

# ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

LÉONCE FOURÈS

## Groupes fuchsien et revêtements

*Annales de l'institut Fourier*, tome 4 (1952), p. 49-71

[http://www.numdam.org/item?id=AIF\\_1952\\_\\_4\\_\\_49\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1952__4__49_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1952, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

# GROUPES FUCHSIENS ET REVETEMENTS

par Léonce FOURÈS (Marseille) <sup>(1)</sup>.

---

## INTRODUCTION

Nous nous proposons d'étudier un groupe  $G$ , Fuchsien ou Fuchsöide, contenant des transformations elliptiques. Le groupe  $G$  pourra opérer dans l'intérieur d'un cercle  $C$  ou dans le plan pointé, mais nous emploierons toujours le langage se rapportant au cercle. Malgré l'utilisation constante du « vocabulaire analytique », (Groupes Fuchsiens, Surfaces de Riemann, etc...) les démonstrations sont valables non seulement pour un groupe de transformations homographiques mais aussi pour tout groupe d'homéomorphismes du cercle sur lui-même, à condition que ce groupe soit proprement discontinu <sup>(2)</sup> et admette des domaines fondamentaux  $D$ , possédant les propriétés suivantes <sup>(3)</sup> :

a) tout cercle  $C' \subset C$  est recouvert par un nombre fini de domaines fondamentaux  $D$ .

b) Soit  $P$  appartenant à la frontière de  $n$  domaines fondamentaux ( $n \geq 1$ ); il existe un voisinage simplement connexe  $v(P)$  séparé par les frontières des  $D$ , en  $n$  composantes seulement de telle manière qu'il existe un homéomorphisme de  $v(P)$  sur un cercle dans lequel les frontières des  $D$ , intérieures à  $v(P)$  se représentent suivant des rayons. Un tel voisinage  $v(P)$  sera appelé voisinage élémentaire. (Dans le cas des groupes Fuchsöides de transformations homographiques, cette dernière condition est réalisée avec des domaines fondamentaux limités par des arcs de cercle.)

(1) Ce travail a été fait pendant un séjour à l'Institute for advanced study (Princeton).

(2) Voir FΑΤΟΥ, *Fonctions algébriques*, t. II, p. 69, où sont en évidence des groupes discrets qui ne sont pas proprement discontinus.

(3) Nous appellerons de tels groupe H-Fuchsöides.

Nous avons pris soin de rejeter à la fin de nos démonstrations l'introduction de la structure conforme pour mettre en évidence son rôle secondaire dans ces questions malgré le changement de terminologie qui en résulte dans les énoncés finaux.

Nous rattachons l'étude du groupe  $G$  à celui des revêtements ramifiés d'une certaine surface. Je rappelle ici les définitions que nous avons adoptées pour les revêtements ramifiés (\*):

a)  $t$  désigne une représentation continue d'une surface  $\mathcal{S}$  dans une autre  $S$  de sorte que si  $M \in S$ ,  $t^{-1}(M)$  soit un ensemble isolé.

*Définition 1.* —  $P \in S$  est couvert sans ramification par  $\Delta \subset \mathcal{S}$  (pour  $t$ ) s'il existe un voisinage  $V(P) \subset S$  tel que  $E_{V,\Delta} = \Delta \cap t^{-1}[V(P)]$  ne soit pas vide et que toute composante connexe de  $E_{V,\Delta}$  soit représentée biunivoquement par  $t$  sur  $V(P)$ .

$(\mathcal{S}, t)$  est un revêtement de  $S$  relativement non ramifié si tout point  $P \in S$  est couvert sans ramification par  $\mathcal{S}$  (pour  $t$ ).

*Définition 2.* —  $P \in S$  est couvert avec ramification par  $\Delta \subset \mathcal{S}$  s'il existe  $V(P)$  tel que :

1°  $E_{V,\Delta}$  ne soit pas vide.

2°  $\Gamma_i$  désignant une composante connexe quelconque de  $E_{V,\Delta}$

$$\mathcal{X}_i = \Gamma_i \cap t^{-1}(P) \quad \text{n'est pas vide.}$$

3°  $\Gamma_i^* = \Gamma_i - \mathcal{X}_i$ .  $(\Gamma_i^*, t)$  est un revêtement relativement non ramifié de  $V^*(P) = V(P) - P$ .

(Si  $M \in V^*(P)$ ,  $t^{-1}(M)$  a  $n$  points dans  $\Gamma_i^*$ , où  $n$  est indépendant de  $M$  et est appelé l'ordre du revêtement  $(\Gamma_i^*, t)$ , ou l'ordre de ramification du revêtement  $(\Gamma_i, t)$  de  $V(P)$ .)

$(\mathcal{S}, t)$  est un revêtement de  $S$  relativement ramifié si tout point  $P \in S$  est couvert avec ou sans ramification par  $\mathcal{S}$  (pour  $t$ ).

*Définition 3.* —  $P \in S$  est régulièrement couvert par  $\mathcal{S}$  (pour  $t$ ), s'il existe  $V(P) \subset S$  tel que toutes les composantes connexes  $\Gamma_i$  de  $E_{V,\mathcal{S}}$  recouvrent  $P$  avec le même ordre de ramification fini.

Si tout point  $P \in S$  est régulièrement couvert par  $\mathcal{S}$  (pour  $t$ ),  $(\mathcal{S}, t)$  est un revêtement régulièrement ramifié de  $S$ .

(\*) L. FOURÈS, Recouvrements de surfaces de Riemann, *Ann. Ec. N. S.*, t. 69, 1952, p. 183. Aux indications bibliographiques il conviendrait d'ajouter R. H. FOX: Recent developments of knot theory at Princeton, *Proceedings of the International Congress 1950* (Cambridge), t. II, p. 453.

b) Dans les définitions 1, 2, 3 remplaçons les surfaces  $S$  et  $\mathcal{S}$  par deux surfaces de Riemann  $R$  et  $\mathcal{R}$  et  $t$  par une représentation  $\varphi$  assujettie aux mêmes conditions que  $t$ , et en outre conforme biunivoque en tout point où  $t$  était seulement biunivoque.

On démontre alors le théorème suivant<sup>(5)</sup>.

THÉORÈME. — Soit  $(\mathcal{R}, \varphi)$  un revêtement de  $R$  relativement ramifié :

a. Les points où  $\varphi$  n'est pas biunivoque sont isolés ;

b. Soit  $P = \varphi(\mathcal{P})$  : il est possible de trouver sur  $R$  et  $\mathcal{R}$  des voisinages  $V(P)$  et  $V(\mathcal{P})$  dont les paramètres  $z$  et  $\zeta$  obtenus par les uniformisantes locales  $T$  et  $\bar{v}$  sont tels que  $T \cdot \varphi \cdot \bar{v}^{-1} = k\zeta^n$ .

Le premier chapitre est consacré à la construction d'une surface de Riemann  $R$  et d'une projection  $\psi$  de  $C$  sur  $R$ , invariante par les fonctions de  $G$ , de sorte que  $(C, \psi)$  soit un revêtement régulièrement ramifié de  $R$ .

Dans le deuxième chapitre nous étudions le groupe de Poincaré de  $R$  et montrons qu'il est isomorphe au quotient de  $G$  par un certain sous-groupe de  $G$ , que nous déterminons.

---

## CHAPITRE I

### I. — Points fixes des transformations elliptiques.

A. — Soient  $D_\lambda$  et  $D_\mu$  deux polygones fondamentaux pour le groupe  $G$  et  $\varphi_{\lambda, \mu}$  la transformation de  $G$  qui représente  $D_\lambda$  sur  $D_\mu$  :  $D_\lambda \xrightarrow{\varphi_{\lambda, \mu}} D_\mu$ . Soit  $D_\lambda$  la frontière de  $D_\lambda$  : un sommet de  $D_\lambda$  est soit un point de  $D_\lambda^*$  frontière pour au moins trois polygones fondamentaux (au moins deux s'il s'agit d'un point sur la circonférence de  $C$ ), soit un point fixe de transformation elliptique ; un côté de  $D_\lambda$  est une portion connexe de  $D_\lambda^*$  limitée par deux sommets consécutifs.  $s_{i, \mu}$  désignera le côté de  $D_\mu$  image par  $\varphi_{\lambda, \mu}$  du côté  $s_{i, \lambda}$  de  $D_\lambda$ . Les côtés de  $D_\lambda$ , intérieurs à  $C$  se répartissent par paires de côtés

<sup>(5)</sup> L. FOURÈS, *loc. cit.*, p. 185. Ce théorème permet d'identifier ces définitions à celles de STOILOW : *Leçons sur les principes topologiques de la théorie des fonctions analytiques*, Gauthiers-Villars, 1938.

congruents :  $s_{i, \lambda}$  est congruent à  $s_{i', \lambda}$  s'il existe une fonction de  $G$ ,  $\varphi_{i(\lambda)}$  telle que

$$(1) \quad s_{i', \lambda} = \varphi_{i(\lambda)}(s_{i, \lambda}).$$

On a alors  $\varphi_{i(\lambda)}^{-1} = \varphi_{i'(\lambda)}$ .

$$s_{i', \mu} = \varphi_{i, \mu}(s_{i, i}) = \varphi_{i, \mu} \cdot \varphi_{i(i)}(s_{i, i}) = \varphi_{i, \mu} \cdot \varphi_{i(i)} \cdot \varphi_{\mu, i}(s_{i, \mu}) = \varphi_{i(\mu)}(s_{i, \mu})$$

d'où la relation

$$(2) \quad \varphi_{i(\mu)} = \varphi_{i, \mu} \cdot \varphi_{i(i)} \cdot \varphi_{\mu, i}.$$

En particulier : si  $D_\mu = \varphi_{i(i)}(D_i)$ ,  $\varphi_{i, \mu} = \varphi_{i(i)}$  et d'après (2) :  $\varphi_{i(\mu)} = \varphi_{i(i)}$ . D'après (2) également :

$$(3) \quad \varphi_{i(\mu)}^n = \varphi_{i, \mu} \cdot \varphi_{i(i)}^n \cdot \varphi_{\mu, i}, \quad \text{et} \quad \varphi_{i(i)}^p = \varphi_{\mu, i} \cdot \varphi_{i(\mu)}^p \cdot \varphi_{i, \mu} \quad (3')$$

donc si  $\varphi_{i(i)}$  est elliptique de période  $n$  :  $\varphi_{i(i)}^n = 1$ ,  $\varphi_{i(\mu)}$  est elliptique de période  $\leq n$  d'après (3) donc de période  $n$  d'après (3').

