\rho + du \wedge d\alpha + d\dot{\zeta} \wedge d\zeta - \left(\dot{\rho}\, d\dot{\rho} + \dot{\zeta}\, d\dot{\zeta} + \frac{u}{\rho^2} du - \frac{u^2}{\rho^3} d\rho\right) \wedge dt$$
$$- g d\zeta \wedge dt + a^2 dp \wedge \omega^1 + a^2 dq \wedge \omega^2 + c^2 dr \wedge \omega^3 - c^2 r\, \omega^1 \wedge \omega^2$$
$$- a^2 q \operatorname{cotg} \theta\, \omega^2 \wedge \omega^1 - [a^2(p\, dp + q\, dq) + c^2 r\, dr] \wedge dt$$

Le champ caractéristique E pour le solide libre a pour composantes :

$$\frac{u^2}{\rho^3},\ 0,\ -g,\ q^2 \operatorname{cotg} \theta - \frac{c^2}{a^2} rq,$$
$$\frac{c^2}{a^2} rp - pq \operatorname{cotg} \theta,\ 0,\ \dot{\rho},\ \frac{u}{\rho^2},\ \dot{\zeta},\ p,\ q,\ r,\ 1,$$

les différentielles des variables étant rangées dans l'orde : $d\dot{\rho}$, du, $d\dot{\zeta}$, dp. dq, dr, $d\rho$, $d\alpha$, $d\zeta$, ω^1, ω^2, ω^3, dt

A. Étude du roulement sans glissement du solide.

1) **Liaisons.** La tige Gz demeure toujours dans le plan $Oz\,G$, ce qui se traduit par la liaison holonome $\alpha = \psi + \frac{\pi}{2}$; à notre point de vue c'est une liaison de puisance nulle

$$a_1 = \frac{u}{\rho^2} - \frac{\sin\theta}{q} = 0,$$

$$P^1 = \frac{L}{M}(\dot{\alpha} - \dot{\psi}) \qquad \text{forme} \qquad \Omega^1 = \frac{L}{M}\left(d\alpha - \frac{\omega^2}{\sin\theta}\right) \wedge dt$$

Le roulement sans glissement du corps sur le plan se traduit par trois liaisons de puissance nulle. En écrivant que les composantes de $\vec{V}_p$ sont nulles par rapport au trièdre Gu, Gv, Gy, on obtient :

$$a^2 = -\frac{u}{\rho} - (b'\sin\theta + b\cos\theta)q + (b\sin\theta - b'\cos\theta)r = 0$$

$$P^2 = \frac{X}{M}[-\rho\dot{\alpha} - (b'\sin\theta + b\cos\theta)q + (b\sin\theta - b'\cos\theta)r]$$

$$\Omega^2 = \frac{X}{M}[-\rho\, d\alpha - (b'\sin\theta + \cos\theta)\,\omega^2 + (b\sin\theta - b'\cos\theta)\omega^3] \wedge dt$$

$$a^3 = \dot{\rho} + bp = 0, \qquad P^3 = \frac{Y}{M}(\dot{\rho} + bp), \qquad \Omega^3 = \frac{Y}{M}(d\rho + b\, d\theta)$$

$$a^4 = \dot{\zeta} + b'p = 0. \qquad P^4 = \frac{Z}{M}(\dot{\zeta} + b'p), \qquad \Omega^4 = \frac{Z}{M}(d\zeta + b'\, d\theta).$$

Les six premières composantes de champs de liaison e^1. e^2. e^3, e^4, non toutes nulles sont données dans le tableau (les champs de liaison n'ont que n composantes non toutes nulles en coordonées Hamiltoniennes).

