ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

EINAR HILLE

Une généralisation du problème de Cauchy

Annales de l'institut Fourier, tome 4 (1952), p. 31-48
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1952__4__31_0>

© Annales de l'institut Fourier, 1952, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://annalif.ujf-grenoble.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

UNE GÉNÉRALISATION DU PROBLÈME DE CAUCHY[1]

par **Einar HILLE** (Nancy et New Haven, Conn.)

1. — Introduction.

Il y a un grand nombre de problèmes que nous devons au génie de Cauchy : le problème dont il s'agit ici est le problème des valeurs initiales pour les équations aux dérivées partielles. Un cas spécial de ce problème nous sert comme point de départ pour les considérations suivantes.

Soit donc R_ν l'espace euclidien à ν dimensions, $y(P, t)$ un vecteur à m composantes, dépendant du point P de R_ν et du temps t. De plus, soit U un opérateur différentiel linéaire indépendant de t dont les coefficients sont des fonctions continues de P. Le problème de Cauchy demande de déterminer $y(P, t)$ pour chaque t positif comme solution du système différentiel

$$\frac{\partial}{\partial t} y(P, t) = U[y(P, t)], \qquad t > 0, \tag{1}$$

$$\lim_{t \to 0} y(P, t) = y_0(P), \tag{2}$$

où $y_0(P)$ est un vecteur donné à l'avance. Le problème est dit *bien posé* s'il admet une solution et une seule.

On peut généraliser ce problème de différentes manières. Pour plus de précision dans la généralisation suivante on se sert du langage des espaces normés. Soit donc Y un espace complexe de Banach, U un opérateur linéaire faisant l'application d'un sous-espace $D = D[U]$

[1] Conférence faite au III^e Congrès Autrichien de Mathématiciens à Salzbourg le 10 septembre 1952. Cette conférence a été rédigée pendant que l'auteur avait une bourse Fulbright et une bourse de la Fondation Guggenheim.

de Y sur un sous-espace $R = R[U]$ et considérons le système

$$\frac{d}{dt} y(t) = U[y(t)], \qquad t > 0, \tag{3}$$

$$\lim_{t \to 0} \| y(t) - y_0 \| = 0, \tag{4}$$

où y_0 est donné à l'avance. Ici il faut que, pour chaque $t > 0$, $y(t)$ soit un élément de $D[U]$ et que l'application $t \to y(t)$ définisse une fonction absolument continue dont la dérivée au sens fort existe et satisfasse à (3).

Ce problème est étroitement lié à la théorie des semi-groupes d'opérations linéaires et bornées (²). Soit $\{T(t) | 0 \leqslant t\}$ un tel semi-groupe où $T(0) = I$ et $T(t) \to I$ au sens fort quand $t \to 0$ et soit A la génératrice infinitésimale de $T(t)$. Alors on a

$$\frac{d}{dt} [T(t) y_0] = A[T(t) y_0], \qquad t > 0, \tag{5}$$

$$\lim_{t \to 0} \| T(t) y_0 - y_0 \| = 0 \tag{6}$$

pour tous les y_0 du domaine de A, c'est-à-dire un système de type (3) + (4). Il en résulte que dans le cas où U est génératrice infinitésimale d'un semi-groupe $\{T(t)\}$, une solution de notre système est fournie par $T(t) y_0$ quand $y_0 \in D[U]$. Y a-t-il d'autres solutions ?

C'est une question assez difficile dont la solution générale nous échappe, mais si l'on impose une restriction convenable sur l'ordre de croissance de la norme de $y(t)$ les difficultés s'évanouissent dans des cas étendus et le problème admet au plus une solution. Nous disons que la solution $y(t)$ est du *type normal* ω si l'on a

$$\limsup_{t \to \infty} \frac{1}{t} \log \| y(t) \| = \omega < \infty. \tag{7}$$

Cela étant on peut démontrer (³) :

(²) Cf. mon livre [1] pour tout ce qui concerne cette théorie.

(³) J'ai énoncé un théorème moins général dans un travail qui va paraître dans un autre recueil [3] et dont la connaissance n'est pas nécessaire pour la lecture de la présente note. Je dois à mon ami M. R. S. Phillips l'observation qu'on peut supprimer une des conditions restrictives dans l'énoncé original en s'appuyant sur le lemme du paragraphe 2 ci-dessous. Il s'agit de l'ordre de croissance de la résolvante de U ; en y réfléchissant je me suis convaincu qu'on peut se débarrasser de chaque hypothèse sur l'existence ou sur les propriétés de la résolvante sans modifications essentielles du raisonnement. Voir la démonstration du théorème 3 ci-dessous.

THÉORÈME 1. — *Soit* U *un opérateur linéaire et clos dont les valeurs propres ne sont denses dans aucun demi-plan* $\Re(\lambda) > \lambda_0$. *Alors, pour chaque* y_0 *de* Y, *le système* (3)+(4) *a au plus une solution du type normal.*

Les conditions du théorème sont satisfaites si, par exemple, U est un opérateur borné ou, plus généralement, si U est une génératrice infinitésimale d'un semi-groupe $T(t)$. Dans ce cas, $T(t)y_0$ donne la seule solution du type normal et la solution existe pour chaque y_0 dans D, mais peut cesser d'exister en dehors de D.

2. — Unicité et caractère de la solution.