B. — Soient  $S_{i, i}$  et  $S_{i', i}$  les deux composantes de  $D^* - (s_{i, i} \cup s_{i', i})$ . Si  $S_{i, i}$  et  $S_{i', i}$  contenaient chacune un point sur la circonférence de  $C$ ,  $D_i$  séparerait  $C - D_i$  en au moins deux composantes connexes, l'une  $\delta_i$  contiguë à  $D_i$  suivant  $s_{i', i}$ , l'autre  $\delta'_i$  contiguë à  $D_i$  suivant  $s_{i, i}$  : les domaines  $\varphi_{i(i)}^p(D_i)$  seraient dans  $\delta_i$  pour  $p > 0$ , et dans  $\delta'_i$  pour  $p < 0$  ce qui est impossible lorsque  $\varphi_{i(i)}$  est elliptique puisque  $\varphi_{i(i)}^{-1} = \varphi_{i(i)}^{n-1}$ . Dans la suite  $\varphi_{i(i)}$  est une transformation elliptique de période  $n$  et nous supposons de plus le numérotage des  $D_\lambda$  tel que :

$$D_2 = \varphi_{i(i)}(D_1); \quad D_3 = \varphi_{i(i)}(D_2) = \varphi_{i(i)}^2(D_1); \quad \dots, \\ D_n = \varphi_{i(i)}^{n-1}(D_1); \quad D_1 = \varphi_{i(i)}(D_n)$$

$$\Delta^1 = \bigcup_{\lambda=1}^n (D_\lambda \cup s_{i, \lambda}) \text{ est limité par deux courbes fermées } S_i^1 = \bigcup_{\lambda=1}^n S_{i, \lambda}$$

et  $S_i^1 = \bigcup_{\lambda=1}^n S_{i', \lambda}$ . L'une de ces courbes, soit  $S_i^1$  n'a pas de points sur

la circonférence de  $C$  et est contenue dans la région intérieure à l'autre. Nous nous proposons de montrer que  $S_i^1$  se réduit à un point : supposons le contraire. Il y a alors au moins un côté  $s_{j, i} \subset S_i^1$  suivant lequel  $D_i$  est contiguë à  $D_\mu$ . En transformant  $D_\mu$  par  $\varphi_{i(\mu)}$  et ses itérées successives on construit un domaine  $\Delta^2$  image de  $\Delta^1$  par  $\varphi_{i, \mu}(\Delta^1)$ .

a)  $D_\mu \not\subset \Delta^1$  (fig. 1) alors  $\Delta^1 \cap \Delta^2 = \emptyset$ . Les frontières de  $\Delta_2$ , soient  $S_i^2 = \varphi_{1,\mu}(S_i^1)$  et  $S_i^2 = \varphi_{1,\mu}(S_i^1)$  sont toutes deux intérieures à  $S_i^1$ , donc sont deux courbes fermées l'une intérieure à l'autre :

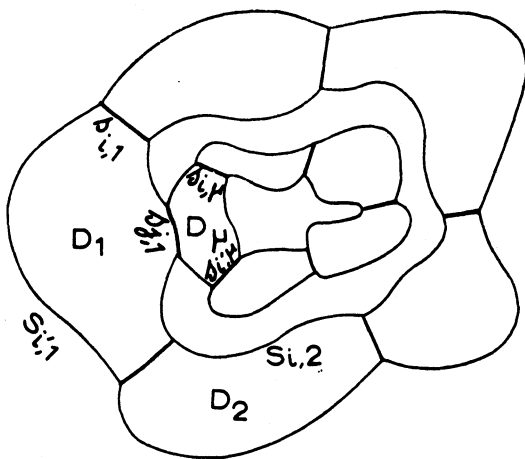


Fig. 1.

1<sup>er</sup> cas. —  $S_i^2$  intérieure à  $S_i^1$  (cas de la figure 1).  $\varphi_{\mu,1}$  représente alors biunivoquement, domaine fondamental sur domaine fondamental, l'intérieur de  $S_i^2$  sur l'intérieur de  $S_i^1$  : le nombre des domaines fondamentaux devrait être le même à l'intérieur de

$S_i^1$  et de  $S_i^2$  ce qui est impossible puisque ce nombre est fini, que  $S_i^2$  est à l'intérieur de  $S_i^1$ , et que  $D_1$  n'est pas à l'intérieur de  $S_i^2$ .

2<sup>e</sup> cas. —  $S_i^2$  intérieure à  $S_i^1$ .  $\varphi_{\mu,1}$  représente alors biunivoquement, domaine fondamental sur domaine fondamental, l'intérieur de  $S_i^2$  sur l'extérieur de  $S_i^1$  ce qui est impossible puisque le nombre des domaines fondamentaux est fini à l'intérieur de  $S_i^1$ , infini à l'extérieur de  $S_i^1$ .

b)  $D_\mu \subset \Delta^1$  entraîne  $\Delta^1 = \Delta^2$ . Traçons dans  $D_1$  un arc  $\alpha$ , joignant

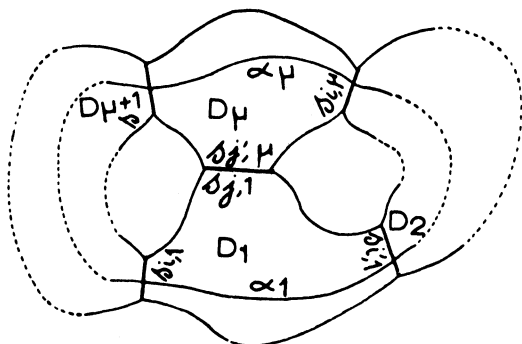


Fig. 2.

deux points congruents sur  $s_{i,1}$  et  $s_{i,2}$ . Les images de  $\alpha$ , par  $\varphi_{i(1)}^\mu$  constituent une courbe fermée  $A$  invariante par  $\varphi_{i(1)}$  qui réalise un homéomorphisme de l'intérieur  $\alpha$  de  $A$  sur lui-même. Si  $\mu \neq 2$  ou  $n$  (fig. 2),  $\delta_i^\mu = \alpha \cap (D_1 \cup D_\mu \cup s_{j,1})$  sépare  $\alpha$  en au moins deux composantes, l'une

contenant  $\alpha \cap D_2$ , l'autre  $\alpha \cap D_{\mu+1}$ .  $\delta_i^\mu$  est ouvert et les deux régions que l'on vient de définir n'ont pas de point frontière

commun.  $\varphi_{i(1)}(\partial_1^\mu) = \alpha \cap (D_2 \cup D_{\mu+1} \cup s_{j,2})$  ne pourrait être connexe. On doit donc avoir soit  $\mu = 2$  soit  $\mu = n$ . Si  $\mu = n$ ,  $D_1$  est contigu à  $D_n$  suivant  $s_{j,1}$  donc à  $D_2$  suivant  $s_{j,1}$  et en permuttant les notations  $s_{j,1}$  et  $s_{j,1}$  on se ramène au cas  $\mu = 2$ . Soient donc  $D_1$  et  $D_2$  contigus suivant  $s_{i,1} = s_{i,2}$  et  $s_{j,1} = s_{j,2}$ . Si  $s_{j,1}$  et  $s_{i,1}$  n'ont pas une extrémité commune ils sont séparés par un côté  $s_{k,1}$  suivant lequel  $D_1$  ne peut être contigu qu'avec  $D_2$ . Il en résulte qu'il ne peut y avoir de sommet de  $D_1$  entre  $s_{i,1}$  et  $s_{j,1}$  (sur la partie de  $D_1^*$  qui contient  $s_{k,1}$ ) et par conséquent  $s_{i,1}$  et  $s_{j,1}$  seraient un seul et même côté de  $D_1$ .

$S_1^i$  se réduit bien à un point qui est le point fixe de  $\varphi_{i(1)}$ .

**THÉORÈME 1.** — *Si deux côtés  $s, s'$  du polygone fondamental  $D$  sont congruents par une transformation elliptique  $\varphi$ ,  $s$  et  $s'$  ont pour extrémité commune le point fixe de  $\varphi$ .*

**C. Cycles elliptiques.** — Soient  $A_1 A_2 \dots A_k$ ,  $k$  sommets du polygone fondamental, congruents par les fonctions de  $G$  et points doubles de transformations elliptiques. Par un procédé classique dû à Brahana<sup>(6)</sup> et schématisé par les figures 3 et 4 on peut à partir du premier polygone fondamental en construire un autre dont les sommets elliptiques n'ont pas de congruents sur la périphérie de ce même polygone. Dans ces conditions les deux côtés du polygone issus d'un même sommet elliptique sont congruents par la transfor-

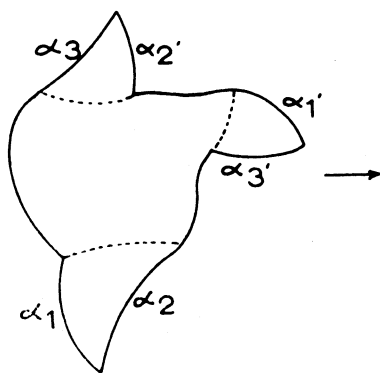


Fig. 3.