	$d\dot{\rho}$	du	$d\zeta$	dp	dq	dr
e^1	0	1	0	0	$-\dfrac{1}{a^2 \sin\theta}$	0
e^2	0	$-\rho$	0	0	$-\dfrac{b\cos\theta + b'\sin\theta}{a^2}$	$\dfrac{b\sin\theta - b'\cos\theta}{c^2}$
e^3	1	0	0	$\dfrac{b}{a^2}$	0	0
e^4	0	0	1	$\dfrac{b'}{a^2}$	0	0

La condition de compatibilité de l'ensemble des liaisons se déduit du déterminant de la matrice carrée symétrique $\|i(e^h)\, da^k\|$

$$\begin{Vmatrix} \dfrac{1}{\rho^2}+\dfrac{1}{a^2\sin^2\theta} & \dfrac{-1}{\rho}+\dfrac{b'\sin\theta+b\cos\theta}{a^2\sin\theta} & 0 & 0 \\ \dfrac{-1}{\rho}+\dfrac{b'\sin\theta+b\cos\theta}{a^2\sin\theta} & 1+\dfrac{(b\cos\theta+b'\sin\theta)^2}{a^2}+\dfrac{(b\sin\theta-b'\cos\theta)^2}{c^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\dfrac{b^2}{a^2} & \dfrac{bb'}{a^2} \\ 0 & 0 & \dfrac{bb'}{a^2} & 1+\dfrac{b'}{a^2} \end{Vmatrix},$$

$$\left(1+\frac{b^2}{a^2}+\frac{b'^2}{a^2}\right)\left[\left(\frac{1}{a\sin\theta}+\frac{b\cos\theta+b'\sin\theta}{a\rho}\right)^2 + \frac{(b\sin\theta-b'\cos\theta)^2}{c^2}\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{a^2\sin^2\theta}\right)\right] \neq 0.$$

Les valeurs des réactions s'obtiennent en calculant les $i(\mathrm{E})\, da^k$ (k de 1 à 4)

$$i(\mathrm{E})\, da^1 = -\frac{c^2}{a^2\sin\theta}\, rp + \frac{2pq\cos\theta}{\sin^2\theta} - \frac{2u\dot{\rho}}{\rho^3}$$

$$i(\mathrm{E})\, da^2 = (b\cos\theta + b'\sin\theta)\left(pq\cot\theta - \frac{c^2}{a^2}\, rp\right) + \frac{u\dot{\rho}}{\rho^2} + (b+b'')(q\sin\theta + r\cos\theta)p$$

$$i(\mathrm{E})\, da^3 = \frac{u^2}{\rho^2} + b\left(q^2\cot\theta - \frac{c^2}{a^2}\, rq\right) - b'p^2$$

$$i(\mathrm{E})\, da^4 = -g + b'\left(q^2\cot\theta - \frac{c^2}{a^2}\, rq\right) - b''p^2$$

$$\left(1+\frac{b^2}{a^2}+\frac{b'^2}{a^2}\right)\frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{M}}=-\left(1+\frac{b'^2}{a^2}\right)\frac{u^2}{\rho^2}-\frac{bb'}{a^2}g$$
$$+b'p^2\left(1+\frac{b'^2}{a^2}-\frac{bb''}{a^2}\right)+bq\left(\frac{c^2}{a^2}r-q\operatorname{cotg}\theta\right)$$
$$\left(1+\frac{b^2}{a^2}+\frac{b'^2}{a^2}\right)\frac{\mathrm{Z}}{\mathrm{M}}=\frac{bb'}{a^2}\frac{u^2}{\rho^3}+\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)g+p^2\left(b''+b\,\frac{bb''-b'^2}{a^2}\right)$$
$$+b'q\left(\frac{c^2}{a^2}r-q\operatorname{cotg}\theta\right)$$
$$\Delta\frac{\mathrm{X}}{\mathrm{M}}=\left(\frac{1}{\rho}-\frac{b\cos\theta+b'\sin\theta}{a^2\sin\theta}\right)\left(\frac{c^2rp}{a^2\sin\theta}-\frac{2pq\operatorname{cotg}\theta}{\sin\theta}+\frac{2u\dot\rho}{\rho^3}\right)$$
$$+\left(\frac{1}{\rho^2}\,\frac{1}{a^2\sin^2\theta}\right)\Big[(b\cos\theta+b'\sin\theta)\left(\frac{c^2rp}{a^2}-pq\operatorname{cotg}\theta-\frac{u\dot\rho}{\rho^2}\right)$$
$$-(b+b'')p(q\sin\theta+r\cos\theta)\Big]$$
$$\Delta\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{M}}=\left(-\frac{1}{\rho}+\frac{b\cos\theta+b'\sin\theta}{a^2\sin\theta}\right)\Big[\frac{u\dot\rho}{\rho^2}+(b+b'')p(q\sin\theta+r\cos\theta)$$
$$+(b\cos\theta+b'\sin\theta)\left(pq\operatorname{cotg}\theta-\frac{c^2}{a^2}rp\right)\Big]$$
$$+\left[1+\frac{(b\cos\theta+b\sin\theta)^2}{a^2}+\frac{(b\sin\theta-b'\cos\theta)^2}{c^2}\right]$$
$$\left(\frac{c^2}{a^2\sin\theta}rp-\frac{2pq\operatorname{cotg}\theta}{\sin\theta}+2u\,\frac{\dot\rho}{\rho^3}\right)$$