L'existence d'une seule solution du type normal a des conséquences très importantes. En effet on a :

THÉORÈME 2. — *Soit* U *un opérateur linéaire et clos de domaine dense dans* Y *et supposons que, pour chaque* y_0 *de* D, *le système* (3)+(4) *ait une solution* $y(t) = y(t\,;y_0)$ *et une seule qui soit du type normal au sens plus restreint que voici. Il y a des constantes* M *et* ω, *indépendantes de* y_0, *telles que*

$$\|y(t;\, y_0)\| \leqslant Me^{\omega t}\|y_0\|, \qquad t > 0. \tag{8}$$

Alors la résolvante $R(\lambda\,;\,U)$ *existe pour* $\Re(\lambda) > \omega$, U *est une génératrice infinitésimale d'un semi-groupe* $T(t)$, *et* $y(t;\, y_0) = T(t)y_0$ [4].

Il nous faut le lemme suivant :

LEMME 1. — *Soit* U *un opérateur linéaire et clos de domaine* D. *Soit* S *un ensemble mesurable dans l'espace euclidien* R_ν, $x(s)$ *une fonction définie dans* S *à valeurs dans* D, *telle que* $x(s)$ *et* $U[x(s)]$ *sont intégrables au sens de Bochner dans* S. *Alors*

$$U\left\{\int_S x(s)\, ds\right\} = \int_S U[x(s)]\, ds. \tag{9}$$

Dans le cas où S est borné et les fonctions $x(s)$ et $U[x(s)]$ sont continues et bornées on peut évidemment trouver des sommes finies

$$\Sigma\mu_k x(s_k) \qquad \text{et} \qquad \Sigma\mu_k U[x(s_k)] = U\{\Sigma\mu_k x(s_k)\}$$

telles que la première soit voisine de l'intégrale de $x(s)$ tandis que la

[4] Le théorème 2 est du même caractère et découle du même principe que le théorème 5 de notre travail cité [3]. Nous en donnerons ici la démonstration pour faciliter la lecture.

seconde soit voisine de l'intégrale de $U[x(s)]$ dans S. U étant clos, il en résulte que (9) est vrai. Dans le cas général on recourt au théorème de Lusin d'après lequel on peut approximer les intégrales dans S par des intégrales étendues à un sous-ensemble borné où les fonctions $x(s)$ et $U[x(s)]$ sont bornées et continues. Alors la démonstration s'achève de la même manière.

Cela étant, nous démontrons le théorème 2 comme il suit : Avec la solution $y(t, y_0)$ formons la transformée de Laplace

$$(10) \qquad L(\lambda; y) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} y(t; y_0)\, dt,$$

qui est une fonction analytique de λ dans $\Re(\lambda) > \omega$ où elle satisfait à l'inégalité

$$(11) \qquad \|L(\lambda; y_0)\| \leq M[\Re(\lambda) - \omega]^{-1} \|y_0\|.$$

L'application $y_0 \rightarrow L(\lambda; y_0)$ est définie dans D comme une transformation linéaire et bornée. D étant dense dans Y, on peut prolonger la transformation dans tout Y ; soit $y_0 \rightarrow R(\lambda)\, y_0$ l'application prolongée.

$L(\lambda; y_0)$ est un élément de Y, nous verrons qu'il est aussi dans D. Pour montrer cela, remarquons que si $0 < \alpha < \beta < \infty$ on a

$$\int_\alpha^\beta e^{-\lambda t} U[y(t; y_0)]\, dt = \int_\alpha^\beta e^{-\lambda t} y'(t; y_0)\, dt$$
$$= e^{-\lambda\beta} y(\beta; y_0) - e^{-\lambda\alpha} y(\alpha; y_0) + \lambda \int_\alpha^\beta e^{-\lambda t} y(t; y_0)\, dt.$$

Les conditions du lemme 1 étant vérifiées, il en résulte que

$$U\left\{\int_\alpha^\beta e^{-\lambda t} y(t; y)\, dt\right\} = \int_\alpha^\beta e^{-\lambda t} U[y(t; y_0)]\, dt.$$

U étant clos, un passage aux limites nous donne enfin

$$(12) \qquad (\lambda I - U)\, L(\lambda; y_0) = y_0$$

pour $\Re(\lambda) > \omega$, $y_0 \epsilon D$. Vu que D est dense dans Y et que U est clos, la relation s'étend à Y, c'est-à-dire que

$$(13) \qquad (\lambda I - U)\, R(\lambda) y_0 = y_0$$

pour $\Re(\lambda) > \omega$, $y_0 \epsilon Y$.

Jusqu'ici nous n'avons fait aucun recours à l'unicité de la solution. Maintenant nous remarquons que si $y(t)$ est une solution de l'équation (3) pour $t > 0$ et si t_0 est fixe, $t_0 > 0$, alors $y(t + t_0)$ en est une autre.

Il en résulte que $y(t+t_0; y_0)$, $y_0 \in D$, est une solution, évidemment du type normal, qui tend vers $y(t_0; y_0)$ quand $t \to 0$. Mais alors il faut que

$$(14) \qquad y(t+t_0; y_0) = y(t; y(t_0; y_0))$$

parce que le membre de droite est une solution ayant les mêmes propriétés. Cela veut dire qu'il existe une famille d'opérations linéaires $\{T(t)\}$ avec les propriétés suivantes :

$$(15) \qquad T(t)y_0 = y(t; y_0), \qquad 0 < t, \qquad y_0 \in D,$$

$$(16) \qquad T(t_1+t_2) = T(t_1)T(t_2), \qquad 0 < t_1, \ t_2 < \infty,$$

$$(17) \qquad \|T(t)\| < Me^{\omega t},$$

$$(18) \qquad \|T(t)y_0 - y_0\| \to 0, \qquad t \to 0, \qquad y_0 \in D.$$

L'opération $T(t)$ étant définie, bornée et linéaire dans le domaine D dense dans Y, elle peut se prolonger dans tout Y en conservant ses propriétés.

