JEAN-PAUL SPEDER

Analyticité des conditions de Whitney strictes

Annales de l'institut Fourier, tome 23, nº 3 (1973), p. 215-226
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1973__23_3_215_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
23,3 (1973), 215-226

ANALYTICITE DES CONDITIONS DE WHITNEY STRICTES

par J. P. SPEDER

Introduction

Soient X un espace C-analytique réduit de dimension pure, X_{lisse} la partie lisse de X, Y un sous-espace lisse de X de dimension pure strictement inférieure à la dimension de X.

Dans ce papier, nous montrons que l'ensemble des points de Y en lesquels le couple $(X_{\text{lisse}} - Y, Y)$ vérifie les conditions de Whitney strictes au sens d'Hironaka ([2] Définition 5.1) forme un ouvert analytique dense de Y.

Il en résulte donc une façon plus "économique" de construire une stratification de Whitney ([3] Theorem 19.2). De plus, la question de savoir si l'ensemble des points de Y en lesquels le couple $(X_{\text{lisse}} - Y, Y)$ vérifie les conditions de Whitney "normales", forme un ouvert analytique est alors équivalente à celle de savoir si les conditions de Whitney "normales" (en un point) sont des conditions "ouvertes" ([2] Lemma 5.2) – i.e. sont vraies au voisinage de ce point, ce qui semble raisonnable si l'on veut parler à leur propos d'équisingularité ([4] Theorem 8.1) ou même d'équimultiplicité ([2] Corollary 6.2) – ou encore si les conditions de Whitney (en un point) impliquent les conditions strictes.

De tout cela, il apparaît bien que les conditions strictes, outre le fait qu'elles décrivent directement plus précisément le contact de deux variétés, forment une "bonne" notion.

Ayant identifié C^M au produit cartésien $C^s \times C^p$ (où $M = s + p$, $s > 1$, $p \geqslant 0$) à l'aide du système canonique de coordonnées $(z_1, -, z_M)$, considérons un sous-ensemble C-analytique réduit X d'un ouvert $D \times Y$ de $\mathbf{C}^M$ de codimension r en tout point ($s > r > 0$). Nous supposons que $Y \subset X$ et que X est défini globalement par des fonctions holomorphes $f_1, -, f_q$ (i.e. $f_1, -, f_q$ engendrent l'idéal des fonctions qui s'annulent sur X).

Dans ces conditions, si I est l'idéal de Y dans X et J l'idéal jacobien de X, I est engendré par $z_1, -, z_s$ et J est l'idéal engendré par les déterminants :

$$D(f_{j_1}, -, f_{j_r}; z_{i_1}, -, z_{i_r}) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_{j_1}}{\partial z_{i_1}}, \ldots\ldots, \dfrac{\partial f_{j_1}}{\partial z_{i_r}} \\ | \qquad\qquad\qquad | \\ \dfrac{\partial f_{j_r}}{\partial z_{i_1}}, \ldots\ldots, \dfrac{\partial f_{j_r}}{\partial z_{i_r}} \end{vmatrix}$$

où $i_1, -, i_r \in \{1, -, M\} \qquad j_1, -, j_r \in \{1, -, q\}$.

Notons $\omega : \hat{X} \to X$ l'éclatement de X le long de IJ, $\hat{Y}$ l'espace réduit de support $\omega^{-1}(Y)$, $\hat{I}$ l'idéal de $\mathcal{O}_{\hat{X}}$ définissant $\hat{Y}$ et pour $i_1, -, i_r \in \{1, -, M\}$ et $j_1, -, j_r \in \{1, -, q\}$, $\hat{D}(f_{j_1}, -, f_{j_r}; z_{i_1}, -, z_{i_r})$ la fonction $D(f_{j_1}, -, f_{j_r}; z_{i_1}, -, z_{i_r}) \circ \omega$.