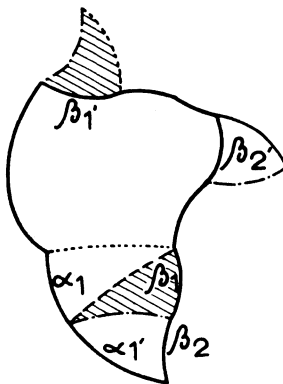


Fig. 4.

mation elliptique ayant ce sommet pour point double ( $\alpha_1$  et  $\alpha_1'$  dans la figure 4). Nous supposons toujours par la suite que les polygones fondamentaux sont du type ci-dessus.

<sup>(6)</sup> BRAHANA, *Annals of Math.*, 23, 1923, p. 144.

II. — Construction de la base.

A. Le polygone de base. — Désignons par  $B_v$  l'ensemble des points intérieurs aux arcs de  $D_v^*$  représentés sur leurs congruents par une transformation elliptique.  $\beta = \bigcup B_v$ . Soit  $\Omega_v$  l'ensemble des points fixes de transformations elliptiques sur  $D_v^*$  et  $\Omega = \bigcup \Omega_v$ . Posons  $\mathcal{D} = \bigcup D_v$  et  $\mathcal{C} = \mathcal{D} \cup \beta \cup \Omega$  (fig. 5).

a) Voisinage élémentaire dans  $\mathcal{C}$ . — Un ouvert contenant  $M$  sera un voisinage élémentaire de  $M$ , si suivant la position de  $M$  il satisfait à l'une des conditions suivantes :

1° Si  $M \in \mathcal{D}$ , il y a un  $D_v$  et un seul tel que  $M \in D_v$ , il existe alors un ouvert  $V^*(M)$  tel que  $M \in V^*(M)$  avec  $V^*(M) \subset D_v$  ;

2° Si  $M \in \beta$ . Il y a deux  $D_v$  soient  $D_\mu$  et  $D_\nu$  ayant  $M$  pour point frontière commun ;  $D_\nu$  et  $D_\mu$  sont contigus suivant  $s_{i,\mu} = s_{i,\nu}$  où  $s_{i,\mu} \in B_\mu$  et  $s_{i,\nu} \in B_\nu$ . Montrons que  $s_{i,\nu} \in B_\nu$  :  $\varphi_{i(\nu)} = \varphi_{\mu,\nu} \cdot \varphi_{i(\mu)} \cdot \varphi_{\nu,\mu}$  or  $\varphi_{i(\mu)} = \varphi_{i(\mu)}$  est elliptique donc aussi  $\varphi_{i(\nu)}$  et par suite  $s_{i,\nu} \in B_\nu$ . Un voisinage élémentaire  $V^*(M)$  est un ouvert contenant  $M$ , satisfaisant à  $V^*(M) \subset D_\mu \cup D_\nu \cup s_{i,\mu}$  et séparé par  $s_{i,\mu}$  en deux composantes seulement.

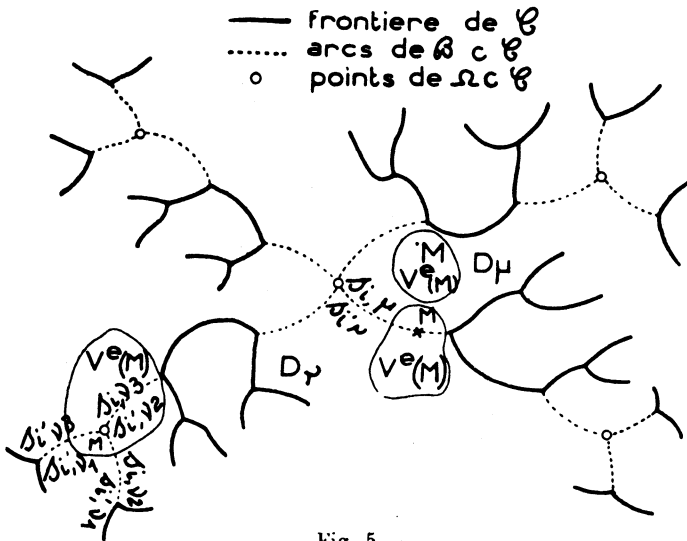


Fig. 5.

3°  $M \in \Omega$ .  $M$  point fixe de transformation elliptique de période  $n$ , est sommet commun à  $n$  domaines fondamentaux  $D_{v_1}, D_{v_2}, \dots, D_v$



et extrémité commune de  $n$  côtés de  $\beta$ , que nous noterons  $t_j$  pour  $s_{i,j} = s_{i,j-1}$ . Un voisinage élémentaire  $V^*(M)$  est un ouvert contenant  $M$ , satisfaisant à :

$$V^*(M) \subset (D_{v_1} \cup D_{v_2} \cup \dots \cup D_{v_n}) \cup (t_1 \cup t_2 \cup \dots \cup t_n) \cup M$$

et séparé par les arcs  $t_j$  en  $n$  composantes seulement.

On remarquera que les voisinages élémentaires constituent une base pour les ouverts de  $\mathcal{C}$ .

b) *Voisinages élémentaires dans  $\Delta$ .* — Soit  $d_v = D_v \cup B_v \cup \Omega_v$  et  $f_v$  une application continue de  $d_v$  sur un ensemble  $\Delta$  de sorte que  $f_v$  prenne les mêmes valeurs pour deux points de  $d_v$  congruents par une transformation elliptique de  $G$  et seulement pour ces points.  $\Delta$  est connexe et d'après le théorème 1 est de genre zéro et même simplement convexe.

$f_v(D_v) = \delta$   $f_v(B_v) = \beta$   $f_v(\Omega_v) = \omega$  et  $f(s_\lambda) = \sigma_\lambda$  si  $s_\lambda$  est un arc de  $B_v$ .

On définira les voisinages élémentaires dans  $\Delta$  d'une manière analogue à celle servant à définir les voisinages élémentaires dans  $\mathcal{C}$ .

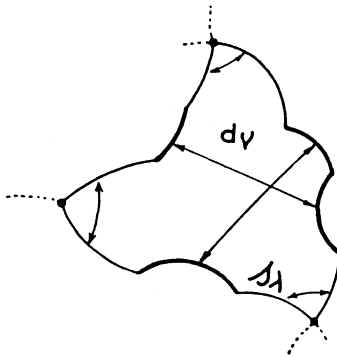


Fig. 6.

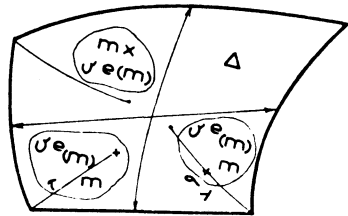


Fig. 7

1° Si  $m \in \delta$ ,  $v^e(m) \subset \delta$ .

2°  $m \in \beta$ ,  $m \in \sigma_\lambda$ ,  $v^e(m) \subset \delta \cup \sigma_\lambda$  en étant séparé par  $\sigma_\lambda$  en deux composantes seulement.

3°  $m \in \omega$ . Soit  $\tau$  l'arc de  $\beta$  aboutissant en  $m$ ,  $v^e(m) \subset \delta \cup \tau \cup m$  sans être séparé en plusieurs composantes par  $\tau$ .

Les voisinages élémentaires ainsi définis constituent une base pour les ouverts de  $\Delta$ .

c) Expression de la continuité de  $f_v$ . —  $f_v$  étant continue,  $f_v^{-1}[v^e(m)]$  est ouvert relativement à  $d_v$ .

1°  $m \in \delta$ ,  $f_v^{-1}[v^e(m)]$  est un  $V^e(m)$  où  $M \in D_v$ .

2°  $m \in \beta$ ,  $f_v^{-1}[v^e(m)]$  a deux composantes ouvertes dans  $d_v$ , c'est-à-dire pouvant être obtenues par intersection de deux ouverts  $O_1$  et  $O_2$  avec  $d_v$ . On peut supposer que  $O_1$  et  $O_2$  ne coupent chacun que deux domaines  $D_\lambda$  ( $y$  compris  $D_v$ ).  $V_1 = O_1 \cap d_v$ ,  $V_2 = O_2 \cap d_v$ .

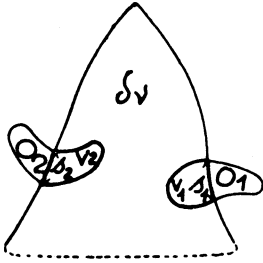


Fig. 8.

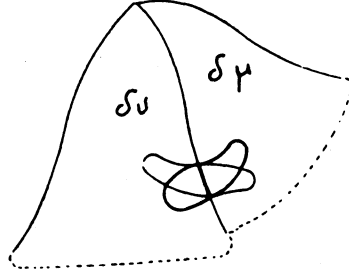


Fig. 9.

$V_1$  et  $V_2$  contiennent respectivement les arcs  $s_1$  et  $s_2$  de  $B_v$  tels que  $f_v(s_1) = f_v(s_2)$ .  $s_1$  et  $s_2$  sont congruents par  $\varphi_{i(v)} = \varphi_{v,\mu} : \varphi_{v,\mu}(s_2) = s_1$ .  $\varphi_{v,\mu}(O_2) = O_3$ ,  $\varphi_{v,\mu}(V_2) = V_3 = d_\mu \cap O_3$ .  $V_3 \cup V_1$  est un ouvert:  $V_1 \cap D_v$  et  $V_3 \cap D_\mu$  sont des ouverts dans  $C$  donc leurs points sont intérieurs à  $V_1 \cup V_3$ ;  $s_1 = V_1 \cap B_v = V_1 \cap V_3 = V_3 \cap B_\mu$ ; si  $M \in s_1$ ,  $M \in (O_1 \cap O_3)$  donc  $M$  est intérieur à un ouvert  $W \subset (O_1 \cap O_3)$ ; soit  $P \in W$ , ou bien  $P \in (d_v \cap O_1)$  ou bien  $P \in (d_\mu \cap O_3)$  donc  $P \in V_1 \cup V_3$  et  $W \subset (V_1 \cup V_3)$ .