Le semi-groupe $\{T(t)\}$ possède une génératrice infinitésimale, que nous désignons par A, dont la résolvante est donnée par

$$R(\lambda; A)y_0 = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) y_0 \, dt, \qquad \Re(\lambda) > \omega.$$

La comparaison avec (10) montre que

$$R(\lambda; A)y_0 = R(\lambda)y_0, \qquad y_0 \in D,$$

d'où il résulte que l'identité est valable pour tout y_0 dans Y. Mais alors il faut que $A = U$. En effet, soit $z_0 = R(\lambda; A)y_0 = R(\lambda)y_0$ un point arbitraire du domaine de A. Alors

$$(\lambda I - A)z_0 = y_0 = (\lambda I - U)z_0 \qquad \text{ou} \qquad Az_0 = Uz_0.$$

La proposition est ainsi démontrée.

3. — Équations d'ordre supérieur.

Si l'opérateur U engendre un semi-groupe $\{T(t)\}$, alors on a aussi

$$(19) \quad \frac{d^n}{dt^n}[T(t)y_0] = U^n[T(t)y_0], \quad t > 0, \quad y_0 \in D[U^n], \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

où $D[U^n]$ désigne le domaine de U^n.

Il est donc naturel de considérer aussi le système

$$(20) \qquad y^{(n)}(t) = \mathrm{U}^n[y(t)], \qquad t > 0,$$

$$(21) \qquad \lim_{t \to 0} \|y^{(k)}(t) - y_k\| = 0, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

où $y_0, \ldots, y_{n-1}$ sont des éléments donnés de Y. Ici il faut supposer que, pour chaque $t > 0$, $y(t)$ soit un élément de $\mathrm{D}[\mathrm{U}^n]$ et que l'application $t \to y(t)$ définisse une fonction de t qui a des dérivées au sens fort jusqu'à l'ordre n.

Pour ce système on a un théorème d'unicité tout à fait analogue de théorème 1.

THÉORÈME 3. — *Soit* U *tel que* U^n *soit linéaire et clos et tel que les valeurs propres de* U^n *ne soient denses dans aucun demi-plan* $\Re(\lambda) > \lambda_0$. *Alors pour chaque choix de* $y_0, \ldots, y_{n-1}$ *dans* Y *il y a au plus une solution du système* (20)+(21) *dont la dérivée d'ordre* $n-1$ *est du type normal.*

Remarquons que si la dérivée d'ordre $n-1$ est du type normal, les dérivées d'ordre k, $0 \leqslant k < n-1$, en sont aussi, mais on ne peut rien conclure sur les dérivées d'ordre plus grand que $n-1$.

S'il y a deux solutions du type normal de notre système, le système (20)+(21_0) où tous les y_k sont nuls a une solution $y(t)$ non-nulle. Alors

$$(22) \qquad \mathrm{L}(\lambda; y) \equiv \int_0^\infty e^{-\lambda t} y(t)\, dt$$

existe pour $\Re(\lambda) > \omega$, ω étant le type de $y(t)$ défini par (7); et dans ce demi-plan $\mathrm{L}(\lambda; y)$ est une fonction analytique qui n'est pas identiquement nulle. En suivant la même méthode que ci-dessus on voit que

$$\begin{aligned} \int_\alpha^\beta e^{-\lambda t} \mathrm{U}^n[y(t)]\, dt &= \int_\alpha^\beta e^{-\lambda t} y^{(n)}(t)\, dt \\ &= \left\{ e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^{n-1-k} y^{(k)}(t) \right\}_\alpha^\beta + \lambda^n \int_\alpha^\beta e^{-\lambda t} y(t)\, dt \\ &= \mathrm{U}^n \left\{ \int_\alpha^\beta e^{-\lambda t} y(t)\, dt \right\}. \end{aligned}$$

En passant aux limites on trouve que

$$(23) \qquad (\lambda^n \mathrm{I} - \mathrm{U}^n) \mathrm{L}(\lambda; y) = 0, \qquad \Re(\lambda) > \omega,$$

c'est-à-dire, pour presque chaque λ dans ce demi-plan, λ^n est une valeur propre de U^n et cela n'est pas en accord avec les hypothèses de notre théorème. Il en résulte que $\mathrm{L}(\lambda; y) \equiv 0$, ce qui entraîne $y(t) \equiv 0$ et la démonstration est achevée.

4. — Questions d'existence.

Dans le cas $n > 1$, on n'est pas sûr, en général, de l'existence d'une solution du problème de Cauchy. C'est seulement dans le cas où U est borné qu'on a toujours une solution, évidemment donnée par

$$(24) \qquad y(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^{mn+k}}{(mn+k)!} U^{mn} y_k.$$

Cela peut s'écrire d'une façon plus suggestive

$$(25) \qquad y(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \exp(\eta^k t U) z_k, \qquad \eta = e^{\frac{2\pi i}{n}},$$

où les z_k sont assujettis aux conditions

$$(26) \qquad \sum_{p=0}^{n-1} \eta^{kp} U^k z_p = y_k, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Ces conditions ne suffisent pas, en général, pour la complète détermination des z_k, mais on voit immédiatement que les quantités $U^{n-1} z_k$ sont univoquement déterminées

$$(27) \quad U^{n-1} z_k = \sum_{p=0}^{n-1} \alpha_{p,k}^{(n)} U^{n-p-1} y_p, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

où les $\alpha_{p,k}^{(n)}$ sont des constantes numériques, de sorte que la solution $y(t)$ est univoquement déterminée par les équations (25) et (26).