Pour tout r-uple $(i_1, -, i_r)$ de $\{1, -, M\}$ et tout r-uple $(j_1, -, j_r)$ de $\{1, -, q\}$ considérons l'ouvert analytique :

$$\hat{W}_{(i_1,-,i_r),(j_1,-,j_r)} = \{\hat{R} \in \hat{Y} : \hat{D}(f_{j_1}, -, f_{j_r}; z_{i_1}, -, z_{i_r})_{\hat{R}} \; \mathcal{O}_{\hat{X},\hat{R}} = J\, \mathcal{O}_{\hat{X},\hat{R}},$$

$$\hat{D}(f_{j_1}, -, f_{j_r}; z_{s+k}, z_{i_1}, -, \hat{z}_{i_l}, -, z_{i_r})_{\hat{R}} \in \hat{I}\, J\; \mathcal{O}_{\hat{X},\hat{R}}$$

pour $1 \leqslant k \leqslant p$ et $1 \leqslant l \leqslant r$,

$$\Big(\sum_{i=1}^{s} z_i \circ \omega\, \hat{D}(f_{j_1}, -, f_{j_r}; z_i, z_{i_1}, -, \hat{z}_{i_l}, -, z_{i_r})\Big)_{\hat{R}} \in \hat{I}\, IJ\; \mathcal{O}_{\hat{X},\hat{R}}$$

pour $1 \leqslant l \leqslant r\}$

Notons enfin par $\hat{W} = \bigcup_{\substack{(i_1,-,i_r) \subset \{1,-,M\} \\ (j_1,-,j_r) \subset \{1,-,q\}}} \hat{W}_{(i_1,-,i_r),(j_1,-,j_r)}$

l'ouvert analytique réunion des $\hat{W}_{(i_1,-,i_r),(j_1,-,j_r)}$

Remarque. – Dans le cas où X est une hypersurface définie par une fonction f, l'ouvert analytique $\hat{W}$ devient :

$$\hat{W} = \{ \hat{R} \in \hat{Y} : \left(\frac{\partial f}{\partial z_{s+k}} \circ \omega\right)_{\hat{R}} \in \hat{I}\, J\, \mathcal{O}_{\hat{X},\hat{R}} \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant k \leqslant p \ ,$$

$$\left(\sum_{i=1}^{s} z_i \circ \omega \frac{\partial f}{\partial z_i} \circ \omega\right)_{\hat{R}} \in \hat{I}\, IJ\, \mathcal{O}_{\hat{X},\hat{R}} \}$$

PROPOSITION. – *Soit* S *un point de* Y. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) *Le couple* $(X_{\text{lisse}} - Y, Y)$ *vérifie les conditions de Whitney le long de* Y *en tout point d'un voisinage de* S *dans* Y.

ii) *La fibre* $\omega^{-1}(S)$ *est incluse dans* $\hat{W}$.

iii) *Le couple* $(X_{\text{lisse}} - Y, Y)$ *vérifie les conditions de Whitney strictes en* S *le long de* Y.

Preuve. – Elle s'inspire de ([1] Proposition 2).

Notons par $\Pi : \mathbf{C}^s \times \mathbf{C}^p \to \mathbf{C}^p$ la projection canonique, par $T_R X$ l'espace tangent $(\subset \mathbf{C}^s \times \mathbf{C}^p)$ à X_{lisse} en un point R de X_{lisse} et par $N_R X$ l'espace normal (pour le produit hermitien standard (;)) de X dans $\mathbf{C}^s \times \mathbf{C}^p$ en ce point, enfin par $T_Q Y$ l'espace tangent $(= \{0\} \times \mathbf{C}^p)$ à Y en un point Q de Y.

Suivant Hironaka ([2] page 129), définissons les fonctions :

$$\alpha : X_{\text{lisse}} - Y \longrightarrow \mathbf{R}^+$$

$$R \longmapsto \max_{\substack{\vec{u} \in N_R X \\ \vec{v} \in T_{\Pi(R)} Y}} \{ |(\vec{v}, \vec{u})| \,/\, |\vec{v}|\, |\vec{u}| \}$$

$$\beta : X_{\text{lisse}} - Y \longrightarrow \mathbf{R}^+$$

$$R \longmapsto \max_{\vec{u} \in N_R X} \{ |(\overrightarrow{\Pi(R)R}, \vec{u})| \,/\, |\overrightarrow{\Pi(R)R}|\, |\vec{u}| \}$$

et rappelons les équivalences :