3°  $m \in \omega$ .  $M = f_v^{-1}(m)$ .  $V_v = f_v^{-1}[v^e(m)]$  est un ouvert de  $d_v$ . Soient  $D_{v_1} = D_v, D_{v_2}, \dots, D_{v_n}$  les  $n$  polygones fondamentaux ayant  $M$  pour sommet commun,  $V_{v_1}, V_{v_2}, \dots, V_{v_n}$  les images de  $V_v$  dans  $D_{v_1}, D_{v_2}, \dots, D_{v_n}$ . Pour démontrer que  $V_{v_1} \cup V_{v_2} \cup \dots \cup V_{v_n}$  est un ouvert il suffira de montrer que  $M$  est intérieur à cet ensemble, cela en utilisant l'ouvert  $O_{v_1}$  qui sert à définir  $V_{v_1}$  comme ouvert relativement à  $d_v$  et les images  $O_{v_i}$  de  $O_{v_1}$  par les  $\varphi_{v_1, v_i}$ .  $M \in \bigcap_i O_{v_i}$  et on termine comme dans le cas précédent.

d) Extension de  $f_v$ . — Soit  $M \in C$ . — 1° Si  $M \in D$ ,  $M \in D_\mu$ . Soit  $M_v = \varphi_{\mu, v}(M) \in D_v$ . Toute autre fonction de  $G$  représente  $M$  sur un domaine fondamental autre que  $D_v$ . Posons  $f(M) = f_v \circ \varphi_{\mu, v}(M)$ .

2° Si  $M \in \beta$  il existe deux transformations de  $G$ ,  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  représentant  $M$  sur  $B_v$  et obtenues par représentation sur  $D_v$  des deux domaines fondamentaux  $D_\mu$  et  $D_\mu$  ayant  $M$  pour point frontière. La

relation  $\varphi_{\mu, \nu} = \varphi_{\mu, \nu} \circ \varphi_{\mu, \mu}$  montre que  $\varphi_{\mu, \nu}(M)$  et  $\varphi_{\mu, \nu}(M)$  sont congruents sur  $B_\nu$ . Dans ces conditions

$$m = f(M) = f_\nu \circ \varphi_{\mu, \nu}(M) = f_\nu \circ \varphi_{\mu, \nu}(M).$$

3°  $M \in \Omega$  est sommet commun de plusieurs domaines fondamentaux  $D_{\mu_1} D_{\mu_2} \dots D_{\mu_n}$ .  $\varphi_{\mu, \mu}$  est une transformation elliptique de point fixe  $M$ . Donc  $\varphi_{\mu, \nu} = \varphi_{\mu, \nu} \circ \varphi_{\mu, \mu}$  est indépendant de  $p$ , donc aussi  $m = f_\nu \circ \varphi_{\mu, \nu}(M) = f(M)$ .

Il résulte de l'étude de la continuité faite en  $c$ ) que l'image inverse d'un voisinage élémentaire dans  $\Delta$  est la réunion de composantes qui sont chacune des voisinages élémentaires dans  $\mathcal{C}$ . Il en résulte que l'image inverse d'un ouvert dans  $\Delta$  est un ouvert dans  $\mathcal{C}$ .

Si  $M \in (\mathcal{D} \cap \beta)$ , alors  $m \in (\hat{\mathcal{C}} \cap \beta)$  et les ouverts  $V^e(M)$  ou  $V_3 \cap V_1$  sont représentés biunivoquement par  $f$  sur  $v^e(m)$ ; en d'autres termes toute composante connexe de  $f^{-1}[v^e(m)]$  est appliquée par  $f$  topologiquement sur  $v^e(m)$ . Si  $M \in \Omega$  donc  $m \in \omega$ , la composante de  $f^{-1}[v^e(m)]$  contenant  $M$  comprend  $n$  « secteurs »  $V_{\nu_i}$  où  $n$  est la période de la transformation elliptique de sommet  $M$ :  $m$  est couvert à l'ordre  $n$  par la composante connexe de  $f^{-1}[v^e(m)]$  qui contient  $M$  (pour la représentation  $f$ ).

LEMME I. —  $(\mathcal{C}_i, f)$  est un revêtement régulièrement ramifié de  $\Delta$ , ramifié seulement aux points de  $f(\Omega)$ ; ( $\mathcal{C}_i$  est une composante connexe quelconque de  $\mathcal{C}$ ).

e) Structure conforme de  $\Delta$ . — Soient  $m \in \Delta$  et  $v(m)$  un voisinage élémentaire de  $M$  dans  $\Delta$ . Soit  $\mathcal{U}_0$  une composante arbitraire mais fixe de  $f^{-1}(v)$ :  $\mathcal{U}_0 = f_*^{-1}(v)$ .

Une composante quelconque  $\mathcal{U}_i$  de  $f^{-1}(v)$  est représentée sur  $\mathcal{U}_0$  par  $f_*^{-1} \circ f$  qui est une fonction homographique de  $G$ .

1° Si  $m \in \hat{\mathcal{C}} \cup \beta$ , prenons comme uniformisante de  $v(m)$  la représentation biunivoque  $T \circ f_*^{-1}$  où  $T$  est l'uniformisante de  $\mathcal{U}_0$ . La structure conforme étant déjà définie sur  $\mathcal{C}$ , ces uniformisantes définissent une structure conforme cohérente sur  $\Delta - \omega$  indépendante du choix de la détermination  $f_*^{-1}$ .  $(\mathcal{C}_i - \Omega, f)$  est un revêtement relativement non ramifié de  $\Delta - \omega$ .

2° Si  $m \in \omega$ , soit  $\mathcal{U}(M)$  la composante connexe de  $f^{-1}[v^e(m)]$  qui contient  $M$ :  $(\mathcal{U}(M) - M, f)$  est un revêtement relativement non ramifié de  $v^e(m) - m$ , avec la multiplicité  $n$  (où  $n$  est le nombre des polygones  $D_\nu$  ayant  $M$  pour sommet commun). D'après le théorème

cité dans l'introduction on peut déterminer une uniformisante locale de  $v^e(m)$  cohérente avec la structure conforme déjà définie dans  $\Delta - \omega$ , par la relation  $T\varphi\zeta^{-1} = k\zeta^n$  qui s'écrit ici  $T = k[H[f_*^{-1}]]^n$  où  $T$  est l'uniformisante cherchée de  $v^e(m)$ ,  $f_*^{-1}$  la détermination de  $f^{-1}$  qui associe  $\Gamma(M)$     $v^e(m)$ , et  $H$  l'uniformisante de  $\mathcal{C}(M)$  qui n'est autre qu'une représentation conforme de  $\mathcal{C}(M)$  sur un cercle,  $M$  se repr santant sur l'origine. Ce résultat peut être obtenu directement: représentons conformément par  $F$ , le cercle  $C$  sur un cercle du plan  $z$ ,  $M$  étant représenté à l'origine. La transformation elliptique  $\varphi$  de point fixe  $M$  se transpose en une rotation d'angle  $2\frac{\pi}{n}$  qui reste encore une rotation d'angle  $2\frac{\pi}{n}$  après représentation conforme  $K$  de  $F(\mathcal{C}(M))$  sur un cercle;  $[K \circ F \circ f_*^{-1}]^n$  définit alors une uniformisante de  $v^e(m)$  cohérente avec la structure conforme déjà définie dans  $\Delta - \omega$ ; si l'on remarque qu'à un facteur constant près  $KF = H$  on retrouve l'expression précédente.

Nous appellerons  $\Delta$  le polygone de base et sa structure conforme sera dite l'image par  $f$  de la structure conforme de  $\mathcal{C}$ .

**B. — Construction de la base.** — Désignons par  $\tilde{D}_v$  la réunion de  $D_v$  (ouvert) et de la partie de sa frontière qui est intérieure à  $C$ . Soit  $\psi_v$  une application continue de  $\tilde{D}_v$  sur une surface  $R'$  de manière que  $\psi_v(M) = \psi_v(M')$  si  $M$  et  $M'$  sont congruents et seulement dans ce cas.  $\psi_v \circ f_v^{-1}$  représente  $\Delta$  biunivoquement sur un domaine  $\Delta' \subset R'$ , la fermeture de  $\Delta'$  dans  $R'$   tant  $R'$ . Les voisinages élémentaires dans  $R'$  seront définis de la manière suivante :

1<sup>o</sup>  $p \in \Delta'$ ,  $v^e(p)$  est l'image par  $\psi_v \circ f_v^{-1}$  d'un voisinage élémentaire dans  $\Delta$ ;

2<sup>o</sup>  $p \in (R' - \Delta')$ . En  $p$  aboutissent  $n$  arcs de la frontière de  $\Delta'$  dans  $R'$  et un ouvert contenant  $p$  sera un voisinage élémentaire si la frontière de  $\Delta'$  dans  $R'$  sépare  $v(p)$  en  $n$  composantes seulement représentées sur des secteurs circulaires par une hom omorphie convenable de  $v(p)$  sur un cercle.

On étend ensuite  $\psi_v$  en une application continue  $\psi$  de  $C$  sur  $R'$  de sorte que  $\psi(M) = \psi(M')$  lorsque  $M$  et  $M'$  sont congruents, comme on a fait l'extension de  $f_v$  en  $f$ . Lorsque  $p \notin \psi(\Omega)$  toute composante de  $\psi^{-1}[v^e(p)]$  est représentée par  $\psi$  biunivoquement sur  $v^e(p)$ . Si  $p \in \psi(\Omega)$  ( $p \in \Delta'$ ), toute composante de  $\psi^{-1}[v^e(p)]$  recouvre  $p$  avec la même multiplicité.

**THÉORÈME 2.** — *Étant donné dans un cercle  $C$  un groupe  $H$ -Fuchsöide d'homéomorphismes contenant des transformations elliptiques, il existe une surface  $R'$  et une projection  $\psi$  de  $C$  sur  $R'$  de sorte que  $(C, \psi)$  soit un revêtement de  $R'$  régulièrement ramifié aux points images par  $\psi$  des transformations elliptiques du groupe.*

Désignons par  $R$  la surface de Riemann obtenue en introduisant dans l'intérieur de  $R'$  la structure conforme imagé par  $\psi$  de la structure conforme de  $C$  (dans le cas où  $G$  est un groupe Fuchsöide). On écrira  $R = C \bmod G$  ou  $R = \frac{C}{G}$ .  $R$  contient alors une image conforme biunivoque de  $\Delta$  que nous appellerons encore  $\Delta$ .