Le cas où U est non borné mais engendre un semi-groupe $T(t) = T(t|U)$ est d'un intérêt considérable. Si $y_0 \in D[U^n]$ la fonction $T(t|U) y_0$, comme nous venons d'observer, donne une solution de (20), la première condition de (21) est vérifiée, les autres seulement si on a $y_k = U^k y_0$. Remarquons que $T(t|U) = \exp(tU)$ si U est borné.

D'après la relation (25), on sent d'une manière assez vague qu'il faut avoir recours aux opérateurs $T(t|\eta^k U)$, $k \neq 0$, pour aller plus loin. L'opérateur $T(t|\eta^k U)$ est bien déterminé si $\eta^k U$ est la génératrice infinitésimale d'un semi-groupe fortement continu. Ici il y a deux cas distincts : (1) $\eta^k = -1$, (2) $\eta^k \neq \pm 1$.

Dans le premier cas n est pair, $n = 2p$, et nous avons :

THÉORÈME 4. — *Si $n = 2p$ et si* U *et* —U *engendrent les semi-*

groupes $T(t|U)$ *et* $T(t|-U)$, *continus au sens fort à l'origine avec* $T(o|U)=T(o|-U)=I$, *alors on a*

$$T(t|-U)\,T(t|U)=T(t|U)\,T(t|-U)=I.$$

En posant $T(t|-U)=T(-t|U)$ *pour* $t>0$, *on obtient un groupe* $\{T(t|U)|-\infty<t<\infty\}$.

Il suffit de montrer que $T(t|U)\,T(t|-U)=I$. Pour faire voir cela, notons que

$$R(\lambda;\,-U)=-R(-\lambda;\,U),\qquad \Re(\lambda)>\omega_2,$$

où ω_2 est le type de $T(t|-U)$, c'est-à-dire que $R(\lambda;\,U)$ existe dans deux demi-plans $\Re(\lambda)>\omega_1$ et $\Re(\lambda)<-\omega_2$. Alors, pour chaque y de $D[U]$ on a

$$T(t|U)\,T(t|-U)y$$
$$=-\lim_{\rho\to\infty}\lim_{\sigma\to\infty}\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\gamma-i\rho}^{\gamma+i\rho}\int_{\delta-i\sigma}^{\delta+i\sigma}e^{(\lambda+\mu)t}R(\lambda;\,U)R(-\mu;\,U)y\,d\mu\,d\lambda$$

où $\gamma>\omega_1$, $\delta>\omega_2$. Cf. [1] p. 232, formule (11. 7. 2). Ici on peut écrire l'intégrale double comme la différence de deux intégrales plus simples en s'appuyant sur la première équation fonctionnelle satisfaite par la résolvante qui prend la forme

$$-(\lambda+\mu)R(\lambda;\,U)R(-\mu;\,U)=R(\lambda;\,U)-R(-\mu;\,U)$$

dans le cas présent. Dans la première de ces intégrales on passe à la limite avec σ en obtenant

$$\lim_{\rho\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\rho}^{\gamma+i\rho}R(\lambda;\,U)y\,d\lambda=\frac{1}{2}y.$$

La seconde donne de la même manière

$$\lim_{\sigma\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\delta-i\sigma}^{\delta+i\sigma}R(-\mu;\,U)y\,d\mu=-\frac{1}{2}y.$$

Il en résulte que

$$T(t|U)\,T(t|-U)y=y$$

pour chaque $y\in D[U]$. Mais $D[U]$ étant dense dans Y et l'opérateur dans le membre de gauche étant borné pour chaque t fixe, la relation vaut pour tous les y.

THÉORÈME 5. — *Si* $n=2$ *et si* U *engendre le groupe*

$\{T(t|U)|-\infty < t < \infty\}$, *continu à l'origine où* $T(0|U)=I$, *alors le problème de Cauchy pour le système* $(20)+(21)$ *a une solution et une seule dont la dérivée première est du type normal pour chaque choix de* y_0 *dans* $D[U^2]$ *et de* y_1 *dans* $D[U] \cap R[U]$, *à savoir*

$$(28) \quad y(t)=\frac{1}{2}[T(t|U)(y_0+z_1)+T(-t|U)(y_0-z_1)], \quad Uz_1=y_1.$$

On vérifie sans peine que toutes les conditions sont satisfaites. L'unicité de la solution serait démontrée si l'on pouvait appliquer le théorème 3. Nous savons que le spectre de U est renfermé dans la bande $-\omega_2 \leqq \mathfrak{R}(\lambda) \leqq \omega_1$ d'où il résulte que le spectre de U^2 est renfermé dans un domaine bordé par deux hyperboles. L'opérateur U étant clos, U^2 a la même propriété grâce au lemme, à peine nouveau, que voici :

Lemme 2. — *Soit* U *un opérateur linéaire et clos de domaine dense et admettons l'existence de la résolvante* $R(\lambda;U)$ *pour une valeur de* λ [5]. *Alors les opérateurs* U^n *sont clos et leurs domaines denses pour chaque* n.

Donnons la démonstration pour $n=2$. Posons $Ux_n=y_n$, $Uy_n=z_n$ et supposons que $x_n \to x_0$, $z_n \to z_0$. Il est entendu que $x_n \in D[U^2]$, il faut démontrer que $x_0 \in D[U^2]$ et que $U^2x_0=z_0$. De l'équation liant U et $R(\lambda_0;U)$ il résulte que

$$\lambda_0^2 R(\lambda_0;U)x_n=\lambda_0 x_n+Ux_n+R(\lambda_0;U)U^2x_n$$

ou

$$y_n=\lambda_0^2 R(\lambda_0;U)x_n-\lambda_0 x_n-R(\lambda_0;U)z_n.$$

Mais alors $\lim y_n \equiv y_0$ existe et, U étant clos, il s'en suit que $y_0=Ux_0$. En s'appuyant sur la clôture de U une fois de plus, on voit que $y_0 \in D[U]$, $z_0=Uy_0$, ce qu'il faut démontrer. La transformation $R(\lambda_0;U)$ donne l'application de Y sur $D[U]$ et l'application de $D[U]$ sur $D[U^2]$. $D[U]$ étant dense, il en résulte que $D[U^2]$ l'est aussi.