* Le couple $(X_{\text{lisse}} - Y, Y)$ vérifie les conditions de Whitney en S le long de Y si et seulement si :

$$\left[\begin{array}{l} \text{a)} \quad \lim\limits_{\substack{R \to S \\ R \in X_{\text{lisse}} - Y}} \alpha(R) = 0 \\[2ex] \text{b)} \quad \lim\limits_{\substack{R \to S \\ R \in X_{\text{lisse}} - Y}} \beta(R) = 0 \end{array}\right.$$

** Le couple $(X_{\text{lisse}} - Y, Y)$ vérifie les conditions de Whitney strictes en S le long de Y si et seulement si il existe un réel $e > 0$ tel que :

$$\left[\begin{array}{l} \text{a)} \quad \lim\limits_{\substack{R \to S \\ R \in X_{\text{lisse}} - Y}} \alpha(R)/d(R, Y)^e = 0 \\[2ex] \text{b)} \quad \lim\limits_{\substack{R \to S \\ R \in X_{\text{lisse}} - Y}} \beta(R)/d(R, Y)^e = 0 \end{array}\right.$$

où d désigne la distance induite par le produit hermitien (,).

Montrons d'abord l'implication i) $\Rightarrow$ ii).

Soient $\hat{S}$ un point de $\omega^{-1}(S)$ et $(i_1, -, i_r)$, $(j_1, -, j_r)$ deux r-uples de $\{1, \ldots, M\}$ et $\{1, \ldots, q\}$ respectivement tels que

$$\hat{D}(f_{j_1}, -, f_{j_r}, z_{i_1}, -, z_{i_r})_{\hat{S}}$$

engendre $J\mathcal{O}_{\hat{X},\hat{S}}$ (deux tels r-uples existent car $J\mathcal{O}_{\hat{X},\hat{S}}$ est un idéal inversible).

Nous allons montrer que $\hat{S} \in \hat{W}_{(i_1, -, i_r), (j_1, -, j_r)}$.

Nous pouvons évidemment supposer que $j_1 = 1, -, j_r = r$ et que $(z_1 \circ \omega)_{\hat{S}}$ engendre $I\mathcal{O}_{\hat{X},\hat{S}}$ (idéal inversible).

Soit l un indice de $\{1, -, r\}$.

Il existe alors un voisinage ouvert $\hat{U}$ de $\hat{S}$ dans $\hat{X}$ et deux constantes C_I et C_J strictement positives tels que, pour tout point $\hat{R} \in \hat{U} \cap \omega^{-1}(X_{\text{lisse}} - Y)$, le point $R = \omega(\hat{R})$ vérifie $z_1(R) \neq 0$,

$$\mathrm{D}(\mathrm{R}) = \mathrm{D}(f_1, - , f_r \,;\, z_{i_1}, - , z_{i_r})\,(\mathrm{R}) \neq 0\,,$$

$$\mathrm{E_I}(\mathrm{R}) = |z_1(\mathrm{R})| \Big/ \sqrt{\sum_{1 \leqslant i \leqslant s} |z_i(\mathrm{R})|^2} \geqslant \mathrm{C_I}$$

et

$$\mathrm{E_J}(\mathrm{R}) = |\mathrm{D}(\mathrm{R})| \Big/ \sqrt{\sum_{1 \leqslant i \leqslant \mathrm{M}} |\mathrm{D}(f_1, - , f_r \,;\, z_i\,,\, z_{i_1}, \ldots, \widehat{z_{i_l}}, - , z_{i_r})(\mathrm{R})|^2} \geqslant \mathrm{C_J}\,.$$

Il s'ensuit que $\mathrm{T_R X}$ est le noyau du morphisme de $\mathbf{C}^{\mathrm{M}}$ dans $\mathbf{C}^r$ défini par la matrice :

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial z_1}(\mathrm{R}) \,, & \text{———} & , \dfrac{\partial f_1}{\partial z_{\mathrm{M}}}(\mathrm{R}) \\ | & & | \\ \dfrac{\partial f_r}{\partial z_1}(\mathrm{R}) \,, & \text{———} & , \dfrac{\partial f_r}{\partial z_{\mathrm{M}}}(\mathrm{R}) \end{pmatrix}$$

