ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

HUGO BEIRAO DA VEIGA
JOAO PAULO DIAS

Régularité des solutions d'une équation parabolique non linéaire avec des contraintes unilatérales sur la frontière

Annales de l'institut Fourier, tome 22, nº 4 (1972), p. 161-192
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1972__22_4_161_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
22, 4 (1972), 161-192.

RÉGULARITÉ DES SOLUTIONS D'UNE ÉQUATION PARABOLIQUE NON LINÉAIRE AVEC DES CONTRAINTES UNILATÉRALES SUR LA FRONTIÈRE

par Hugo BEIRÃO DA VEIGA et João-Paulo DIAS [1].

0. Position du problème.

Dans la suite on désignera par Ω un ouvert borné et connexe de $\mathbf{R}^N$ de frontière Γ, variété de dimension $N-1$ et de classe C^1 [2], Ω étant localement situé d'un seul côté de Γ.

On notera par Λ_t le cylindre $\Omega \times]0, t[$, avec

$$0 < t \leqslant T < +\infty.$$

En particulier, on pose $\Lambda = \Lambda_T$.

Le point générique de Ω sera noté $x = (x_1, \ldots, x_N)$. Avec (x, t) on désignera le point générique de Λ.

Ceci étant, soit [3]

$$H^1(\Omega) = \{\varphi \in L^2(\Omega) | D_i\varphi \in L^2(\Omega),\ i = 1, \ldots, N\},$$

où $D_i\varphi = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_i}$ au sens des distributions.

Avec

$$\nabla\varphi = (D_1\varphi, \ldots, D_N\varphi), \qquad \|\nabla\varphi\|^2_{L^2(\Omega)} = \sum_{i=1}^{N} \|D_i\varphi\|^2_{L^2(\Omega)},$$

[1] Chercheurs du « Instituto de Física e Matemática » (Lisbonne).
[2] On peut affaiblir cette condition.
[3] On ne considère que des fonctions réelles.

la norme usuelle de $H^1(\Omega)$ est donnée par

$$\|v\|^2_{H^1(\Omega)} = \|v\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Avec $\mathbb{K}$ on désigne le convexe fermé de $H^1(\Omega)$ défini par

$$(0.1) \qquad \mathbb{K} = \{u \in H^1(\Omega) | u \geqslant 0 \text{ [4] sur } \Gamma\}$$

L'espace des fonctions continues sur $\overline{\Omega}$ et l'espace des fonctions hölderiennes d'exposant $\alpha \in]0, 1]$ seront désignés respectivement par $C^0(\overline{\Omega})$ et $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$.

Si $v \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ on pose

$$[v]_{\alpha,\Omega} = \sup_{\substack{x,y \in \overline{\Omega} \\ x \neq y}} \frac{|v(x) - v(y)|}{|x - y|^\alpha}$$

Si on se donne $s \in [1, +\infty[$ et un espace de Banach X on note avec $L^s(0, T; X)$ l'ensemble des fonctions $t \to v(t)$ fortement mesurables de $]0, T[$ à valeurs dans X telles que

$$\|v\|_{L^s(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|v(t)\|^s_X \, dt\right)^{1/s} < +\infty$$

Si $s = +\infty$ on donne la définition correspondante habituelle.

En particulier, si $X = L^p(\Omega)$, $p \geqslant 1$, alors l'espace $L^s(0, T; L^p(\Omega))$ s'identifie avec l'espace $L^{p,s}(\Lambda)$ des fonctions $v(x, t)$ réelles et mesurables en Λ telles que (en supposant p et s finis, sinon on fait les modifications évidentes)

$$(0.2) \qquad \|v\|_{p,s,\Lambda} = \left(\int_0^T \left(\int_\Omega |v(x,t)|^p \, dx\right)^{s/p} dt\right)^{1/s} < +\infty$$

On pose

$$(0.3) \quad \mathcal{V} = \{v \in L^2(0, T; H^1(\Omega)) | v' \in L^2(0, T; L^2(\Omega)) = L^2(\Lambda)\}$$

où $v'(t)$ est la dérivée définie par

$$(0.4) \quad \int_0^T u'(t)\varphi(t) \, dt = -\int_0^T v(t)\varphi'(t) \, dt, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(]0, T[)$$

On a $\mathcal{V} \subset C^0([0, T]); L^2(\Omega))$ d'où on peut définir pour $v \in \mathcal{V}$

$$(0.5) \qquad |v|^2_\Lambda = \left(\max_{0 \leqslant t \leqslant T} \|v(t)\|_{L^2(\Omega)}\right)^2 + \|\nabla v\|^2_{L^2(\Lambda)}$$

[4] Au sens des traces sur Γ.

L'espace $\mathcal{V}$ peut s'identifier avec l'espace de Sobolev $H^1(\Lambda)$.

On donne des définitions analogues dans le cas où l'on remplace Λ par Λ_t. L'espace correspondant à $\mathcal{V}$ sera alors noté $\mathcal{V}_t$.

Finalement on désignera par $C^{0,\alpha,\alpha/2}(\overline{\Lambda})$, $\alpha \in]0, 1]$, l'espace des fonctions réelles $v(x, t)$ définies en $\overline{\Lambda}$, telles qu'il existe une constante c telle que

$$(0.6) \quad |v(x, t) - v(x', t')| \leqslant c(|x - x'|)^\alpha + |t - t'|^{\alpha/2}), \quad \forall (x, t), (x', t') \in \overline{\Lambda}.$$

On pose, pour chaque $v \in C^{0,\alpha,\alpha/2}(\overline{\Lambda})$,

$$(0.7) \quad \begin{cases} [v]_{\alpha,\alpha/2,\Lambda} = \inf c \text{ vérifiant } (0.6) \\ |||v|||_{\alpha,\alpha/2,\Lambda} = \|v\|_{\infty,\Lambda} + [v]_{\alpha,\alpha/2,\Lambda} \end{cases}$$ [5]

Ceci étant on se donne p et s, $1 \leqslant p, s \leqslant +\infty$, tels que

$$(0.8) \quad \begin{cases} 0 \leqslant \dfrac{N}{2p} + \dfrac{1}{s} < 1 & \text{si} \quad N \geqslant 2 \\ \dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{N}{2p} + \dfrac{1}{s} < 1 & \text{si} \quad N = 1 \end{cases}$$

Définissons χ_0 par l'égalité

$$(0.9) \quad \frac{N}{2p} + \frac{1}{s} = 1 - \chi_0$$

On notera avec p_0 et s_0 deux constantes définies par

$$(0.10) \quad \begin{cases} \dfrac{1}{p_0} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{\chi_0}{N + 2\chi_0} \cdot \dfrac{1}{p'} \\ \dfrac{1}{s_0} = \dfrac{1}{s} + \dfrac{\chi_0}{N + 2\chi_0} \cdot \dfrac{1}{s'} \end{cases}$$

où r' est donné par

$$\frac{1}{r'} + \frac{1}{r} = 1 \qquad \text{si} \qquad 1 \leqslant r \leqslant +\infty$$

[5] $C^{0,\alpha,\alpha/2}(\overline{\Lambda})$ est un espace de Banach pour la norme $|||\cdot|||_{\alpha,\alpha/2,\Lambda}$.

On se donne aussi des fonctions réelles $B_K(x, t, y, z)$, $k = 0, 1, \ldots, N$, définies en $\Lambda \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^N$, mesurables en $(x, t) \in \Lambda$ pour tout $(y, z) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^N$ et continues en $(y, z) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^N$ pour presque tous les $(x, t) \in \Lambda$. On suppose encore qu'il existe des constantes positives a et $\bar{a}$ et des fonctions b, f, d, m, g, e, h non négatives et mesurables en Λ telles que pour tout $(y, z) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^N$ et pour presque tout $(x, t) \in \Lambda$ on a $\left(\text{avec } z = (z_1, \ldots, z_N),\ |z|^2 = \sum_{i=1}^{N} z_i^2\right)$:

$$
(0.11) \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^{N} B_i(x, t, y, z) . z_i \geqslant a|z|^2 - b(x, t)y^2 - f(x, t) \\ |B_0(x, t, y, z)| \leqslant d(x, t)|z| + m(x, t)|y| + g(x, t) \end{cases}
$$

$$
(0.12) \quad |B_i(x, t, y, z)| \leqslant \bar{a}|z| + e(x, t)|y| + h(x, t), \quad i = 1, \ldots, N.
$$

Soit finalement $u(x, t)$ une solution du problème suivant

$$
(0.13) \qquad u(x, t) \in \mathfrak{V}
$$

et de plus

(i) pour presque tout $t \in]0, T[$ on a $u(t) \in \mathbf{K}$ et

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega u'(t)(v(x) - u(x, t))\, dx & \\
+ \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega B_i(x, t, u, \nabla u) . D_i(v(x) - u(x, t))\, dx & \\
+ \int_\Omega B_0(x, t, u, \nabla u) . (v(x) - u(x, t))\, dx \geqslant 0, & \qquad \forall v \in \mathbf{K}.
\end{aligned}
$$

(ii) $u(x, 0) = u_0(x)$, où u_0 est donnée dans $L^2(\Omega)$.

Si l'on pose

$$
\psi_{u,B}(x, t) = \sum_{i=1}^{N} B_i(x, t, u, \nabla u) . \cos(\bar{n}(x), x_i),
$$

où $\bar{n}(x)$ est la normale extérieure à Γ au point $x \in \Gamma$ et

$$
S = \Gamma \times]0, T[
$$

alors on peut vérifier que (0.13) est une formulation faible du problème aux limites avec des contraintes unilatérales sur la frontière défini par

$$u'(x,t) - \sum_{i=1}^{N} D_i B_i(x, t, u, \nabla u) + B_0(x, t, u, \nabla u) = 0 \qquad \text{dans } \Lambda$$
$$u(x, t) \geqslant 0, \qquad \psi_{u,B}(x, t) \geqslant 0, \qquad u(x, t), \qquad (x, t) = 0 \text{ sur } S,$$
$$u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{dans } \Omega.$$

Nous démontrons dans ce travail les résultats suivants qui ont été annoncés dans [2] avec un aspect un peu simplifié :

THÉORÈME I. — *Supposons que les hypothèses* (0.11) *et* (0.12) *sont vérifiées avec* $b, f, m, d^2, e^2, h^2 \in L^{p,s}(\Lambda), g \in L^{p_0,s_0}(\Lambda)$ *et que* $u_0 \in L^\infty(\Omega)$. *Alors* $u \in L^\infty(\Lambda)$. *De plus, étant donnée une constante* $c \geqslant 0$ *il existe* $\bar{c} = \bar{c}(c, N, \Omega, T, a, p, s) \geqslant 0$ *telle que, si*

$$\max(\|b\|_{p,s,\Lambda}, \|f\|_{p,s,\Lambda}, \|m\|_{p,s,\Lambda}, \|d^2\|_{p,s,\Lambda}, \|g\|_{p_0,s_0,\Lambda},$$
$$\|u_0\|_{\infty,\Omega}) \leqslant c$$

alors

$$\|u\|_{\infty,\Lambda} \leqslant \bar{c},$$

THÉORÈME II. — *Supposons que les hypothèses* (0.11) *et* (0.12) *sont vérifiées avec* $b, f, m, g, d^2, e^2, h^2 \in L^{p,s}(\Lambda)$ *et que* $u_0 \in \mathbf{K} \cap C^{0,\lambda}(\overline{\Omega})$, $\lambda \in]0, 1]$. *Alors il existe des constantes* $c \geqslant 0$ *et* $\alpha \in]0, \lambda]$, *ne dépendant que de* N, Ω, T, a, $\bar{a}$, p, s *et* λ, *telles que* $u \in C^{0,\alpha,\alpha/2}(\overline{\Lambda})$ *et, de plus,*

$$(0.14) \quad |||u|||^2_{\alpha,\alpha/2,\Lambda} \leqslant c\{[u_0]^2_{\lambda,\Omega} + \|f\|_{p,s,\Lambda} + \|h^2\|_{p,s,\Lambda} + \|u\|_{\infty,\Lambda}\|g\|_{p,s,\Lambda} + \|u\|^2_{\infty,\Lambda}(1 + \|b\|_{p,s,\Lambda} + \|m\|_{p,s,\Lambda} + \|d^2\|_{p,s,\Lambda} + \|e^2\|_{p,s,\Lambda})\}$$

Les théorèmes I et II seront démontrés avec la technique des troncatures introduite par E. De Giorgi (cf. [4]).