Retournons au théorème 5. Alors, U comme génératrice infinitésimale d'un groupe, continu au sens fort à l'origine, est clos et son domaine est dense dans Y, de plus $R(\lambda;U)$ existe en dehors de la bande $-\omega_2 \leqq \mathfrak{R}(\lambda) < \omega_1$. Il en résulte que U^2 est aussi clos et le théorème 3 montre que la solution fournie par (28) est la seule de

[5] L'existence de $R(\lambda_0;U)$ entraîne l'existence de $R(\lambda;U)$ au moins dans le cercle $|\lambda-\lambda_0|\,\|R(\lambda_0;U)\| < 1$.

type normal. Cela est un peu étonnant parce que dans le cas où $\lambda = 0$ est une valeur propre de U, la quantité z_1 n'est pas univoquement déterminée. Mais lorsque $Uz = 0$ on a $T(t|U)z = z$ pour chaque t, $-\infty < t < \infty$, c'est-à-dire que l'expression dans (28) ne dépend pas effectivement du choix particulier de z_1 pourvu que $Uz_1 = y_1$. C'est le même phénomène d'indétermination formelle, non-réelle que nous avons observé ci-dessus pour les opérateurs bornés. Le théorème est ainsi démontré.

Pour $n > 1$, le cas traité dans le théorème 5 est le seul où nous puissions donner la solution complète du problème de Cauchy. Remarquons que la solution (28) est tout à fait analogue à celle donnée par (25) dans le cas où U est borné et $n = 2$.

Soit maintenant $n > 2$ et soient U et $\eta^k U$, $\eta^k \neq \pm 1$, les génératrices infinitésimales des semi-groupes $T(t|U)$ et $T(t|\eta^k U)$ continus au sens fort à l'origine où $T(0|U) = T(0|\eta^k U) = I$. Alors $T(t|U)$ a nécessairement un secteur d'analyticité :

Théorème 6. — *Supposons que* U *et* $\eta^k U$, $\eta^k \neq \pm 1$, *engendrent les semi-groupes* $T(t|U)$ *et* $T(t|\eta^k U)$, *tous les deux continus au sens fort à l'origine où* $T(0|U) = T(0|\eta^k U) = I$. *Soit* S *le plus petit secteur du plan complexe de* t *déterminé par les rayons* $\arg t = 0$ *et* $\arg t = 2k\pi/n = \theta_k$. *Alors il existe un opérateur* $T(t)$, *analytique dans* S, *tel que*

$$(29)\qquad \lim_{\theta\to 0} T(re^{i\theta}) = T(r|U), \qquad \lim_{\theta\to\theta_k} T(re^{i\theta}) = T(r|\eta^k U).$$

Pour chaque t_1 *et* t_2 *dans* S *on a*

$$(30)\qquad T(t_1 + t_2) = T(t_1)\,T(t_2).$$

Pour montrer cela, observons que

$$R(\lambda;\ U)y = \int_0^\infty e^{-\lambda r} T(r|U)y\,dr, \qquad \mathfrak{R}(\lambda) > \omega_0,$$
$$R(\lambda;\ \eta^k U)y = \int_0^\infty e^{-\lambda r} T(r|\eta^k U)y\,dr, \qquad \mathfrak{R}(\lambda) > \omega_k,$$

où ω_0 et ω_k sont les types de $T(r|U)$ et de $T(r|\eta^k U)$. Mais on a

$$R(\lambda;\ \eta^k U) = \eta^{-k} R(\eta^{-k}\lambda;\ U),$$

d'où il résulte que $R(\lambda;\ U)$ existe et est analytique dans le domaine Δ, réunion des deux demi-plans $\mathfrak{R}(\lambda) > \omega_0$ et $\mathfrak{R}(\eta^k\lambda) > \omega_k$. Nous avons aussi $\delta(\lambda)\|R(\lambda;\ U)\| \leq M(\varepsilon)$ où $\delta(\lambda)$ désigne la distance de λ à la frontière de Δ et $\delta(\lambda) \geqq \varepsilon$. Pour fixer les idées, supposons que $0 < \theta_k < \pi$. Nous posons

$$(31) \qquad T(t)y = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} e^{\lambda t} R(\lambda;\ U)y\, d\lambda,$$

où $t \in S$ et Γ est la ligne brisée dans Δ sur laquelle λ est constamment à la distance $\delta > 0$ de la frontière, l'argument de λ étant supposé croissant sur Γ, On voit sans peine que $T(t)$ est analytique dans S et indépendant de δ. De plus on a

$$\begin{aligned} T(t_1)T(t_2)y &= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\Gamma_1}\int_{\Gamma_2} e^{\lambda t_1 + \mu t_2} R(\lambda;\ U)R(\mu;\ U)y\, d\lambda\, d\mu \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\Gamma_1}\int_{\Gamma_2} e^{\lambda t_1 + \mu t_2}[R(\lambda;\ U) - R(\mu;\ U)]y \frac{d\mu\, d\lambda}{\mu - \lambda} \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} e^{\lambda(t_1 + t_2)} R(\lambda;\ U)y\, d\lambda = T(t_1 + t_2)y, \end{aligned}$$

où nous supposons que λ trace la ligne Γ_1, $\delta = \delta_1$, et que μ trace Γ_2, $\delta = \delta_2$, et $\delta_1 > \delta_2$.