Considérons alors le vecteur $\vec{u}(\mathrm{R}) = (u_1(\mathrm{R}), - , u_{\mathrm{M}}(\mathrm{R})) \in \mathbf{C}^{\mathrm{M}}$ tel que pour $1 \leqslant i \leqslant \mathrm{M}$:

$$\overline{u_i(\mathrm{R})} = \frac{\mathrm{E_J}(\mathrm{R})}{\mathrm{D}(\mathrm{R})}\, \mathrm{D}(f_1, - , f_r \,;\, z_i, z_{i_1}, - , \widehat{z_{i_l}}, - , z_{i_r})\,(\mathrm{R})\,.$$

Nous avons $\|\vec{u}(\mathrm{R})\| = 1$ et, si $\mathrm{D}_{i,j}(\mathrm{R})$ est le déterminant du mineur du coefficient de la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice définissant $\mathrm{D}(\mathrm{R})$,

$$\overline{u_i(\mathrm{R})} = \frac{\mathrm{E_J}(\mathrm{R})}{\mathrm{D}(\mathrm{R})} \Big(\sum_{j=1}^{r} (-1)^{j+1}\, \mathrm{D}_{j,l}(\mathrm{R})\, \frac{\partial f_j}{\partial z_i}(\mathrm{R}) \Big) \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant \mathrm{M}\,.$$

Il en résulte que le vecteur $\vec{u}(\mathrm{R})$ est un vecteur de $\mathrm{N_R X}$ de norme 1.

Prenons maintenant un voisinage ouvert V de S dans Y tel que $(\mathrm{X_{lisse}} - \mathrm{Y}\,,\, \mathrm{Y})$ vérifie les conditions de Whitney le long de Y en tout point de V.

En tout point $\hat{\mathrm{Q}}$ de $\hat{\mathrm{U}} \cap \omega^{-1}(\mathrm{V})$ (voisinage ouvert de $\hat{\mathrm{S}}$ dans $\hat{\mathrm{Y}}$), nous avons alors :

a) Pour $1 \leqslant k \leqslant p$,

$$A_k(\hat{Q}) = \lim_{\substack{\hat{R}\to\hat{Q}\\ \hat{R}\in\hat{U}\cap\omega^{-1}(X_{\text{lisse}}-Y)}} \left|\frac{\hat{D}(f_1,-,f_r\,;z_{s+k},z_{i_1},-,\widehat{z_{i_l}},\ldots z_{i_r})(\hat{R})}{\hat{D}(f_1,-,f_r\,;z_{i_1},-,z_{i_r})(\hat{R})}\right| = 0.$$

En effet, si $Q = \omega(\hat{Q})$, nous avons :

$$A_k(\hat{Q}) = \lim_{\substack{R\to Q\\ R\in\omega(\hat{U})\cap(X_{\text{lisse}}-Y)}} \frac{1}{|D(R)|}\,|D(f_1,-,f_r\,;z_{s+k},z_{i_1},-,\widehat{z_{i_l}},-,z_{i_r})(R)|$$

$$= \lim_{\substack{R\to Q\\ R\in\omega(\hat{U})\cap(X_{\text{lisse}}-Y)}} \frac{1}{E_J(R)}\,|((0,\ldots,0,1_{s+k},0,\ldots,0),\vec{u}(R))|$$

$$\leqslant \lim_{\substack{R\to Q\\ R\in\omega(\hat{U})\cap(X_{\text{lisse}}-Y)}} \frac{1}{E_J(R)}\,\alpha(R) \leqslant \frac{1}{C_J} \lim_{\substack{R\to Q\\ R\in\omega(\hat{U})\cap(X_{\text{lisse}}-Y)}} \alpha(R) = 0$$

(car $Q \in V$).

Nous pouvons donc écrire :

$$\hat{D}(f_1,-,f_r\,;z_{s+k},z_{i_1},-,\widehat{z_{i_l}},-,z_{i_r})_{\hat{S}} = g_{k,\hat{S}}\ \hat{D}(f_1,-,f_r\,;z_{i_1},-,z_{i_r})_{\hat{S}}$$

où $g_{k,\hat{S}}$ est un germe de $\mathcal{O}_{\hat{X},\hat{S}}$ qui s'annule sur $\hat{Y}$ c'est-à-dire un germe de $\hat{I}_{\hat{S}}$.