On utilisera dans ce travail des méthodes analogues aux méthodes décrites par O. A. Ladyzenskaja, V. A. Solonnikov et N. N. Ural'ceva dans [6].

La majoration (0.14) est obtenue avec la technique utilisée dans [1].

Un premier résultat de régularité dans des espaces du type $C^{0,\alpha,\beta}(\overline{\Lambda})$, concernant les équations linéaires paraboliques à coefficients discontinus, a été obtenu par J. Nash (cf. [9]).

Des résultats du même type ont ensuite été étudiés par plusieurs auteurs avec des méthodes diverses.

Le problème unilatéral parabolique étudié dans ce travail a été introduit (avec un opérateur linéaire) par J. L. Lions et G. Stampacchia dans [8] (cf. aussi [7]). Des résultats de régularité hölderienne pour les fonctions $x \to u(x, t)$, définies en $\overline{\Omega}$, se trouvent dans [3] et [5].

Dans un article prochain nous étudierons les propriétés de régularité L^∞ et hölderienne d'une solution plus faible $(u \in L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap C^0([0, T]; L^2(\Omega)))$ du problème considéré dans ce travail.

1. La régularité L^∞.

Le but de ce paragraphe est de démontrer le théorème I.

Soit $k \geqslant \|u_0\|_{\infty, \Omega}$ et posons dans l'inéquation (0.13), (i),

$$v = \{u(t)\}^k = \begin{cases} k & \text{si} \quad u \geqslant k \\ u & \text{si} \quad u \leqslant k \end{cases}$$

Intégrons l'inégalité obtenue entre 0 et $t \in]0, T[$.

On obtient

$$\begin{aligned} (1.1) \quad & \int_0^t \int_\Omega u' . (u - \{u\}^k)\, dx\, d\tau \\ & + \sum_{i=1}^N \int_0^t \int_\Omega B_i(x, \tau, u, \nabla u) D_i(u - \{u\}^k)\, dx\, d\tau \\ & + \int_0^t \int_\Omega B_0(x, \tau, u, \nabla u)(u - \{u\}^k)\, dx\, d\tau \leqslant 0. \end{aligned}$$

D'autre part, puisque $k \geqslant \|u(0)\|_{\infty, \Omega}$, on a

$$\begin{aligned} (1.2) \quad & \int_0^t \int_\Omega u' . (u - \{u\}^k)\, dx\, d\tau \\ & = \int_0^t \int_\Omega (u - \{u\}^k)' . (u - \{u\}^k)\, dx\, d\tau \\ & = \frac{1}{2} \|u - \{u\}^k\|^2_{2, \Omega}\Big|_0^t = \frac{1}{2} \|(u - \{u\}^k)(t)\|^2_{2, \Omega}. \end{aligned}$$

De (1.1) et (1.2) on obtient, avec

$u^{(k)} = u - \{u\}^k$ et $Q_k(t) = \{(x, \tau) \in \Lambda_t | u(x, \tau) > k\}$, et compte tenu de (0.11)

$$\frac{1}{2}\|u^{(k)}(t)\|^2_{2,\Omega} + a\int_{Q_k(t)} |\nabla u|^2\, dx\, d\tau \leqslant \int_{Q_k(t)} bu^2\, dx\, d\tau + \int_{Q_k(t)} f\, dx\, d\tau + \int_{Q_k(t)} d|\nabla u|u^{(k)}\, dx\, d\tau + \int_{Q_k(t)} m|u|u^{(k)}\, dx\, d\tau + \int_{Q_k(t)} gu^{(k)}\, dx\, d\tau$$

Ceci entraîne, puisque $|\nabla u| du^{(k)} \leqslant \frac{a}{2}|\nabla u|^2 + \frac{2}{a} d^2(u^{(k)})^2$,

$$(1.3)\quad \frac{1}{2}\|u^{(k)}(t)\|^2_{2,\Omega} + \frac{a}{2}\int_{Q_k(t)} |\nabla u|^2\, dx\, d\tau \leqslant 2\int_{Q_k(t)} b(u^{(k)})^2\, dx\, d\tau + 2k^2\int_{Q_k(t)} b\, dx\, d\tau + \frac{2}{a}\int_{Q_k(t)} d^2(u^{(k)})^2\, dx\, d\tau + \int_{Q_k(t)} f\, dx\, d\tau + 2\int_{Q_k(t)} m(u^{(k)})^2\, dx\, d\tau + 2k^2\int_{Q_k(t)} m\, dx\, d\tau + \int_{Q_k(t)} gu^{(k)}\, dx\, d\tau.$$

En appliquant cette inégalité à $\tau \in [0, t]$ et compte tenu que le second membre est une fonction croissante de t on obtient aisément

$$(1.4)\quad |u^{(k)}|^2_{\Lambda_t} \equiv \max_{0\leqslant\tau\leqslant t} \|u^{(k)}(\tau)\|^2_{2,\Omega} + \int_{Q_k(t)} |\nabla u|^2\, dx\, d\tau \leqslant 4\max(1, a^{-1})\left[\int_{Q_k(t)} \theta(u^{(k)})^2\, dx\, d\tau + k^2\int_{Q_k(t)} \theta_1\, dx\, d\tau + \int_{Q_k(t)} gu^{(k)}\, dx\, d\tau + \int_{Q_k(t)} f\, dx\, d\tau\right],$$

où

$$\theta = 2\left(b + m + \frac{d^2}{a}\right), \qquad \theta_1 = 2(b + m)$$

Posons

$$(1.5)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{\bar p} = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{p}\right); & \dfrac{1}{\bar s} = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{s}\right) \\ \chi = \dfrac{2\chi_0}{N}, & \chi_0 \text{ étant défini par (0.9)} \\ q = \bar p(1 + \chi); & r = \bar s(1 + \chi) \end{cases}$$

On obtient

$$(1.6)\qquad \frac{N}{2q} + \frac{1}{r} = \frac{N}{4}$$

et aussi (remarquons que $0 < \chi_0 \leqslant 1$ si $N \geqslant 2, 0 < \chi_0 \leqslant \frac{1}{2}$ si $N = 1$)

$$(1.7)\quad \begin{cases} q \in \left[2(1+\chi), \dfrac{2(1+\chi)}{1-\dfrac{2}{N}+\chi}\right], \\ r \in \left[2(1+\chi), \dfrac{4(1+\chi)}{N\chi}\right] \quad \text{si} \quad N \geqslant 2 \\ q \in [2(1+\chi), \infty], \\ r \in \left[4, \dfrac{4(1+\chi)}{N\chi}\right] \quad \text{si} \quad N = 1 \end{cases}$$

ce qui implique, en particulier,

$$(1.8)\quad \begin{cases} q \in \left]2, \dfrac{2N}{N-2}\right[, \quad r \in]2, \infty[\quad \text{si} \quad N \geqslant 2 \\ q \in]2, \infty], \quad r \in [4, \infty[\quad \text{si} \quad N = 1 \end{cases}$$

Étant donné (1.8) on peut appliquer à $u^{(k)}$ l'inégalité (3.8) du chapitre II de [6]. On a alors

$$(1.9)\qquad \|u^{(k)}\|_{q,r,\Lambda_t} \leqslant \beta |u^{(k)}|_{\Lambda_t},$$

où

$$\beta = \beta_1(N, \Gamma, r, q) + \sqrt{2}\, T^{1/r} |\Omega|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}$$

$|\Omega|$ étant la mesure de Ω.

Cela étant, on va majorer les termes du second membre de (1.4) de la manière suivante :

$$\int_{Q_k(t)} \theta (u^{(k)})^2\, dx\, d\tau \leqslant \|\theta\|_{p,s,\Lambda} \|(u^{(k)})^2\|_{\frac{q}{2},\frac{r}{2},Q_k(t)} \|1\|_{\frac{q}{2\chi},\frac{r}{2\chi},Q_k(t)}$$

En effet on a

$$\frac{1}{p} + \frac{2}{q} + \frac{2\chi}{q} = 1 = \frac{1}{s} + \frac{2}{r} + \frac{2\chi}{r}$$

D'autre part

$$\|(u^{(k)})^2\|_{\frac{q}{2},\frac{r}{2},Q_k(t)} = \|u^{(k)}\|^2_{q,r,Q_k(t)} \leqslant \beta^2 |u^{(k)}|^2_{\Lambda_t}$$

$$\|1\|_{\frac{q}{2\chi},\frac{r}{2\chi},Q_k(t)} = \|1\|^{2}_{\frac{q}{\chi},\frac{r}{\chi},Q_k(t)} \leqslant (t^{1/r}|\Omega|^{1/q})^{2\chi}$$

Donc, on a

$$(1.10)\quad \int_{Q_k(t)} \theta(u^{(k)})^2\, dx\, d\tau \leqslant \|\theta\|_{p,s,\Lambda}\cdot\beta^2|u^{(k)}|^2_{\Lambda_t}\cdot(t^{1/r}|\Omega|^{1/q})^{2\chi}$$

On a aussi, avec $A_k(\xi) = \{x \in \Omega | u(x, \xi) > k\}$,

$$(1.11)\quad k^2 \int_{Q_k(t)} \theta_1\, dx\, d\tau \leqslant k^2\|\theta_1\|_{p,s,\Lambda}\;\|1\|^2_{\bar{p},\bar{s},Q_k(t)}$$

$$= k^2\|\theta_1\|_{p,s,\Lambda}\left(\int_0^t |A_k(\xi)|^{\bar{s}/\bar{p}}\, d\xi\right)^{\frac{2}{\bar{s}}}$$

$$= k^2\|\theta_1\|_{p,s,\Lambda}\left(\int_0^t |A_k(\xi)|^{r/q}\, d\xi\right)^{2\cdot\frac{1+\chi}{r}}$$

(avec la convention $0^0 = 0$).

Estimons les deux termes qui manquent. On a

$$(1.12)\quad \int_{Q_k(t)} f\, dx\, d\tau \leqslant \|f\|_{p,s,\Lambda}\|1\|^2_{\bar{p},\bar{s},Q_k(t)}$$

$$= \|f\|_{p,s,\Lambda}\left(\int_0^t |A_k(\xi)|^{r/q}\, d\xi\right)^{2\cdot\frac{1+\chi}{r}}$$

$$(1.13)\quad \int_{Q_k(t)} g u^{(k)}\, dx\, d\tau \leqslant \|g\|_{p_0,s_0,\Lambda}\|u^{(k)}\|_{q,r,Q_k(t)}\cdot\|1\|_{\bar{p},\bar{s},Q_k(t)}$$

$$\leqslant \|g\|_{p_0,s_0,\Lambda}\cdot\beta|u^{(k)}|_{\Lambda_t}\left(\int_0^t |A_k(\xi)|^{r/q}\, d\xi\right)^{\frac{1+\chi}{r}}$$

$$\leqslant \frac{1}{16\max(1,a^{-1})}|u^{(k)}|^2_{\Lambda_t} + 16\max(1,a^{-1})\beta^2\|g\|^2_{p_0,s_0,\Lambda}$$

$$\cdot\left(\int_0^t |A_k(\xi)|^{r/q}\, d\xi\right)^{2\cdot\frac{1+\chi}{r}}$$

Supposons alors

$$(1.14)\quad t \leqslant t_0 \equiv [16\ \max\ (1,\ a^{-1})]^{-\frac{r}{2\chi}}\beta^{-r/\chi}|\Omega|^{-n/q}\|\theta\|_{p,s,\Lambda}^{-\frac{r}{2\chi}}$$

De (1.10) on en déduit

$$(1.15)\quad \int_{Q_k(t)} \theta(u^{(k)})^2\, dx\, d\tau \leqslant \frac{1}{16\max(1,a^{-1})}|u^{(k)}|^2_{\Lambda_t}$$