**THÉORÈME 2 bis.** — *Étant donné dans un cercle  $C$  un groupe Fuchsien  $G$  de transformations homographiques, contenant des transformations elliptiques, il existe une surface de Riemann  $R$  et une projection Riemannienne  $\psi$  de  $C$  sur  $R$  de sorte que  $(C, \psi)$  soit un revêtement de  $R$  régulièrement ramifié aux points images par  $\psi$  des points fixes des transformations elliptiques de  $G$ .*

**C. — Le revêtement universel de  $R$ .** — Pour construire le revêtement universel de  $R$  on peut utiliser le système des courbes tracées sur  $R$  (ou  $R'$ ) et limitant  $\Delta$  (resp  $\Delta'$ ) simplement connexe. Ce système de courbes comprend au plus une infinité dénombrable de côtés associés par paires. On juxtaposera des polygones identiques à  $\Delta$  suivant les côtés homologues<sup>(1)</sup> et cette opération se poursuivra indéfiniment. Par passage à la limite on obtiendra un cercle  $\mathfrak{G}$  et une projection  $\mathfrak{f}$  de  $\mathfrak{G}$  sur  $R$  de sorte que  $(\mathfrak{G}, \mathfrak{f})$  est le revêtement universel de  $R$ . Le groupe Fuchsöide des transformations de  $\mathfrak{G}$  par lesquelles  $\mathfrak{f}$  est invariante, ou plus brièvement le groupe de revêtement universel de  $R$  sera noté  $G^*$ . Nous utiliserons la même notation  $G^*$  pour le groupe fondamental de  $R'$  qui peut s'obtenir par le même procédé que pour  $R'$ , à ceci près que le groupe Fuchsöide  $G^*$  est remplacé par un groupe  $H$ -Fuchsöide. Dans la suite, d'ailleurs nous étudions les relations algébriques entre  $G$  et  $G$  et la structure conforme de  $C$  n'intervient plus.

(1) Cette méthode est utilisée dans la démonstration des théorèmes d'uniformisation par BIEBERBACH, *Funktionentheorie*, t. II; dans « Sur la théorie des surfaces de Riemann » *Ann. Ec. N. Sup.*, 1951, j'appelle « lois de la soudure » les principes qui codifient cette juxtaposition des polygones identiques.

CHAPITRE II

I. — Les générateurs d'un groupe H-Fuchsöide.

A. — Construction des générateurs. — Nous étudions un groupe G (qui peut être aussi bien le groupe G\*) avec les notations de la première partie.

1° Développement de  $\varphi_{1,n}$ . — Supposons pour simplifier l'écriture que le numérotage des domaines  $D_i$  soit tel que

$$\varphi_{1(1)} = \varphi_{1,2}, \quad \varphi_{2(2)} = \varphi_{2,3}, \quad \dots, \quad \dots, \quad \varphi_{n(n)} = \varphi_{n,n+1}.$$

Dans ces conditions

$$\varphi_{1,3} = \varphi_{2,3} \cdot \varphi_{1,2} = \varphi_{1,2} \cdot \varphi_{2(1)} \cdot \varphi_{2,1} \cdot \varphi_{1,2} = \varphi_{1(1)} \cdot \varphi_{2(1)}.$$

Supposons que :

$$(1) \quad \varphi_{1,n} = \varphi_{1(1)} \cdot \varphi_{2(1)} \cdot \dots \cdot \varphi_{n-1(1)}.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \varphi_{1,n+1} &= \varphi_{n,n+1} \cdot \varphi_{1,n} = \varphi_{1,n} \cdot \varphi_{n(1)} \cdot \varphi_{n,1} \cdot \varphi_{1,n} = \varphi_{1,n} \cdot \varphi_{n(1)} \\ &= \varphi_{1(1)} \cdot \varphi_{2(1)} \cdot \dots \cdot \varphi_{n(1)}. \end{aligned}$$

L'expression (1) constitue un développement de  $\varphi_i$  suivant les  $\varphi_{i(1)}$ . D'une manière générale soit  $\Gamma(1, i_n)$  une chaîne de  $n$  domaines contigus joignant les domaines  $D_1$  et  $D_{i_n}$  :  $D_1 = D_{i_1}, D_{i_2}, \dots, D_{i_n}$ .  $D_{i_j}$  est contigu à  $D_{i_{j+1}}$  suivant  $s_{\lambda_j, i_j} = s_{\lambda_j, i_{j+1}}$  de sorte que  $\varphi_{i_j, i_{j+1}} = \varphi_{\lambda_j(i_j)}$

$$(2) \quad \varphi_{1,n} = \varphi_{\lambda_1(1)} \cdot \varphi_{\lambda_2(1)} \cdot \dots \cdot \varphi_{\lambda_{n-1}(1)}.$$

Ainsi à toute chaîne  $\Gamma(1, n)$  joignant le domaine  $D_1$  au domaine  $D_n$  on a associé un développement de  $\varphi_{1,n}$ . Inversement étant donné un développement arbitraire :

$$\varphi_{j_1(1)} \cdot \varphi_{j_2(1)} \cdot \dots \cdot \varphi_{j_n(1)}$$

on peut constituer une chaîne de domaines  $D_1, D_{v_1}, D_{v_2}, \dots, D_{v_n}$  de la manière suivante :

$$D_{v_1} = \varphi_{j_1(1)}(D_1); \quad D_{v_2} = \varphi_{j_2(v_2)}(D_{v_1}); \quad \dots; \quad D_{v_n} = \varphi_{j_n(v_{n-1})}(D_{v_{n-1}})$$

et d'après ce qui précède la fonction  $\varphi_{1, \nu_n}$  peut se développer suivant :

$$\varphi_{1, \nu_n} = \varphi_{j_1} \cdot \varphi_{j_2} \cdot \dots \cdot \varphi_{j_n}$$

On dira que la chaîne  $\Gamma(1, \nu_n) = (D_1, D_{\nu_1}, \dots, D_{\nu_n})$  et le développement  $\varphi_{j_1}, \varphi_{j_2}, \dots, \varphi_{j_n}$  sont associés.

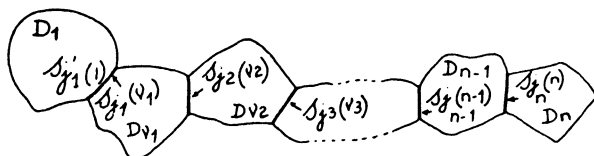


Fig. 10.

2° *Produit.* — Soient  $\varphi_{1, \mu} = \varphi_{i_1} \cdot \varphi_{i_2} \cdot \dots \cdot \varphi_{i_k}$  et  $\varphi_{1, \nu} = \varphi_{j_1} \cdot \varphi_{j_2} \cdot \dots \cdot \varphi_{j_l}$  où  $\varphi_{i_m}$  (resp.  $\varphi_{j_m}$ ) est écrit pour  $\varphi_{i_m(i)}$  (resp.  $\varphi_{j_m(i)}$ ).

Soit  $D_\lambda = \varphi_{1, \nu} \cdot \varphi_{1, \mu}(D_1) = \varphi_{1, \lambda}(D_1) = \varphi_{1, \nu}(D_\mu)$ .

On peut obtenir  $D_\lambda$  comme image de  $D_\mu$  par  $\varphi_{1, \nu}$  en construisant l'image par  $\varphi_{1, \nu}$  de toute la chaîne  $\Gamma(1, \mu)$ . On obtient alors une chaîne  $\Gamma(1, \lambda)$  à laquelle on associe le développement suivant de  $\varphi_{1, \lambda}$  :

$$\varphi_{1, \lambda} = \varphi_{j_1} \cdot \varphi_{j_2} \cdot \dots \cdot \varphi_{j_l} \cdot \varphi_{i_1} \cdot \varphi_{i_2} \cdot \dots \cdot \varphi_{i_k}$$

d'où la formule :

$$(3) \quad \text{dev } \varphi_{1, \lambda} = \text{dev } (\varphi_{1, \nu} \cdot \varphi_{1, \mu}) = (\text{dev } \varphi_{1, \nu})(\text{dev } \varphi_{1, \mu}).$$

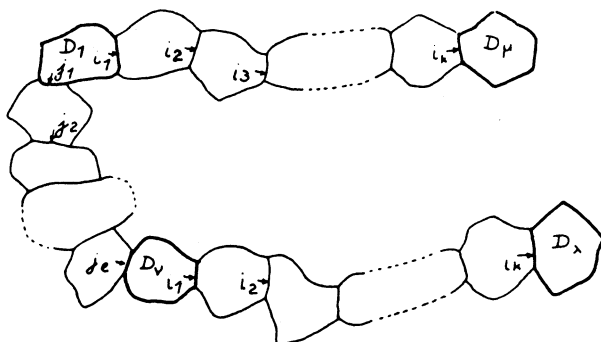


Fig. 11.

La formule (3) est d'ailleurs évidente si l'on se rappelle que le développement est un véritable produit d'éléments de  $G$ . On écrira de la même façon

$$\varphi_{1, \mu, 1} = \varphi_{1, \mu}^{-1} = \varphi_{i_k}^{-1} \cdot \varphi_{i_{k-1}}^{-1} \cdot \dots \cdot \varphi_{i_1}^{-1}.$$

3° Règle de calcul. — Si dans le développement de  $\psi$  deux facteurs consécutifs ont pour produit l'unité, on obtient encore un développement de  $\psi$  en retirant ces deux facteurs du premier développement :

$$\psi = A \cdot \varphi_i \cdot \varphi_j \cdot B = A \cdot B \quad \text{si} \quad \varphi_i \cdot \varphi_j = 1.$$

Bien que cette règle de calcul soit une évidence nous aurons à nous référer à cette opération formelle que nous appellerons brièvement simplification.