Δ désignant

$$\left(\frac{1}{a\sin\theta}+\frac{b\cos\theta+b'\cos\theta}{a\rho}\right)^2+\frac{(b\sin\theta-b'\cos\theta)^2}{c^2}\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{a^2\sin^2\theta}\right).$$

2. Équations différentielles du mouvement. — Les liaisons compatibles donnent

$$u=\frac{\rho^2q}{\sin\theta},\quad r=q\,\frac{\dfrac{\rho}{\sin\theta}+b\cos\theta+b'\sin\theta}{b\sin\theta-b'\cos\theta},\quad \dot\rho=-bp,\quad \dot\zeta=-b'p$$

($b\sin\theta-b'\cos\theta\neq 0$ puisque l'enveloppe n'est pas réduite à un point.)

Comme elles sont de puissance nulle, on peut remplacer $d\alpha$ par $\dfrac{\omega^2}{\sin\theta}$, ω^3 par $\dfrac{\dfrac{\rho}{\sin\theta}+b\cos\theta+b'\sin\theta}{b\sin\theta-b'\cos\theta}$, $d\rho$ par $-b\,d\theta$, $d\zeta$ par $-b'd\theta$ dans Ω pour obtenir une forme réduite. Mais $d\rho+bd\theta$ étant une différentielle exacte, ρ est une fonction de θ, $\rho=\mathrm{B}(\theta)+\mathrm{C}$ (C const.); α, φ, ζ, ne figurant pas dans Ω on peut obtenir une forme réduite $\dfrac{\Omega_s}{\mathrm{M}}$

définie sur une famille de variétés V_5 (sous-variétés de V_{13} définies par les liaisons et la famille $\rho = B(\theta) + C$] comme différentielle extérieure de la forme de Pfaff

$$(b^2 + b'^2 + a^2)p\,d\theta$$
$$+\left[\frac{(B+C)^2}{\sin^2\theta} + a^2 + c^2\left(\frac{\dfrac{B+C}{\sin\theta} + b\cos\theta + b'\sin\theta}{b\sin\theta - b'\cos\theta}\right)^2\right]q\omega^2 - H_1\,dt$$

avec

$$2H_1 = (b^2 + b'^2 + a^2)p^2$$
$$+\left[\frac{(B+C)^2}{\sin^2\theta} + a^2 + c^2\left(\frac{B+C+\sin\theta(b\cos\theta + b'\sin\theta)}{\sin\theta(b\sin\theta - b'\cos\theta)}\right)^2\right]q^2 - 2bg$$

b, b', B, étant des fonctions de θ, $q = \dot\psi\sin\theta$, $\omega^2 = \sin\theta\,d\psi$, on peut effectuer les changements de paramètres de vitesse