Alors de (1.4), (1.11), (1.12), (1.13) et (1.15) on obtient

$$\frac{1}{2}|u^{(k)}|^2_{\Lambda_t} \leqslant 4\max\ (1,\ a^{-1})\left[k^2\|\theta_1\|_{p,s,\Lambda}\left(\int_0^t |A_k(\xi)|^{r/q}\, d\xi\right)^{2\cdot\frac{1+\chi}{r}}\right.$$
$$\left.+ (16\max(1,a^{-1})\beta^2\|g\|^2_{p_0,s_0,\Lambda} + \|f\|_{p,s,\Lambda})\left(\int_0^t |A_k(\xi)|^{r/q}\, d\xi\right)^{2\cdot\frac{1+\chi}{r}}\right]$$

i.e.

$$(1.16)\quad |u^{(k)}|_{\Lambda_t} \leqslant c_1 \|\theta_1\|^{1/2}_{p,s,\Lambda} k\mu(k,t)^{\frac{1+\chi}{r}} + c_2(\|g\|_{p_0,s_0,\Lambda} + \|f\|^{1/2}_{p,s,\Lambda})\mu(k,t)^{\frac{1+\chi}{r}}$$

avec $c_1 = c_1(a)$, $c_2 = c_2(a, \beta)$,

$$\mu(k,t) = \begin{cases} \int_0^t |\mathrm{A}_k(\xi)|^{r/q}\, d\xi & \text{si} \quad q < \infty \\ \mathrm{mes}\,\{\xi \in [0,t] \mid |\mathrm{A}_k(\xi)| \neq 0\} & \text{si} \quad q = \infty \end{cases}$$

Posons

$$\gamma_1 = c_1\|\theta_1\|^{1/2}_{p,s,\Lambda}, \qquad \gamma_2 = c_2(\|g\|_{p_0,s_0,\Lambda} + \|f\|^{1/2}_{p,s,\Lambda}),$$
$$k_0 = \|u_0\|_{\infty,\Omega}$$

et soient $l > k \geqslant k_0$.

Compte tenu de

$$(1.17)\quad \beta . |u^{(k)}|_{\Lambda_t} \geqslant \|u^{(k)}\|_{q,r,\Lambda_t} \geqslant \left(\int_0^t \left(\int_{\mathrm{A}(\xi)} (u-k)^q\, dx\right)^{r/q} d\xi\right)^{1/r} \geqslant (l-k)\mu(l,t)^{1/r}$$

et de (1.16), on obtient

$$(1.18)\quad (l-k)\mu(l,t)^{1/r} \leqslant \beta\gamma_1 k[\mu(k,t)^{1/r}]^{1+\varkappa} + \beta\gamma_2[\mu(k,t)^{1/r}]^{1+\varkappa}\ \forall l > k \geqslant k_0,\ t \in [0,t_0].$$

En raisonnant comme dans la démonstration du théorème 6.1 du chapitre II de [6], on en déduit qu'il existe une fonction $\varphi(\xi, \mathrm{N}, \Omega, \mathrm{T}, a, p, s) \geqslant 0$, $\xi \in \mathbf{R}^+$, qu'on peut supposer vérifiant $\varphi(\xi, .) = \varphi(\xi, \mathrm{N}, \Omega, \mathrm{T}, a, p, s) \geqslant \xi$, telle que

$$(1.19)\quad \max(\|\theta_1\|_{p,s,\Lambda}, \quad \|f\|_{p,s,\Lambda}, \quad \|g\|_{p_0,s_0,\Lambda_0}) \leqslant \xi$$

$$(1.20)\quad \|u_0\|_{\infty,\Omega} \leqslant \xi$$

entraînent

$$\sup_{\Lambda_{t_0}} \text{ess.}\, u \leqslant \varphi(\xi, .)$$

On obtient de même, en raisonnant avec

$$v = \{u(t)\}_k = \max(u(t), k), \qquad k \leqslant -\|u_0\|_{\infty,\Omega}.$$

$$\inf_{\Lambda_{t_0}} \text{ess.}\, u \geqslant -\varphi(\xi, .)$$

et donc (1.19) et (1.20) entraînent

$$\|u\|_{\infty, \Lambda_{t_0}} \leqslant \varphi(\xi, \,.)$$

Travaillant d'une façon analogue dans l'intervalle $[t_0, 2t_0]$, avec $k \geqslant \|u\|_{\infty, \Lambda_{t_0}} \geqslant \|u(t_0)\|_{\infty, \Omega}$ et $k \leqslant -\|u\|_{\infty, \Lambda_{t_0}}$, on obtient que (1.19) et (1.20) entraînent

$$\|u\|_{\infty, \Lambda_{2t_0}} \leqslant \varphi[\varphi(\xi, \,.), \,.]$$

Par induction, et compte tenu de (1.14), on arrive à démontrer complètement le théorème I.

2. La régularité hölderienne.

Le but de ce paragraphe est de démontrer le théorème II.

2.1. Estimations a priori.

Supposons que les hypothèses (0.11) et (0.12) sont vérifiées avec $b, f, m, g, d^2, e^2, h^2 \in L^{p,s}(\Lambda)$ et soit $u \in \mathcal{V}$ une solution de (0.13), (i), (ii), telle que $u \in L^\infty(\Lambda)$ [6]. Posons

$$M = \|u\|_{\infty, \Lambda} \tag{2.1}$$

$$\begin{cases} f_1(x, t) = b(x, t)M^2 + f(x, t) \\ g_1(x, t) = m(x, t)M + g(x, t) \\ h_1(x, t) = e(x, t)M + h(x, t) \end{cases} \tag{2.2}$$

On en déduit

$$f_1, \, g_1, \, h_1^2 \in L^{p,s}(\Lambda) \tag{2.3}$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{N} B_i(x, t, u, \nabla u) . D_i u(x, t) \geqslant a |\nabla u(x, t)|^2 - f_1(x, t) \\ |B_0(x, t, u, \nabla u)| \leqslant d(x, t) |\nabla u(x, t)| + g_1(x, t) \\ |B_i(x, t, u, \nabla u)| \leqslant \bar{a} |\nabla u(x, t)| + h_1(x, t), \; i = 1, \ldots, N, \\ \text{pour presque tout } (x, t) \in \Lambda \end{cases} \tag{2.4}$$

Dans la suite on désignera par k une constante telle que

$$-M \leqslant k \leqslant M. \tag{2.5}$$

Ceci étant désignons par $B(x_0, R)$ une boule ouverte de

[6] Il suffit, pour que cela soit vérifié, que $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ (cf. le théor. I).

$\mathbf{R}^N$ de centre $x_0 \in \overline{\Omega}$ et de rayon $R > 0$ et par $\xi(x, t)$ une fonction réelle lipschitzienne dans $\mathbf{R}^{N+1}$ telle que

$$(2.6) \quad 0 \leqslant \xi(x, t) \leqslant 1 \qquad \text{et} \qquad \text{support } \xi \subset \overline{B(x_0, R)} \times \mathbf{R}$$

Posons pour $t \in]0, T[$

$$(2.7) \qquad \varphi_t = u(t) - \xi^2 u^{(k)}(t)$$

(où $u^{(k)} = u - \{u\}^k$, $\{u\}^k = \min(u, k)$).

Supposons encore qu'on ait

$$(2.8) \qquad k \geqslant 0 \qquad \text{si} \qquad B(x_0, R) \cap \Gamma \neq \emptyset.$$

Alors $\varphi_t \in \mathbf{K}$ p.p. en $]0, T[$. Soient alors k vérifiant (2.5) et (2.8), φ_t défini par (2.7), $0 \leqslant t < t_0 \leqslant T$. Compte tenu qu'on a

$$\int_t^{t_0} \int_\Omega u'(u - \varphi)\, dx\, d\tau = \int_t^{t_0} \int_\Omega (u^{(k)})' \xi^2 u^{(k)}\, dx\, d\tau$$
$$= \frac{1}{2} \| u^{(k)}(x, \tau) \xi(x, \tau) \|_{2,\Omega}^2 \Big|_t^{t_0} - \int_t^{t_0} \int_\Omega (u^{(k)})^2 \xi . \xi' d\,x\, d\tau$$

on déduit de (0.13), (i),

$$(2.9) \quad \frac{1}{2} \| u^{(k)}(x, \tau) \xi(x, \tau) \|_{2,\Omega}^2 \Big|_t^{t_0} - \int_t^{t_0} \int_\Omega (u^{(k)})^2 \xi . \xi'\, dx\, d\tau$$
$$+ \sum_{i=1}^N \int_t^{t_0} \int_\Omega B_i(x, \tau, u, \nabla u)(\xi^2 D_i u^{(k)} + 2\xi u^{(k)} D_i \xi)\, dx\, d\tau$$
$$+ \int_t^{t_0} \int_\Omega B_0(x, \tau, u, \nabla u) \xi^2 u^{(k)}\, dx\, d\tau \leqslant 0.$$

D'autre part, compte tenu de (2.4), on a

$$(2.10) \quad \sum_{i=1}^N \int_t^{t_0} \int_\Omega B_i(x, \tau, u, \nabla u) \xi^2 D_i u^{(k)}\, dx\, d\tau$$
$$\geqslant a \int_t^{t_0} \int_{A_k(\tau)} |\nabla u|^2 \xi^2\, dx\, d\tau$$
$$- \int_t^{t_0} \int_{A_k(\tau)} f_1\, dx\, d\tau, \qquad \text{où} \qquad A_k(\tau) = \{x \in \Omega | u(x, \tau) > k\}.$$

$$(2.11) \quad 2 \sum_{i=1}^N \int_t^{t_0} \int_\Omega |B_i(x, \tau, u, \nabla u)| \xi u^{(k)}| D_i \xi|\, dx\, d\tau$$
$$\leqslant 2N \Big[\bar{a} \int_t^{t_0} \int_{A_k(\tau)} |\nabla u| \xi u^{(k)} | \nabla \xi|\, dx\, d\tau$$
$$+ \int_t^{t_0} \int_{A_k(\tau)} h_1 \xi u^{(k)} | \nabla \xi|\, dx\, d\tau \Big]$$

$$(2.12) \quad \int_t^{t_0} \int_\Omega |B_0(x, \tau, \nabla u)| \xi^2 u^{(k)}\, dx\, d\tau$$
$$\leqslant \int_t^{t_0} \int_{A_k(\tau)} d |\nabla u| \xi^2 u^{(k)} | dx\, d\tau + \int_t^{t_0} \int_{A_k(\tau)} g_1 \xi^2 u^{(k)}\, dx\, d\tau.$$

et encore

$$(2.13)\quad 2N\bar{a}\int_t^{t_0}\int_{A_k(\tau)}|\nabla u|\xi u^{(k)}|\nabla\xi|\,dx\,d\tau \leqslant \frac{a}{4}\int_t^{t_0}\int_{A_k(\tau)}|\nabla u|\xi^2\,dx\,d\tau + 16a^{-1}N^2\bar{a}^2\int_t^{t_0}\int_{A_k(\tau)}(u^{(k)})^2|\nabla\xi|^2\,dx\,d\tau$$

$$(2.14)\quad 2N\int_t^{t_0}\int_{A_k(\tau)}h_1\xi u^{(k)}|\nabla\xi|\,dx\,d\tau \leqslant N^2\int_t^{t_0}\int_{A_k(\tau)}h_1^2\xi^2\,dx\,d\tau + \int_t^{t_0}\int_{A_k(\tau)}(u^{(k)})^2|\nabla\xi|^2\,dx\,d\tau$$

$$(2.15)\quad \int_t^{t_0}\int_{A_k(\tau)}d|\nabla u|\xi^2u^{(k)}\,dx\,d\tau \leqslant \frac{a}{4}\int_t^{t_0}\int_{A_k(\tau)}|\nabla u|^2\xi^2\,dx\,d\tau + 16M^2a^{-1}\int_t^{t_0}\int_{A_k(\tau)}d^2\xi^2\,dx\,d\tau$$

$$(2.16)\quad \int_t^{t_0}\int_{A_k(\tau)}g\xi^2u^{(k)}\,dx\,d\tau \leqslant 2M\int_t^{t_0}\int_{A_k(\tau)}g\xi^2\,dx\,d\tau$$

On obtient de (2.9), (2.10), (2.11), (2.12), (2.13), (2.14), (2.15) et (2.16)

$$(2.17)\quad \frac{1}{2}\|u^{(k)}(x,\tau)\xi(x,\tau)\|^2_{2,A_k(\tau)}\Big|_t^{t_0} + \frac{a}{2}\int_t^{t_0}\int_{A_k(\tau)}|\nabla u|^2\xi^2\,dx\,d\tau \leqslant \max(2, 16a^{-1}N^2\bar{a}^2, N^2, 16a^{-1}) \left[\int_t^{t_0}\int_{A_k(\tau)}(u^{(k)})^2(|\nabla\xi|^2+\xi|\xi'|)\,dx\,d\tau + \int_t^{t_0}\int_{A_k(\tau)}\Phi\xi^2\,dx\,d\tau\right]$$

où

$$(2.18)\qquad \Phi = f_1 + Mg_1 + M^2d^2 + h_1^2 \in L^{p,s}(\Lambda).$$

Soit $Q_k(t, t_0) = \{(x,\tau)\in\Lambda \,|\, t < \tau < t_0,\ u(x,\tau) > k\}$, $\bar{p}$, $\bar{s}$, χ, q et r définis dans (1.5).