Les relations (29) s'obtiennent, en observant que pour $y \in D[U]$ et t sur l'un des bords de S, l'intégrale dans (31) se décompose en deux parties, une pour chaque chemin rectiligne ; l'une de ces intégrales est absolument convergente, l'autre existe seulement comme valeur principale. La valeur de l'intégrale est connue (voir [1], p. 232, formule (11. 7. 2)) et est égale à $T(r|U)y$ ou $T(r|\eta^k U)y$, selon le le bord où t se trouve. Supposons, pour fixer les idées, que la valeur est $T(r|U)y$. Alors on peut approximer $T(r|U)y$, uniformément par rapport à r dans un intervalle fini donné, par une intégrale de $(2\pi i)^{-1} e^{\lambda r} R(\lambda;\ U)y$ prise le long d'une partie finie fixe de Γ, cette intégrale étant la limite pour $t \to r$ d'une intégrale approximante de $T(t)y$; il en résulte que $\lim T(re^{i\theta})y = T(r|U)y$ pour $\theta \to 0$, ce qui prouve notre proposition.

On déduit de (30) que

$$(32) \qquad \lim_{r\to\infty} \frac{1}{r} \log\|T(re^{i\theta})\| \leqq \frac{\omega_0 \sin(\theta_k - \theta) + \omega_k \sin\theta}{\sin\theta_k},$$

c'est-à-dire que $T(t)$ est du type normal sur chaque rayon de S.

Corollaire. — *Si $\eta^k U$ engendre un semi-groupe fortement continu pour trois valeurs distinctes de k et si les trois angles entre les* *directions correspondantes,* $\arg t = 2\pi k_\nu/n$, *sont plus petits que* π, *alors* U *est une opération bornée.*

En effet, il résulte de la démonstration du théorème précédent que la fonction $\lambda R(\lambda\,;\,U)$ est holomorphe à l'infini, ce qui entraîne que U est borné.

En conséquence, si U est non-borné, il y a au plus $\frac{1}{2}n + 1$ valeurs de k, distinctes modulo n, qui peuvent donner des semi-groupes bornés et continus. Ce cas se présente, par exemple, si $n = 4p$ et si U engendre un semi-groupe $T(t|U)$, analytique pour $\Re(t) > 0$ et continu pour $\Re(t) \geqq 0$. Dans ce cas on peut imposer $2p + 1$ conditions initiales de caractère général à la solution de l'équation (20), c'est-à-dire une pour chaque direction admissible, mais non pas les $4p$ conditions demandées dans le problème de Cauchy.

5. — Problème réduit.

Il résulte de l'observation que nous venons de faire qu'il faut remplacer le problème de Cauchy par un problème réduit. La définition suivante semble convenable :

Définition. — *Le problème aux valeurs initiales de l'équation* (20) *est d'ordre* n *et de défaut* $d = n - m$ *s'il existe un entier* $m \leqslant n$ *tel qu'on peut toujours trouver une solution de* (20) *satisfaisant aux conditions*

$$(33)\qquad \lim_{t\to 0}\|y^{(k)}(t) - y_k\| = 0, \qquad k = 0,\ 1,\ \ldots,\ m-1,$$

où y_k *est un élément arbitraire de* $D[U^{n-k}] \cap R[U^k]$, *tandis qu'on ne peut pas disposer de la limite de* $y^{(m)}(t)$.

Cela étant nous avons :

Théorème 7. — *Soit* U *la génératrice infinitésimale d'un semi-groupe* $T(t|U)$, *analytique dans un secteur* S *et continu au sens fort à l'origine. Soit* m *le nombre de rayons* $\arg t = 2k\pi/n$ *contenus dans* S *où un rayon sur le bord de* S *est inclus seulement si* $T(t|U)$ *est continu sur le bord en question. Alors le problème aux conditions initiales de l'équation* (20) *est d'ordre* n *est de défaut* $d \leqslant n - m$.

En effet, nous pouvons poser

$$(34)\qquad y(t) = \Sigma_k T(\eta^k t\,|\,U) z_k,$$

où la sommation s'étend aux valeurs admissibles de k et où les z_k

sont des éléments de $D[U^n]$ à déterminer. Les conditions initiales (33) donnent le système d'équations

(35) $$y_p = \Sigma_k \eta^{kp} U^p z_k, \qquad p = 0, 1, \ldots, m-1,$$

tout à fait analogue au système (26). Par hypothèse,

$$y_k \in D[U^{n-k}] \cap R[U^k].$$

Alors le système (35) donne

$$U^{m-p-1} y_p = \Sigma_k \eta^{kp} U^{m-1} z_k, \qquad p = 0, 1, \ldots, m-1.$$

Le déterminant du système étant différent de zéro pour $m \leqq n$, il en résulte que

$$U^{m-1} z_k = \Sigma_p \alpha_{pk}^{(m)} U^{m-1-p} y_p$$

et

(36) $$z_k = \Sigma_p \alpha_{pk}^{(m)} v_p, \qquad U^p v_p = y_p.$$

Enfin

(37) $$y(t) = \Sigma_p [\Sigma_k \alpha_{pk}^{(m)} T(\eta^k t \mid U)] v_p.$$

C'est une solution de (20) satisfaisant aux conditions (33). Est-elle unique? Nous ignorons la réponse. Dans le cas où $\lambda = 0$ est une valeur propre de l'opérateur U^p, l'élément v_p n'est pas univoquement déterminé mais cela n'introduit aucune ambiguïté dans la valeur de $y(t)$. En effet, on peut écrire la solution sous la forme

(38) $$y(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} y_k + \frac{1}{(m-1)!} \int_0^t (t-s)^{m-1} [\Sigma_k \eta^{mk} T(\eta^k s \mid U) U^m z_k] ds$$

où toutes les quantités sont parfaitement déterminées par les conditions initiales. Il en résulte que le défaut $d \leqq n - m$. Dans le cas où S est le domaine d'existence exact de $T(t \mid U)$, on peut espérer démontrer que $d = n - m$ mais nous ne savons pas le faire.