$$\bar p = (b^2 + b'^2 + a^2)p$$

$$\bar q = \left[(B+C)^2 + a^2\sin^2\theta + c^2\left(\frac{B+C+\sin\theta(b\cos\theta + b'\sin\theta}{b\sin\theta - b'\cos\theta}\right)^2\right]\frac{q}{\sin\theta}$$

$$\frac{\Omega_s}{M} = d\left(\bar p\,d\theta + \bar q\,d\psi - \bar H_1\,dt\right)$$

avec

$$2\bar H_1 = \frac{1}{b^2 + b'^2 + a^2}\bar p^2$$
$$+ \frac{\bar q^2}{(B+C)^2 + a^2\sin^2\theta + c^2\left(\dfrac{B+C+\sin\theta(b\cos\theta + b'\sin\theta)}{b\sin\theta - b'\cos\theta}\right)^2} - 2bg$$

$d\left(\dfrac{\Omega_s}{M}\right)$ étant nulle, à toute transformation infitésimale correspond une intégrale première, aux transformations infinitésimales

$$t(0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1) \quad \text{et} \quad \Psi(0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0)$$

correspondent respectivement l'intégrale des forces vives et l'intégrale linéaire $\bar q = \text{const.}$; l'intégration s'achève par quadratures.

B. Étude du glissement du solide sur le plan.

1. **Liaisons.** — Le glissement sans frottement de la tige dans la rainure est toujonrs caractérisé par

$$a^1 = \frac{u}{\rho^2} - \frac{q}{\sin\theta} = 0 \qquad \Omega^1 = \frac{L}{M}\left(d\alpha - \frac{\omega^2}{\sin\theta}\right) \wedge dt$$

Le contact du solide avec le plan est caractérisé par $a^2 = \zeta + b'p = 0$

$$\Omega^2 = \frac{N}{M}\{d\zeta + f\cos\sigma[\rho\, d\alpha + (b'\sin\theta + b\cos\theta)\,\omega^2 + (b'\cos\theta - b\sin\theta)\,\omega^3] - f\sin\sigma\,(d\rho + b\,\omega^1)\}\,\Lambda\, dt$$

σ étant l'angle de $\vec{V}_g$ vitesse de glissement avec Gu, λ la grandeur de $\vec{V}_g$

$$\frac{\dot\rho + bp}{\sin\sigma} = \frac{-\dfrac{u}{\rho} - b'(r\cos\theta + q\sin\theta) + b(r\sin\theta - q\cos\theta)}{\cos\sigma} = \lambda.$$

Les champs des liaisons ont pour composantes :

$$e^1\left(0,\ 1,\ 0;\ \ 0,\ -\frac{1}{a^2\sin\theta},\ 0\right)$$

$$e^2\left(-f\sin\sigma,\ \rho f\cos\sigma,\ 1,\ -\frac{bf\sin\sigma}{a^2},\ \frac{f\cos\sigma}{a^2}(b\cos\theta + b'\sin\theta),\ \frac{f\cos\sigma}{c^2}(b'\cos\theta - b\sin\theta)\right)$$

$$i(e^1)da^1 = \frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{a^2\sin^2\theta},\quad i(e^2)da^1 = \frac{f\cos\sigma}{\rho} - \frac{f\cos\sigma(b\cos\theta + b'\sin\theta)}{a^2\sin\theta}$$

$$i(e^1)\,da^2 = 0,\qquad i(e^2)\,da^2 = 1 - f\,\frac{bb'}{a^2}\sin\sigma.$$

Les liaisons sont compatibles si

$$\left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{a^2\sin^2\theta}\right)\left(1 - f\frac{bb'}{a^2}\sin\sigma\right) \neq 0.$$

Les facteurs de liaisons se déduisent du calcul de $i(\mathrm{E})\,da^1$, $i(\mathrm{E})\,da^2$

$$\Lambda = \frac{g + b''p^2 + b'\left(\dfrac{c^2}{a^2}rq - q^2\cot g\,\theta\right)}{1 - f\dfrac{bb^2}{a^2}\sin\sigma}$$

$$\mathrm{L}\left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{a^2\sin^2\theta}\right) = \frac{2u\dot\rho}{\rho^3} + \frac{c^2rp}{a^2\sin\theta} - 2pq\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} + \frac{f\cos\sigma}{1 - f\dfrac{bb'}{a^2}\sin\sigma}\left[g + b''p^2 + b'\left(\frac{c^2}{a^2}rq - q^2\cot g\,\theta\right)\right]$$

2. Équations différentielles du mouvement. — La première liaison holonome nous permet d'éliminer u et $d\alpha$, $u = \rho^2\dot\psi$, $d\alpha = d\psi$.