b)

$$B(\hat{Q}) = \lim_{\substack{\hat{R}\to\hat{Q}\\ R\in\hat{U}\cap\omega^{-1}(X_{\text{lisse}}-Y)}} \left|\frac{\sum_{i=1}^{s} z_i\circ\omega(\hat{R})\,\hat{D}(f_1,-,f_r\,;z_i,z_{i_1},-,\widehat{z_{i_l}},-,z_{i_r})(\hat{R})}{z_1\circ\omega(\hat{R})\,\hat{D}(f_1,-,f_r\,;z_{i_1},-,z_{i_r})(\hat{R})}\right| = 0.$$

En effet, en posant encore $Q = \omega(\hat{Q})$, nous avons :

$$B(\hat{Q}) = \lim_{\substack{R\to Q\\ R\in\omega(\hat{U})\cap(X_{\text{lisse}}-Y)}} \frac{1}{|z_1(R)\,D(R)|}\left|\sum_{i=1}^{s} z_i(R)\,D(f_1,-,f_r\,;z_i,z_{i_1},-,\widehat{z_{i_l}},-,z_{i_r})(R)\right|$$

$$B(\hat{Q}) = \lim_{\substack{R \to Q \\ R \in \omega(\hat{U}) \cap (X_{\text{lisse}} - Y)}} \frac{1}{E_I(R)\, E_J(R)} \left| \left(\frac{\overrightarrow{\Pi(R)R}}{\|\overrightarrow{\Pi(R)R}\|}, \vec{u}(R) \right) \right|$$

$$\leqslant \lim_{\substack{R \to Q \\ R \in \omega(\hat{U}) \cap (X_{\text{lisse}} - Y)}} \frac{1}{E_I(R) E_J(R)}\, \beta(R) \leqslant \frac{1}{C_I C_J} \lim_{\substack{R \to Q \\ R \in \omega(\hat{U}) \cap (X_{\text{lisse}} - Y)}} \beta(R) = 0$$

(car $Q \in V$).

Nous concluons comme pour a) et donc i) $\Rightarrow$ ii).

Montrons maintenant l'implication ii) $\Rightarrow$ iii) :

Soit $\hat{S}$ un point de $\omega^{-1}(S)$.

Il existe deux r-uples $(i_1, -, i_r)$ et $(j_1, -, j_r)$ de $\{1, -, M\}$ et $\{1, -, q\}$ respectivement tels que $\hat{S} \in \hat{W}_{(i_1, -, i_r)(j_1, -, j_r)}$.

Il existe alors un voisinage ouvert $\hat{U}_{\hat{S}}$ de $\hat{S}$ dans $\hat{X}$ et un entier $\sigma(\hat{S}) > 0$ (d'après le "Nullstellensatz") tel que, pour tout point $\hat{Q} \in \hat{U}_{\hat{S}}$, nous ayons :

(*) $\hat{D}(f_{j_1}, -, f_{j_r} ; z_{i_1}, -, z_{i_r})_{\hat{Q}}$ engendre $J\, \mathcal{O}_{\hat{X},\hat{Q}}$.

(**) $\hat{D}(f_{j_1}, -, f_{j_r} ; z_{s+k}, z_{i_1}, -, \widehat{z_{i_l}}, -, z_{i_r})_{\hat{Q}}^{\sigma(\hat{S})} \in I\, J^{\sigma(\hat{S})}\, \mathcal{O}_{\hat{X},\hat{Q}}$

pour $1 \leqslant k \leqslant p$ et $1 \leqslant l \leqslant r$.

$$(***)\ \left(\sum_{i=1}^{s} z_i \circ \omega\, \hat{D}(f_{j_1}, -, f_{j_r} ; z_i, z_{i_1}, -, - - -, -, \widehat{z_{i_l}}, -, z_{i_r}) \right)_{\hat{Q}}^{\sigma(\hat{S})}$$

$$\in I^{\sigma(\hat{S})+1}\, J^{\sigma(\hat{S})}\, \mathcal{O}_{\hat{X},\hat{Q}}$$

pour $1 \leqslant l \leqslant r$.

La fibre $\omega^{-1}(S)$ étant compacte (ω est un morphisme propre), il existe un nombre fini de points de $\omega^{-1}(S)$, disons $\hat{S}_1, -, \hat{S}_n$, tels que $\omega^{-1}(S) \subset \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant n} \hat{U}_{\hat{S}_i}$.

Posons $\sigma = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \{\sigma(\hat{S}_i)\}$ et prenons un réel e tel que $0 < e < \frac{1}{\sigma}$.