Il vient

$$(2.19)\quad \int_t^{t_0}\int_{A_k(\tau)}\Phi\xi^2\,dx\,d\tau \leqslant \|\Phi\|_{p,s,\Lambda}\|\xi\|^2_{\bar{p},\bar{s},Q_k(t,t_0)} \leqslant \|\Phi\|_{p,s,\Lambda}\left(\int_t^{t_0}\left(\int_{A_k(\tau)}\xi\,dx\right)^{r/q}d\tau\right)^{\frac{2(1+\chi)}{r}}$$

si N et p sont différents de 1, ou

$$\leqslant \|\Phi\|_{p,s,\Lambda}\left(\int_t^{t_0}\|\xi(\tau)\|_{\infty,A_k(\tau)}^{\frac{4}{1+\chi}}d\tau\right)^{\frac{2(1+\chi)}{4}}$$

si $N = p = 1$, puisque dans ce cas on a

$$q = \infty, \qquad r = 4, \qquad \text{comme il est aisé de voir.}$$

Dans la suite on supposera pour simplifier

$$\text{(2.20)} \qquad M \leqslant 1 \quad \text{et} \quad \|\Phi\|_{p,s,\Lambda} \leqslant 1$$

A la fin de la démonstration on reviendra sur ce point. Ceci étant on pose

$$\text{(2.21)} \quad A_k(x_0, R; \tau) = \{x \in B(x_0, R) \cap \Omega | u(x, \tau) > k\}$$

$$\text{(2.22)} \quad Q_k(x_0, R; t, t_0) = \{(x, \tau) \in (B(x_0, R) \cap \Omega) \times]t, t_0[| u(x, \tau) > k\}$$

$$\text{(2.23)} \quad \mu_k(x_0, R; t, t_0) = \begin{cases} \int_t^{t_0} |A_k(x_0, R; \tau)|^{r/q} d\tau & \text{si} \quad q < \infty \\ \text{mes}\, \{\tau \in]t, t_0[\; | A_k(x_0, R; \tau)| \neq 0\} & \text{si} \quad q = \infty \end{cases}$$

Alors, compte tenu du fait que $\xi(x, \tau) = 0$ pour $x \notin B(x_0, R)$, on déduit de (2.17), (2.18), (2.19) et (2.20) :

$$\begin{aligned} \text{(2.24)} \quad & \|u^{(k)}(x, t_0)\xi(x, t_0)\|^2_{2, A_k(x_0, R; t_0)} \\ & + a\|\nabla u^{(k)}\xi\|^2_{2Q_k(x_0, R; t, t_0)} \\ & \leqslant \|u^{(k)}(x, t)\xi(x, t)\|^2_{2, A_k(x_0, R; t)} \\ & + c\Big[\int_{Q_k(x_0, R; t, t_0)} (u^{(k)})^2(|\nabla\xi|^2 + \xi|\xi'|)\, dx\, d\tau + \mu_k(x_0, R; t, t_0)^{\frac{2}{r}(1+\chi)}\Big] \end{aligned}$$

où

$$c = c(N, a, \bar{a})$$

En raisonnant avec $\varphi_t = u(t) - \xi^2 u_{(k)}(t)$,

$$u_{(k)} = u - \{u\}_k, \qquad \{u\}_k = \max(u, k),$$

k vérifiant (2.5) (ce qui entraîne $\varphi_t \in \mathbf{K}$ même dans le cas où $B(x_0, R) \cap \Gamma \neq \varnothing$) on arrive de même à

$$\begin{aligned} \text{(2.24')} \quad & \|u_{(k)}(x, t_0)\xi(x, t_0)\|^2_{2, A'_k(x_0, R; t_0)} \\ & + a\|\nabla u_{(k)}\xi\|^2_{2, Q'_k(x_0, R; t, t_0)} \leqslant \|u_{(k)}(x, t)\xi(x, t)\|^2_{2, A'_k(x_0, R; t)} \\ & + c\Big[\int_{Q'_k(x_0, R; t, t_0)} (u_{(k)})^2(|\nabla\xi|^2 + \xi|\xi'|)\, dx\, d\tau + \mu'_k(x_0, R; t, t_0)^{\frac{2}{r}(1+\chi)}\Big] \end{aligned}$$

où

$$A'_k(x_0, R; \tau) = \{x \in B(x_0, R) \cap \Omega | u(x, \tau) < k\}$$

$$Q'_k(x_0, R; t, t_0) = \{(x, \tau) \in (B(x_0, R) \cap \Omega) \times]t, t_0[| u(x, \tau) < k\}$$

$$\mu'_k(x_0, R; t, t_0) = \begin{cases} \int_t^{t_0} |A'_k(x_0, R; \tau)|^{r/q} & \text{si} \quad q < \infty \\ \text{mes } \{\tau \in]t, t_0[\ | A'_k(x_0, R; \tau)| \neq 0\} & \text{si } q = \infty \end{cases}$$

En choisissant convenablement la fonction ξ on obtient à partir de (2.24) et (2.24′) les majorations suivantes :

Soit $\rho'_0 \leqslant 1$ une constante positive qu'on choisira au paragraphe 2.2. Posons

$$(2.25) \quad \rho_0(x_0) = \begin{cases} \min\,(\text{dist }(x_0, \Gamma), \rho'_0) & \text{si} \quad x_0 \in \Omega \\ \rho'_0 \quad \text{si} \quad x_0 \in \Gamma \end{cases}$$

et soient

$$(2.26) \quad 0 \leqslant t_1 \leqslant t \leqslant t_0 \leqslant T, \qquad 0 < \rho \leqslant R \leqslant \rho_0(x_0)$$

Alors on a, avec $c = c(N, a, \bar{a})$,

$$(2.27) \quad \max_{t_1 \leqslant \tau \leqslant t_0} \|u^{(k)}(x, \tau)\|^2_{2, A_k(x_0, \rho; \tau)} \leqslant \|u^{(k)}(x, t_1)\|^2_{2, A_k(x_0, R; t_1)} + c\Big[(R - \rho)^{-2} \|u^{(k)}\|^2_{2, Q_k(x_0, R; t_1, t_0)} + \mu_k^{\frac{2}{r}(1+\chi)}(x_0, R; t_1, t_0)\Big]$$

où

$$k \geqslant 0 \quad \text{si} \quad x_0 \in \Gamma$$

$$(2.27') \quad \max_{t_1 \leqslant \tau \leqslant t_0} \|u_{(k)}(x, \tau)\|^2_{2, A'_k(x_0 \rho; \tau)} \leqslant \|u_{(k)}(x, t_1)\|^2_{2, A'_k(x_0, R; t_1)} + c\Big[(R - \rho)^{-2} \|u_{(k)}\|^2_{2, Q_k(x_0, R; t_1, t_0)} + \mu_k'^{\frac{2}{r}(1+\chi)}(x_0, R; t_1, t_0)\Big]$$

$$(2.28) \quad |u^{(k)}|^2_{Q_k(x_0, \rho, t, t_0)} \equiv \max_{t \leqslant \tau \leqslant t_0} \|u^{(k)}(x, \tau)\|^2_{2, A_k(x_0, \rho; \tau)} + \|\nabla u^{(k)}\|^2_{2, Q_k(x_0, \rho; t, t_0)} \leqslant c\{[(R - \rho)^{-2} + (t - t_1)^{-1}] \|u^{(k)}\|^2_{2, Q_k(x_0, R; t_1, t_0)} + \mu_k^{\frac{2}{r}(1+\chi)}(x_0, R; t_1, t_0)\},$$

où

$$k \geqslant 0 \quad \text{si} \quad x_0 \in \Gamma$$

$$(2.28') \quad |u_{(k)}|^2_{Q'_k(x_0, \rho; t, t_0)} \leqslant c\{[(R - \rho)^{-2} + (t - t_1)^{-1}] \|u_{(k)}\|^2_{2, Q'_k(x_0, R; t_1, t_0)} + \mu_k'^{\frac{2}{r}(1+\chi)}(x_0, R; t_1, t_0)\}$$

$$(2.29)\quad |u^{(k)}|^2_{Q_k(x_0,\rho;0,t)} \leqslant \|u^{(k)}(x,0)\|^2_{2,A_k(x_0,R;0)} + c[(R-\rho)^{-2}\|u^{(k)}\|^2_{2,Q_k(x_0,R;0,t)} + \mu_k^{\frac{2}{r}(1+\chi)}(x_0,R;0,t)],$$

où

$$k \geqslant 0 \quad \text{si} \quad x_0 \in \Gamma$$

$$(2.29')\quad |u_{(k)}|^2_{Q'_k(x_0,\rho;0,t)} \leqslant \|u_{(k)}(x,0)\|^2_{2,A'_k(x_0,R;0)} + c[(R-\rho)^{-2}\|u_{(k)}\|^2_{2,Q'_k(x_0,R;0,t)} + \mu_k'^{\frac{2}{r}(1+\chi)}(x_0,R;0,t)].$$

2.2. Lemmes préliminaires.

Dans la suite on supposera $N \geqslant 2$. A la fin de cette sous-section on enlèvera cette restriction.

Compte tenu de la régularité de la frontière Γ, il existe des constantes $\rho'_0 \in]0, 1]$, θ_0, $\theta'_0 \in]0, 1[$ telles qu'on a

$$(2.30)\quad \theta_0|B(x_0,\rho)| \leqslant |\Omega(x_0,\rho)| \leqslant \theta'_0|B(x_0,\rho)|, \qquad \forall x_0 \in \Gamma,$$
$$\forall \rho \in]0, \rho'_0], \qquad \text{où} \qquad \Omega(x_0,\rho) = B(x_0,\rho) \cap \Omega$$

et aussi, si $v \in H^1(\Omega)$, $A_k(x_0,\rho) = \{x \in \Omega(x_0,\rho) | v(x) > k\}$, $A'_k(x_0,\rho) = \{x \in \Omega(x_0,\rho) | v(x) < k\}$:

Lemme 2.0. (De Giorgi, cf. aussi [6], [1] et [5]). — *Soit* $\lambda < 1$ *une constante. Alors il existe une constante* β_0 (*ne dépendant pas de* v) *telle que pour tout* $x_0 \in \Omega$ *et tout*

$$\rho \in]0, \rho_0(x_0)]$$

($\rho_0(x_0)$ *défini par* (2.25)) *on a*

(i) $$|A_k(x_0,\rho)| \leqslant \lambda|\Omega(x_0,\rho)| \Longrightarrow$$

$$(2.31)\quad (l-k)|A_l(x_0,\rho)| \leqslant \beta_0\rho\int_{A_k(x_0,\rho)-A_l(x_0,\rho)} |\nabla u(x)|\, dx, \forall l \geqslant k$$

(ii) $$|A'_k(x_0,\rho)| \leqslant \lambda|\Omega(x_0,\rho)| \Longrightarrow$$

(2.31')

$$(l-k)|A'_l(x_0,\rho)| \leqslant \beta_0\rho\int_{A'_k(x_0,\rho)-A'_l(x_0,\rho)} |\nabla u(x)|\, dx, \qquad \forall l \leqslant k,$$

(iii) $x_0 \in \Gamma$, $v \geqslant k$ sur $B(x_0, 2\rho) \cap \Gamma \Longrightarrow$ (2.31')

Ceci étant, revenons aux hypothèses de 2.1 sur la fonction

u et introduisons la notation suivante

$$\Lambda(x_0, \rho\,; t_1, t_2) = (\mathrm{B}(x_0, \rho) \cap \Omega) \times\,]t_1, t_2[\quad (0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant \mathrm{T}) \tag{2.32}$$

Dans la suite on représentera par c une constante ne dépendant éventuellement que de N, Ω, T, a, $\bar{a}$, p, s. Sauf mention explicite, aucune constante introduite dépendra d'autres paramètres que ceux-là.