6. — Exemples.

Nous prenons $Y = L(-\infty, \infty)$ sauf pour l'exemple 5.

Exemple 1. — *L'équation de Cauchy-Riemann sous la forme complexe*

(39) $$\frac{\partial w}{\partial y} = i \frac{\partial w}{\partial x}, \qquad z = x + iy.$$

Il s'agit de trouver une solution de (39) dans le demi-plan $y > 0$ qui tende en moyenne d'ordre un vers une fonction donnée $f(x)$ quand $y \to 0$. On a $U = i\,d/dx$, opérateur clos dont le spectre ponctuel est vide. Alors le théorème 3 dit qu'il y a au plus une solution du type normal. Mais les fonctions $f(x)$ de Y donnant des solutions du type normal dont les types ne surpassent pas un nombre fixe ω, ne sont pas denses dans Y car il faut que

$$(40) \qquad F(t) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\, e^{-its}\, ds$$

soit identiquement nulle quand $t \leqq -\omega$. Pour le voir observons que la solution est une fonction analytique de z dans $y > 0$, soit $f(z)$, alors on peut intégrer $e^{-itz} f(z)$, $t < -\omega$, le long d'un rectangle $\pm a + i\varepsilon$, $\pm a + iB$, puis on passe à la limite, $a \to \infty$, $B \to \infty$, $\varepsilon \to 0$ dans cet ordre. Il en résulte que le théorème 2 ne s'applique pas, de plus sa conclusion aurait été fausse dans le cas présent : En effet, la résolvante peut s'évaluer et on trouve que $R(\lambda\,;\,U)$ existe dans tout le plan sauf sur l'axe réel. Alors on conclut que $i\,d/dx$ ne peut pas engendrer un semi-groupe continu dans $L(-\infty, \infty)$ et le problème de Cauchy correspondant est de défaut un, c'est-à-dire mal posé.

De plus, il y a autre chose dans certains sous-espaces de Y. Soit $\omega \geqq 0$ fixe et considérons le sous-espace Y_ω de Y dont les éléments sont des fonctions $f(x)$ telles que la transformée de Fourier $F(t)$, définie par (40), soit identiquement nulle pour $t \leqq -\omega$. Y_ω est complet dans la métrique de $L(-\infty, \infty)$. Alors la formule

$$(41) \qquad w(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\omega}^{\infty} e^{itz}\, F(t)\, dt$$

donne une solution du problème de Cauchy qui est du type $\leqq \omega$ pour chaque $f(x)$ dans Y_ω. On voit que l'équation (39) a des solutions de type normal de chaque type fini mais il y a aussi des solutions de type infini (6).

(6) Soit $E_\alpha(z)$ la fonction entière de Mittag-Leffler. On voit sans peine que $E_\alpha(-(x+iy)^2) \in L(-\infty, \infty)$ comme fonction de x pour chaque y fixe, si $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, et que

$$C_1[1 + |y|^{2/\alpha}] \leqslant \log \| E_\alpha(-(x+iy)^2) \| \leqslant C_2[1 + |y|^{2/\alpha}].$$

Alors on peut choisir les coefficients a_n dans la série

$$\sum_{3}^{\infty} a_n E_{1/n}(-z^2)$$

de manière que la série converge en norme pour chaque y et que la norme de la somme croisse plus vite qu'une fonction donnée de y.

Exemple 2. — *Équation des ondes*

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}. \tag{42}$$

On prend $U = d/dx$ qui engendre le groupe unitaire

$$T\left(t \middle| \frac{d}{dx}\right)[f] = f(x+t), \qquad -\infty < t < \infty. \tag{43}$$

On trouve $n = 2$, $m = 2$, $d = 0$ et le théorème 5 donne la solution classique

$$y(x,\, t) = \frac{1}{2}\,[y_0(x+t) + y_0(x-t)] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} y_1(s)\,ds. \tag{44}$$

Exemple 3. — *Équation de Laplace*

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0. \tag{45}$$

L'opérateur U peut se choisir de deux manières différentes, soit $U = i\dfrac{d}{dx}$, soit $U = \dfrac{\tilde{d}}{dx}$ où le tilde signifie l'opération de conjugaison au sens de la théorie du potentiel logarithmique. Tous deux sont clos et leurs spectres ponctuels sont vides, par conséquent le théorème d'unicité s'applique ; mais cela ne vaut pas grand'chose parce qu'il est bien connu que le problème de Cauchy est mal posé pour l'équation de Laplace. L'opérateur $\dfrac{\tilde{d}}{dx}$ engendre un semi-groupe mais pas un groupe, ce qui donne $d \leqq 1$, ici $d = 1$ est la vraie valeur.