Nous allons montrer que, pour toute suite $(R_m)_m$ de points de $X_{\text{lisse}} - Y$ telle que $\lim_{m \to \infty} R_m = S$, nous avons :

a) $\lim\limits_{m\to\infty} \alpha(\mathrm{R}_m)/d(\mathrm{R}_m , \mathrm{Y})^e = 0$

b) $\lim\limits_{m\to\infty} \beta(\mathrm{R}_m)/d(\mathrm{R}_m , \mathrm{Y})^e = 0$

Ceci suffira évidemment à assurer ii) $\Rightarrow$ iii).

Pour tout m, notons $\hat{\mathrm{R}}_m$ le seul point de $\hat{\mathrm{X}}$ tel que $\omega(\hat{\mathrm{R}}_m) = \mathrm{R}_m$ (d'après l'isomorphisme analytique $\omega : \omega^{-1}(\mathrm{X}_{\text{lisse}} - \mathrm{Y}) \to \mathrm{X}_{\text{lisse}} - \mathrm{Y})$; comme ω est un morphisme propre, nous pouvons supposer qu'il existe un point $\hat{\mathrm{S}} \in \omega^{-1}(\mathrm{S})$ tel que $\lim\limits_{m\to\infty} \hat{\mathrm{R}}_m = \hat{\mathrm{S}}$.

Nous venons de montrer qu'il existe deux r-uples $(i_1 , - , i_r)$ et $(j_1 , - , j_r)$ tels que :

(*) $\hat{\mathrm{D}}(f_{j_1}, - , f_{j_r} ; z_{i_1}, - , z_{i_r})_{\hat{\mathrm{S}}}$ engendre $\mathrm{J}\, \mathcal{O}_{\hat{\mathrm{X}},\hat{\mathrm{S}}}$

(**) $\hat{\mathrm{D}}(f_{j_1}, - , f_{j_r} ; z_{s+k}, z_{i_1}, - , \widehat{z_{i_l}}, - , z_{i_r})^{\sigma}_{\hat{\mathrm{S}}} \in \mathrm{I}\,\mathrm{J}^{\sigma}\, \mathcal{O}_{\hat{\mathrm{X}},\hat{\mathrm{S}}}$

pour $1 \leqslant k \leqslant p$ et $1 \leqslant l \leqslant r$.

(***) $\left(\sum\limits_{i=1}^{s} z_i \circ \omega\, \hat{\mathrm{D}}(f_{j_1}, - , f_{j_r} ; z_i, z_{i_1}, - , \widehat{z_{i_l}}, - , z_{i_r})\right)^{\sigma}_{\hat{\mathrm{S}}} \in \mathrm{I}^{\sigma+1}\cdot\mathrm{J}^{\sigma}\, \mathcal{O}_{\hat{\mathrm{X}},\hat{\mathrm{S}}}$

pour $1 \leqslant l \leqslant r$.

Nous pouvons donc supposer que $i_1 = j_1 = 1, \ldots , i_r = j_r = r$.

Pour tout m suffisamment grand, $\mathrm{T}_{\mathrm{R}_m}\mathrm{X}$ est alors le noyau du morphisme de $\mathbf{C}^{\mathrm{M}}$ dans $\mathbf{C}^r$ défini par la matrice :

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial z_1}(\mathrm{R}_m) , & \text{——} , & \dfrac{\partial f_1}{\partial z_{\mathrm{M}}}(\mathrm{R}_m) \\ | & & | \\ \dfrac{\partial f_r}{\partial z_1}(\mathrm{R}_m) , & \text{——} , & \dfrac{\partial f_r}{\partial z_{\mathrm{M}}}(\mathrm{R}_m) \end{pmatrix}$$

et $\mathrm{N}_{\mathrm{R}_m}\mathrm{X}$ est le sous-espace vectoriel de $\mathbf{C}^{\mathrm{M}}$ engendré par les vecteurs

$$\left(\left(\overline{\frac{\partial f_i}{\partial z_1}(\mathrm{R}_m)}, \ldots , \overline{\frac{\partial f_i}{\partial z_{\mathrm{M}}}(\mathrm{R}_m)}\right)\right)_{1\leqslant i\leqslant r} .$$

Soit $\vec{u}_m = (u_{m,1}, - , u_{m,\mathrm{M}})$ un vecteur de $\mathrm{N}_{\mathrm{R}_m}\mathrm{X}$ tel que $\|\vec{u}_m\| = 1$.