4° Le domaine de référence. Soit  $\varphi_{1,n}$  développé suivant les  $\varphi_{i(1)}$  et  $\Gamma(1, n)$  la chaîne associée à ce développement. Désignons par  $D_0$  un domaine quelconque, étranger ou non à cette chaîne. Prenons  $D_0$  comme domaine de référence et introduisons une chaîne arbitraire  $\Gamma(0, 1)$ , joignant  $D_0$  à  $D_1$ .

$$\varphi_{1,n} = \varphi_{1(1)} \cdot \varphi_{2(1)} \cdots \varphi_{k(1)} = \varphi_{0,1} \cdot \varphi_{1(0)} \cdot \varphi_{2(0)} \cdots \varphi_{k(0)} \cdot \varphi_{1,0}$$

puisque  $\varphi_{i(1)} = \varphi_{0,1} \cdot \varphi_{i(0)} \cdot \varphi_{1,0}$ .

Or  $\varphi_{0,1}$  admet un développement suivant les  $\varphi_{j(0)}$ , associé à  $\Gamma(0, 1)$  et  $\varphi_{1,0}$  admet le développement inverse du précédent.

$$(4) \quad \varphi_{1,n} = \Pi \varphi_{i(0)}.$$

Au développement (4) correspond une nouvelle chaîne  $\Gamma(0, m)$  qu'il est facile de construire d'après la relation

$$\varphi_{1,n} = \varphi_{0,1} \cdot \varphi_{1(0)} \cdot \varphi_{2(0)} \cdots \varphi_{n(0)} \cdot \varphi_{1,0}$$

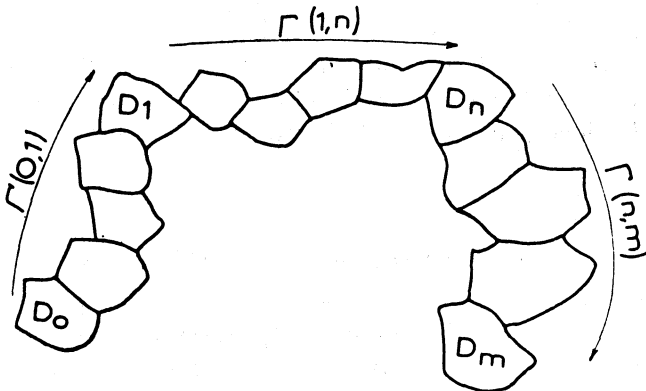


Fig. 12.

Désignons par  $\Gamma(n, m)$  la chaîne issue de  $D_n$  et congruente à  $\Gamma(1, 0)$ , inverse de  $\Gamma(0, 1)$ . On obtient

$$\Gamma(0, m) = \Gamma(0, 1) + \Gamma(1, n) + \Gamma(n, m).$$



**THÉORÈME 3.** — *Les  $\varphi_{i(0)}$  constituent un système de générateurs du groupe G.*

**B. — Les relations fondamentales.** 1° Soit P un sommet d'un polygone fondamental où viennent se rencontrer les côtés  $s_{i_1, j_1}, s_{i_2, j_2}, \dots, s_{i_k, j_k}$  dans cet ordre avec la disposition usuelle :  
 $s_{i_1, j_1-1} = s_{i_1, j_1}$ .

Formons le développement de  $\varphi_{j_1, j_1} = 1$  associé à la chaîne des domaines

$$D_{j_1}, \quad D_{j_2}, \quad \dots, \quad D_{j_k}, \quad D_{j_1}$$

$$\varphi_{0, j_1} \cdot \varphi_{i_1(0)} \cdot \varphi_{i_2(0)} \cdot \dots \cdot \varphi_{i_k(0)} \cdot \varphi_{j_1, 0} = 1$$

ou

$$(5) \quad \begin{aligned} \varphi_{i_1(0)} \cdot \varphi_{i_2(0)} \cdot \dots \cdot \varphi_{i_k(0)} \cdot \varphi_{j_1, 0} &= \varphi_{j_1, 0} \\ \varphi_{i_1} \cdot \varphi_{i_2} \cdot \dots \cdot \varphi_{i_k} &= 1 \end{aligned}$$

que nous écrirons  $F_P = 1$ .

(5) et toutes les relations analogues obtenues à partir de tous les sommets d'un polygone fondamental quelconque constituent les relations fondamentales<sup>(8)</sup> de G. Autour d'un sommet elliptique nous aurons  $\varphi_i^{(n)} = 1$ .

2° Le système des relations  $F_P = 1$  est complet.

a) *L'opération U.* —  $\psi \in G$  étant écrit sous la forme  $\psi = \varphi_{i_1} \cdot \varphi_{i_2} \cdot \dots \cdot \varphi_{i_m}$  où les  $\varphi_{i_k}$  sont des générateurs, nous appellerons opération U l'opération formelle qui consiste à introduire dans l'écriture de  $\psi$ , entre deux générateurs une expression de la forme  $\varphi_{\lambda, \mu} \cdot F \cdot \varphi_{\mu, \lambda}$  où F représente un produit de relations fondamentales de G (pour le système de générateurs  $\varphi_i$ ). Le développement utilisé pour  $\varphi_{\mu, \lambda}$  est l'inverse du développement utilisé pour  $\varphi_{\lambda, \mu}$ . Puisque

$$\varphi_{\lambda, \mu} \cdot F \cdot \varphi_{\mu, \lambda} = 1$$

on peut énoncer :

**LEMME B1.** —  *$\psi$  n'est pas changé par l'opération U.*

b) *Réduction des chaînes.* — Soit  $\psi = \varphi_{i_1} \cdot \varphi_{i_2} \cdot \dots \cdot \varphi_{i_k} = 1$  et ( $\Gamma$ ) la chaîne des domaines  $D_i$ , issue de  $D_0$  représentée par ce développement de  $\psi$ . ( $\Gamma$ ) est une chaîne fermée puisque  $\psi = 1$ .

$\alpha$ ) Supposons que la chaîne ( $\Gamma$ ) limite une région intérieure ( $\Gamma^0$ ) contenant donc un nombre fini de domaines fondamentaux. Introduisons provisoirement une numérotation particulière des domaines

<sup>(8)</sup> Cf. FΑΤΟΥ, ouvrage cité, p. 143. On doit remarquer que le nombre des relations fondamentales obtenues n'est pas minimum (FΑΤΟΥ, p. 197).

$D_i$ , telle que  $D_1 D_2 D_3$  soient trois domaines consécutifs de  $(\Gamma)$  et  $D_4 D_5 D_6 D_7$  des domaines de  $(\Gamma^0)$  répartis comme l'indique la figure 13. Notons aussi provisoirement  $\varphi^{5,6}$  le générateur défini par

$$\varphi^{5,6} = \varphi_{5,0} \cdot \varphi_{5,6} \cdot \varphi_{0,5} \quad \text{ou} \quad \varphi_{5,6} = \varphi_{0,5} \cdot \varphi^{5,6} \cdot \varphi_{5,0}$$

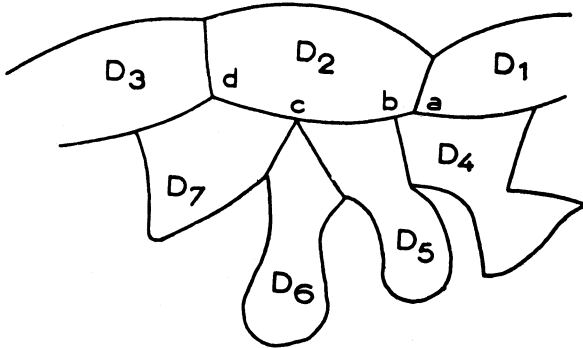


Fig. 13.

Avec ces notations nous pouvons écrire

$$(6) \quad \psi = A \cdot \varphi^{1,2} \cdot \varphi^{2,3} \cdot B,$$

où A et B représentent des produits de générateurs. Écrivons les relations fondamentales en  $a, b, c, d$

$$\begin{aligned} F_a &= \varphi^{2,1} \cdot \varphi^{1,4} \cdot \varphi^{4,2} = 1 \\ F_b &= \varphi^{2,4} \cdot \varphi^{4,5} \cdot \varphi^{5,2} = 1 \\ F_c &= \varphi^{2,5} \cdot \varphi^{5,6} \cdot \varphi^{6,7} \cdot \varphi^{7,2} = 1 \\ F_d &= \varphi^{2,7} \cdot \varphi^{7,3} \cdot \varphi^{3,2} = 1 \end{aligned}$$

$$(7) \quad \begin{aligned} \psi &= A \cdot \varphi^{1,2} \cdot F_a \cdot F_b \cdot F_c \cdot F_d \cdot \varphi^{2,3} \cdot B \\ \psi &= A \cdot \varphi^{1,2} \cdot \varphi^{2,1} \cdot \varphi^{1,4} \cdot \varphi^{4,2} \cdot \varphi^{2,4} \cdot \varphi^{4,5} \cdot \varphi^{5,2} \cdot \varphi^{2,5} \cdot \varphi^{5,6} \cdot \varphi^{6,7} \cdot \varphi^{7,2} \\ &\quad \cdot \varphi^{2,7} \cdot \varphi^{7,3} \cdot \varphi^{3,2} \cdot \varphi^{2,3} \cdot B \\ \psi &= A \cdot \varphi^{1,4} \cdot \varphi^{4,5} \cdot \varphi^{5,6} \cdot \varphi^{6,7} \cdot \varphi^{7,3} \cdot B. \end{aligned}$$

Une opération U convenable effectuée sur (6) a permis de remplacer le développement (6) de  $\psi$  par le développement (7), dont la chaîne associée contient seulement des domaines de  $(\Gamma)$  et de  $(\Gamma^0)$  sans contenir  $D_2$ .