Exemple 4. — *Équation du troisième ordre*

$$\frac{\partial^3 y}{\partial t^3} = \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}. \tag{46}$$

L'opérateur $U = \dfrac{d}{dx}$ engendre le groupe (43) mais ni ηU ni $\bar{\eta} U$, $\eta = \exp(2\pi i/3)$, n'engendrent des semi-groupes. Alors on a $n = 3$, $d \leqq 2$. Ici on peut démontrer que $d = 2$ par l'observation suivante. Les combinaisons linéaires des fonctions $(x - k\eta)^{-2}$ et $(x - k\bar{\eta})^{-2}$, $k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$, plus $(x - \eta)^{-1}(x - \bar{\eta})^{-1}$ sont denses dans $L(-\infty,\, \infty)$. Nous proposons de trouver une solution de (46) telle que les trois données initiales y_0, y_1, y_2 soient

$$(x - k\eta)^{-2}, \qquad a\,(x - k\eta)^{-3}, \qquad b\,(x - k\eta)^{-4},$$

où a et b sont des constantes données. La solution formelle est

$$\alpha(x+t-k\eta)^{-2}+\beta(x+\eta t-k\eta)^{-2}+\gamma(x+\bar{\eta}t-k\eta)^{-2},$$

les α, β, γ étant des formes linéaires de a et b. Si

$$3(a+2)\eta+(b-6)\bar{\eta}-(3a+b)\neq 0$$

on a $\beta\neq 0$ et la solution formelle n'est pas dans $L(-\infty, \infty)$ quand $t \doteq k$ parce qu'elle devient infinie pour $x=0$. Le même résultat s'obtient en échangeant η et $\bar{\eta}$ et la méthode s'applique aussi au troisième cas. Donc il y a un ensemble fondamental de fonctions $y_0(.)$ pour lesquelles on ne peut choisir ni $y_1(.)$ ni $y_2(.)$ d'une manière arbitraire. Alors il faut que le défaut soit égal à 2.

EXEMPLE 5. — *Équation du quatrième ordre*

$$\frac{\partial^4 y}{\partial t^4}=\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}. \tag{47}$$

Nous prenons $Y=L_2(-\infty, \infty)$, $U=\frac{\tilde{d}}{dx}\cdot$ Alors U engendre le semi-groupe de Poisson (7).

$$P(t)[f]=\frac{t}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x+\xi)\,d\xi}{\xi^2+t^2}. \tag{48}$$

La transformation de Fourier nous donne le semi-groupe isométrique plus simple

$$P^*(t)[F]=e^{-t|s|}F(s). \tag{49}$$

Évidemment $P^*(t)$ est holomorphe dans $\Re(t)>0$ et continu pour $\Re(t)\geqq 0$, d'où il résulte que $P(t)$ a les mêmes propriétés. Alors on trouve

$$P(i\tau)[f]=\frac{1}{2}[f(x+\tau)+f(x-\tau)]+\frac{i}{2}[\tilde{f}(x+\tau)-\tilde{f}(x-\tau)] \tag{50}$$

en calculant la fonction inverse de $e^{-i\tau|s|}F(s)$. Ici τ est réel, et $\|P(i\tau)\|=\|P^*(i\tau)\|=1$. Les opérateurs $\{P(i\tau)|-\infty<\tau<\infty\}$ forment un groupe, avec $P(0)=I$, fortement continu. Alors le théorème 7 donne $n=4$, $d\leqq 1$ et la solution du problème réduit

(7) Pour ce semi-groupe voir [1] p. 385. Il y a plus de détails dans [2] où la discussion s'applique à l'espace L_p, $1<p<\infty$.

correspondant s'obtient des formules (34) et (36) :

$$y(t) = P(t)z_0 + P(it)z_1 + P(-it)z_{-1}, \tag{51}$$

où

$$\begin{aligned} z_0 &= \frac{1}{2}[y_0 + v_2], \quad Uv_1 = y_1, \\ z_1 &= \frac{1}{4}(1+i)y_0 - \frac{1}{2}iv_1 - \frac{1}{4}(1-i)v_2, \quad U^2v_2 = y_2, \\ z_{-1} &= \frac{1}{4}(1-i)y_0 + \frac{1}{2}iv_1 - \frac{1}{4}(1+i)v_2. \end{aligned} \tag{52}$$

On objectera, peut-être, que, en remplaçant l'équation (47) par

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^4 y = \left(\frac{\tilde{\partial}}{\partial v}\right)^4 y, \tag{53}$$

comme nous l'avons fait, on perdra des solutions et qu'il faut aussi considérer l'opérateur $U = d/dx$ et le groupe (43) engendré par lui. Cela revient à dire que la solution générale de l'équation des ondes est une solution de (47) en supposant les données suffisamment dérivables. Mais on peut écrire (44) sous la forme

$$\frac{1}{2}P(it)[y_0 + iY_1] + \frac{1}{2}P(-it)[y_0 - iY_1], \qquad \frac{\tilde{d}}{dx}Y_1 = y_1, \tag{54}$$

ce qui est seulement un cas spécial de (51). Alors le groupe $T(t|d/dx)$ n'apportera rien de nouveau au problème de Cauchy pour (47). Ce résultat négatif rendra peut-être la conjecture $d = 1$ plus vraisemblable. Remarquons en passant que la solution générale de l'équation de Laplace satisfait aussi à (47), c'est le terme $P(t)z_0$ de (51). Alors, le premier terme de cette somme vient de l'équation de Laplace, tandis que les autres viennent de l'équation des ondes, et, si $d = 1$ pour l'équation (47) cela découlerait du fait que $d = 1$ pour l'équation de Laplace.

Il est assez facile de donner des exemples où interviennent des opérateurs non-différentiels mais ce qui précède suffit pour illustrer la méthode.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Hille. Functional Analysis and Semi-Groups. *American Mathematical Society, Colloquium Lectures XXXI*, New-York, 1948.

[2] Hille. On the Generation of Semi-Groups and the Theory of Conjugate Functions. *Proc. R. Physiographical Society, Lund*, t. 21, n° 14, 1951, 130-142.

[3] Hille. A Note on Cauchy's Problem. *Annales de la Société Polonaise de Mathématiques*, t. 25, 1952, 13 p.

(Parvenu aux Annales le 8 octobre 1952.)