Si, pour tout m, nous notons $\mathrm{D}(m) = \mathrm{D}(f_1, - , f_r ; z_1, - , z_r)\ (\mathrm{R}_m)$ et $\mathrm{D}_{i,j}(m)$ le déterminant du mineur du coefficient de la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice définissant $\mathrm{D}(m)$, il est facile de montrer que, pour $1 \leqslant i \leqslant \mathrm{M}$, :

$$\overline{u_{m,i}} = \frac{1}{\mathrm{D}(m)} \left(\sum_{l=1}^{r} (-1)^{l+1}\ \overline{u_{m,l}}\ \mathrm{D}(f_1, - , f_r ; z_i, z_1, - , \widehat{z_l}, - , z_r)\ (\mathrm{R}_m) \right).$$

Prenons alors un vecteur $\vec{v}$ de $\mathrm{T}_{\Pi(\mathrm{R}_m)}\mathrm{Y} = \{0\} \times \mathbf{C}^p$ tel que $\|\vec{v}\| = 1$. Nous avons :

$$|(\vec{v}, \vec{u}_m)| \leqslant \frac{1}{|\mathrm{D}(m)|} \left(\sum_{k=1}^{p} \sum_{l=1}^{r} |\mathrm{D}(f_1, - , f_r ; z_{s+k}, z_1, - , \widehat{z_l}, - , z_r)(\mathrm{R}_m)| \right).$$

Or, d'après (**), il existe une constante $\mathrm{K_A} > 0$ (ne dépendant que de $\hat{\mathrm{S}}$) telle que, pour m suffisamment grand :

$$\frac{1}{|\mathrm{D}(m)|}\ |\mathrm{D}(f_1, - , f_r ; z_{s+k}, z_1, - , \widehat{z_l}, - , z_r)\ (\mathrm{R}_m)| \leqslant \mathrm{K_A}\, d(\mathrm{R}_m, \mathrm{Y})^{\frac{1}{\sigma}}$$

pour $1 \leqslant k \leqslant p$ et $1 \leqslant l \leqslant r$.

Il en résulte que, pour m suffisamment grand,

$$\alpha(\mathrm{R}_m) / d(\mathrm{R}_m, \mathrm{Y})^e \leqslant p\ r\ \mathrm{K_A}\, d(\mathrm{R}_m, \mathrm{Y})^{\left(\frac{1}{\sigma} - e\right)}$$

et donc bien que $\lim\limits_{m \to \infty} \alpha(\mathrm{R}_m) / d(\mathrm{R}_m, \mathrm{Y})^e = 0$.

D'autre part :

$$(\overrightarrow{\Pi(\mathrm{R}_m)\,\mathrm{R}_m}, \vec{u}_m) = \frac{1}{\mathrm{D}(m)} \left[\sum_{l=1}^{r} (-1)^{l+1}\ \overline{u_{m,l}} \left(\sum_{i=1}^{s} z_i(\mathrm{R}_m) \right.\right.$$
$$\left.\left. \mathrm{D}(f_1, - , f_r ; z_i, z_1, - , \widehat{z_l}, - , z_r)\,(\mathrm{R}_m) \right) \right].$$

D'où :

$$\left|\left(\frac{\overrightarrow{\Pi(R_m)\,R_m}}{\|\overrightarrow{\Pi(R_m)\,R_m}\|}, \vec{u}_m\right)\right| \leqslant \left[\frac{1}{|D(m)| \sqrt{\sum_{1 \leqslant i \leqslant s} |z_i(R_m)|^2}}\right.$$

$$\left.\left(\sum_{l=1}^{r} \left| \sum_{i=1}^{s} z_i(R_m) \qquad D(f_1, -, f_r\,; z_i, z_1, -, \hat{z}_l, -, z_r)\,(R_m)\right|\right)\right]$$