β) La chaîne  $(\Gamma)$  ne limite pas de région intérieure. Écrivons la suite des domaines constituant cette chaîne

$$(8) \quad (\Gamma) = D_i D_j \dots D_k D_l$$

correspondant au développement de  $\psi$ . Supposons que  $(\Gamma)$  n'ait pas de sous-chaîne fermée, c'est-à-dire qu'à part  $D_i$  aucun domaine  $D_i$  ne se rencontre plusieurs fois dans la suite (8). Nous dirons qu'un domaine est périphérique pour  $(\Gamma)$  s'il est contigu à un domaine n'appartenant pas à  $(\Gamma)$ . Il y a toujours au moins un domaine périphérique autre que  $D_i$ . Soit avec des notations convenables  $D_2$  un tel domaine. Si  $D_2$  n'est contigu qu'à un seul domaine  $D_3$  c'est que le développement de  $\psi$  peut s'écrire  $\psi = A \cdot \varphi^{3,2} \cdot \varphi^{2,3} \cdot B$  que l'on simplifie :  $\psi = A \cdot B$ .

La chaîne associée au nouveau développement de  $\psi$  ne contient pas de nouveau domaine et ne contient plus  $D_2$ .

Supposons  $D_2$  contigu à  $D_1$  et  $D_3$  (dans l'écriture de la chaîne (8) associée au développement de  $\psi$ ) de sorte que  $\psi = A \cdot \varphi^{1,2} \cdot \varphi^{2,3} \cdot B$ . La frontière de  $D_2$  est séparée par les arcs de contact de  $D_2$  avec  $D_1$  et  $D_3$  en deux plages dont l'une (d'après l'hypothèse  $\beta$ ) et une seulement (puisque  $D_2$  est périphérique) doit appartenir à la frontière d'autres domaines de  $(\Gamma)$ . Soient  $D_4, D_5, D_6, D_7, D_8$  (*fig. 13*) les domaines de  $(\Gamma)$  contigus à  $D_2$ . Comme dans le cas  $\alpha$  on peut en transformant le développement de  $\psi$  par une opération  $U$  convenable écrire  $\psi$  de telle manière que la chaîne associée au nouveau développement de  $\psi$  ne contienne plus  $D_2$  sans contenir de nouveaux domaines.

$\gamma$ ) Reprenons le développement de  $\psi$

$$(g) \quad \psi = \varphi_{i_1} \varphi_{i_2} \dots \varphi_{i_k} = 1$$

et soit  $(\Gamma)$  la chaîne fermée correspondante.

i) Par une suite d'opérations  $U$  effectuées sur (g) on peut remplacer (g) par une expression (g') dont la chaîne associée  $(\Gamma')$  ne limite pas de région intérieure (d'après  $\alpha$ ).

ii) Etant donné une chaîne fermée, sans sous-chaîne fermée, et ne limitant pas de région intérieure, on peut par une suite d'opérations  $U$  sur l'expressions de  $\psi$ , faire disparaître d'après  $\beta$ , tous les domaines de cette chaîne un par un sauf l'un d'entre eux choisi arbitrairement.

iii) Dans la chaîne  $(\Gamma')$  remplaçons d'après ii) toute sous-chaîne fermée par son domaine extrême : ainsi une chaîne

$$(\Gamma') : \quad D_\alpha \dots D_\alpha D_i D_j \dots D_k D_i D_{\beta'} \dots D_\beta$$

dans laquelle  $D_i D_j \dots D_k D_i$  ne contient pas de sous-chaîne fermée, sera transformée en la chaîne

$$(\Gamma'') : \quad D_\alpha \dots D_\alpha D_i D_{\beta'} \dots D_\beta$$

( $\Gamma''$ ) sera à son tour remplacée par une nouvelle chaîne ( $\Gamma'''$ ) dont le nombre de domaines qui la compose est inférieur à celui des domaines qui composent ( $\Gamma''$ ). Par itération finie de ces opérations on réduit ( $\Gamma$ ) à son domaine initial d'où la propriété pour le système des relations fondamentales  $F_p = 1$  d'être complet :

LEMME B2. — *Le système de relations fondamentales  $F_p = 1$  est complet, en d'autres termes : par une suite finie convenable d'opérations U effectuées sur l'expression de  $\psi$ , et l'application de la seule règle de simplification, on peut réduire formellement l'expression de  $\psi$  à l'identité.*

C. — Pour le groupe  $G^*$  nous appellerons  $\Phi_i$  les générateurs, en écrivant  $\Phi_i$  pour  $\Phi_{i(0)}$  où  $\Phi_{i(0)}$  associe deux côtés congruents de  $\Delta_0$ . La relation fondamentale obtenue en considérant la chaîne des polygones  $\Delta_v$  ayant  $\mathfrak{A}$  pour sommet commun. se notera  $\bar{F}_p = 1$ .

## II. — L'homomorphisme de $G$ sur $G^*$ .

A. — L'homomorphisme T. —  $\varphi_i$  associe sur la frontière de  $D_0$  les côtés  $s_{i,0}$  et  $s_{i',0}$  ; si  $\varphi_i$  n'est pas elliptique il y a sur la frontière de  $\Delta_0$  deux arcs  $\sigma_{i,0}$  et  $\sigma_{i',0}$  respectivement images par  $\psi$  (avec les notations du théorème 2) de  $s_{i,0}$  et  $s_{i',0}$ . Les deux arcs  $\sigma_{i,0}$  et  $\sigma_{i',0}$  sont congruents par un générateur de  $G^*$  que nous notons  $\Phi_{i(0)}$ .

A un élément de  $G$  qui s'écrit

$$x = \varphi_{i_1} \cdot \varphi_{i_2} \dots \varphi_{i_n}$$

faisons correspondre l'élément de  $G^*$  qui s'écrit

$$X = T(x) = \Phi_{i_1} \Phi_{i_2} \dots \Phi_{i_n}$$

si  $\varphi_{i_\lambda}$  est elliptique, par convention  $\Phi_{i_\lambda} = 1$ .

Remarquons que si  $\varphi_{i_p+1} = \varphi_{i_p}^{-1}$  on a aussi  $\Phi_{i_p+1} = \Phi_{i_p}^{-1}$  donc  $T(x)$  ne change pas lorsqu'on simplifie l'expression de  $x$  (en en retirant le produit  $\varphi_{i_p} \cdot \varphi_{i_p+1}$ ).

T est une transformation définie sur un groupe libre, mais pour montrer que T est aussi une application de  $G$  il faut étudier les transformées des relations fondamentales.

1° Transformation des relations fondamentales. Soit P un sommet d'un polygone  $D_{j_i}$ . En P aboutissent les côtés  $s_{i_1, j_i} ; s_{i_2, j_i} ; \dots ; s_{i_k, j_i}$

dans cet ordre ; la relation fondamentale définie en P s'écrit

$$(5) \quad \varphi_{i_1} \cdot \varphi_{i_2} \cdots \varphi_{i_k} = 1.$$

Si P est un point fixe d'une transformation elliptique  $\varphi_i$ , (5) se réduit à  $\varphi_i^n = 1$ , et comme  $T(\varphi_i) = 1$ ,  $T[\varphi_i^n] = [T(\varphi_i)]^n = 1$ .

Si dans (5)  $\varphi_{i_\mu}$  est elliptique,  $s_{i_\mu, 0}$  a pour image dans  $\Delta_\nu$  un arc  $\sigma_{i_\mu, \nu}$  joignant un sommet de  $\Delta_\nu$  à un point intérieur de  $\Delta_\nu$ , image du point fixe de  $\varphi_{i_\mu(0)}$ .

En  $\mathcal{P}$ , image quelconque de P aboutissent les côtés de même indice qu'en P et dans le même ordre :

$$\sigma_{i_1, \nu_1}; \quad \sigma_{i_2, \nu_2}; \quad \dots; \quad \sigma_{i_k, \nu_k}$$

mais certains de ces côtés  $\sigma_{i_\mu, \nu_\mu}$  par exemple ne séparent pas deux domaines fondamentaux. La relation fondamentale  $\mathcal{F}_P$  définie en  $\mathcal{P}$  s'écrira

$$(9) \quad \Phi_{i_1} \cdot \Phi_{i_2} \cdots \Phi_{i_k} = 1$$

où certains des générateurs  $\Phi$  doivent être réduits à l'identité :  $\Phi_{i_\mu}$  qui fait passer du domaine  $\Delta_{\nu_\mu}$  au domaine  $\Delta_{\nu_{\mu+1}} = \Delta_{\nu_\mu}$  « à travers » le côté  $\sigma_{i_\mu, \nu_\mu}$  intérieur à  $\Delta_{\nu_\mu}$  ;  $\varphi_{i_\mu}$  est nécessairement elliptique puisque  $\sigma_{i_\mu, \nu_\mu}$  est un arc intérieur à  $\Delta_{\nu_\mu}$  ; mais on a précisément  $T(\varphi_{i_\mu}) = 1$  lorsque  $\varphi_{i_\mu}$  est elliptique.

Le premier membre de (9) s'obtient donc en transformant formellement par T le premier membre de (5).

Inversement une relation fondamentale de  $G^*$  s'obtient à partir d'un sommet d'un polygone fondamental  $\Delta_\nu$ , mais ce sommet est l'image d'un sommet d'un  $D_\nu$ . Toutes les relations fondamentales de  $G^*$  s'obtiennent donc par transformation des relations fondamentales de G. Toutefois une relation fondamentale de  $G^*$  peut être la transformée par T de deux relations fondamentales distinctes de G : Nous n'aurons pas à faire de distinction.

**LEMME A1.** — *Les relations fondamentales de  $G^*$  s'obtiennent en transformant par T les relations fondamentales de G.*

**COROLLAIRE.** — *X = T(x) est inchangé par l'opération U effectuée sur x.*

En effet  $T(\varphi_{\lambda, \mu})$  et  $T(\varphi_{\mu, \lambda})$  ont des développements inverses comme  $\varphi_{\lambda, \mu}$  et  $\varphi_{\mu, \lambda}$ , et  $F_\alpha$  se transforme par T en  $\mathcal{F}_\alpha$  qui est une relation fondamentale de  $G^*$  ;

$$T[\varphi_{\lambda, \mu} \cdot F_\alpha \cdot \varphi_{\mu, \lambda}] = T(\varphi_{\lambda, \mu}) \cdot \mathcal{F}_\alpha \cdot T(\varphi_{\mu, \lambda}) = 1.$$

2° X est indépendant du développement de x.