Avec une démonstration analogue à celle du lemme 7.1 du chapitre II de [6], on établit le lemme suivant, compte tenu des estimations (2.27), (2.27′) et de la première partie de l'inégalité (2.30) si $x_0 \in \Gamma$:

LEMME 2.1. — Il existe des constantes $\theta > 0$ et $b \in\,]0, 1[$ telles que

(i) Si pour $x_0 \in \overline{\Omega}$, $\rho \leqslant \rho_0(x_0)$, $0 \leqslant t_1 \leqslant \mathrm{T}$ on a (avec $k \geqslant 0$ si $x_0 \in \Gamma$)

$$|\mathrm{A}_k(x_0, \rho\,; t_1)| \leqslant \frac{1}{2}\, |\Omega(x_0, \rho)| \tag{2.33}$$

et

$$\mathrm{H} \equiv \sup_{\Lambda(x_0, \rho\,; t_1, t_1 + \Omega\rho^2)} (u(x, t) - k) \geqslant \rho^{\frac{\mathrm{N}\chi}{2}} \ (^7) \tag{2.34}$$

alors

$$|\Omega(x_0, \rho) - \mathrm{A}_{k+3/4\mathrm{H}}(x_0, \rho\,; t)| \geqslant b\,|\Omega(x_0, \rho)|, \quad \forall t \in [t_1, t_1 + \theta\rho^2] \cap [t_1, \mathrm{T}] \tag{2.35}$$

(ii) Si pour $x_0 \in \overline{\Omega}$, $\rho \leqslant \rho_0(x_0)$, $0 \leqslant t_1 < \mathrm{T}$ on a

$$|\mathrm{A}'_k(x_0, \rho\,; t_1)| \leqslant \frac{1}{2}\, |\Omega(x_0, \rho)| \tag{2.33′}$$

et

$$\mathrm{H}' \equiv \sup_{\Lambda(x_0, \rho\,; t_1, t_1 + \theta\rho^2)} (k - u(x, t)) \geqslant \rho^{\frac{\mathrm{N}\chi}{2}} \tag{2.34′}$$

alors

$$|\Omega(x_0, \rho) - \mathrm{A}'_{k-3/4\mathrm{H}'}(x_0, \rho\,; t)| \geqslant b\,|\Omega(x_0, \rho)|, \quad \forall t \in [t_1, t_1 + \theta\rho^2] \cap [t_1, \mathrm{T}] \tag{2.35′}$$

(7) Pour simplifier l'écriture on écrira sup. ≡ sup. ess., inf. ≡ inf. ess.

Compte tenu des estimations (2.28), (2.28′) on démontre le lemme suivant comme le lemme 7.2 du chapitre II de [6] :

LEMME 2.2. — *Il existe une constante* $\theta_1 > 0$ *telle que*

(*i*) *Si pour* $x_0 \in \overline{\Omega}$, $\rho \leqslant \rho_0(x_0)$, $\theta\rho^2 \leqslant t_0$ *on a* (*avec* $k \geqslant 0$ *si* $x_0 \in \Gamma$)

$$(2.36) \qquad |Q_k(x_0, \rho; t_0 - \theta\rho^2, t_0)| \leqslant \theta_1\rho^{N+2}$$

et

$$(2.37) \qquad H \equiv \sup_{\Lambda(x_0, \rho; t_0-\theta\rho^2, t_0)} (u(x,t) - k) \geqslant \rho^{\frac{N\chi}{2}}$$

alors

$$(2.38) \qquad \left|Q_{k+\frac{H}{2}}\left(x_0, \frac{\rho}{2}; t_0 - \theta\left(\frac{\rho}{2}\right)^2, t_0\right)\right| = 0$$

(ii) *Si pour* $x_0 \in \overline{\Omega}$, $\rho \leqslant \rho_0(x_0)$, $\theta\rho^2 \leqslant t_0$ *on a*

$$(2.36') \qquad |Q'_k(x_0, \rho; t_0 - \theta\rho^2, t_0)| \leqslant \theta_1\rho^{N+2}$$

et

$$(2.37') \qquad H' \equiv \sup_{\Lambda(x_0, \rho; t_0-\theta\rho^2, t_0)} (k - u(x,t)) \geqslant \rho^{\frac{N\chi}{2}}$$

alors

$$(2.38') \qquad |Q'_{k-H'/2}(x_0, \rho/2; t_0 - \theta(\rho/2)^2, t_0)| = 0.$$

LEMME 2.2′. — *Supposons* $u_0 \in L^\infty(\Omega)$. *Alors il existe une constante* $\theta'_1 > 0$ *telle que*

(i) *Si pour* $x_0 \in \overline{\Omega}$, $\rho \leqslant \rho_0(x_0)$, $\theta\rho^2 \leqslant T$, $k \geqslant \sup\limits_{\Omega(x_0, \rho)} u(x, 0)$ (*ce qui entraîne* $k \geqslant 0$ *si* $x_0 \in \Gamma$), *on a*

$$(2.39) \qquad |Q_k(x_0, \rho; 0, \theta\rho^2)| \leqslant \theta'_1\rho^{N+2}$$

et

$$(2.40) \qquad H \equiv \sup_{\Lambda(x_0, \rho; 0, \theta\rho^2)} (u(x, t) - k) \geqslant \rho^{\frac{N\chi}{2}}$$

alors

$$(2.41) \qquad |Q_{k+H/2}(x_0, \rho/2; 0, \theta(\rho/2)^2)| = 0.$$

(ii) *Si pour* $x_0 \in \overline{\Omega}$, $\rho \leqslant \rho_0(x_0)$, $\theta\rho^2 \leqslant T$, $k \leqslant \inf\limits_{\Omega(x_0, \rho)} u(x, 0)$, *on a*

$$(2.39') \qquad |Q'_k(x_0, \rho; 0, \theta\rho^2)| \leqslant \theta'_1\rho^{N+2}$$

et

$$(2.40') \qquad H' \equiv \sup_{\Lambda(x_0, \rho; 0, \theta\rho^2)} (k - u(x,t)) \geqslant \rho^{\frac{N\chi}{2}}$$

alors

$$(2.41') \qquad |Q'_{k-H'/2}(x_0, \rho/2; 0, \theta(\rho/2)^2)| = 0.$$

Esquisse de la démonstration du lemme 2.2' :

Compte tenu des estimations (2.29), (2.29') la démonstration est analogue à celle du lemme 7.2 du chapitre II de [6]. En effet, l'inégalité $k \geqslant \sup\limits_{\Omega(x_0, \rho)} u(x, 0)$ entraîne la nullité du premier terme du second membre de (2.29).

En travaillant avec (2.29) dans ces conditions, et avec un changement de coordonnées en t convenable, on achève la démonstration comme celle du lemme cité. Même raisonnement pour établir (ii).

Lemme 2.3. — *Il existe un entier positif* s_1 *tel que pour tout* $(x_0, t_0) \in \overline{\Lambda}$, *avec* $t_0 > 0$, *et pour tout* ρ *tel que* $0 < \rho \leqslant \frac{\rho_0(x_0)}{2}$, $\theta(2\rho)^2 \leqslant t_0$, *on ait ou*

$$(2.42) \qquad \text{osc. } (u;\ \Lambda(x_0,\ \rho/2;\ t_0 - \theta(\rho/2)^2,\ t_0)) \leqslant 2^{s_1+1}\rho^{\frac{N\chi}{2}}$$

ou alors

$$(2.43) \qquad \begin{aligned} &\text{osc. } (u;\ \Lambda(x_0,\ \rho/2;\ t_0 - \theta(\rho/2)^2,\ t_0)) \\ &\quad \leqslant \left(1 - \frac{1}{2^{s_1+1}}\right) \text{osc. } (u;\ \Lambda(x_0,\ 2\rho;\ t_0 - \theta(2\rho)^2,\ t_0)) \end{aligned}$$

$\left(\textit{avec } \operatorname{osc.}_{\Lambda} u = \sup\limits_{\Lambda} u - \inf\limits_{\Lambda} u\right)$

Démonstration. — Si $x_0 \in \Omega$ la démonstration est celle des lemmes 7.3 et 7.4 du chapitre II de [6]. Si $x_0 \in \Gamma$, étant donné le caractère unilatéral de la condition sur la frontière, on doit faire certaines modifications. La démonstration dans ce cas se fait comme suit :

Posons

$$\mu_1 = \sup_{\Lambda(x_0, 2\rho;\, t_0 - \theta(2\rho)^2,\, t_0)} u(x, t),$$

$$\mu_2 = \inf_{\Lambda(x_0, 2\rho;\, t_0 - \theta(2\rho)^2,\, t_0)} u(x, t)$$

$$\omega = \mu_1 - \mu_2, \qquad \overline{\mu} = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} = \mu_1 - \frac{\omega}{2} = \mu_2 + \frac{\omega}{2}$$

Choisissons s_1 entier vérifiant

$$s_1 \geqslant 3 + \frac{\bar{c}}{\theta_1^2} \tag{2.44}$$

où θ_1 est défini dans le lemme 2.2 et $\bar{c}$ est une constante à préciser ultérieurement, dépendant seulement des paramètres habituels.

Supposons donc

$$\omega > 2^{s_1+1}\rho^{\frac{N\chi}{2}} \tag{2.45}$$

Alors ou bien on a

$$\bar{\mu} < 0 \tag{2.46}$$

ou

$$\bar{\mu} \geqslant 0 \tag{2.47}$$

Supposons vérifiée (2.46). Posons

$$l = \mu_2 + \frac{\omega}{2^{\sigma+1}}, \qquad k = \mu_2 + \frac{\omega}{2^\sigma}, \qquad \sigma \geqslant 1.$$

Comme $l < k \leqslant \bar{\mu} < 0$, on a $u(t) \geqslant k$ sur $B(x_0, 2\rho) \cap \Gamma$ pour $t \in [t_0 - \theta\rho^2, t_0]$ et donc, par le lemme 2.0, (iii) il vient

$$\frac{\omega}{2^{\sigma+1}} \left| A'_{\mu_2+\frac{\omega}{2^{\sigma+1}}}(x_0, \rho; t) \right| \leqslant \beta_0 \rho \int_{\mathfrak{D}'_\sigma(t)} |\nabla u(x, t)| \, dx \tag{2.48}$$

avec

$$\mathfrak{D}'_\sigma(t) = A'_{\mu_2+\frac{\omega}{2^{\sigma+1}}}(x_0, \rho; t) - A'_{\mu_2+\frac{\omega}{2^{\sigma+1}}}(x_0, \rho; t) \tag{2.49}$$

Intégrons (2.48) entre $t_0 - \theta\rho^2$ et t_0, élevons au carré et appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\omega}{2^{\sigma+1}}\right)^2 \int_{t_0-\theta\rho^2}^{t_0} \left| A'_{\mu_2+\frac{\omega}{2^{\sigma+1}}}(x_0, \rho; t) \right|^2 dt \\ &\leqslant \beta_0^2 \rho^2 \left(\int_{t_0-\theta\rho^2}^{t_0} \int_{\mathfrak{D}'_\sigma(t)} |\nabla u(x, t)|^2 \, dx \, dt \right) \left(\int_{t_0-\theta\rho^2}^{t_0} |\mathfrak{D}'_\sigma(t)| \, dt \right) \end{aligned} \tag{2.50}$$

D'autre part on a

$$\int_{t_0-\theta\rho^2}^{t_0} \int_{\mathfrak{D}'_\sigma(t)} |\nabla u(x, t)|^2 \, dx \, dt \leqslant \left| u_{\left(\mu_2+\frac{\omega}{2^\sigma}\right)} \right|^2_{\Lambda(x_0, \rho; t_0-\theta\rho^2, t_0)} \tag{2.51}$$

Appliquons alors (2.28′) avec $k = \mu_2 + \frac{\omega}{2^\sigma}$,

$$R = 2\rho, \qquad t_1 = t_0 - 4\theta\rho^2, \qquad t = t_0 - \theta\rho^2.$$

Il vient, compte tenu de (2.51),

$$(2.52) \quad \int_{t_0-\theta\rho^2}^{t_0} \int_{\mathcal{D}'_\sigma(t)} |\nabla u(x, t)|^2 \, dx \, dt \leqslant c\{[\rho^{-2} + (3\theta\rho^2)^{-1}] \left(\mu_2 + \frac{\omega}{2^\sigma} - \mu_2\right)^2 \chi_N(2\rho)^N . 4\theta\rho^2 + [[\chi_N(2\rho)^N]^{r/q} 4\theta\rho^2]^{2/r(1+\chi)}\},$$

où χ_N est la mesure de la boule unité de $\mathbf{R}^N$.