Or, d'après (***), il existe une constante $K_B > 0$ (ne dépendant que de $\hat{S}$) telle que, pour m suffisamment grand :

$$\frac{1}{|D(m)| \sqrt{\sum_{1 \leqslant i \leqslant s} |z_i(R_m)|^2}} \left| \sum_{i=1}^{s} z_i(R_m)\, D(f_1, -, f_r\,; z_i, z_1, -, \hat{z}_l, -, z_r)\,(R_m)\right|$$

$$\leqslant K_B\, d(R_m\,, Y)^{\frac{1}{\sigma}} \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant l \leqslant r\,.$$

Il en résulte que, pour m suffisamment grand,

$$\beta(R_m) \,/\, d(R_m\,, Y)^e \ \leqslant\ r\, K_B\, d(R_m\,, Y)^{(\frac{1}{\sigma} - e)}$$

et donc que

$$\lim_{m \to \infty} \beta(R_m) \,/\, d(R_m\,, Y)^e = 0\,.$$

Enfin iii) ⇒ i).

En effet, il existe un voisinage U de S dans X tel que :

$$R \in U \cap (X_{\text{lisse}} - Y) \Rightarrow \begin{cases} \alpha(R) < d(R\,, Y)^e \\ \beta(R) < d(R\,, Y)^e \end{cases}$$

où e est le réel strictement positif induit par les conditions de Whitney strictes en S.

Nous en déduisons que, pour tout $Q \in U \cap Y$:

$$\lim_{\substack{R \to Q \\ R \in X_{\text{lisse}} - Y}} \alpha(R) = \lim_{\substack{R \to Q \\ R \in X_{\text{lisse}} - Y}} \beta(R) = 0$$

et donc que le couple $(X_{\text{lisse}} - Y\,, Y)$ vérifie les conditions de Whitney le long de Y en tout point de $U \cap Y$.

Ceci achève la preuve de la Proposition.

THEOREME. — *Soient* X *un espace* C*-analytique réduit de dimension pure,* Y *un sous-espace lisse de* X *de dimension pure strictement inférieure à la dimension de* X.

1) *Soit* S *un point de* Y.

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) *Le couple* $(X_{lisse} - Y, Y)$ *vérifie les conditions de Whitney strictes en* S *le long de* Y.

ii) *Le couple* $(X_{lisse} - Y, Y)$ *vérifie les conditions de Whitney le long de* Y *en tout point d'un voisinage de* S *dans* Y.

2) *L'ensemble des points de* Y *en lesquels le couple* $(X_{lisse} - Y, Y)$ *vérifie, le long de* Y, *les conditions de Whitney strictes forme un ouvert analytique dense de* Y.

Preuve. — Ce théorème étant de nature locale, nous sommes ramenés à la situation décrite au début de l'article.

La première assertion n'est alors rien d'autre que l'équivalence i) $\Leftrightarrow$ iii) de la Proposition précédente. Remarquons au passage que nous obtenons ainsi une démonstration dans le cas complexe de ([2] Lemma 5.2) sans utiliser une résolution des singularités.

Quant à la deuxième assertion, si nous reprenons les notations de la Proposition précédente, elle résulte de l'équivalence : ii) $\Leftrightarrow$ iii) en écrivant les équivalences suivantes :

[$(X_{lisse} - Y, Y)$ ne vérifie pas les conditions de Whitney strictes en S le long de Y

$\Updownarrow$

[$\omega^{-1}(S) \cap (\hat{Y} - \hat{W}) \neq \emptyset$

$\Updownarrow$

[$S \in \omega(\hat{Y} - \hat{W})$

La densité de $Y - \omega(\hat{Y} - \hat{W})$ est assurée par ([3] Lemma 19.3).

C.Q.F.D.

BIBLIOGRAPHIE

[1] G. Canuto et J.P. Speder, Un critère d'éclatement pour les conditions de Whitney, A paraître aux "*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa*".

[2] H. Hironaka, Normal cones in analytic Whitney stratifications. Publications Mathématiques n° 31, I.H.E.S. (1970).

[3] H. Whitney, Tangents to analytic variety, *Annals of Mathematics,* Vol 81 (1965).

[4] O. Zariski, Studies in Equisingularity II, Equisingularity in codimension 1 (and characteristic zero), *American J. of Mathematics,* Vol 87 (1965).

Manuscrit reçu le 9 octobre 1972
accepté par B. Malgrange

J.P. Speder
Département de Mathématiques
Université de Nice
Parc Valrose
06 – Nice