Soient  $x = y$  que nous distinguons par deux développements distincts  $xy^{-1} = 1$ . Le corollaire ci-dessus et le lemme B2 prouvent que  $T(xy^{-1}) = T(1) = 1$ . D'autre part si

$$\begin{aligned} x &= \varphi_{i_1} \cdot \varphi_{i_2} \dots \varphi_{i_k} & \text{et} & & z &= \varphi_{j_1} \varphi_{j_2} \dots \varphi_{j_l} \\ T(xz) &= \Phi_{i_1} \Phi_{i_2} \dots \Phi_{i_k} \Phi_{j_1} \Phi_{j_2} \dots \Phi_{j_l} & & & &= T(x) \cdot T(z) \end{aligned}$$

donc  $T(x^{-1}) = [T(x)]^{-1}$  qui doit être regardée comme une identité entre deux développements, le développement de x étant le même dans les deux membres.

$$T(xy^{-1}) = T(x) \cdot T(y^{-1}) = T(x) \cdot [T(y)]^{-1} = 1$$

donc

$$T(x) = T(y)$$

**THÉORÈME 4.** — *La transformation T définie en A est un homomorphisme de G sur G\*.*

**B.** — Le noyau de l'homomorphisme T. — 1° *Le sous-groupe invariant K.* — Soit K le sous-groupe engendré par les transformations elliptiques de G.

$h \in K$  si  $h = \psi_{i_1} \cdot \psi_{i_2} \dots \psi_{i_k}$  où les  $\psi_{i_i}$  sont des transformations elliptiques de G, soit alors  $\psi \in G$

$$h' = \psi^{-1} \cdot h \cdot \psi = \psi^{-1} \cdot \psi_{i_1} \cdot \psi \cdot \psi^{-1} \cdot \psi_{i_2} \cdot \psi \cdot \psi^{-1} \dots \psi \cdot \psi^{-1} \cdot \psi_{i_k} \cdot \psi.$$

Chaque produit  $\psi^{-1} \cdot \psi_{i_j} \cdot \psi$  est elliptique (les points fixes de  $\psi_{i_j}$  sont transformés par  $\psi^{-1}$  en les points fixes de  $\psi^{-1} \cdot \psi_{i_j} \cdot \psi$  à l'intérieur de C) donc  $h' \in K$  et K est un sous-groupe invariant.

Corollaire B1. Si  $\psi_j \cdot \psi_i \in K$  et  $\psi_i \in K$  alors  $\psi_j \psi_i \psi_i \in K$ .

Corollaire B2. Si  $\psi_j \cdot \psi_i \cdot \psi_i \in K$  et  $\psi_i \in K$  alors  $\psi_j \psi_i \in K$ .

2°  $K \subset$  noyau de T. Soit  $\psi_1$  elliptique,  $P_1$  son point double sommet du polygone  $D_1$ . D'après le chapitre 1, 1<sup>re</sup> partie, les deux côtés de  $D_1$  aboutissant en  $P_1$  sont congruents par  $\psi_1$ .

$\varphi_{1(0)} = \varphi_{1,0} \cdot \psi_1 \cdot \varphi_{0,1}$  est un générateur elliptique de G.

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \varphi_{0,1} \cdot \varphi_1 \cdot \varphi_{1,0} \\ \text{dev } \psi_1 &= (\text{dev } \varphi_{0,1}) \cdot \varphi_1 \cdot (\text{dev } \varphi_{1,0}) \\ \text{d'où} & & T(\psi_1) &= 1 \end{aligned}$$

T étant un homomorphisme tout produit de transformations elliptiques, donc tout élément de K est représenté par T sur l'identité de G\*.

Nous allons prouver maintenant que le noyau de  $T$  ne contient pas d'autre élément que ceux de  $K$ .

3° *Représentant réduit*. — Soit  $\psi \in G$  développé en un produit de générateurs

$$(10) \quad \psi = \varphi_1 \cdot \varphi_2 \cdots \varphi_k$$

$$(11) \quad \Psi = T(\psi) = \varphi_1 \cdot \varphi_2 \cdots \varphi_k$$

dans cette écriture non simplifiée de  $\Psi$  certains facteurs peuvent être égaux à l'identité et du fait de leur suppression dans (11), deux facteurs consécutifs dans la nouvelle écriture de  $\Psi$  peuvent être inverses l'un de l'autre. Leur suppression du développement de  $\Psi$  conduit encore à un développement de  $\Psi$ . La suppression des facteurs correspondant dans (10) fournit le développement d'un élément  $\psi'$  que nous appellerons représentant réduit de  $T^{-1}(\Psi)$ . Le développement de  $\psi'$  est tel que son transformé par  $T$  n'est susceptible d'aucune réduction par la simple application de la règle  $\varphi_i \varphi_i^{-1} = 1$ .

Soit  $\psi_1$  obtenu à partir de  $\psi$  par suppression dans (10) d'une expression de la forme  $\theta \cdot \varphi_{i_1} \cdot \varphi_{i_2} \cdots \varphi_{i_k} \cdot \theta^{-1}$  où  $\theta$  est un produit de générateurs, et où les  $\varphi_{i_j}$  sont des générateurs elliptiques.

$$\begin{array}{ccc} \psi = A \cdot \theta \cdot \varphi_{i_1} \varphi_{i_2} \cdots \varphi_{i_k} \cdot \theta^{-1} \cdot B & \psi_1 = A \cdot B & \\ \varphi_{i_1} \cdot \varphi_{i_2} \cdots \varphi_{i_k} \in K & \text{donc} & \theta \cdot \varphi_{i_1} \cdot \varphi_{i_2} \cdots \varphi_{i_k} \cdot \theta^{-1} \in K \end{array}$$

et d'après le corollaire  $B_1$  si  $\psi_1 \in K$  on a aussi  $\psi \in K$ .

$\psi'$  est obtenu à partir de  $\psi$  par répétition finie de l'opération ci-dessus qui a fait passer de  $\psi$  à  $\psi_1$ . Si  $\psi' \in K$  on a  $\psi \in K$ .

4° *L'opération U sur  $\Psi$* . — Soit  $\Psi = \alpha \cdot \beta$  (où  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux produits de générateurs); soit  $\psi'$  le représentant réduit de  $T^{-1}(\Psi)$ :  $\psi' = A \cdot B$ .

$$(12) \quad \Psi = \alpha \cdot \varepsilon \cdot \mathcal{F}_\alpha \cdot \varepsilon^{-1} \cdot \beta$$

où  $\varepsilon$  est un produit de générateurs et  $\mathcal{F}_\alpha$  une relation fondamentale de  $G^*$ , transformée par  $T$  d'une relation fondamentale  $F_\alpha$  de  $G$ , qui n'est pas nécessairement unique. Soit  $E$  un représentant réduit de  $T^{-1}(\varepsilon)$ .

$$\psi' = A \cdot E \cdot F_\alpha \cdot E^{-1} \cdot B$$

simplifions alors l'écriture (12) et considérons le représentant réduit  $\psi''$  de  $T^{-1}(\Psi)$  avec la nouvelle écriture de  $\Psi$ :

$$\text{si} \quad \psi'' \in K, \quad \psi' \in K \quad \text{et} \quad \psi \in K.$$

5° *Supposons maintenant*  $T(\psi) = 1$ . —  $\Psi = T(\psi) = 1$ . D'après le lemme B<sub>2</sub> on peut réduire formellement le développement (11) à l'identité. Le représentant réduit de  $T^{-1}(1)$  est l'identité de  $G$  donc est un élément de  $K$  et par suite  $\psi \in K$ .

**THÉORÈME 5.** — *Le noyau de l'homomorphisme  $T$  de  $G$  sur  $G^*$  est le sous-groupe de  $G$  engendré par les transformations elliptiques de  $G$ .*

En reprenant les notations de la première partie, et en désignant de nouveau par  $R'$  la surface intervenant dans le théorème 2, on peut énoncer.

**THÉORÈME 6.** — *Le groupe de Poincaré de  $R'$  est isomorphe au quotient du groupe  $G$  par le sous-groupe engendré par les transformations elliptiques de  $G$ .*

C. — **Comparaison des groupes et des revêtements.** — Soit  $G$  un groupe H-Fuchsöide opérant dans  $C$  et ne possédant pas de transformations elliptiques. Soit  $S = C/G$ .

a)  $G$  est le groupe de Poincaré de  $S$ . Il existe une application continue  $f$  de  $C$  sur  $S$ , invariante par les homéomorphismes de  $G$ , et telle que

$(C, f)$  est un revêtement non ramifié de  $S$ .

b) Soit  $g$  un sous-groupe de  $G$ .  $\Sigma = C/g$ . Il existe une application continue  $\varphi$  de  $C$  sur  $\Sigma$ , invariante seulement par les homéomorphismes de  $g$ , et telle que  $(C, \varphi)$  est un revêtement non ramifié de  $\Sigma$ .

On peut alors déterminer une application continue  $\psi$  de  $\Sigma$  sur  $S$  telle que

$(\Sigma, \psi)$  est un revêtement non ramifié de  $S$ .

c) Soit  $G^*$  une extension de  $G$  telle que  $G$  soit isomorphe au quotient de  $G^*$  par le sous-groupe engendré par les transformations elliptiques de  $G^*$ . Soit  $S^* = C/G^*$ . Il existe une application continue  $f^*$  de  $C$  sur  $S^*$ , invariante par les homéomorphismes de  $G^*$ , telle que  $(C, f^*)$  est un revêtement régulièrement ramifié de  $S^*$ , le groupe de Poincaré de  $S^*$  étant isomorphe à  $G$ .

---