Compte tenu de (2.45), (2.50), (2.52) et de (1.6) on en déduit

$$(2.53) \quad \left|Q'_{\mu_2+\frac{\omega}{2^{\sigma+1}}}(x_0, \rho; t_0 - \theta\rho^2, t_0)\right|^2 \leqslant c\rho^{N+2} \int_{t_0-\theta\rho^2}^{t_0} |\mathcal{D}'_\sigma(t)| \, dt$$

pour $\sigma \in [1, s_1 - 1]$ (par exemple). Mais

$$(2.54) \quad \left|Q'_{\mu_2+\frac{\omega}{2^{s_1}}}(x_0, \rho; t_0 - \theta\rho^2, t_0)\right| \leqslant \left|Q'_{\mu_2+\frac{\omega}{2^{\sigma+1}}}(x_0, \rho; t_0 - \theta\rho^2, t_0)\right|$$

pour $\sigma \in [1, s_1 - 1]$ et donc, par addition, on tire de (2.53) et (2.54)

$$(2.55) \quad (s_1 - 1)\left|Q'_{\mu_2+\frac{\omega}{2^{s_1}}}(x_0, \rho; t_0 - \theta\rho^2, t_0)\right|^2 \leqslant c\rho^{N+2}\theta\rho^2 . \chi_N\rho^N = \bar{c}\rho^{2(N+2)}$$

Alors par (2.44), il vient $\frac{\bar{c}}{s_1 - 1} \leqslant \frac{\bar{c}}{s_1 - 3} \leqslant \theta_1^2$ et donc

$$(2.56) \quad \left|Q'_{\mu_2+\frac{\omega}{2^{s_1}}}(x_0, \rho; t_0 - \theta\rho^2, t_0)\right| \leqslant \theta_1\rho^{N+2}$$

Par le lemme 2.2, (ii), on a, compte tenu de (2.56),

$$(2.57) \quad H' \equiv \sup_{\Lambda(x_0, \rho; t_0-\theta\rho^2, t_0)} \left(\mu_2 + \frac{\omega}{2^{s_1}} - u(x, t)\right) \leqslant \rho^{\frac{N\chi}{2}}$$

ou alors

$$(2.58) \quad \left|Q'_{\mu_2+\frac{\omega}{2^{s_1}}-\frac{H'}{2}}(x_0, \rho/2; t_0 - \theta(\rho/2)^2, t_0)\right| = 0$$

Supposons (2.57) vérifié. Alors il vient

$$(2.59) \qquad \inf_{\Lambda(x_0,\, \rho/2;\, t_0-\theta(\rho/2)^2,\, t_0)} u(x, t) \geqslant \mu_2 + \frac{\omega}{2^{s_1}} - \rho^{\frac{N\chi}{2}}$$

$$> \mu_2 + \frac{\omega}{2^{s_1+1}}, \quad \text{compte tenu de (2.45).}$$

De (2.59), il s'ensuit qu'on a (2.43).

Si (2.58) est vérifié, alors on a

$$(2.60) \qquad \inf_{\Lambda(x_0,\, \rho/2;\, t_0-\theta(\rho/2)^2,\, t_0)} u(x, t) \geqslant \mu_2 + \frac{\omega}{2^{s_1}} - \frac{H'}{2}$$

$$\geqslant \mu_2 + \frac{\omega}{2^{s_1+1}}$$

puisque

$$H' \leqslant \frac{\omega}{2^{s_1}}$$

Donc on a aussi (2.43).

Supposons maintenant l'hypothèse (2.47) vérifiée.

Dans ce cas ou bien on a

$$(2.61) \qquad |A_{\mu_1-\frac{\omega}{2}}(x_0, \rho\,; t_0 - \theta\rho^2)| \leqslant \frac{1}{2}\,|\Omega(x_0, \rho)|$$

ou alors

$$(2.62) \qquad \left|A'_{\mu_2+\frac{\omega}{2}}(x_0, \rho\,; t_0 - \theta\rho^2)\right| \leqslant \frac{1}{2}\,|\Omega(x_0, \rho)|$$

Étant donné que ces deux cas se traitent d'une façon analogue, supposons (2.62) vérifiée.

Posons

$$\mu_2' = \inf_{\Lambda(x_0,\, \rho;\, t_0-\theta\rho^2,\, t_0)} u(x, t).$$

Si $\mu_2' \geqslant \mu_2 + \frac{\omega}{2^{s_1+1}}$ alors il vient

$$\text{osc.}\,(u\,; \Lambda(x_0, \rho\,; t_0 - \theta\rho^2, t_0)) \leqslant \mu_1 - \mu_2' \leqslant \left(1 - \frac{1}{2^{s_1+1}}\right)\omega$$

ce qui entraîne (2.43).

Supposons donc $\mu_2' < \mu_2 + \frac{\omega}{2^{s_1+1}}$ et posons

$$H' \equiv -\mu_2' + \left(\mu_2 + \frac{\omega}{2^{r_1}}\right).$$

On a, par (2.45),

$$H' > \frac{\omega}{2^{r_1}} - \frac{\omega}{2^{s_1+1}} \geqslant \frac{\omega}{2^{s_1+1}} > \rho^{\frac{N\chi}{2}}$$

pour $r_1 \in [1, s_1]$.

Appliquons le lemme 2.1, (ii) avec

$$k = \mu_2 + \frac{\omega}{2^{r_1}} \qquad \text{et} \qquad t_1 = t_0 - \theta\rho^2$$

il vient

$$\left|\Omega(x_0, \rho) - A'_{\mu_2+\frac{\omega}{2^{r_1}}-\frac{3}{4}H'}(x_0, \rho; t)\right| \geqslant b|\Omega(x_0, \rho)|, \tag{2.63}$$
$$\forall t \in [t_0 - \theta\rho^2 : t_0]$$

Mais, puisqu'on a

$$\mu_2 + \frac{\omega}{2^{r_1}} - \frac{3}{4}H' \geqslant \mu_2 + \frac{\omega}{2^{r_1}} - \frac{3}{4}\frac{\omega}{2^{r_1}} = \mu_2 + \frac{\omega}{2^{r_1+2}}$$

il s'ensuit de (2.63) que

$$\left|\Omega(x_0, \rho) - A'_{\mu_2+\frac{\omega}{2^{r_1+2}}}(x_0, \rho; t)\right| \geqslant b|\Omega(x_0, \rho)|$$

c'est-à-dire

$$\left|A'_{\mu_2+\frac{\omega}{2^{r_1+2}}}(x_0, \rho; t)\right| \leqslant (1 - b)|\Omega(x_0, \rho)| \tag{2.64}$$
$$\forall t \in [t_0 - \theta\rho^2, t_0]$$

On peut donc appliquer à $u(t)$, $t \in [t_0 - \theta\rho^2, t_0]$ le lemme 2.0, (ii), avec $k = \mu_2 + \frac{\omega}{2^\sigma}$ et $l = \mu_2 + \frac{\omega}{2^{\sigma+1}}$,

$$\sigma = r_1 + 2 \in [3, s_1 + 2].$$

Ainsi avec $\sigma \in [3, s_1 - 1]$ on a (2.48) avec $\mathcal{D}'_\sigma(t)$ donné par (2.49) et cela pour tout $t \in [t_0 - \theta\rho^2, t_0]$. La démonstration s'achève comme dans la première partie avec obtention de (2.43).

Lemme 2.3'. — *Supposons maintenant* $u_0 \in |K \cap C^{0,\lambda}(\overline{\Omega})$, $\lambda \in]0, 1]$ *avec* $[u_0]_{\lambda,\Omega} \leqslant 1$ *et soit* $\gamma = \min\left(\lambda, \frac{N\chi}{2}\right)$. *Alors il existe un entier positif* s'_1, *dépendant aussi de* λ, *tel que* *pour tout* $x_0 \in \overline{\Omega}$ *et pour tout* ρ *tel que* $0 < \rho \leqslant \frac{\rho_0(x_0)}{2}$, *on ait ou*

$$\text{(2.65)} \qquad \text{osc.}\,(u;\, \Lambda(x_0,\, \rho/2;\, 0,\, \theta(\rho/2)^2)) \leqslant 2^{s'_1+1}\rho^\lambda$$

ou alors

$$\text{(2.66)} \qquad \text{osc.}(u;\, \Lambda(x_0,\, \rho/2;\, 0,\, \theta(\rho/2)^2)) \leqslant \left(1 - \frac{1}{2^{s'_1+1}}\right) \text{osc}\,(u;\, \Lambda(x_0,\, 2\rho;\, 0,\, \theta(2\rho)^2)).$$

Démonstration. — Posons

$$\mu_1 = \sup_{\Lambda(x_0,\, 2\rho;\, 0,\, \theta(2\rho)^2)} u(x,\, t), \quad \mu_2 = \inf_{\Lambda(x_0,\, 2\rho;\, 0,\, \theta(2\rho)^2)} u(x,\, t),$$

$$\omega = \mu_1 - \mu_2, \qquad \bar{\mu} = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} = \mu_1 - \frac{\omega}{2} = \mu_2 + \frac{\omega}{2}$$

Choisissons s'_1 entier vérifiant

$$\text{(2.67)} \qquad 2^{s'_1} \geqslant 4^{\lambda+1}$$

$$\text{(2.68)} \qquad s'_1 \geqslant 4 + \frac{\bar{c}'}{\theta_1'^2}$$

où θ'_1 est défini dans le lemme 2.2′ et $\bar{c}'$ est une constante à préciser ultérieurement et ne dépendant que des paramètres habituels.

Supposons que (2.65) n'est pas vérifié. On aura alors, pour $x,\, x' \in \Omega(x_0,\, 2\rho)$,

$$|u(x, 0) - u(x', 0)| \leqslant 4^\lambda \rho^\lambda \leqslant 4^\lambda \rho^\gamma \leqslant \frac{2^{s'_1}}{4}\rho^\lambda < \frac{\omega}{4}$$

compte tenu qu'on a

$$\text{(2.69)} \qquad \omega > 2^{s'_1+1}\rho^\gamma \geqslant 2^{s'+1}\rho^{\frac{N\chi}{2}}$$

On peut donc conclure

$$\text{(2.70)} \qquad \text{osc.}\,(u(x,\, 0);\, \Omega(x_0,\, 2\rho)) < \frac{\omega}{4}$$

ce qui entraîne ou

$$\text{(2.71)} \qquad \sup_{\Omega(x_0,\, 2\rho)} u(x,\, 0) \leqslant \mu_1 - \frac{\omega}{4}$$

ou alors

$$\text{(2.72)} \qquad \inf_{\Omega(x_0,\, 2\rho)} u(x,\, 0) \geqslant \mu_2 + \frac{\omega}{4}$$

Supposons (2.71) vérifié. On a alors

$$\left|A_{\mu_1-\frac{\omega}{2^2}}(x_0,\ \rho\,;\ 0)\right| = 0$$

Posons
$$\mu_1' = \sup_{\Lambda(x_0,\,\rho\,;\,0,\,\theta\rho^2)} u(x,\ t)$$

Si
$$\mu_1' \leqslant \mu_1 - \frac{\omega}{2^{s_1'+1}}$$

alors il vient

$$\text{osc.}\,(u;\ \Lambda(x_0,\ \rho\,;\ 0,\ \theta\rho^2)) \leqslant \mu_1' - \mu_2 \leqslant \left(1 - \frac{1}{2^{s_1'+1}}\right)\omega$$

ce qui entraîne (2.66).