L'introduction des variables λ et σ conduit à effectuer le changement de variables

$$\dot{\rho} = \lambda \sin \sigma - bp \qquad r = \frac{\lambda \cos \sigma + \rho\dot{\psi} + \sin \theta (b' \sin \theta + b \cos \theta)\dot{\psi}}{b \sin \theta - b' \cos \theta}$$

La deuxième liaison permet d'éliminer $\dot{\zeta}$ et $d\zeta$, $\dot{\zeta} = -b'p$

$$d\zeta = f \sin \sigma (d\rho + b\, d\theta) - f \cos \sigma [(\rho + b')\, d\psi + (b' \cos \theta - b \sin \theta)\, d\varphi + (\dot{\zeta} - f\lambda)\, dt].$$

La forme réduite $\frac{\Omega_s}{M}$ dépend des 9 différentielles des variables $\lambda, \sigma, \rho, \dot{\psi}, \psi, \varphi, \theta, p, t$, mais ne dépend pas des variables t, ψ, φ,

$$\begin{aligned}\frac{\Omega_s}{M} = d\{ & (\lambda \sin \sigma - bp)\, d\rho + \rho^2 \dot{\psi}\, d\psi - b' pf \sin \sigma (d\rho + b d\theta) \\ & + b'pf \cos \sigma [(\rho + b')\, d\psi + (b' \cos \theta - b \sin \theta)\, d\varphi] \\ & + b'p(b'p + f\lambda)\, dt + a^2 p d\theta + a^2 \dot{\psi} \sin^2 \theta\, d\psi \\ & + c^2 \frac{\lambda \cos \sigma + \rho\dot{\psi} + \sin \theta (b \cos \theta + b' \sin \theta)}{b \sin \theta - b' \cos \theta} (d\varphi + \cos \theta\, d\psi) - T dt \} \\ & + g\{ f \sin \sigma (d\rho + bd\theta) - f \cos \sigma [(\rho + b')\, d\psi \\ & + (b' \cos \theta - b \sin \theta)\, d\varphi)]\} \wedge dt,\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}2T = & (\lambda \sin \sigma - bp)^2 + \rho^2 \dot{\psi}^2 + b'^2 . p^2 + a^2 (p^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta \\ & + c^2 \left(\frac{\lambda \cos \sigma + \rho\dot{\psi} + \sin \theta (b \cos \theta + b' \sin \theta)\dot{\psi}}{b \sin \theta - b' \cos \theta} \right)^2.\end{aligned}$$

On ne connaît pour $\frac{\Omega_s}{M}$ que trois transformations infinitésimales évidentes engendrées par les champs

$$t(0, 0, 0, \ldots, 1) \quad \varphi(0, 0, \ldots, 0, 0, 1, 0) \quad \Psi(0, 0, \ldots, 0, 1, 0, 0)$$

car il suffit de remarquer que si un tenseur antisymétrique $k_{\alpha\beta}$ ne dépend pas d'une variable ρ^{2n}, la forme $\Omega = k_{\alpha\beta} d\rho^\alpha \wedge d\rho^\beta$ définie sur V_{2n+1} admet la transformation infinitésimale (0, 0, ... 1). La solution du problème dépend de l'intégration d'un système de 5 formes de Pfaff complètement intégrables en $d\lambda$, $d\sigma$, $d\dot{\psi}$, $d\rho$, $d\theta$ dont on ne connaît pas la solution en termes finis.