Supposons alors $\mu_1' > \mu_1 - \dfrac{\omega}{2^{s_1'+1}}$ et posons

$$H = \mu_1' - \left(\mu_1 - \frac{\omega}{2^{r_1}}\right), \qquad r_1 \in [2,\ s_1']$$

On a

$$H \geqslant \frac{\omega}{2^{r_1}} - \frac{\omega}{2^{s_1'+1}} \geqslant \frac{\omega}{2^{s_1'+1}} > \rho^{\frac{N\chi}{2}} \quad \text{par (2.69)}$$

Alors par le lemme 2.1 (i) on a, avec $k = \mu_1 - \dfrac{\omega}{2^{r_1}}$,

$$\left|\Omega(x_0,\ \rho) - A_{\mu_1-\frac{\omega}{2^{r_1}}+\frac{3}{4}H}(x_0,\ \rho\,;\ t)\right| \geqslant b|\Omega(x_0,\ \rho)|,\ \forall t \in [0,\ \theta\rho^2]$$

(Remarquons que (2.71) et $u(x,\ 0) \in |\mathbf{K}$ entraînent $k \geqslant 0$).

Étant donné que

$$\mu_1 - \frac{\omega}{2^{r_1}} + \frac{3}{4}H \leqslant \mu_1 - \frac{\omega}{2^{r_1}} + \frac{3}{4}\,\frac{\omega}{2^{r_1}} = \mu_1 - \frac{\omega}{2^{r_1+2}}$$

on en déduit, pour $r_1 \in [2,\ s_1']$,

$$\left|A_{\mu_1-\frac{\omega}{2^{r_1+2}}}(x_0,\ \rho\,;\ t)\right| \leqslant (1 - b)|\Omega(x_0,\ \rho)|,\ \ \forall t \in [0,\ \theta\rho^2] \tag{2.73}$$

Alors, avec $k = \mu_1 - \dfrac{\omega}{2^{\sigma}}$, $l = \mu_1 - \dfrac{\omega}{2^{\sigma+1}}$,

$$\sigma = r_1 + 2 \in [4,\ s_1' + 2],$$

on peut appliquer à $u(t)$, $t \in [0,\ \theta\rho^2]$, le lemme 2.0 (i).

Ainsi, avec $\sigma \in [4, s_1' - 1]$ on a

$$\frac{\omega}{2^{\sigma+1}}\left|A_{\mu_1-\frac{\omega}{2^{\sigma+1}}}(x_0,\ \rho\,;\ t)\right| \leqslant \beta_0\rho \int_{\mathfrak{D}_\sigma(t)} |\nabla u(x,\ t)|\, dx \tag{2.74}$$

où

$$\mathcal{D}_\sigma(t) = A_{\mu_1 - \frac{\omega}{2^\sigma}}(x_0, \rho; t) - A_{\mu_1 - \frac{\omega}{2^{\sigma+1}}}(x_0, \rho; t), \quad \forall t \in [0, \theta\rho^2]$$

D'autre part, on a par (2.29), avec $R = 2\rho$ et $k = \mu_1 - \dfrac{\omega}{2^\sigma}$,

$$\int_0^{\theta\rho^2} \int_{\mathcal{D}_\sigma(t)} |\nabla u|^2 \, dx \, dt \leqslant \left| u^{\left(\mu_1 - \frac{\omega}{2^\sigma}\right)} \right|^2_{\Lambda(x_0, \rho; 0, \theta\rho^2)}$$

$$\leqslant c \left\{ \rho^{-2} \left(\mu_1 - \mu_1 + \frac{\omega}{2^\sigma} \right)^2 \chi_N (2\rho)^N \theta \rho^2 + [[\chi_N (2\rho)^N]^{r/q} \theta \rho^2]^{2/r(1+\chi)} \right\}$$

(puisque $u^{(k)}(x, 0) =$ en $\Omega(x_0, 2\rho)$ par (2.71)).

En raisonnant comme dans la première partie de la démonstration du lemme 2.3 on arrive à

$$(2.75) \quad (s_1' - 4) \left| Q_{\mu_1 - \frac{\omega}{2^{s_1'}}}(x_0, \rho; \; 0, \theta\rho^2) \right|^2 \leqslant \bar{c}' \rho^{2(N+2)}$$

ce qui donne, par (2.68)

$$(2.76) \quad \left| Q_{\mu_1 - \frac{\omega}{2^{s_1'}}}(x_0, \rho; \; 0, \theta\rho^2) \right| \leqslant \theta_1' \rho^{N+2}.$$

La démonstration suit comme dans le cas cité avec application du lemme 2.2′, (i), pour $k = \mu_1 - \dfrac{\omega}{2^{s_1'}}$ à la place du lemme 2.2, (ii).

Donc on a (2.66).

Finalement si (2.72) est vérifié la démonstration se fait d'une matière analogue et nous nous dispensons de l'indiquer.

Revenons maintenant au cas $N = 1$. D'une façon parallèle à celle employée dans le § 7 du chapitre II de [6] on peut adapter à ce cas la théorie développée dans cette sous-section. Ainsi, en choisissant, par exemple, $\rho_0' = \min\left(1, \dfrac{|\Omega|}{2}\right)$, on obtient encore les lemmes 2.3 et 2.3′ pour $N = 1$.

Dans la suite on supposera donc $N \geqslant 1$.

2.3. Démonstration du théorème II.

Soit $(x_0, t_0) \in \bar{\Lambda}$. Posons

$$(2.77) \quad \rho_1(x_0, t_0) = \min\left(\rho_0(x_0), \sqrt{\frac{t_0}{\theta}}\right), \qquad \text{si} \quad t_0 > 0.$$

Les lemmes 2.3 et 2.3′ entraînent, compte tenu du lemme 5.8 du chapitre II de [6], les deux lemmes suivants :

LEMME 2.4. — *Soit* $(x_0, t_0) \in \overline{\Lambda}$ *avec* $t_0 > 0$ *et soit*

$$\rho \leqslant \rho_1(x_0, t_0).$$

Alors on a

$$\text{osc.}\,(u;\ \Lambda(x_0, \rho\,;\ t_0 - \theta\rho^2, t_0)) \leqslant c\rho_1^{-\delta}\rho^{\delta}$$

où

$$\delta = \min\left(-\log_4\left(1 - \frac{1}{2^{s_1+1}}\right), \frac{N\chi}{2}\right).$$

$$c = 4^{\delta}\max\left(\omega_0, 2^{s_1+\frac{N\chi}{2}}\rho_1^{\frac{N\chi}{2}}\right)$$

$$\omega_0 = \text{osc.}\,(u;\ \Lambda(x_0, \rho_1;\ t_0 - \theta\rho_1^2, t_0)).$$

LEMME 2.4′. — *Supposons* $u_0 \in \mathbf{K} \cap C^{0,\lambda}(\overline{\Omega})$, $\lambda \in \left]0, 1\right]$ *avec* $[u_0]_{\lambda,\Omega} \leqslant 1$. *Soient* $x_0 \in \overline{\Omega}$ *et* $\rho \leqslant \rho_0(x_0)$. *Alors on a*

$$\text{osc.}\,(u;\ \Lambda(x_0, \rho\,;\ 0, \theta\rho^2)) \leqslant c'\rho_0^{-\beta}\rho^{\beta}$$

où

$$\beta = \min\left(-\log_4\left(1 - \frac{1}{2^{s_1'+1}}\right), \gamma\right), \quad \gamma = \min\left(\lambda, \frac{N\chi}{2}\right),$$

$$c' = 4^{\beta}\max\left(\overline{\omega}_0,\ 2^{s_1'+1+\gamma}\rho_0^{\gamma}\right),$$

$$\overline{\omega}_0 = \text{osc.}\,(u;\ \Lambda(x_0, \rho\,;\ 0, \theta\rho_0^2)).$$

Donc, avec

$$c = c(N, \Omega, T, a, \overline{a}, p, s, \lambda)$$

$$\alpha = \min(\delta, \beta) = \alpha(N, \Omega, T, a, \overline{a}, p, s, \lambda) \quad \text{on a :}$$

THÉORÈME 2.5. — *Supposons* $u_0 \in \mathbf{K} \cap C^{0,\lambda}(\overline{\Omega})$, $\lambda \in \left]0, 1\right]$ *avec* $[u_0]_{\lambda,\Omega} \leqslant 1$. Alors

$$\text{(2.78)}\quad \text{osc.}\,(u;\ \Lambda(x_0, \rho\,;\ t_0 - \theta\rho^2, t_0)) \leqslant c\max\left(\frac{\omega_0}{\rho_1^{\alpha}}, 1\right)\rho^{\alpha}$$

$$\forall\rho \leqslant \rho_1(x_0, t_0) \qquad si \qquad (x_0, t_0) \in \overline{\Lambda} \qquad et \qquad t_0 > 0,$$

$$\text{(2.79)}\quad \text{osc.}\,(u;\ \Lambda(x_0, \rho\,;\ 0, \theta\rho^2)) \leqslant c\max\left(\frac{\overline{\omega}_0}{\rho_0^{\alpha}}, 1\right)\rho^{\alpha}$$

$$\forall\rho \leqslant \rho_0(x_0) \qquad si \qquad x_0 \in \overline{\Omega}.$$

Sous les hypothèses du théorème 2.5 on a alors

COROLLAIRE 2.6. — *Si* $(x_0, t_0) \in \overline{\Lambda}$ *et* $t_0 \geqslant \theta\rho_0'^2$ *on a*

$$(2.80) \quad \text{osc.}\,(u;\ \Lambda(x_0,\ \rho;\ t_0 - \theta\rho^2,\ t_0)) \leqslant c\rho^\alpha, \qquad \forall \rho \leqslant \rho_0'$$

Si $x_0 \in \overline{\Omega}$ *on a*

$$(2.81) \quad \text{osc.}\,(u;\ \Lambda(x_0,\ \rho;\ 0,\ \theta\rho^2)) \leqslant c\rho^\alpha, \qquad \forall \rho \leqslant \rho_0'.$$

Démonstration. — Commençons par établir (2.80).

Si $x_0 \in \Gamma$ ou dist $(x_0, \Gamma) \geqslant \rho_0'$, (2.80) est une conséquence immédiate de (2.76). Supposons donc $x_0 \in \Omega$ et

$$\text{dist.}(x_0,\ \Gamma) = \rho_0(x_0) < \rho_0'.$$

Soit $y \in \Gamma$ tel que $\rho_0(x_0) = \text{dist.}(x_0,\ y)$. Alors ou

$$\text{(i)} \qquad \rho_0(x_0) < \rho_0'/2$$

ou

$$\text{(ii)} \qquad \rho_0(x_0) \geqslant \rho_0'/2$$

Dans l'hypothèse (i) distinguons les trois cas :

$$\text{(i.1)} \qquad 0 < \rho < \rho_0(x_0) < \rho_0'/2$$

$$\text{(i.2)} \qquad 0 < \rho_0(x_0) \leqslant \rho < \rho_0'/2$$

$$\text{(i.3)} \qquad \rho_0'/2 \leqslant \rho < \rho_0'$$

Cas (i.1) :

On a, par (2.78),

$$\begin{aligned}(2.82) \quad & \text{osc.}\,(u;\ \Lambda(x_0,\ \rho_0;\ t_0 - \theta\rho_0^2,\ t_0)) \\ & \leqslant \text{osc.}\,(u;\ \Lambda(y,\ 2\rho_0;\ t_0 - \theta(2\rho_0)^2,\ t_0) \\ & \leqslant c \max\left(\frac{\text{osc.}\,(u;\ \Lambda(y,\ \rho_0';\ t_0 - \theta\rho_0'^2,\ t_0))}{\rho_0'^\alpha},\ 1\right)(2\rho_0)^\alpha \\ & \leqslant c\rho_0^\alpha\end{aligned}$$

(où c désigne une constante du type cité dans le théorème 2.5).

D'autre part, il vient aussi de (2.78),

$$\begin{aligned}(2.83) \quad & \text{osc.}\,(u;\ \Lambda(x_0,\ \rho;\ t_0 - \theta\rho^2,\ t_0)) \\ & \leqslant c \max\left(\frac{\text{osc.}\,(u;\Lambda(x_0,\rho_0;t_0 - \theta\rho_0^2, t_0)}{\rho_0^\alpha},\ 1\right)\rho^\alpha\end{aligned}$$

De (2.82) et (2.83) on en déduit (2.80).
Cas (i.2) :
Par (2.78) il vient

$$\begin{aligned}\text{osc.}\,(u;\ \Lambda(x_0,\ \rho\,;\ t_0-\theta\rho^2,\ t_0))&\\ &\leqslant \operatorname{osc}(u;\ \Lambda(y,\ 2\rho\,;\ t_0-\theta(2\rho)^2,\ t_0))\\ &\leqslant c(2\rho)^\alpha, \qquad \text{ce qui entraîne} \qquad (2.80).\end{aligned}$$

Cas (i.3) :
(2.80) est immédiatement vérifiée, puisque, dans ce cas,

$$\operatorname{osc}(u;\ \Lambda(x_0,\ \rho\,;\ t_0-\theta\rho^2,\ t_0)) \leqslant 2 \leqslant 2\left(\frac{\rho}{\rho_0'/2}\right)^\alpha \leqslant c\rho^\alpha$$

Dans l'hypothèse (ii) distinguons deux cas :

(ii.1) $\qquad \rho \geqslant \rho_0(x_0)$

(ii.2) $\qquad \rho < \rho_0(x_0)$

Dans le cas (ii.1) il vient $\rho \geqslant \rho_0'/2$ et donc (2.8) est immédiate. Dans le cas (ii.2) il vient de (2.78)

$$\operatorname{osc}(u;\ \Lambda(x_0,\ \rho\,;\ t_0-\theta\rho^2,\ t_0)) \leqslant c\max\left(\frac{2}{\rho_0^\alpha},\ 1\right)\rho^\alpha$$

ce qui entraîne (2.80), puisque $\rho_0(x_0) \geqslant \dfrac{\rho_0'}{2}$.

La démonstration de (2.81) se fait d'une façon analogue en utilisant (2.79) à la place de (2.78).

Corollaire 2.7. — *Si* $(x_0,\ t_0) \in \overline{\Lambda}$ *et* $0 < t_0 \leqslant \theta\rho_0^2(x_0)$ *alors on a* (2.80).

Démonstration. — L'hypothèse de l'énoncé entraîne

$$\rho_1(x_0,\ t_0) = \sqrt{\frac{t_0}{\theta}}, \quad \text{i.e.,} \qquad t_0 = \theta\rho_1^2.$$

Distinguons les deux cas

(i) $\qquad 0 < \rho < \rho_1 \leqslant \rho_0'$

(ii) $\qquad 0 < \rho_1 \leqslant \rho \leqslant \rho_0'$

Voyons le cas (i) :
Par (2.81) il vient

$$(2.84)\quad \text{osc.}\,(u;\ \Lambda(x_0,\ \rho_1;\ t_0-\theta\rho_1^2,\ t_0)) \\ = \text{osc.}\,(u;\ \Lambda(x_0,\ \rho_1;\ 0,\ \theta\rho_1^2)) \leqslant c\rho_1^\alpha$$

Mais, de (2.78) il vient

$$(2.85)\quad \text{osc.}\,(u;\ \Lambda(x_0,\ \rho;\ t_0-\theta\rho^2,\ t_0)) \\ \leqslant c\max\left(\frac{\text{osc}\,(u;\ \Lambda(x_0,\ \rho_1;\ t_0-\theta\rho_1^2,\ t_0))}{\rho_1^\alpha},\ 1\right)\rho^\alpha$$

De (2.84) et (2.85) on obtient (2.80).
Voyons maintenant le cas (ii) :
Par (2.81) il vient

$$\text{osc}\,(u;\ \Lambda(x_0,\ \rho;\ t_0-\theta\rho^2,\ t_0)) \leqslant \text{osc}\,(u;\ \Lambda(x_0,\ \rho;\ 0,\ \theta\rho^2)) \leqslant c\rho^\alpha.$$

Corollaire 2.8. — *Si* $(x_0,\ t_0)\in\overline{\Lambda}$ *et* $\theta\rho_0^2(x_0) < t_0 < \theta\rho_0'^2$ *alors on a* (2.80).

La démonstration du corollaire 2.8 est analogue à celle du corollaire 2.6 pourvu qu'on utilise le corollaire 2.7 pour majorer l'oscillation dans les cylindres dont l'axe passe par le point $y(y\in\Gamma,\ \text{dist}\,(x_0,\ y)=\rho_0(x_0))$.

Ainsi sous les hypothèses du théorème 2.5 on a

$$(2.86)\qquad \text{osc}\,(u;\ \Lambda(x_0,\ \rho;\ t_0-\theta\rho^2,\ t_0)) \leqslant c\rho^\alpha, \\ \forall(x_0,\ t_0)\in\overline{\Lambda},\qquad \forall\rho\leqslant\rho_0'$$

Soient $(x,\ t)$, $(x',\ t')\in\Lambda$. Supposons d'abord

$$\max\left[|x-x'|,\left(\frac{|t-t'|}{\theta}\right)^{1/2}\right] < \rho_0'.$$

Il vient de (2.86)

$$|u(x,\ t)-u(x',\ t')| \leqslant c\max\left[|x-x'|,\ \left(\frac{|t-t'|}{\theta}\right)^{1/2}\right]^\alpha \\ \leqslant c\,(|x-x'|^\alpha+|t-t'|^{\alpha/2}).$$

Supposons maintenant

$$\max\left[|x-x'|,\left(\frac{|t-t'|}{\theta}\right)^{1/2}\right] \geqslant \rho_0'.$$

Il vient

$$|u(x,\ t)-u(x',\ t')| \leqslant 2\rho_0'^{-\alpha}\max\left[|x-x'|,\left(\frac{|t-t'|}{\theta}\right)^{1/2}\right]^\alpha \\ \leqslant c\,(|x-x'|^\alpha+|t-t'|^{\alpha/2}).$$

Donc, on a

$$u \in C^{0,\alpha,\alpha/2}(\overline{\Lambda}), \qquad \alpha \in]0, \lambda]$$

et, de plus,

$$[u]_{\alpha,\alpha/2,\Lambda} \leqslant c,$$

où c et α ne dépendent que de N, Ω, T, a, $\bar{a}$, p, s et λ.

Pour achever la démonstration du théorème II nous allons maintenant nous débarrasser des hypothèses (2.20) et

$$[u_0]_{\lambda,\Omega} \leqslant 1.$$

Soit alors

$$\omega = [u_0]_{\lambda,\Omega} + \|u\|_{\infty,\Lambda} + \|\Phi\|^{1/2}_{p,s,\Lambda} > 0$$

et posons

$$\tilde{u} = \omega^{-1}u, \quad \tilde{B}_k(x, t, y, z) = \omega^{-1}B_k(x, t, \omega y, \omega z), \quad k = 0, 1, \ldots, N.$$

Puisque $\mathbf{K} = \omega\,\mathbf{K}$ il est aisé de voir que $\tilde{u}$ vérifie (0.13), (i) avec les B_k remplacés par les $\tilde{B}_k$.

De plus, on a, compte tenu de (2.4), et avec

$$\tilde{f}_1 = \omega^{-2}f_1, \qquad \tilde{g}_1 = \omega^{-1}g_1, \qquad \tilde{h}_1 = \omega^{-1}h_1 :$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{N} \tilde{B}_i(x, t, \tilde{u}, \nabla\tilde{u}).D_i\tilde{u}(x, t) \geqslant a|\nabla\tilde{u}(x, t)|^2 - \tilde{f}_1(x, t) \\ |\tilde{B}_0(x, t, \tilde{u}, \nabla\tilde{u})| \leqslant d(x, t)|\nabla\tilde{u}(x, t)| + \tilde{g}_1(x, t) \\ |\tilde{B}_i(x, t, \tilde{u}, \nabla\tilde{u})| \leqslant \bar{a}|\nabla\tilde{u}(x, t)| + \tilde{h}_1(x, t), \qquad i = 1, \ldots, N, \\ \qquad\qquad \text{pour presque tout} \quad (x, t) \in \Lambda. \end{cases}$$

Soit $\quad \tilde{\Phi} = \tilde{f}_1 + \|\tilde{u}\|_{\infty,\Lambda}\tilde{g}_1 + \|\tilde{u}\|^2_{\infty,\Lambda}d^2 + \tilde{h}_1^2 = \omega^{-2}\Phi$

Il vient

$$\tilde{u}_0(x) = \tilde{u}(x, 0) \in \mathbf{K} \cap C^{0,\lambda}(\overline{\Omega}) \text{ et } \max([\tilde{u}_0]_{\lambda,\Omega}, \|\tilde{u}\|_{\infty,\Lambda}, \|\tilde{\Phi}\|_{p,s,\Lambda}) \leqslant 1.$$

On en déduit, appliquant à $\tilde{u}$ la théorie antérieure :

$$\begin{cases} \tilde{u} \in C^{0,\alpha,\alpha/2}(\overline{\Lambda}), \ \alpha \in]0, \lambda] \quad \text{et} \quad [\tilde{u}]_{\alpha,\alpha/2,\Lambda} \leqslant c, \\ \text{où } \alpha \text{ et } c \text{ dépendent de } N, \Omega, T, a, \bar{a}, p, s \text{ et } \lambda. \end{cases}$$

Donc, on a $u \in C^{0,\alpha,\alpha/2}(\overline{\Lambda})$ et

$$[u]_{\alpha,\alpha/2,\Lambda} \leqslant c.\omega = c([u_0]_{\lambda,\Omega} + \|u\|_{\infty,\Lambda} + \|\Phi\|^{1/2}_{p,s,\Lambda})$$

ce qui entraîne (0.14), compte tenu de (2.2) et (0.7).

La démonstration du théorème II est ainsi complètement achevée.

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. Beirão da Veiga, Sur la régularité des solutions de l'équation div $A(x, u, \nabla u) = B(x, u, \nabla u)$ avec des conditions aux limites unilatérales et mêlées, à paraître dans les Annali Mat. Pura Appl.

[2] H. Beirão da Veiga et J. P. Dias, Continuité des solutions d'une inéquation parabolique, *C.R. Acad. Sc. Paris*, 274 (1972), 192-193.

[3] H. Brézis, Problèmes unilatéraux, à paraître dans le J. Math. Pures Appl.

[4] E. de Giorgi, Sulla differenziabilita e l'analiticita delle estremali degli integrali multiple regolari, *Mem. Acc. Sci. Torino*, 3 (1957), 25-43.

[5] J. P. Dias, Une classe de problèmes variationnels non linéaires de type elliptique ou parabolique, à paraître dans les Annali. Mat. Pura Appl.

[6] O. A. Ladyženskaja, V. A. Solonnikov and N. N. Ural'ceva, « Linear and quasi-linear equations of parabolic type », *Transl. Math. Monographs, Am. Math. Soc.*, 1968.

[7] J. L. Lions, Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires, Dunod et Gauthier-Villars, Paris, 1969.

[8] J. L. Lions and G. Stampacchia, Variational inequalities, *Comm. Pure Appl. Math.*, 20 (1967), 493-519.

[9] J. Nash, Continuity of the solutions of parabolic and elliptic equations, *Am. J. Math.*, 80 (1958), 931-954.

Manuscrit reçu le 22 février 1972
accepté par M. Brelot

Hugo Beirão da Veiga
et João-Paulo Dias,

Instituto de Fisica e Matemàtica,
Av. Gama Pinto, 2,
Lisboa, 4 (Portugal).